

具有表面张力的流体与运动固体耦合仿真方法

王锋, 吕梦雅, 孙梦梦, 张健, 唐勇, 赵静*

¹⁾ (燕山大学信息科学与工程学院 秦皇岛 066004)

²⁾ (河北省计算机虚拟技术与系统集成重点实验室 秦皇岛 066004)

³⁾ (河北省软件工程重点实验室 秦皇岛 066004)

(zhaojing@ysu.edu.cn)

摘要: 为了提高固液耦合的真实性, 提出一种基于物质点法的具有表面张力的流体与运动固体的交互方法. 首先使用物质点法仿真框架进行流体仿真, 在构建水平集隐式表面并重采样流体表面粒子之后使用连续表面力模型进行流体表面张力的计算; 然后通过网格标记定位流体的自由表面与固液接触面, 使表面张力计算更加准确; 最后使用不同的背景网格分别存储流体和固体的速度场, 使用冲量进行碰撞计算, 以解决物质点法固液耦合时固有的黏附现象. 实验结果表明, 所提方法能够更真实地表现流体与运动固体耦合时的细节.

关键词: 表面张力; 固液耦合; 物质点法; 流体模拟

中图法分类号: TP391.41 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2024.20024

Coupling Simulation Method of Fluid and Moving Solid with Surface Tension

Wang Feng, Lyu Mengya, Sun Mengmeng, Zhang Jian, Tang Yong, and Zhao Jing*

¹⁾ (School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004)

²⁾ (The Key Laboratory for Computer Virtual Technology and System Integration of Hebei Province, Qinhuangdao 066004)

³⁾ (The Key Laboratory of Software Engineering of Hebei Province, Qinhuangdao 066004)

Abstract: In order to improve the authenticity of the solid-liquid coupling, an interaction method with surface tension is proposed for fluid with surface tension and moving solid based on the material point method. Firstly, the material point method is used to simulate the fluid. After constructing the implicit surface of the Level Set and resampling the surface particles of the fluid, the continuum surface force model is used to calculate the surface tension of the fluid. Secondly, the free surface of the fluid and the solid-liquid contact surface are located by grid marking to make surface tension calculation more accurate. Finally, different background meshes are used to store the velocity fields of fluid and solid respectively, and the impulse is used for collision calculation to solve the inherent adhesion phenomenon of solid-liquid coupling in the material point method. The experiments demonstrate that solid-fluid coupling method with surface tension can effectively show the details of the simulation.

Key words: surface tension; solid-liquid coupling; material point method; fluid simulation

收稿日期: 2022-10-24; 修回日期: 2023-07-05. 基金项目: 国家自然科学基金(61902340); 河北省自然科学基金(F2022203015); 河北省创新能力提升计划(22567626H). 王锋(1997—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为虚拟现实技术及其应用; 吕梦雅(1965—), 女, 博士, 教授, 硕士生导师, 主要研究方向为虚拟现实技术及其应用; 孙梦梦(1997—), 女, 博士研究生, 主要研究方向为虚拟现实技术及其应用; 张健(1998—), 男, 硕士, 主要研究方向为虚拟现实技术及其应用; 唐勇(1964—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 高级会员, 主要研究方向为虚拟现实技术及其应用; 赵静(1981—), 女, 博士, 副教授, 硕士生导师, CCF 会员, 论文通信作者, 主要研究方向为虚拟现实技术及其应用.

流体模拟作为计算机图形学领域的一个研究热点,对提升虚拟场景的真实性和使用者的沉浸感具有重要作用.流体的很多显著特征都是由表面张力引起的,同时流体的细节仿真越来越受到人们的关注,如水银落在地上保持球形、雨后露珠在植物叶子上的悬挂、有趣的红酒挂杯现象等.流体的表面张力是流体表现出很多微观特性的重要内因,受到流体仿真领域的广泛关注.

近年来,越来越多的人开始关注流体表面张力仿真,并取得了可观的成果.基于粒子的仿真方法,如光滑粒子流体动力学(smoothed particle hydrodynamics, SPH)通常使用核函数计算粒子间由表面张力引起的粒子间的相互作用力;网格法则计算流体表面的法向量和平均曲率,再通过表面张力计算模型来计算表面张力.然而,大部分研究者都只研究单纯流体的表面张力效应,忽视了流体与运动固体耦合时产生的现象.

在物质点法(material point method, MPM)中,由于固体粒子和流体粒子在同一背景网格交换信息,因此不同材料之间的动量交换可以自动实现;但 MPM 的自动耦合仅适用于非滑移边界条件,而流体与固体耦合时会出现明显的黏附现象.大部分研究者在处理此问题时是将固体与流体完全分离,忽略了流体在表面张力的作用下在固体表面产生的收缩效果.

针对上述问题,为了实现更加真实的、具有表面张力的流体与运动固体之间的耦合效果,本文使用连续表面力(continuum surface force, CSF)模型^[1]作为基础的表面张力计算模型,标记背景网格定位固液接触面和流体自由表面,更加准确地进行表面张力计算,增强仿真效果的真实性;使用不同背景网格分别模拟固体和流体,利用冲量进行固液接触面的碰撞处理,解决固液耦合时流体在固体表面的黏附现象,最终实现具有表面张力效应的流体与运动固体之间的耦合效果.

1 相关工作

1.1 表面张力计算

表面张力对自由表面流体来说非常重要.从欧拉视角来看,表面张力表示为不同相之间接触面的不连续压力;从拉格朗日视角看,表面张力可以看作表面粒子受到的作用力.表面张力的处理方式分为显式处理和隐式处理,显示求解表面张

力更高效,但是对时间步要求较大;隐式处理表面张力通常能保证更好的数值稳定性,但效率较低.

在隐式表面张力求解方面,Hyde 等^[2]提出一种隐式 MPM,用于模拟如液态金属的大表面张力流体;Chen 等^[3]提出一种基于平均曲率的欧拉流体框架,能够处理流体结构小于网格单元的流体表面张力;Chen 等^[4]在 Hyde 等^[2]的基础上修改了粒子采样方式,以更好地保证动量守恒,实现了流体的马拉高尼效应;Kang 等^[5]将虚拟流动方法扩展到处理不可压缩流体,其中添加了表面张力的影响,更加准确地模拟出了流体的液滴效果;Wang 等^[6]在投影步骤中将表面张力作为显示边界条件,并且使用水平集模拟水滴的接触角.

当表面张力效应主导场景时,如对气泡进行模拟,由于时间步长限制和表面张力瞬间变化产生的数值震荡,显式的表面张力计算会导致系统不够稳定.Zheng 等^[7]提出一种基于水平集的半隐式表面张力计算方法,利用流体表面速度场的散度作为流体的表面曲率,模拟更加真实的气泡;Sussman 等^[8]通过求解一个基于平均曲率的体积守恒方程,在不推导表面张力公式的情况下直接模拟流体表面张力.与基于网格的计算方法相比,拉格朗日表面张力计算通常将显式几何结构离散化.Da 等^[9]提出一种只模拟表面部分的仿真框架,将通用的三维流体求解器应用到表面网格.拉格朗日表面张力计算同样也可以隐式处理.Schroeder 等^[10]提出一种混合框架,在拉格朗日网格下计算隐式表面张力,并在背景网格上进行压力求解;Zheng 等^[11]提出一种基于粒子结构表面追踪方法的隐式表面张力计算方式;Ruan 等^[12]提出一种 3 项耦合方法,模拟强表面张力驱动下的固体和流体之间的相互作用.这些方法虽然很好地对流体表面张力进行仿真,但是均忽视了流体与运动固体耦合时产生的现象.

1.2 固液耦合

常用的固液耦合求解器通常使用欧拉法模拟流体,使用拉格朗日法模拟固体,它们之间的耦合使用固体速度作为流体的边界条件.Génevaux 等^[13]定位一个相互作用的接触面,并在接触面分别求解流体和固体;Guendelman 等^[14]采用与 Génevaux 等^[13]类似的方法,但使用预测的固体位置作为流体投影步骤的速度限制,这种弱耦合方法通常对精度和稳定性上有一定程度的限制,这些限制可以通过使用整体强耦合方式解决,即将流体和固体放

入同一个线性系统求解; Chentanez 等^[15]提出第 1 个完全隐式稳定的固体-流体双向耦合求解器, 将流体压力投影方程与形变体的速度更新方程整合到一个非对称的线性方程组; Batty 等^[16]提出一个正定对称的方程组, 通过使动能最小化求解流体与刚体的耦合; Robinson-Mosher 等^[17]使用代数变换进一步修改了 Batty 等^[16]提出的正定对称方程组; Robinson-Mosher 等^[18]使用拉格朗日乘子法将边界条件变为自由滑移边界, 只对法线方向进行限制; 在 Chentanez 等^[15]的基础上, Aanjaneya^[19]提出一种基于多重网格的不可压缩流体与刚体双向耦合求解器, 能够更加高效地求解固液耦合系统; Hyde 等^[20]提出一种数值方法, 能够处理流体部分小于计算网格的固液耦合仿真。

1.3 MPM 固液耦合处理

MPM 由 Stomakhin 等^[21]首次引入到图形学领域, 能够自动支持基于网格的碰撞处理以及双向耦合交互, 但由于固体和流体共用同一速度场, 在碰撞接触面有一个无滑移边界条件, 固液耦合时会不可避免地出现黏附现象; Fei 等^[22]在单独的速度网格使用各向异性的阻力, 实现了更加灵活的流体-布料交互; Yan 等^[23]的方法对每种材料使用不同的网格来实现自由滑移边界条件, 使法向速度保持连续, 实现碰撞接触面的滑移边界条件; Han 等^[24]使用 MPM 真实地模拟了发丝, 并使用冲量计算处理弹性体与颗粒状物质之间的碰撞问题, 但该方法并不适用于处理固液耦合; Fang 等^[25]通过求解固液强耦合控制方程的弱形式, 实现无黏性的非线性弹性固体和不可压缩流体双向耦合, 但仿真结果中流体与固体完全分离, 忽略了在表面张力作用下流体表面产生的收缩现象。

2 构建具有表面张力的固液耦合模型

2.1 构建 CSF 模型

在 CSF 模型框架下, 可以很容易地实现流体与边界接触界面的壁面黏附效果。为了实现具有表面张力效应的固液耦合, 选择 CSF 模型作为流体表面张力计算模型, 其计算形式为

$$\mathbf{F} = \alpha \kappa \mathbf{n} + \nabla_s \alpha.$$

其中, α 表示表面张力系数; κ 表示界面的平均曲率; $\mathbf{n}$ 表示表面处的单位法向量; ∇_s 表示表面梯度。该方程中, 第 1 部分作用于法线方向, 通过局部曲率产生影响流体表面面积变化的力; 第 2 部分作用于表面切向方向, 使流体粒子从低表面张力

的位置流向高表面张力的位置。如果表面张力系数为常数, 则切向分量为 0。

2.2 构建流体与固体的控制方程

为了描述流体的运动, 保证流体的动量和质量守恒, 流体控制方程的欧拉形式表示为

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}.$$

其中, ρ 表示材料的密度; $\mathbf{v}$ 表示模拟材料的速度; $\boldsymbol{\sigma}$ 表示柯西应力; $\mathbf{g}$ 表示重力加速度。

对于固体, 使用能量密度函数计算出每部分材料的能量, 通过积分每部分材料携带的势能得出整个材料的势能。

通过映射函数, 可以得出形变梯度表达式为

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}, t), \text{ 用于量化材料局部的变形量.}$$

使用 $J = \det(\mathbf{F})$ 能够得到形变梯度行列式的值, J 的值可以表示一个材料点的体积变化量。每部分材料应力根据超弹性物体的能量密度函数定义, 其表达式为 $\mathbf{P} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}}$; 其中, ψ 表示能量密度函数。

采用修正的共旋本构模型^[26]进行能量计算, 其表达式为

$$\psi(\mathbf{F}) = \mu \sum_i (\sigma_i - 1)^2 + \frac{\lambda}{2} (J - 1)^2;$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{F}) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} = 2\mu(\mathbf{F} - \mathbf{R}) + \lambda(J - 1)J\mathbf{F}^{-T}.$$

其中, $\mathbf{F}$ 表示形变梯度; J 表示形变梯度行列式的值; λ 和 μ 为拉梅参数, 表示材料对发生形变以及体积变化的阻力; σ_i 表示形变梯度 $\mathbf{F}$ 的特征值, 通过对形变梯度 $\mathbf{F}$ 进行 SVD 分解得出。

3 流体表面张力计算与 MPM 仿真

3.1 表面粒子重采样

直接在流体边界粒子处进行表面张力计算会导致系统动量不守恒, 为了更好地保证流体的质量守恒与动量守恒, 流体的表面张力是在重采样表面粒子上进行计算的, 由于其无质量的特性, 因此这种重采样的表面粒子不会影响流体的质量和动量守恒。由于不同的水平集可以相互结合, 因此在每个流体粒子周围都创建一个球形的隐式水平集表面, 并将每个球形的隐式表面相结合, 形成一个代表整个模拟区域的符号距离场 ϕ , $\phi=0$ 部分即表示流体表面。与 Hyde 等^[2]的方法不同, 本文不使用拉普拉斯算子去平滑生成的隐式水平集表

面,而是通过 Marching Cube 方法^[27]将隐式表面转化为显式表面,进而将显示表面离散化为表面粒子,该过程如图 1 所示.其中,左侧表示 MPM 模拟区域,右侧为结合每个 MPM 粒子球形水平集而生成流体的区域符号距离场 φ ,使用 φ 生成显式表面,并离散为表面粒子.

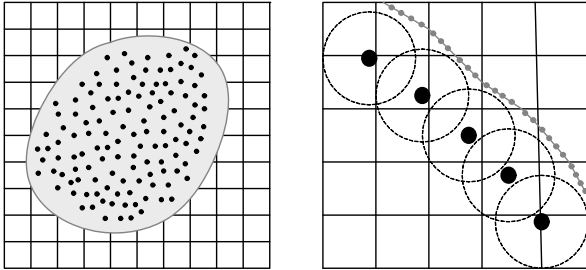


图 1 表面粒子重采样过程

与 Chen 等^[4]的方法相同,本文采用稳健泊松分布的蒙特卡罗三角形采样方法^[28],以更好地覆盖边界而不会产生距离太近的表面粒子,并将其记为 q .

3.2 表面张力计算

大部分研究者^[2,4]在研究 MPM 模拟流体表面张力时,虽然实现了流体的表面张力效果,但是都忽略了流体与运动固体耦合时产生的现象,均只模拟纯流体并对所有流体表面进行表面张力计算,或者只添加固定的固体作为简单的边界条件.与这些方法不同,本文方法在固液接触面进行更加精确的计算,定位区分流体的自由表面和固液接触面,实现更加真实的仿真效果,并支持流体与运动固体之间的耦合.

在重采样的表面粒子上,使用 CSF 模型计算流体的表面张力.符号距离场的梯度场可以作为流体法向量场,符号距离场的拉普拉斯算子场可以作为流体曲率场.

流体的表面张力计算过程如图 2 所示.在表面粒子处计算表面张力之后,将计算出的表面张力通过插值函数传输到背景网格;在网格求解之后,将计算出的速度从背景网格传输到表面流体粒子.

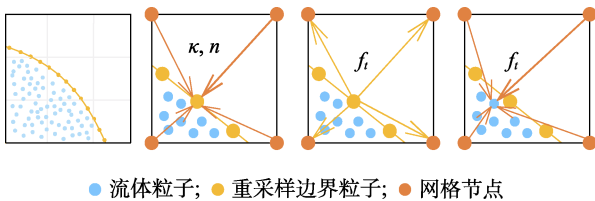


图 2 流体表面张力计算过程

背景网格标记结果如图 3 所示.其中,左图表示有自由滑动边界条件的固液耦合系统;右图中的黄色标记网格为表面张力计算网格,计算表面张力时只针对自由表面网格,忽略固液接触面的网格.

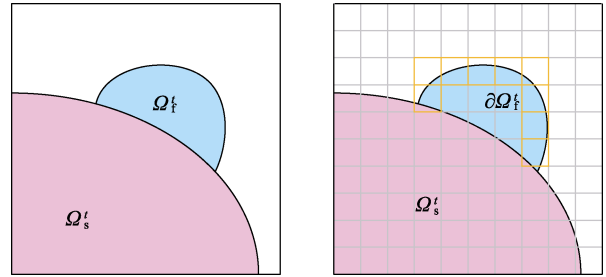


图 3 流体自由表面网格标记

使用笛卡儿网格存储符号距离场 φ ,并计算出模拟区域网格节点上的曲率场 $\kappa = \nabla \cdot \varphi$ 和法向量场 $\mathbf{n} = \nabla \varphi$;使用双线性插值函数 $\delta(\mathbf{x})$ 计算重采样表面粒子位置的法向量以及曲率.图 3 中, Ω_f^t 表示流体部分, Ω_s^t 表示固体部分, $\partial \Omega_f^t$ 表示在时间 t 流体自由表面或受表面张力影响的流体部分.则表面粒子的表面张力可以表示为

$$\mathbf{f}_{i,q}^n = \alpha \delta_i(\mathbf{x}_q^n) \kappa_i^n \delta_i(\mathbf{x}_q^n) \mathbf{n}_i^n, \mathbf{x}_q^n \in \partial \Omega_f^t.$$

3.3 添加表面张力的 MPM 仿真

MPM 兼具拉格朗日和欧拉算法的优势,非常适合模拟弹性物体和流体,因此使用 MPM 框架进行流体仿真,并使用仿射粒子-网格法(affine particle-in-cell, APIC)方法^[29]进行离散化.

使用 $N_i(\mathbf{x})$ 表示网格节点 i 处的插值函数,将粒子和背景网格通过插值函数 $N_i(\mathbf{x})$ 关联,它决定了粒子和网格之间相互作用的强度.粒子和网格之间距离越近,权重越大;距离越远,权重越小.

采用 B 样条插值函数进行插值计算,插值函数的表达式为

$$N(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{3}{4} - |\mathbf{x}|^2, & 0 \leq |\mathbf{x}| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - |\mathbf{x}|^2 \right), & \frac{1}{2} \leq |\mathbf{x}| < \frac{3}{2} \\ 0, & \frac{3}{2} \leq |\mathbf{x}| \end{cases}$$

3.3.1 粒子到网格的信息传输

由于 MPM 算法的求解是在背景网格上进行的,因此需要将粒子上的物理量传输到背景网格再进行求解.使用标准的 APIC 映射方式将动量和质量从粒子传输到背景网格,下标 p 和 q 分别表

示 MPM 粒子以及重采样表面粒子, 下标 i 表示背景网格, 上标 n 表示时间步. 在 MPM 粒子上存储形变梯度 $\mathbf{F}_p^n$, 形变梯度行列式的值为 J_p^n , 速度为 $\mathbf{v}_p^n$, 仿射速度为 $\mathbf{C}_p^n$, 质量为 m_p^n . 表面粒子在每个时间步的开始创建, 在时间步结束时移除. 其映射过程表达式为

$$m_i^n = \sum_p m_p N_i(\mathbf{x}_p^n),$$

$$m_i^n \mathbf{v}_i^n = \sum_p m_p N_i(\mathbf{x}_p^n) (\mathbf{v}_p^n + \mathbf{C}_p^n (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_p^n)).$$

之后, 使用 B 样条插值函数将表面粒子处计算的表面张力传输到背景网格, 表面张力传输方程为 $\mathbf{f}_{t,i}^n = \sum_q N_i(\mathbf{x}_q^n) \mathbf{f}_{t,q}^n$.

3.3.2 网格上的求解

为了求解出模拟区域中每部分材料的受力情况, 需要在背景网格上进行求解. 使用能量密度函数模拟材料的总势能, 对所有 MPM 粒子的能量进行积分得 $e = \sum_p V_p^t \psi(\mathbf{F})$. 其中, V_p^t 表示材料的体积. 由于材料的弹性力为材料在其位置总势能的负梯度, 因此可以在背景网格中计算出材料的所有受力为

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_{t,i}^n + m\mathbf{g} - \frac{\partial e}{\partial \mathbf{x}_i}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_{t,i}^n + m\mathbf{g} - \sum_p V_p^n \left(\frac{\partial \psi_p}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}_p^n(\mathbf{x})) \right) (\mathbf{F}_p^n)^T \nabla N_i(\mathbf{x}_p^n).$$

由动量定理可知, 网格节点上动量变化为

$$m_i^n (\mathbf{v}_i^{n+1} - \mathbf{v}_i^n) = \mathbf{f}_i \Delta t.$$

3.3.3 网格到粒子的信息传输

为了更新粒子的速度和位置, 在更新网格的速度之后, 需要将新的物理信息传输回 MPM 粒子. 同样使用 APIC 的传输方式将网格上的速度传输回 MPM 粒子, 并更新粒子的仿射速度. 其映射过程表达式为

$$\mathbf{v}_p^{n+1} = \sum_i N_i(\mathbf{x}_p^n) \mathbf{v}_i^{n+1},$$

$$\mathbf{C}_p^{n+1} = \frac{4}{\Delta x^2} \sum_i N_i(\mathbf{x}_p^n) \mathbf{v}_i^{n+1} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_p^n)^T.$$

4 固液交界处黏附现象处理

使用传统 MPM 进行物理仿真时, 流体和固体

共用同一背景网格存储速度场来整合节点的运动, 之后自动地处理固体和流体之间的碰撞, 因此固液接触部分的流体和固体速度相同, 会不可避免地出现黏附现象. 本文借鉴 Han 等^[24]的方法处理固液耦合, 使用不同的网格表示固体和流体, 分别求解它们的速度; 在固液交界处引入冲量计算处理碰撞问题. 但是此方法针对的是颗粒状物质与固体的碰撞, 当处理固液耦合时, 若流体与固体法线方向速度不一致, 则会导致流体在接触面与固体分离, 因此并不适用于固液耦合. 与 Han 等^[24]的方法不同, 由于本文处理固液交互时表现为流体在固体上的流动, 流体与固体在接触面部分保持法向速度相同, 因此可避免流体由于冲量计算被弹开. 处理流体与固体的碰撞时, 首先计算流体相对于固体的速度 $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_{i,s}^n - \mathbf{v}_{i,f}^n$; 然后使用生成的符号距离场的梯度场计算出流体表面法向量 $\mathbf{n}_{i,f} = \nabla \phi_f$, 并计算流体相对于固体表面的切向速度 $\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}_{i,f}^n \mathbf{n}_{i,f}^n$. 固液耦合时的网格冲量计算公式为 $I_i = \max \left(\frac{m_{i,f}^n m_{i,s}^n}{m_{i,f}^n + m_{i,s}^n} \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}_{i,f}^n, 0 \right)$.

为了表现流体不会在冲量的作用下与固体分离, 且保证流体在固体上的流动效果, 应使流体与固体在接触部分保证法线方向速度相同, 并将发生碰撞之后的速度修正为相对速度切线方向上的速度. 在切线方向使用库伦定律计算摩擦力, 动摩擦系数记为 μ , 当在接触面施加冲量效应时, 库伦摩擦允许切向速度变化的最大值为 $-\mu I_f / m_f$. 因此, 固液接触之后, 速度分别为

$$\mathbf{v}_{i,f}^{n+1} = \mathbf{v}_{i,f}^n - \mathbf{v}_r \mathbf{n}_{i,f} \cdot \mathbf{n}_{i,f} - \min \left(\frac{\mu I_i}{m_{i,f}^n}, \|\mathbf{v}_t\| \right) \frac{\mathbf{v}_t}{\|\mathbf{v}_t\|},$$

$$\mathbf{v}_{i,s}^{n+1} = \mathbf{v}_{i,s}^n + \frac{I_i \mathbf{n}_i}{m_{i,s}^n} + \min \left(\frac{\mu I_i}{m_{i,s}^n}, \|\mathbf{v}_t\| \right) \frac{\mathbf{v}_t}{\|\mathbf{v}_t\|}.$$

5 实验及结果分析

本文实验均在 Windows10 操作系统下进行, 实验平台为 Intel(R) Core(TM) i7-10750H @2.60 GHz CPU, NVIDIA GeForce RTX 2060 GPU; 所有代码均使用 Taichi 编程语言编写. 实验中, 如果没有特殊说明, MPM 背景网格的分辨率为 $128 \times 128 \times 128$, 流体和固体的杨氏模量为 1×10^3 , 固体的泊松比为 0.2, 时间步长为 1×10^{-4} s.

5.1 表面张力效应验证

为了验证表面张力计算方法的可行性, 设置一个没有重力的场景, 观察流体在仅有表面张力效应下的几何结构变化, 结果如图 4 所示. 其中, 流体的初始形态设置为边长为 0.1 的正方体, 流体的表面张力系数为 1×10^{-2} , 流体的粒子数为 3×10^5 . 可以看出, 在无重力环境下, 当只有表面张力效应产生作用时, 流体由正方体逐渐变为球形. 该实验展示了初始形态为正方体的在表面张力效应下变为球体的过程.

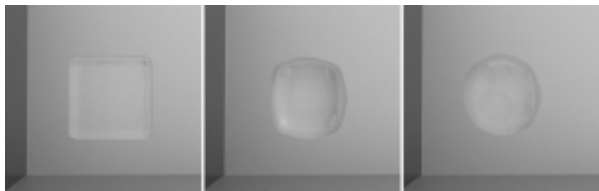
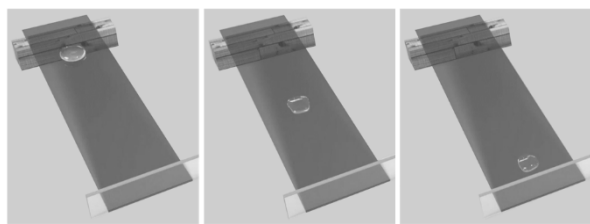


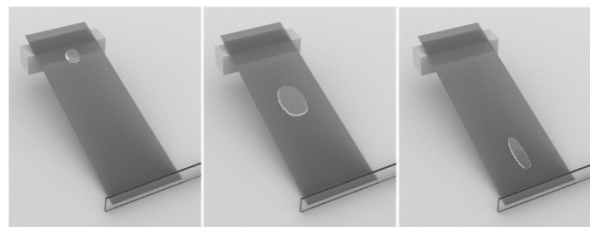
图 4 表面张力效应验证

5.2 定位自由表面的表面张力效应验证

为了验证计算表面张力时, 定位流体的自由表面和固液接触面产生更加真实的仿真效果, 设计了流体在斜坡自由滑落的实验, 结果如图 5 所示. 其中, 流体的表面张力系数为 3×10^{-3} , 流体与接触面之间未设置摩擦力因素, 流体的粒子数为 4×10^3 个. 可以看出, 图 5a 中, 使用 Chen 等^[4]方法在流体所有边界处求解表面张力时, 流体与固体在边界处会有明显的分离; 图 5b 中, 本文提出的定位流体自由表面之后再进行表面张力计算时, 流体表面相对平滑.



a. Chen 等^[4]



b. 定位流体自由表面

图 5 不同流体表面张力计算方法对比

5.3 固定固体与流体耦合

为了验证本文方法在固液接触面处表面张力

效应的有效性, 设置了流体表面张力系数为 1×10^{-3} 的球体浇水实验, 结果如图 6 所示. 其中, 对固液接触面的流体切线方向添加 $\mu=0.2$ 的速度衰减, 以保证流体停留在固体表面; 每帧创建的流体粒子数为 320, 整个实验过程共创建 3.2×10^5 个流体粒子. 可以看出, 图 6a 中, 未添加表面张力效应的流体落下后会黏附在流体大部分区域, 产生不真实的仿真效果; 图 6b 中, 添加表面张力后, 流体会在表面张力效应下产生收缩现象.



a. 无表面张力



b. 有表面张力

图 6 流体与固定固体交互结果对比

在处理固液耦合时, 为了验证本文方法可以模拟出更加真实的效果, 设计与传统 MPM 和传统固液耦合处理方法的实验, 结果如图 7 所示. 其中, 实验场景为流体水滴向叶片掉落那样产生的不同效果, 场景中流体的粒子数为 4×10^3 个, 流体表面张力系数为 3×10^{-3} , 流体与叶片之间未设置摩擦因素影响. 可以看出, 图 7a 中, 传统 MPM 在进行固液耦合时, 流体与固体的接触面会产生黏附现象, 流体不会继续向下滑动; 图 7b 中, 传统方法处理 MPM 出现黏附现象时, 忽略了流体表面张力效应; 图 7c 中, 添加表面张力后, 流体表面会向内收缩.

5.4 滑移边界条件下的固液耦合

为了验证本文方法中不会出现 MPM 仿真时固有的黏性问题, 设计了流体与固体的耦合实验, 初始形态为正方体的流体通过自由落体运动掉落在固体模型上, 实验中分别模拟传统 MPM 的固液耦合与本文方法中使用冲量进行碰撞处理的固液耦合, 结果如图表 1 所示. 其中, 流体粒子数均为 2×10^5 , 将固体模型离散化之后的粒子数为 40 966. 可以看出, 帧数为 500 时, 传统的 MPM 模型出现很明显的流体黏附现象; 本文方法使用不同网格分别模

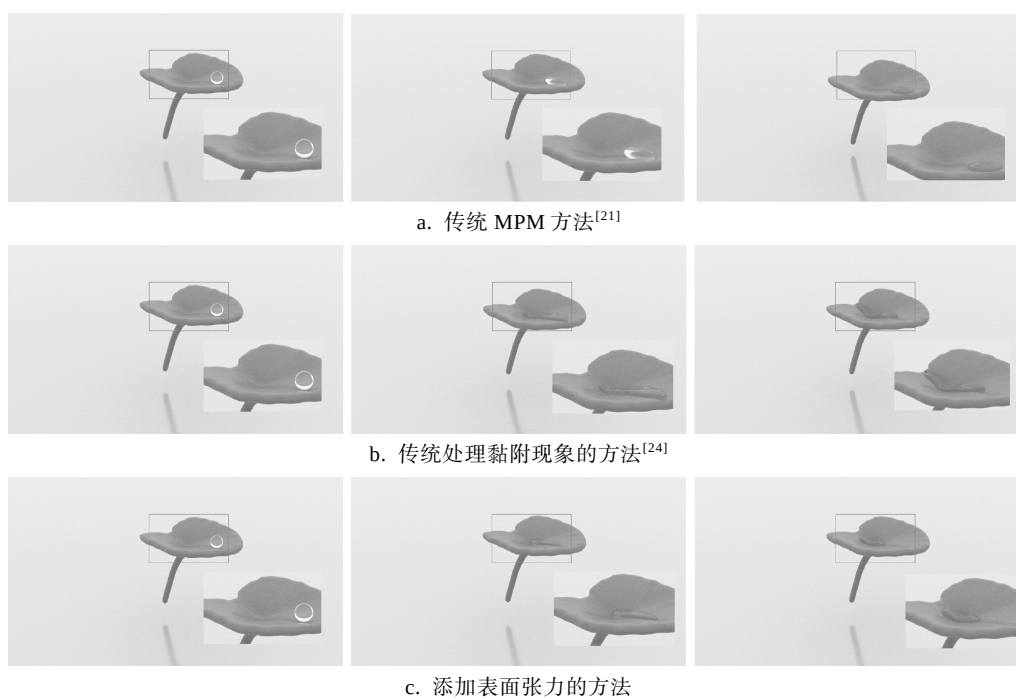


图 7 不同的固液耦合方法结果对比

表 1 2 种方法的固液耦合结果对比

帧数	MPM ^[21]	本文
1		
160		
500		

拟流体和固体,可以有效地避免传统 MPM 产生的黏附现象.

固液耦合时,为了验证本文方法不会由于冲量效应导致流体与固体分离,在 2D 情况下设计了滑移边界条件下的固液耦合实验,将固体固定,流体从固体上方落下,结果如表 2 所示. 其中,固体和流体的粒子数均为 8×10^3 , 网格分辨率为 100×100 , 泊松比为 0.14. 可以看出,在帧数为 50 和 100 时, Han 等^[24]的方法直接将冲量应用到流体时,流体会向两侧弹开;本文方法将碰撞时流体的速度进行修正之后,流体不会全部与固体分离.

表 2 速度修正前后结果对比

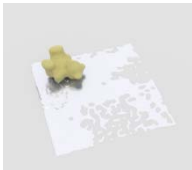
帧数	Han 等 ^[24]	本文
1		
50		
100		
400		

5.5 滑移边界条件下具有表面张力效应的固液耦合

设计水流冲击实验,验证滑移条件下的表面

张力效应, 结果如表 3 所示. 其中, 流体的表面张力系数为 1×10^{-3} , 每帧生成 2.4×10^3 个流体粒子, 实验过程中共生成 1.68×10^5 个流体粒子. 可以看出, 当帧数为 300 时, 传统的固液耦合方法将流体与固体完全分离, 忽视了流体表面张力所产生的收缩现象; 对固液接触面的流体切线方向添加 $\mu=0.1$ 的速度衰减, 以保证流体停留在固体表面, 展示了本文方法具有表面张力效应的固液耦合现象, 验证了该方法的有效性.

表 3 流体冲击移动固体实验

帧数	文献[21]无表面张力的传统固液耦合	本文有表面张力效应的固液耦合
1		
50		
300		

设计了复杂场景的固液耦合实验, 验证本文方法在多固体情况下的有效性, 结果如图 8 所示. 其中, 流体的表面张力系数为 1×10^{-3} , 流体的粒子总数为 5×10^5 . 可以看出, 在表面张力效应的作用下, 流体在固体表面产生了收缩现象, 本文方法实现了具有表面张力的流体与多形态运动固体之间的耦合.



图 8 本文方法在复杂场景下的固液耦合

6 总 结

由于本文方法在每帧对每个流体粒子生成一

个球形的水平集, 因此将其结合生成整个流体区域的隐式表面算法效率较低. 未来将使用其他方式构建流体表面, 算法向量场和曲率场, 提高算法的效率.

虽然本文方法未使用 MPM 自有的碰撞检测, 但是有效地处理了 MPM 交互时出现的黏附现象, 而使用冲量进行碰撞检测有一定的局限性, 如果时间步长过大, 会出现一些穿模现象. 这也是今后的工作重点.

参考文献(References):

- [1] Brackbill J U, Kothe D B, Zemach C. A continuum method for modeling surface tension[J]. *Journal of Computational Physics*, 1992, 100(2): 335-354
- [2] Hyde D A B, Gagniere S W, Marquez-Razon A, *et al.* An implicit updated lagrangian formulation for liquids with large surface energy[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2020, 39(6): Article No.183
- [3] Chen Y L, Meier J, Solenthaler B, *et al.* An extended cut-cell method for sub-grid liquids tracking with surface tension[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2020, 39(6): Article No.169
- [4] Chen J Y, Kala V, Marquez-Razon A, *et al.* A momentum-conserving implicit material point method for surface tension with contact angles and spatial gradients[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2021, 40(4): Article No.111
- [5] Kang M, Fedkiw R P, Liu X D. A boundary condition capturing method for multiphase incompressible flow[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2000, 15(3): 323-360
- [6] Wang H M, Mucha P J, Turk G. Water drops on surfaces[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2005, 24(3): 921-929
- [7] Zheng W, Yong J H, Paul J C. Simulation of bubbles[J]. *Graphical Models*, 2009, 71(6): 229-239
- [8] Sussman M, Ohta M. A stable and efficient method for treating surface tension in incompressible two-phase flow[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2009, 31(4): 2447-2471
- [9] Da F, Hahn D, Batty C, *et al.* Surface-only liquids[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2016, 35(4): Article No.78
- [10] Schroeder C, Zheng W, Fedkiw R. Semi-implicit surface tension formulation with a Lagrangian surface mesh on an Eulerian simulation grid[J]. *Journal of Computational Physics*, 2012, 231(4): 2092-2115
- [11] Zheng W, Zhu B, Kim B, *et al.* A new incompressibility discretization for a hybrid particle MAC grid representation with surface tension[J]. *Journal of Computational Physics*, 2015, 280: 96-142
- [12] Ruan L W, Liu J Y, Zhu B, *et al.* Solid-fluid interaction with surface-tension-dominant contact[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2021, 40(4): Article No.120
- [13] G enevaux O, Habibi A, Dischler J M. Simulating fluid-solid interaction[C] // *Proceedings of the Graphics Interface Conference*. Canada: Canadian Human-Computer Communications Society, 2003: 31-38

- [14] Guendelman E, Selle A, Losasso F, *et al.* Coupling water and smoke to thin deformable and rigid shells[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2005, 24(3): 973-981
- [15] Chentanez N, Goktekin T G, Feldman B E, *et al.* Simultaneous coupling of fluids and deformable bodies[C] // *Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2006: 83-89
- [16] Batty C, Bertails F, Bridson R. A fast variational framework for accurate solid-fluid coupling[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2007, 26(3): 100-es
- [17] Robinson-Mosher A, English R E, Fedkiw R. Accurate tangential velocities for solid fluid coupling[C] // *Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*. New York: ACM Press, 2009: 227-236
- [18] Robinson-Mosher A, Schroeder C, Fedkiw R. A symmetric positive definite formulation for monolithic fluid structure interaction[J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(4): 1547-1566
- [19] Aanjaneya M. An efficient solver for two-way coupling rigid bodies with incompressible flow[J]. *Computer Graphics Forum*, 2018, 37(8): 59-68
- [20] Hyde D A B, Fedkiw R. A unified approach to monolithic solid-fluid coupling of sub-grid and more resolved solids[J]. *Journal of Computational Physics*, 2019, 390: 490-526
- [21] Stomakhin A, Schroeder C, Chai L, *et al.* A material point method for snow simulation[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2013, 32(4): Article No.102
- [22] Fei Y, Batty C, Grinspun E, *et al.* A multi-scale model for simulating liquid-fabric interactions[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2018, 37(4): Article No.51
- [23] Yan X, Li C F, Chen X S, *et al.* MPM simulation of interacting fluids and solids[J]. *Computer Graphics Forum*, 2018, 37(8): 183-193
- [24] Han X C, Gast T F, Guo Q, *et al.* A hybrid material point method for frictional contact with diverse materials[J]. *Proceedings of the ACM on Computer Graphics and Interactive Techniques*, 2019, 2(2): Article No.17
- [25] Fang Y, Qu Z Y, Li M C, *et al.* IQ-MPM: an interface quadrature material point method for non-sticky strongly two-way coupled nonlinear solids and fluids[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2020, 39(4): Article No.51
- [26] Stomakhin A, Howes R, Schroeder C A, *et al.* Energetically consistent invertible elasticity[C] // *Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2012: 25-32
- [27] Lorensen W E, Cline H E. Marching cubes: a high resolution 3D surface construction algorithm[J]. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, 1987, 21(4): 163-169
- [28] Corsini M, Cignoni P, Scopigno R. Efficient and flexible sampling with blue noise properties of triangular meshes[J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2012, 18(6): 914-924
- [29] Jiang C F F, Schroeder C, Selle A, *et al.* The affine particle-in-cell method[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2015, 34(4): Article No.51