面向高质量局部参数化的光滑测地距离场快速求解方法

胡舜[1)], 岳子佳[1)], 陈双敏[1)*], 辛士庆[2)]

[1)] (青岛科技大学信息科学技术学院 青岛 266061)
[2)] (山东大学计算机科学与技术学院 青岛 266237)
(chenshuangmin@qust.edu.cn)

摘 要: 网格曲面的局部参数化在数字几何处理中有着广泛的应用. 传统的局部参数化算法大多依赖于局部测地距离场的计算, 但无论是精确的测地线算法还是近似的测地线算法, 路径走向对网格化都十分敏感, 得到的参数化结果存在角度分布严重不均匀的现象. 为了获得尽可能等距的局部参数化结果, 提出面向高质量局部参数化的光滑测地距离场快速求解方法. 该方法将目标测地距离场表示为拉普拉斯矩阵的低频子空间中基底的线性组合, 通过求解网格表面的热传导方程, 获得基底向量的加权系数; 更进一步, 仅需要提取前面 k 个特征值进行预处理, 即可将求解测地距离场的过程变成矩阵与向量的快速乘法运算, 实现在较大规模的三维模型上实时交互的目的. 通过与精确算法和热传导方法关于单次计算速度和光滑度的对比实验, 体现出所提方法的优势; 以及局部参数化的对比实验中, 所提方法在局部参数化任务上的等距性.

关键词: 测地距离场; 热传导方程; 拉普拉斯算子; 局部参数化
中图法分类号: TP391.7 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2023-00641

A Fast Approach to Compute Smooth Geodesic Distance Fields Using for High-Quality Local Parameterization

Hu Shun[1)], Yue Zijia[1)], Chen Shuangmin[1)*], and Xin Shiqing[2)]

[1)] (*School of Information Science and Technology, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao* 266061)
[2)] (*School of Computer Science and Technology, Shandong University, Qingdao* 266237)

Abstract: Local parameterization has been widely used in digital geometry processing. Conventional algorithms typically rely on the computation of geodesic distance fields. However, for both exact geodesic algorithms and approximate algorithms, the marching direction of a geodesic path is highly sensitive to triangulation, resulting in an uneven angle distribution in the local parameterization result. To obtain high-quality local parameterization results that are as equidistant as possible, we propose a fast numerical approach to compute smooth geodesic distance fields. We represent the target geodesic distance field by a linear span of the basis vectors in the low-frequency subspace of the Laplace operator, which enables finding the solution by solving the heat equation. Furthermore, by extracting only the first k eigenvalues for preprocessing, we can use a simple eigen-decomposition operation to speed up the computation, achieving real-time user interaction on larger-scale 3D models. By comparing our method with the VTP algorithm and the Heat method in terms of single calculation speed and smoothness, we demonstrate its advantages. Additionally, in comparative experiments of local parameterization, our method shows improved isometry in local parameterization tasks.

收稿日期: 2023-10-04; 修回日期: 2024-05-20. **基金项目**: 国家自然科学基金(62272277); 山东省自然科学基金(ZR2020MF036). **胡舜**(1999—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为 CAGD; **岳子佳**(2000—), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为 CAGD&CG; **陈双敏**(1982—), 女, 博士, 副教授, 硕士生导师, CCF 会员, 论文通信作者, 主要研究方向为 CAGD&CG、计算几何; **辛士庆**(1979—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 会员, 主要研究方向为 CG、机器人路径规划、三维智能检测.

Key words: geodesic distance field; heat equation; Laplace operator; local parameterization

曲面局部参数化旨在将曲面的某个局部映射到二维参数域上, 从而为各种几何操作提供支持, 如纹理贴图、重新网格化、重采样等. 指数映射[1]是解决局部参数化的常用方法, 它基于曲面局部的度量分析为每个点分配相应的距离和角度, 形成二维参数域与局部曲面之间的映射关系. 然而, 无论是精确的测地线算法还是近似的测地线算法, 路径走向对网格化都十分敏感, 角度分布的不均匀严重破坏了参数化的等距性质.

已有的测地线算法分为精确算法[2-7]和近似算法[8-10]. 通常, 速度和精度是衡量测地线算法好坏的重要指标, 但这些评价指标不能解决局部参数化中角度分布不均匀的问题. 一方面, 尽管准确性是大多数应用的追求目标, 但分片线性的网格曲面是对光滑形状的近似化表示, 过于追求准确性反而有悖于潜在光滑曲面上的真正测地距离场; 另一方面, 即使是光滑的曲面, 测地距离场也拥有大量的奇异点(从源点到奇异点存在多条最短路径并且汇合方向不同), 这些奇异点形成的脊线会破坏曲面与参数平面之间的单射性质. 因此, 绝对精确的测地线囿于奇异点的存在, 无法支持大范围的局部参数化[11]. 本文引入光滑测地距离场消除奇异点, 扩大局部参数化的有效范围.

针对光滑性和高效性双重需求, 本文提出面向光滑测地距离场的离散数值求解方法, 把目标测地距离场表示为拉普拉斯矩阵的低频子空间中基底的线性组合; 更进一步, 通过求解 2 个稀疏线性方程组获得光滑测地距离场. 为了达到实时计算局部参数化的目的, 将提取 cot-weight 矩阵的前 k 个特征值进行预处理, 使得单次局部参数化的计算变成矩阵与向量的乘法运算, 满足在较大规模的三维模型上用户交互的实时性需求. 通过在人脸上的局部参数化对比实验, 充分展示了光滑测地距离场的有用性和有效性.

1　相关工作

测地距离场的快速计算是数字几何处理和 CAD 的基本任务, 不仅为表面采样、参数化和形状匹配等处理任务/应用[12-16]提供度量分析的依据, 而且为表面图案生成[17]、刀具加工路径[18]、纤维铺设路径[19]和支撑结构设计[20]提供了技术手段, 如图 1 所示. 下面简要介绍已有的测地线方法.

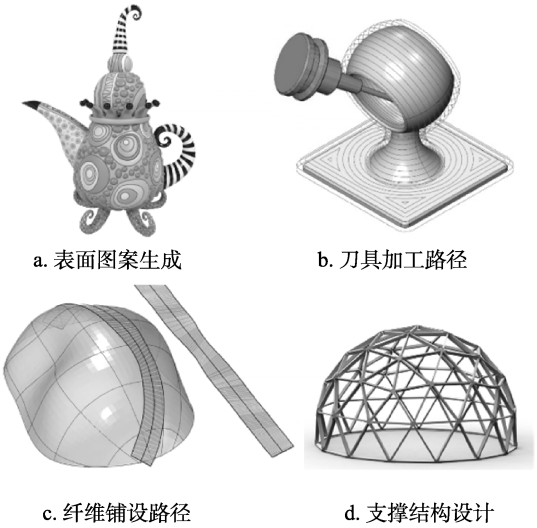


图 1　测地线在 CAD 中的应用

1.1　精确算法

精确的测地算法通常使用窗元表示那些共享相同边序列的测地路径, 把无限多条测地路径编码为有限多的离散窗元. 从求解过程上看, 精确算法类似于 Dijkstra 算法, 由近及远、由内而外地传播距离信息. 代表性的算法有 MMP 算法[2]和 CH 算法[3], 它们的时间复杂度分别为 $O\left(n^2\log n\right)$ 和 $O\left(n^2\right)$, 其中, n 表示网格曲面的顶点数目. 随后, Surazhsky 等[4], Liu 等[5], Xu 等[6], Xin 等[7]在测地线算法的效率提升方面做了大量的工作. Qin 等[21]穷举了 2 个窗元在同一个三角形中相遇的所有情形, 将其归纳为 15 种情况, 并使用不同的裁剪规则分别对窗元进行取舍. 然而, 精确测地距离场算法一般具有较高的时间复杂度, 实际运行效率差; 而且, 精确测地距离场具有大量的奇异点(测地线不唯一、连续但不光滑), 不利于完成局部参数化等任务.

1.2　基于偏微分方程的方法

大多数基于偏微分方程的方法是求解离散域上的 Eikonal 方程 $\|\nabla u(x)\|=1$, 边界条件为 $u(s)=0$, 其中, s 表示源点. Sethian 等[8]提出快速行进算法(fast marching method, FMM), 其时间复杂度为 $O\left(n\log n\right)$, 它使用与 Dijkstra 算法相似的格式获得 Eikonal 方程的近似解; Weber 等[22]提出了适用于几何图像的并行 FMM; 基于热传导方程的方法[9]也可被看作是 Eikonal 方程的变种, 其通过求解 2 个线性方程组获得近似测地距离场; Tao 等[23]基于 GPU 极大地提高了热传导方法的计算效率.

间接求解 Eikonal 方程的方法还包括梯度法[9,24]和变分法[25]等. 本文将基于热传导方法求解光滑测地距离场.

1.3 基于图的方法

将网格曲面转化为图结构, 进而基于图搜索获得近似最短路是解决测地距离场问题的重要方法. Aleksandrov 等[26]提出沿网格边添加若干呈几何级数排列的 Steiner 点, 在 $O\left(mn^2\log(mn)+nm^2\right)$ 时间内计算 $(1+\varepsilon)$ 测地路径, 其中, m 表示 Steiner 点的总数, n 表示网格曲面的边数; Xin 等[10]在网格表面加入 m 个均匀分布的辅助点, 然后在 $O\left(mn^2\log n\right)$ 时间内构建一个具有 $O\left(m^2+n\right)$ 条边的图, 可以在 $O(1)$ 时间内计算出曲面上任意 2 个点之间的近似测地距离; Ying 等[27]构造一种马鞍型顶点之间的图结构, 其构建时间为 $O\left(nK^2\log K\right)$, 计算一次测地距离场需要 $O\left(Kn\log n\right)$ 时间, 其中, K 表示每个鞍点代理的顶点数目; Wang 等[28]提出一种离散测地图方法, 能够快速地找到满足指定精度的近似测地线. 然而, 计算基于图的测地距离场通常需要大量内存来存储图的相关信息, 并且随着模型复杂度的提高, 图的构建和计算时间也会越来越长.

2 本文方法

2.1 基于热传导方程的算法

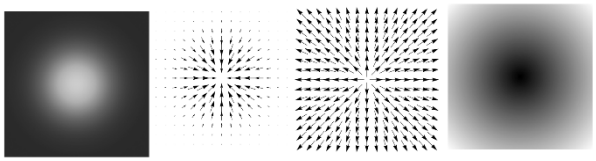
如图 2 所示, 基于热传导方程[9]求解测地距离场算法的步骤如下:

Step1. 热量 u 在短时间内扩散, 如图 2a 所示.

Step2. 对温度梯度 ∇u 进行归一化并取反, 如图 2b 所示.

Step3. 得到沿测地线指向的单位矢量场 $\boldsymbol{X}$, 如图 2c 所示.

Step4. 最终求得测地距离 ϕ, 如图 2d 所示.



a. u b. ∇u c. $\boldsymbol{X}$ d. ϕ

图 2 基于热传导方程的算法流程[9]

2.1.1 时间离散化

对热方程 $u_t=\Delta u$ 在固定步长 t 下进行离散化. 基于后向欧拉算法得到 $\dfrac{u_t-u_0}{t}=\Delta u_t$, 即

$$\left(\boldsymbol{I}-t\Delta\right)u_t=u_0.$$

其中, $\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵; 初始条件 $u_0=\delta(x)$ (Kronecker delta 函数, 在源点处取 1, 其余顶点处取 0).

2.1.2 空间离散化

如图 3 所示, 设三角网格曲面的顶点数为 $|V|$, 记 $n=|V|$, $u\in\mathbb{R}^n$ 是在三角网格上的 n 维分段线性函数, 拉普拉斯算子在第 i 个顶点处的离散化格式为

$$(Lu)_i=\frac{1}{2A_i}\sum_j\left(\cot\alpha_{ij}+\cot\beta_{ij}\right)\left(u_i-u_j\right).$$

其中, 顶点 j 是顶点 i 的邻接点; A_i 是第 i 个顶点统治的 Voronoi 面积; α_{ij} 和 β_{ij} 分别表示顶点 i 与顶点 j 连线的 2 个对角; $\boldsymbol{L}_{\mathrm{c}}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为 $n\times n$ 维的 cot-weight 矩阵, $L=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{L}_{\mathrm{c}}$ 表示离散的拉普拉斯算子; 则热传导方程的离散化形式为

$$\left(\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{L}_{\mathrm{c}}\right)u_t=u_0.$$

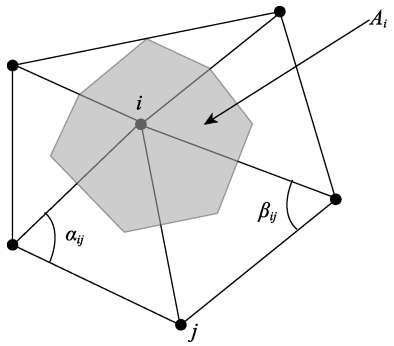


图 3 顶点 i 邻域

求出 u 以后, 需要求出它在每个三角面片上的梯度并进行归一化. 如图 4a 所示, 假设 A_f 表示三角面片 f 的面积, $\boldsymbol{N}_f$ 表示 f 的单位法向量, $\boldsymbol{e}_p$ 表示 f 的第 p 个边向量(逆时针方向), u_p 是 $\boldsymbol{e}_p$ 相对顶点处的函数值; 则三角面片 f 上的梯度[29]可以简单表示为

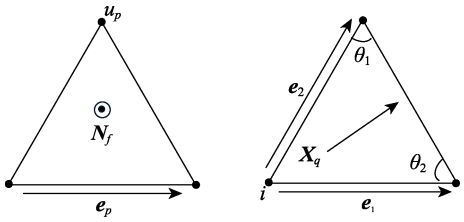
$$\nabla u=\frac{1}{2A_f}\sum_p u_p\left(\boldsymbol{N}_f\times\boldsymbol{e}_p\right).$$

归一化操作可表示为 $\boldsymbol{X}=-\nabla u/\left|\nabla u\right|$, 如图 2b~图 2c 所示. 进一步, 梯度的散度可以表示为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}\sum_q\cot\theta_1\left(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{X}_q\right)+\cot\theta_2\left(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{X}_q\right).$$

顶点 i 处的散度依赖于其 1 阶邻域三角形内的梯度信息. 如图 4b 所示, $\boldsymbol{X}_q$ 表示顶点 i 第 q 个邻接三角形对应的梯度向量(单位化以后), $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 分别

表示从顶点 i 出发的 2 条边向量，θ_1 和 θ_2 分别表示与 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 相对的内角.



a. 梯度计算　　b. 散度计算

图 4　三角面片上的计算示意图

最后，可将拉普拉斯方程表示为

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{c}}\phi=\boldsymbol{b} \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$ 表示由每个顶点上的散度形成的列向量. 通过求解式(1)，即可获得近似测地距离场，如图 2d 所示.

2.2　热传导方程的快速求解方法

近似测地距离 ϕ 的最小二乘解可通过求解式(1)获得. 由于 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{c}}$ 是 $n\times n$ 维的稀疏对称实矩阵，因此存在 n 个相互正交的特征向量. 按照特征值从小到大选取相应的前面 k 个特征向量，它们的线性组合定义了 k 维低频子空间. 用这 k 个特征向量表示待定测地距离场 ϕ，即

$$\phi=x_1\xi_1+x_2\xi_2+\cdots+x_k\xi_k=$$
$$\left(\xi_1,\xi_2\cdots,\xi_k\right)\left(x_1\quad x_2\quad\cdots\quad x_k\right)^{\mathrm{T}}\triangleq\boldsymbol{M}_{n\times k}\boldsymbol{X}_{k\times 1}.$$

其中，$\boldsymbol{M}_{n\times k}$ 表示由 k 个 n 维相互正交的特征向量组成的矩阵；$\boldsymbol{X}_{k\times 1}$ 表示系数 $x_i\left(i\in[1,k]\right)$ 组成的 $k\times 1$ 维向量. 则式(1)可写作

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{c}}\phi=x_1\lambda_1\xi_1+x_2\lambda_2\xi_2+\cdots+x_k\lambda_k\xi_k=$$
$$\boldsymbol{M}_{n\times k}\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_k\end{pmatrix}\boldsymbol{X}_{k\times 1}=\boldsymbol{b}.$$

考虑方程的个数多于未知数的个数，$\boldsymbol{X}_{k\times 1}$ 的最小二乘解可被显式地写成

$$\boldsymbol{X}_{k\times 1}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_k\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{M}_{n\times k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}.$$

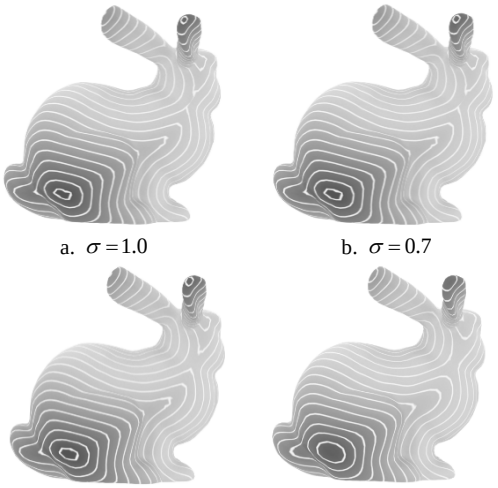
最终获得的光滑距离场为

$$\phi=\boldsymbol{M}_{n\times k}\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_k\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{M}_{n\times k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}.$$

由于特征值分解(仅提取前面 k 个特征值和特征向量)可以在预处理阶段完成，因此在用户选定源点以后，求解 1 次光滑距离场只需要矩阵与向量的乘法运算(从右向左，依次相乘)，大大提升了求解速度.

2.3　低频子空间维数的选择

假设参数 σ 为低频子空间维数 k 与 n 的比值，即 $k=\sigma n$. 图 5 所示为参数 σ 取不同数值时光滑度的对比结果，其中，σ 分别取 1.0, 0.7, 0.4 和 0.1. 可以看出，σ 越小，光滑性越明显，脊线(测地线不唯一)区域就越小；σ 越大，越接近热传导方法得到的结果.



a. $\sigma=1.0$　　b. $\sigma=0.7$

c. $\sigma=0.4$　　d. $\sigma=0.1$

图 5　σ 取不同值时的光滑度对比

以 Bunny 和 Bimba 作为测试模型，不同分辨率下 2 个模型的测地距离平均误差与 σ 的关系曲线如图 6 所示. 可以看出: (1) 随着 σ 的增大，光滑测地距离场越来越趋近于精确测地距离场. (2) σ 为 0.1~0.2 是一个分水岭，当 $\sigma<0.1$ 时，光滑性高但精度比较低；当 $\sigma>0.2$ 时，精度损失趋近稳定但光滑性逐渐丧失. 因此，基于这样的统计规律，本文将参数 σ 统一选为 0.15.

2.4　局部参数化

基于求解出的光滑距离场，可以快速进行局部参数化. 假设参数化区域的基准点为 p，对于其他任何顶点(某些场合中可能局限在一定的范围之内)，其参数坐标可由测地距离和角度来确定. 如图 7 所示，沿着距离场 D_{geo} 的负梯度方向追踪某顶点的最短路径，即

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=-\nabla D_{\mathrm{geo}}.$$

其中，Γ 表示待追踪的最短路径；t 为弧长参数.

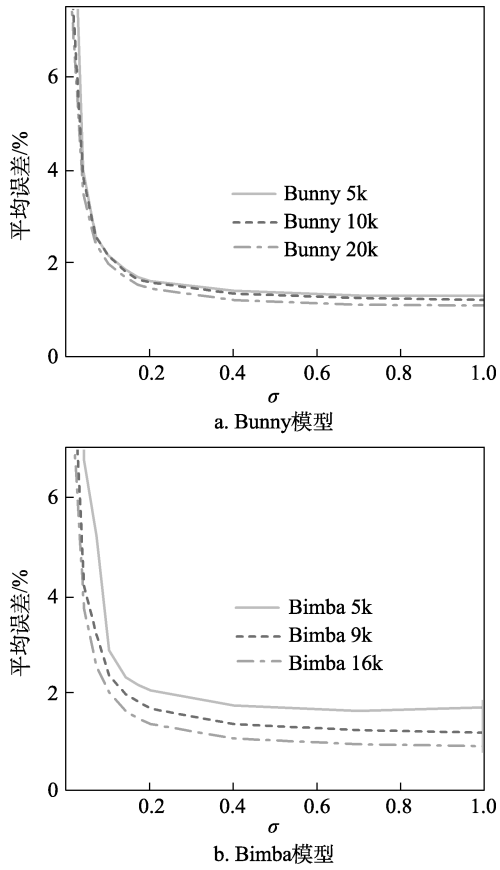


图 6 2 个模型在不同分辨率下测地距离平均误差与 σ 的关系

因为每个顶点沿着最短路均可到达源点 p，所以当路径追踪到源点 p 时，就形成一个角度 θ，将 $(d\cos\theta, d\sin\theta)$ 作为相应顶点的纹理坐标，其中，d 表示该顶点到源点的测地距离.

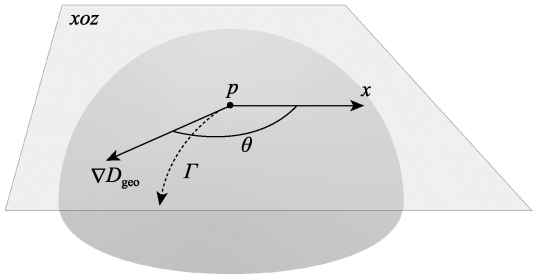


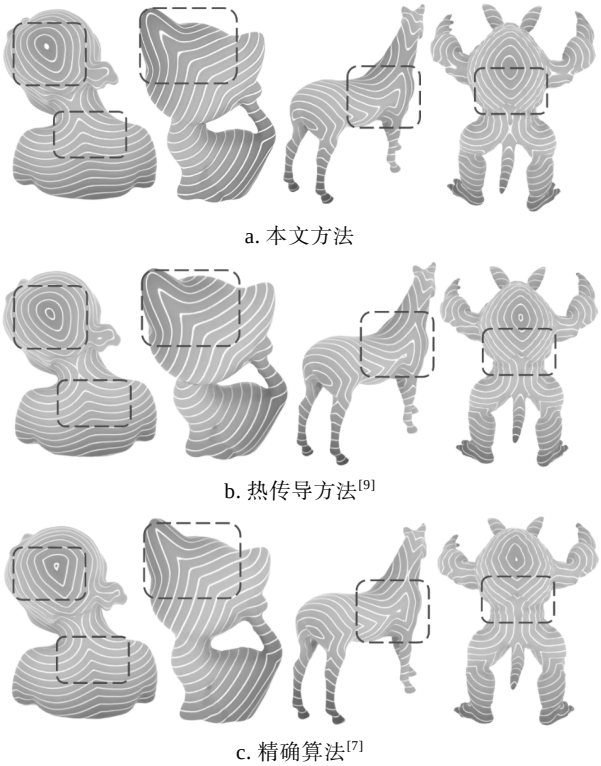
图 7 源点 p 邻域的测地极坐标

3 实验结果

本文实验使用的电脑配置为 Windows10 64 位操作系统，英特尔酷睿 i7 3.07 GHz CPU，8 GB 内存；采用 C++实现算法.

3.1 速度、精度和光滑性实验

将本文方法与精确算法、热传导方法进行比较，结果如图 8 所示. 可以看出，即使在 $\sigma = 0.15$(仅选择了 15%的特征值)的情况下，本文方法的精度损失不大，但换取了更高的光滑性. 表 1 所示为 3 种方法的预处理时间和计算单次距离场的时间比较. 可以看出：本文方法的预处理主要是提取部分特征值，而热传导方法的预处理主要是 LDLT(lower diagonal lower transpose)分解，二者所需代价基本相当；得益于维数的降低，在计算单次距离场时，本文方法比热传导方法快 5 倍以上；本文方法以精度的适当牺牲(误差不到 2%)换取了更高的光滑性.



a. 本文方法

b. 热传导方法[9]

c. 精确算法[7]

图 8 3 种方法得到的测地距离场比较

表 1 3 种方法在不同模型上的计算时间和平均误差比较

模型	顶点数	本文方法			热传导方法[9]			精确算法[7]
		预处理时间/s	单次计算时间/s	平均误差/%	预处理时间/s	单次计算时间/s	平均误差/%	时间/s
Bunny	5k	2	**0.01**	1.86	1	0.04	1.32	0.04
Bimba	16k	17	**0.01**	1.55	16	0.14	0.88	0.15
Kitten	19k	26	**0.01**	1.61	24	0.16	0.94	0.22
Horse	20k	30	**0.02**	1.64	27	0.15	1.17	0.27
Armadillo	25k	56	**0.03**	1.63	49	0.20	1.27	0.31

注. 粗体表示最优值.

3.2　局部参数化

在三维人脸数据的几何处理中，局部参数化是一个重要的步骤. 在 2 幅图像上，将本文方法和精确算法的人脸参数化效果进行比较，结果如图 9 和图 10 所示. 其中，在计算流程上，将鼻尖作为中心点，根据测地距离和测地路径的角度计算每个顶点的纹理坐标；图 9 和图 10 中，本文统计了参数化前后的边长之比，并用直方图可视化了该指标以 10 为底的对数值. 可以看出，精确算法无法保证测地路径在方向上的均匀性；本文方法得到的直方图在 0 附近比较集中，说明其在等距参数化方面的性能更高.

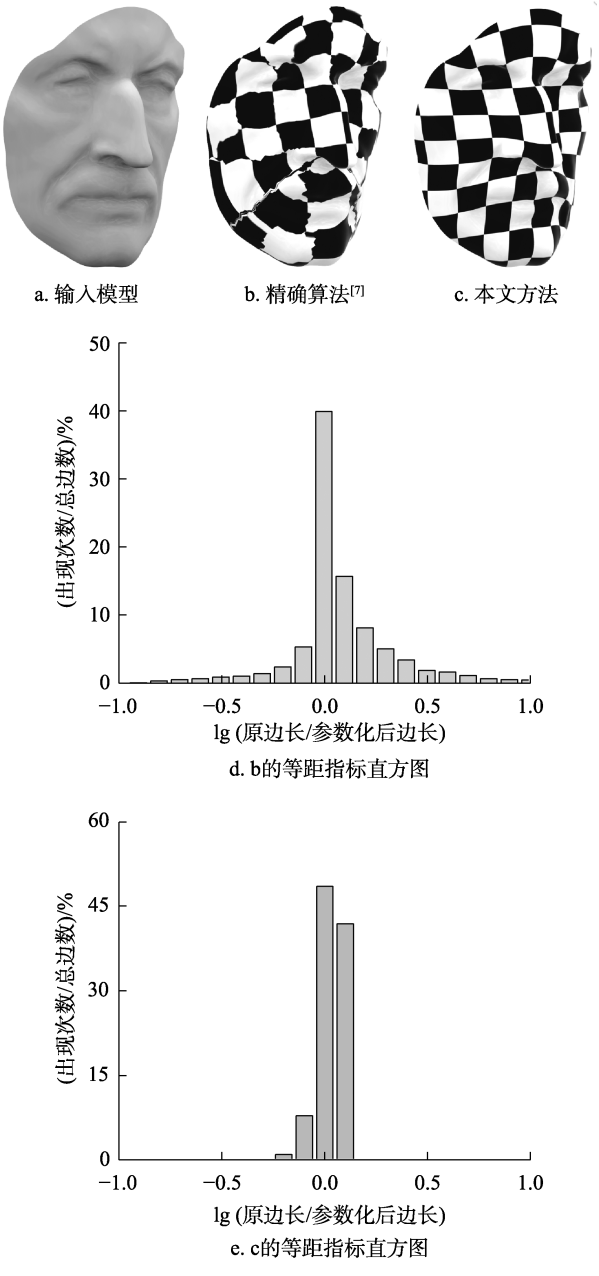


图 9　在 Planck 头像上的局部参数化比较

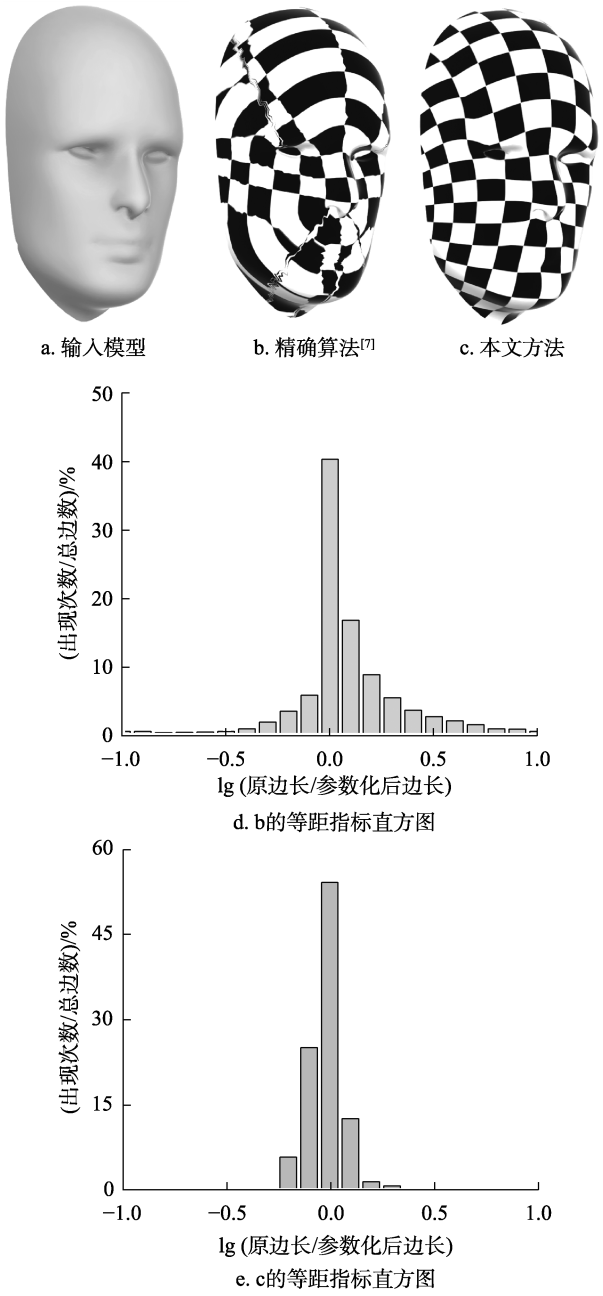


图 10　在人脸模型上的局部参数化比较

4　结　语

本文对已有的基于热传导方程的测地线算法进行改进，将待定的测地距离场表示为拉普拉斯矩阵低频子空间中的特征向量的线性组合；仅需要提取前面 k 个特征值进行预处理，即可将求解测地距离场的过程变为矩阵与向量的乘法运算(也省去了热传导方法中的 LDLT 分解)，极大地加速了求解过程. 因为本文方法在计算速度、光滑性和尽可能等距方面具有的优势，其在局部参数化中同样有着明显的优势. 但是，随着模型顶点数目

的增多，预处理时间也会相应增加．今后将结合基于 GPU 的加速技术提高预处理速度，以满足实际需求．

参考文献(References):

[1] Schmidt R, Grimm C, Wyvill B. Interactive decal compositing with discrete exponential maps[C] //Proceedings of the Special Interest Group on Computer Graphics and Interactive Techniques Conference. New York: ACM Press, 2006: 605-613

[2] Mitchell J S B, Mount D M, Papadimitriou C H. The discrete geodesic problem[J]. SIAM Journal on Computing, 1987, 16(4): 647-668

[3] Chen J D, Han Y J. Shortest paths on a polyhedron[C] //Proceedings of the 6th Annual Symposium on Computational Geometry. New York: ACM Press, 1990: 360-369

[4] Surazhsky V, Surazhsky T, Kirsanov D, *et al*. Fast exact and approximate geodesics on meshes[J]. ACM Transactions on Graphics, 2005, 24(3): 553-560

[5] Liu Y J, Zhou Q Y, Hu S M. Handling degenerate cases in exact geodesic computation on triangle meshes[J]. The Visual Computer, 2007, 23(9-11): 661-668

[6] Xu C X, Liu Y J, Sun Q, *et al*. Polyline-sourced geodesic voronoi diagrams on triangle meshes[J]. Computer Graphics Forum, 2014, 33(7): 161-170

[7] Xin S Q, Wang G J. Improving Chen and Han's algorithm on the discrete geodesic problem[J]. ACM Transactions on Graphics, 2009, 28(4): Article No.104

[8] Sethian J A. A fast marching level set method for monotonically advancing fronts[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1996, 93(4): 1591-1595

[9] Crane K, Weischedel C, Wardetzky M. Geodesics in heat: a new approach to computing distance based on heat flow[J]. ACM Transactions on Graphics, 2013, 32(5): Article No.152

[10] Xin S Q, Ying X, He Y. Constant-time all-pairs geodesic distance query on triangle meshes[C] //Proceedings of the ACM SIGGRAPH Symposium on Interactive 3D Graphics and Games. New York: ACM Press, 2012: 31-38

[11] Mejia-Parra D, Sánchez J R, Posada J, *et al*. Quasi-isometric mesh parameterization using heat-based geodesics and Poisson surface fills[J]. Mathematics, 2019, 7(8): Article No.753

[12] Elad A, Keller Y, Kimmel R. Texture mapping via spherical multi-dimensional scaling[C] //Proceedings of the 5th International Conference on Scale Space and PDE Methods in Computer Vision. Heidelberg: Springer, 2005: 443-455

[13] Schlömer T, Heck D, Deussen O. Farthest-point optimized point sets with maximized minimum distance[C] //Proceedings of the ACM SIGGRAPH Symposium on High Performance Graphics. New York: ACM Press, 2011: 135-142

[14] Sloan P J, Rose C F, Cohen M F. Shape by example[C] //Proceedings of the Symposium on Interactive 3D Graphics. New York: ACM Press, 2001: 135-143

[15] Rabin J, Peyré G, Cohen L D. Geodesic shape retrieval via optimal mass transport[C] //Proceedings of the 11th European Conference on Computer Vision. Heidelberg: Springer, 2010: 771-784

[16] New A T, Mukhopadhyay A, Arabnia H R, *et al*. Non-rigid shape correspondence and description using geodesic field estimate distribution[C] //Proceedings of the ACM Special Interest Group on Computer Graphics and Interactive Techniques Conference. New York: ACM Press, 2012: Article No.96

[17] Adiels E, Ander M, Williams C J K. Brick patterns on shells using geodesic coordinates[C] //Proceedings of the IASS Annual Symposium. Madrid: IASS Press, 2017: 1-10

[18] Zhao H S, Zhang H, Xin S Q, *et al*. DSCarver: decompose-and-spiral-carve for subtractive manufacturing[J]. ACM Transactions on Graphics, 2018, 37(4): Article No.137

[19] Eckrich M, Arrabiyeh P A, Dlugaj A M, *et al*. Structural topology optimization and path planning for composites manufactured by fiber placement technologies[J]. Composite Structures, 2022, 289: 115488

[20] Pottmann H, Huang Q X, Deng B L, *et al*. Geodesic patterns[J]. ACM Transactions on Graphics, 2010, 29(4): Article No.43

[21] Qin Y P, Han X G, Yu H C, *et al*. Fast and exact discrete geodesic computation based on triangle-oriented wavefront propagation[J]. ACM Transactions on Graphics, 2016, 35(4): Article No.125

[22] Weber O, Devir Y S, Bronstein A M, *et al*. Parallel algorithms for approximation of distance maps on parametric surfaces[J]. ACM Transactions on Graphics, 2008, 27(4): Article No.104

[23] Tao J, Zhang J Y, Deng B L, *et al*. Parallel and scalable heat methods for geodesic distance computation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2021, 43(2): 579-594

[24] Xin S Q, Quynh D T P, Ying X, *et al*. A global algorithm to compute defect-tolerant geodesic distance[C] //Proceedings of the SIGGRAPH Asia 2012 Technical Briefs. New York: ACM Press, 2012: Article No.23

[25] Belyaev A G, Fayolle P A. On variational and PDE‐based distance function approximations[J]. Computer Graphics Forum, 2015, 34(8): 104-118

[26] Aleksandrov L, Lanthier M, Maheshwari A, *et al*. An ε-approximation algorithm for weighted shortest paths on polyhedral surfaces[C] //Proceedings of the 6th Scandinavian Workshop on Algorithm Theory. Heidelberg: Springer, 1998: 11-22

[27] Ying X, Wang X N, He Y. Saddle vertex graph (SVG): a novel solution to the discrete geodesic problem[J]. ACM Transactions on Graphics, 2013, 32(6): Article No.170

[28] Wang X N, Fang Z, Wu J, *et al*. Discrete geodesic graph (DGG) for computing geodesic distances on polyhedral surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 2017, 52-53: 262-284

[29] Botsch M, Kobbelt L, Pauly M, *et al*. Polygon mesh processing[M]. New York: CRC Press, 2010