面向等几何分析的超弹性材料模型形状优化

凌然[1)], 王宁[1)], 徐岗[1)*], 谢津[1)], 许金兰[1)], 张啸雨[2)]

[1)] (杭州电子科技大学计算机学院 杭州 310018)
[2)] (北京空间飞行器总体设计部 北京 100094)
(gxu@hdu.edu.cn)

摘 要: 等几何分析作为一种收敛速度快、数值解高阶连续性好的数值方法, 广受工程设计领域的关注. 基于其优良的性质, 提出一种针对超弹性材料模型的等几何形状优化方法, 具体研究了面向等几何分析框架的超弹性材料计算以及相适应的形状优化方法. 首先, 在等几何框架下推导了离散矩阵装配流程与非线性系统的求解流程; 其次定义了超弹性材料下以柔度最小化和位移最小化为 2 个目标的数学模型, 继而通过对偶方法详细推导了解析的灵敏度, 有效提高优化精度; 最终结合等几何分析与移动渐近线算法构建了高效的优化框架. 对悬臂梁、带孔平板和开口扳手三组基准算例的形状优化实验表明, 所提方法的有效性和可靠性有一定保证, 实验中, 在几何约束下可在指定点处最多降低 90%位移和 7%的柔度, 且与预期形状相符.

关键词: 等几何分析; St.Venant-Kirchhoff 超弹性模型; 形状优化; 解析灵敏度
中图法分类号: TH122 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2023-00445

Shape Optimization of Hyperelastic Materials Model for Isogeometric Analysis

Ling Ran[1)], Wang Ning[1)], Xu Gang[1)*], Xie Jin[1)], Xu Jinlan[1)], and Zhang Xiaoyu[2)]

[1)] (*College of Computer Science and Technology, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou* 310018)
[2)] (*Beijing Institute of Spacecraft System Engineering, Beijing* 100094)

Abstract: Isogeometric analysis, as a numerical method with fast convergence and high-order numerical solutions, has attracted significant attention in the field of engineering design. Based on its excellent properties, a shape optimization method for hyperelastic material models is proposed, focusing on the computation of hyperelastic materials within the isogeometric analysis framework, as well as the corresponding shape optimization method. Firstly, the discrete matrix assembly procedure and the solution process for nonlinear systems are derived within the isogeometric analysis framework. Secondly, mathematical models are defined for hyperelastic materials with the objectives of minimizing compliance and displacement. Furthermore, analytical sensitivities are derived by the dual method to effectively improve optimization accuracy. Finally, an efficient optimization framework is constructed by combining IGA with the method of moving asymptotes. Shape optimization experiments on three benchmark cases of the cantilever beam, plate with a hole, and wrench demonstrate the effectiveness and reliability of the proposed method. In the experiments, the displacement and compliance at specified points can be reduced by 90% and 7% with geometric constraints respectively, which are the same as the expected shapes.

收稿日期: 2023-07-18; 修回日期: 2023-12-19. **基金项目**: 国家重点研发计划(2020YFB1709402); 国家自然科学基金(U1909210, 61902099); 浙江省重点研发计划(2021C01108). **凌然**(1994—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为力学结构优化; **王宁**(1997—), 男, 硕士, 主要研究方向为力学结构优化; **徐岗**(1981—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 论文通信作者, CCF 杰出会员, 主要研究方向为几何造型、等几何分析; **谢津**(1997—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为高阶网格生成; **许金兰**(1987—), 女, 博士, 副教授, 主要研究方向为等几何分析; **张啸雨**(1985—), 男, 硕士, 高级工程师, 主要研究方向为三维点阵结构设计.

Key words: isogeometric analysis; St.Venant-Kirchhoff hyperelasticity model; shape optimization; analytical sensitivity

结构优化方法在产品设计与计算科学领域具有重要意义, 根据优化参数不同, 可分为尺寸优化、形状优化和拓扑优化 3 种类型[1]. 其中, 形状优化通过改进模型的几何外形来提高产品物理性能, 在工程中可面向力学、电磁、热传导、声学振动等多学科场景, 具有较好的应用潜力.

形状优化方法的一般流程中, 3 个步骤对优化结构的性能与精确性具有显著影响: (1) 设计参数化几何描述和更新. 称该几何模型为设计模型, 可使用等几何样条曲面或有限元网格; (2) 计算结构响应分析. 称使用模型为分析模型, 使用有限元法等数值方法计算结构响应; (3) 数值优化. 在数值优化算法的控制下, 通过不断迭代使形状收敛到最优外形. 其中, 分析模型和设计模型在每次迭代中均需要交换数据, 故二者耦合程度格外重要. Burman 等[2]提出基于节点的方法将分析模型(即有限元网格)的节点作为设计参数, 从表示到分析均在网格上进行; Ertl 等[3]将其扩展至无参数形状模型. Lebair 等[4]提出基于非均匀有理 B 样条(non-uniform rational B-splines, NURBS)的优化方法, 在分析和表示上使用不同模型: 描述几何结构的参数化 CAD 模型和执行结构分析的有限元模型; 然而, 该方法的瓶颈在于模型间的联系不紧密, 需要频繁地在优化迭代中为二者传递并转换计算数据[5], 增加了计算负担.

目前, 形状优化方法普遍使用 NURBS 作为设计和分析模型, 根据几何的显式和隐式形式, 分为基于灵敏度的形状优化方法和基于水平集的形状优化方法 2 种处理方式.

(1) 基于灵敏度的形状优化方法. 根据问题的数学形式推导灵敏度的数值计算形式. Wall 等[6]最早将等几何分析(isogeometric analysis, IGA)应用在结构优化领域, 提出一种以柔度为目标的二维单片 CAD 模型的优化方法; Qian[7]和 Song 等[8]将权重系数引入设计变量, 提出基于控制点坐标和权重的灵敏度计算方法, 提升了优化性能; Seo 等[9]将灵敏度形状优化应用到带空洞的模型, 实现类似拓扑优化的效果; Blanchard 等[10]探讨了形状梯度和灵敏度关系, 提出了形状梯度计算方法; López 等[11]将 Bézier 三角网格作为分析域, 使用四叉树构造网格设计灵敏度传播方式, 加快形状优化目标函数的收敛效率; 陈龙等[12]给出多种目标灵敏度推导结果, 实现了三维模型的形状优化. 在处理非线性问题上, Weeger 等[13]引入半解析和不一致性分析方法处理弯曲三维梁问题. 但是, 对于更复杂的超弹性材料的形状优化问题尚未有一个可行的方案.

(2) 基于水平集的形状优化. 水平集方法是用于界面追踪和形状建模的数值技术, 已成功地应用于平均曲率运动、流体力学和图像处理等领域. Osher 等[14]提出一种优化二维线弹性应力问题的水平集方法, 通过扰动水平集和内嵌的仿真器寻找适合优化的方向; Martínez-Frutos 等[15]研究了鼓膜的两相优化, 即自由边界是 2 个成分区域的交界面, 其将水平集方法与形状灵敏度分析框架相结合来优化边界; Fujii 等[16]将水平集和形状梯度相结合, 通过类似拓扑优化的方式在欧拉网格上捕捉形状; Picelli 等[17]将 IGA 和水平集结合, 解决了在多工况下的形状优化问题; Song 等[18]提出基于水平集的蜂窝结构的应力形状拓扑优化, 结合有限元分析消除优化过程的不稳定性. 但是, 水平集方法对模型要求苛刻, 推导梯度复杂, 且消耗大量计算成本在水平集函数的初始化操作上, 因此其应用的模型有限.

IGA 是由 Hughes 等[19]提出的一种以样条理论为基础的物理仿真模拟方法. 形状优化设计和 IGA 方法有很好的相容性: (1) 形状优化需要频繁地调整几何外形, 由于 IGA 的分析模型和设计模型一致, 因此可通过调整外边界控制点直接更新模型形状, 且保持连续性; (2) IGA 摒弃了在大变形下对域内网格的重生成或更新, 可减少整体优化时间; (3) IGA 的精度高, 使用粗控制网格即可得到较为准确的仿真结果, 大大减少了设计变量数; (4) IGA 使用的 NURBS 具有简单高效的加细方法, 且细网格和粗网格之间存在解析映射, 可将细网格的仿真结果映射到粗网格上, 进一步提高仿真优化的精度. Hughes 等[19]对基于 NURBS 表示 IGA 与有限元分析进行了全面的对比, 在相同自由度下, IGA 在精度和效率上具有显著优势. 在应用于形状优化方法中, 由于等几何描述天然的高阶表示和局部支撑性, 比有限单元表示在边界连续性上具有一定优势, Yoon 等[20]从优化结果和灵敏度 2 个角度对 IGA 和有限元分析进行了详细的对比分析.

鉴于 IGA 在形状优化中的优势，本文提出一种基于 IGA 的超弹性模型形状优化方法，并在优化过程中加入了分析模型与设计模型间基于细分计算的位移和灵敏度传递，有效地改善了在自由度较高情况下，等几何超弹性形状优化中出现的边界形状扭曲问题，使得输出模型边界的光滑性得到提升. 本文方法首先利用 IGA 求解超弹性问题，得到高精度的仿真结果；然后计算优化目标的解析灵敏度数值；通过建立分析模型与设计模型分离的架构，传递灵敏度和位移解；最后通过移动渐近线(method of moving asymptotes, MMA)算法进行优化迭代，使模型收敛到最优形状. 通过多个形状优化实例，验证了本文方法的有效性和可靠性.

1　本文方法步骤

本文方法的步骤如下：

输入. NURBS 模型、材料参数、边界条件、目标函数、约束条件和设计变量.

输出. 优化后的 NURBS 模型.

Step1. 根据输入模型的几何信息、材料参数和边界条件完成矩阵装配，计算仿真数值解.

Step2. 根据求得的数值解和装配矩阵计算目标函数值和约束函数值，结合灵敏度计算方式求得目标函数和约束函数对各个设计变量的偏导值.

Step3. 将函数值和导数值导入优化算法中进行迭代更新，得到下一次迭代使用的设计变量值.

Step4. 根据设计变量值更新控制点坐标，重复上述步骤，直到目标函数收敛，输出优化结果.

2　NURBS 模型表达

NURBS 是一种构建灵活、计算高效的等几何曲面描述方法，被广泛应用于工程设计领域[21]. 为便于说明，首先给出其一般定义形式. 给定节点向量序列 $\boldsymbol{\Xi}=\left[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n+p+1}\right]$，其中，$\xi_i$ 表示参数节点，p 表示样条的次数，n 表示基函数数量. 根据 Cox-de Boor 递推公式有 B 样条基函数

$$\begin{cases} N_i^p(\xi)=\begin{cases}1, & \text{if}\ \xi_i\leqslant\xi<\xi_{i+1}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}, \ \text{if}\ p=0\\ N_i^p(\xi)=\dfrac{\xi-\xi_i}{\xi_{i+p}-\xi_i}N_i^{p-1}(\xi)+\\ \quad\dfrac{\xi_{i+p+1}-\xi}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+1}}N_{i+1}^{p-1}(\xi), \qquad \text{otherwise}\end{cases} \tag{1}$$

对式(1)中系数可能出现的除 0 问题，设定 $0/0=0$ 来避免. NURBS 是 B 样条的推广形式，在基函数中引入权重因子，可通过权重调整控制顶点和样条的距离. NURBS 曲面和实体分别定义为

$$\boldsymbol{S}(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{N_i^p(\xi)N_j^q(\eta)w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}N_i^p(\xi)N_j^q(\eta)w_{ij}} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{V}(\xi,\eta,\varsigma)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{t}\frac{N_i^p(\xi)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{t}N_i^p(\xi)}\rightarrow$$
$$\leftarrow\frac{N_j^q(\eta)N_k^r(\varsigma)w_{ijk}\boldsymbol{P}_{ijk}}{N_j^q(\eta)N_k^r(\varsigma)w_{ijk}} \tag{3}$$

式(2)(3)中序号 p，q，r 分别表示 3 个参数方向上节点向量次数；w 和 P 对应基函数的权重和控制点坐标；基函数采用式(1)中形式. 当所有权重因子为 1 时，NURBS 会退化为 B 样条. 为便于表示，将式(3)中 NURBS 实体简记为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(\xi,\eta,\varsigma)=\sum\limits_{s=1}^{n\times m\times t}N_s\boldsymbol{P}_s\\ N_s=\dfrac{N_i^p(\xi)N_j^q(\eta)N_k^r(\varsigma)w_{ijk}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{t}N_i^p(\xi)N_j^q(\eta)N_k^r(\varsigma)w_{ijk}}\end{cases} \tag{4}$$

其中，控制点序号 $s=mn(k-1)+n(j-1)+i$.

3　超弹性问题的 IGA

本文针对超弹性材料上的形状优化，本节阐述对超弹性问题的建模与计算.

首先考虑一般的超弹性问题. 设材料所在的初始几何域为 Ω_0，其上存在体积力 $\boldsymbol{b}_0$，外力边界为 Γ_{p}，Γ_{p} 上存在牵引力 $\boldsymbol{t}_0$. 根据虚功原理，在平衡状态下虚功方程为

$$\int_{\Omega_0}(\delta\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{S}\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega_0}\delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b}_0\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_{\mathrm{p}}}\delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}_0\mathrm{d}\Gamma \tag{5}$$

其中，$\delta\boldsymbol{u}$ 表示微小应变；$\boldsymbol{S}$ 表示应力张量；$\boldsymbol{E}$ 表示格林应变. 由于应变张量为对称形式，因此可表示为向量 $\boldsymbol{E}=\left[E_{xx},E_{yy},E_{zz},E_{xy},E_{yz},E_{zx}\right]^{\mathrm{T}}$，式(5)中变分 $\delta\boldsymbol{E}$ 可表示为

$$\delta\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}\cdot\delta\boldsymbol{u}=\left(\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}\right)\cdot\delta\boldsymbol{u} \tag{6}$$

其中，$\boldsymbol{B}$ 表示应变系数矩阵；$\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}$ 与 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}$ 分别表示其中线性部分和非线性部分. 根据超弹性本构方程与虚功原理，可结合式(5)(6)建立离散的系统平衡方程

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}=\int_{\Omega_0}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}\,\mathrm{d}\Omega=\boldsymbol{F} \tag{7}$$

其中，$\boldsymbol{K}$ 表示刚度矩阵；$\boldsymbol{u}$ 表示位移向量；$\boldsymbol{F}$ 表示荷载向量. 上述计算中，式(7)中应变系数矩阵的线性部分和非线性部分计算公式分别为

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}=\left[\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{2}\cdots\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{m}\right] \tag{8}$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}=\left[\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}^{1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}^{2}\cdots\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}^{m}\right]=\boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2\cdots\boldsymbol{G}_m\right] \tag{9}$$

其中，对于 $i\in[1,m]$，$\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{i}=[\partial]N_i\boldsymbol{I}_{3\times3}$，

$$[\partial]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}&0&0&0&\dfrac{\partial}{\partial z}&\dfrac{\partial}{\partial y}\\0&\dfrac{\partial}{\partial y}&0&\dfrac{\partial}{\partial z}&0&\dfrac{\partial}{\partial x}\\0&0&\dfrac{\partial}{\partial z}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial x}&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

其中，$\boldsymbol{I}_{3\times3}$ 为维度为 3 的单位矩阵，N_i 表示第 i 个控制点的形函数，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{G}_i$ 分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial X}&0&0&0&\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial Z}&\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial Y}\\0&\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial Y}&0&\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial Z}&0&\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial X}\\0&0&\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial Z}&\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial Y}&\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial X}&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{G}_i=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{I}_{3\times3}&\dfrac{\partial N_i}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{I}_{3\times3}&\dfrac{\partial N_i}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{I}_{3\times3}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 表示变形后坐标向量空间；(X,Y,Z) 表示初始状态坐标空间；$\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}$ 矩阵大小为 $6\times3m$，m 表示基函数个数；$\boldsymbol{G}_i$ 矩阵大小为 9×3. 进而可结合式(8)(9)计算式(7)中应变系数矩阵；载荷向量 $\boldsymbol{F}$ 维度为 $3m$，采用等效节点载荷形式.

由于式(7)是非线性方程组，因此本文使用牛顿迭代法求解上述非线性系统. 牛顿迭代法沿着函数的梯度反方向寻找极值，需要求得函数的导数. 对式(7)求导得

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})=\int_{\Omega_0}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_0}\mathrm{d}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\,\mathrm{d}\Omega \tag{10}$$

其中，$\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}$ 称为切线刚度矩阵. 根据增量材料矩阵的定义，应力增量为 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{D}_{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{E}$，其中，$\boldsymbol{D}_{\mathrm{T}}$ 表示材料当前状态的弹性矩阵. 将 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 代入式(10)第 1 项中，并根据 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{u}$ 展开应变张量，得到

$$\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\,\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega_0}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\Omega=\boldsymbol{K}_{\mathrm{D}}\mathrm{d}\boldsymbol{u} \tag{11}$$

式(11)中矩阵展开 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}$，得到几何刚度矩阵

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{D}}=\int_{\Omega_0}\left(\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{D}_{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{N}}\right)\mathrm{d}\Omega \tag{12}$$

式(12)可代入式(11)计算. 继而考虑式(10)的第 2 项，由于 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 与位移无关，因此满足

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}=(\mathrm{d}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{G})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\mathrm{d}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} \tag{13}$$

后 2 项可表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\hat{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{G}\mathrm{d}\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_{11}\boldsymbol{I}_{3\times3}&\boldsymbol{S}_{12}\boldsymbol{I}_{3\times3}&\boldsymbol{S}_{13}\boldsymbol{I}_{3\times3}\\\boldsymbol{S}_{12}\boldsymbol{I}_{3\times3}&\boldsymbol{S}_{22}\boldsymbol{I}_{3\times3}&\boldsymbol{S}_{23}\boldsymbol{I}_{3\times3}\\\boldsymbol{S}_{13}\boldsymbol{I}_{3\times3}&\boldsymbol{S}_{23}\boldsymbol{I}_{3\times3}&\boldsymbol{S}_{33}\boldsymbol{I}_{3\times3}\end{bmatrix}\boldsymbol{G}\mathrm{d}\boldsymbol{u} \tag{14}$$

将式(13)(14)联立后得

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}=\mathrm{d}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}=\int_{\Omega_0}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{G}\,\mathrm{d}\Omega \tag{15}$$

式(15)中矩阵 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}$ 是弹性刚度矩阵，根据选择的超弹性材料应变能函数对应变求导得到. 最后，将式(12)(15)分别代入式(10)，得到切线刚度矩阵表达 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}=\boldsymbol{K}_{\mathrm{D}}+\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}$.

式(5)~式(15)中给出了各矩阵解析形式，进而可对超弹性问题进行等几何求解，其流程如图 1 所示. 首先给定几何模型、边界条件、材料参数和收敛误差；然后由式(10)获得切向刚度矩阵和当前残差，通过组装获得全局刚度矩阵，并进行迭代求解. 重复上述过程，直至达到收敛准则：位移的最大相对增量小于指定收敛标准；残差向量的范数小于指定收敛标准. 其中，前者保证问题收敛到极值，后者保证残差方程成立.

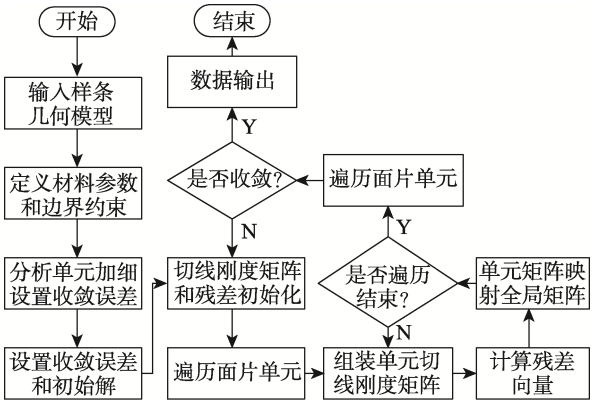


图 1 超弹性 IGA 流程

图 1 中，假设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^n$ 是方程的第 n 次迭代近似解，由牛顿迭代法的流程可知，此时解的修正量需要满足残差函数泰勒展开式的前 2 项，从而得到修正量的形式为 $\Delta\boldsymbol{u}^n=\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}^n)^{-1}\left(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{K}(\boldsymbol{u}^n)\right)$. 其中，$\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}^n)$ 是将第 n 次的位移值代入切线刚度矩阵得到的，残差值通过直接代入平衡方程装配得到. 此外，为了简化计算，本文未考虑随位移变化下的节点受力，因此右端项的载荷向量 $\boldsymbol{F}$ 保持不变.

4　优化问题及优化流程

形状优化问题的数学表达形式为

$$\begin{cases}\min\limits_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \begin{cases}\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x})\leqslant\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x}_{\min}\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{x}_{\max}\end{cases} \end{cases}, \begin{matrix} \\ \\ i=1,2,\cdots,n_{\mathrm{h}},\ j=1,2,\cdots,n_{\mathrm{q}}\end{matrix}.$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 表示设计变量组成向量；$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 表示目标函数；$\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x})$ 表示等式约束，一般由平衡方程表示；n_{h} 表示等式约束数量；$\boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x})$ 为不等式约束，常用应力、位移或体积等作为约束条件；n_{q} 表示不等式约束数量.

形状优化中的设计变量通常为NURBS模型的边界控制点，即采用式(4)中形式. 常用的优化目标为柔度 c 最小或目标位移 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}}$ 最小，公式分别为

$$\begin{cases}\min\limits_{\boldsymbol{u}} c=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} \\ \text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F} \\ V\leqslant V^*\end{cases}\end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases}\min\limits_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u}_{\mathrm{m}}=\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} \\ \text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F} \\ V\leqslant V^*\end{cases}\end{cases} \tag{17}$$

其中，$\boldsymbol{I}$ 表示一个仅包含 0, 1 的选择向量，向量长度等于控制点数量，若目标位移节点是某个控制节点，则 $\boldsymbol{I}$ 中在该控制点索引处值为 1；V^* 表示约束的体积或面积上限，体积的计算方式为

$$V=\sum_{k=1}^{n_{\mathrm{e}}}\int_{\hat{\Omega}_k}\boldsymbol{N}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k\left|\boldsymbol{J}_k\right|\mathrm{d}w.$$

其中，$\left|\boldsymbol{J}_k\right|$ 表示第 k 个单元的雅可比行列式，$\hat{\Omega}_k$ 表示单元所在参数域范围，$\boldsymbol{N}_k$ 表示第 k 个单元上控制点形函数构成的列向量，$\boldsymbol{P}_k$ 为第 k 个单元上控制点坐标构成的向量.

优化算法是求解优化问题的关键，此处使用MMA 算法进行优化迭代，通过将原始问题转化为一系列严格凸的近似子问题来逐步搜索最优解[22]. 由于 MMA 算法需要输入目标函数和约束的导数，因此需要先使用 IGA 计算数值大小，整个流程如图 2 所示.

首先确定模型边界和优化目标，本工作中采取式(16)(17)中优化目标，继而根据输入模型的几何信息和边界条件完成矩阵装配，计算位移解；然后根据求得目标函数值和约束函数值，结合灵敏度计算方式，获得目标函数和约束函数对各个设计变量偏导值；再将函数值和导数值导入优化求解算法中进行迭代更新，得到下次迭代使用的设计变量值；重复上述操作，直到目标函数收敛到极值且满足约束条件或者优化迭代次数达到上限. 其中，由于输入模型均为 IGA 使用的 NURBS 模型，因此可直接控制节点坐标移动，保持原模型的光滑性.

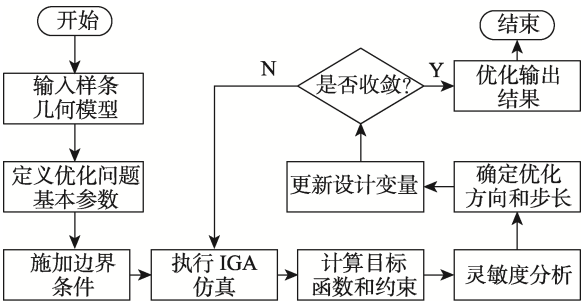


图 2　形状优化流程

5　灵敏度计算

灵敏度分析是用于评估目标函数对设计变量扰动的敏感性指标，灵敏度数值表示模型目标受到该设计变量的影响程度，在评估模型的鲁棒性和确定优化问题搜索方向上极为有效. 等几何形状优化过程中，几何域 Ω 会因设计变量的变化而变化，但相应的参数域 $\hat{\Omega}$ 不会受到影响，从而使单元保持良好的质量. 对于超弹性问题，在每次分析过程中采用牛顿法迭代直至收敛，其中，第 i 次迭代步后可计算当前残差为 $\boldsymbol{R}^i=\boldsymbol{F}-\boldsymbol{f}_{\mathrm{int}}^i$. 其中，$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{int}}^i$ 分别表示结构所受外力和当次迭代中由位移解 $\boldsymbol{u}$ 计算出的内力；对于柔度目标函数，记最终收敛时的残差为 $\boldsymbol{R}$. 对柔度目标函数可引入伴随变量组成的向量 $\boldsymbol{\lambda}$，生成公式 $c=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}$；继而对其求设计变量 x_i 的灵敏度，有

$$\frac{\partial c}{\partial x_i}=\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\boldsymbol{u}}\right)\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_i}+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial x_i} \tag{18}$$

最终收敛时残差 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{0}$，因此 $\boldsymbol{\lambda}$ 的任意取值不会造成目标函数值的变化. 所以，可设式(18)第 1 项括号中的值为 $\boldsymbol{0}$，则可得 $\boldsymbol{\lambda}=-\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\boldsymbol{u}}\right)^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$；另外，根据切线刚度矩阵的定义，有 $\boldsymbol{\lambda}=\left(\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}\right)^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$. 求解上述线性系统即可获得伴随变量值. 通过以上推导，仅需求解式(18)中第 2 项，根据残差 $\boldsymbol{R}$ 定义有

$$\frac{\partial c}{\partial x_i}=-\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{f}_{\mathrm{int}}}{\partial x_i}=-\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\left(\boldsymbol{K}_{\mathrm{D}}+\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}\right)}{\partial x_i}\boldsymbol{u}=$$
$$-\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}}{\partial x_i}\boldsymbol{D}_{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x_i}+\right.$$
$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{D}_{\mathrm{T}}}{\partial x_i}\boldsymbol{B}+\frac{\partial \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}}{\partial x_i}\hat{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{G}+$$
$$\left.\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{M}}\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x_i}+\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \hat{\boldsymbol{M}}}{\partial x_i}\boldsymbol{G}\right)\boldsymbol{u} \tag{19}$$

其中，$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x_i}$ 可结合式(8)(9)求得；$\frac{\partial \boldsymbol{D}_{\mathrm{T}}}{\partial x_i}$ 和 $\frac{\partial \hat{\boldsymbol{M}}}{\partial x_i}$ 需根据具体采用的超弹性材料模型进行计算. 对于位移目标函数的推导类似，此处不再赘述. 由于在优化模型中存在对体积的约束，本文给出体积约束相对于设计变量的灵敏度计算，公式为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x_i}=\sum_{k=1}^{n_{\mathrm{e}}}\int_{\hat{\Omega}_k}\boldsymbol{N}_k^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{P}_k}{\partial x_i}\left|\boldsymbol{J}_k\right|+\boldsymbol{N}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k\left|\boldsymbol{J}_k\right|\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{J}_k^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{J}_k}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}w \tag{20}$$

其中，$\boldsymbol{N}_k$ 表示单元 k 上所有控制点形函数构成的向量. 由于控制点具有多个维度，因此设计变量的选择需要具体到某一控制点的某个维度上，其中，$\frac{\partial \boldsymbol{P}_k}{\partial x_i}$ 的计算可根据具体设计变量与控制点坐标的几何映射来确定.

在形状优化方法中，通常用于生成物理问题数值解的分析模型与用于绑定设计变量的设计模型保持一致. 由于在超弹性问题的形状优化中非线性程度高，往往控制点较多的分析模型会在优化过程中带来负面影响，如造成边界上抖动和扭曲的现象，因此本文提出一种分析模型和设计模型具有不同分辨率的方法. 其中，优化使用的模型为单元较少的粗控制网格模型，此类模型可以使用少数控制节点改变模型外形，具体采用式(19)(20)中灵敏度进行优化，但分析精度略有不足；分析使用的模型为单元较多的细控制网格，由粗控制网格经过多次 h -细化后获得，以提高分析精度. 其中，h -细化方法可在保持原始曲面形状的前提下增加控制点数量. 图 3 所示为一组形状优化结果的对比. 可以看出，图 3a 中，在边界处存在扭曲，光滑性较差；图 3b 中，采用了与图 3a 同样的细控制网格进行 IGA，局部控制点稀疏的粗控制网格作为分析模型，边界的光滑性更佳.

具体实现中，由于采用的几何描述为 NURBS 面片，h -细化前后的模型在控制节点层面存在显式的映射关系. 记设计模型中控制点构成向量为 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}$，分析模型中控制点构成向量为 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}$，则根据 h -细化

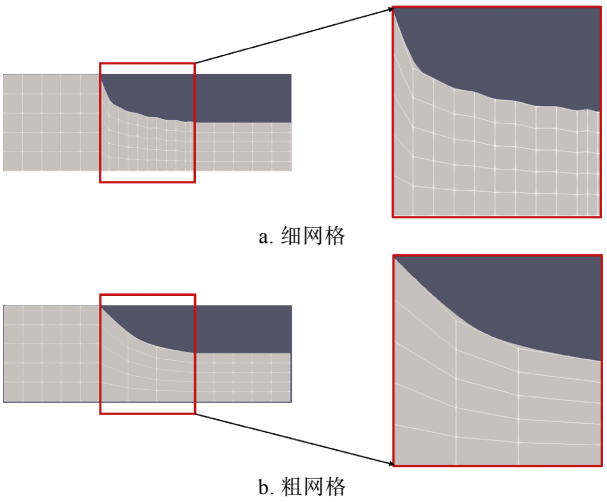


图 3 一组形状优化结果对比

方法在 NURBS 曲面上的规则，存在线性映射

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{S}_{\mathrm{h}}\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}.$$

其中，具体细分矩阵 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{h}}$ 中的系数计算可参考文献[21]. 与此类似，分析模型的灵敏度值同样可通过该线性映射传递到设计模型的设计变量上. 因此，首先在分析模型层面计算灵敏度，设计模型可用分析模型的灵敏度信息进行优化；然后将优化后的控制点坐标映射到分析模型上实现分析模型的外形改变，完成 1 次优化迭代.

6 数值实验

使用多种模型对本文提出的形状优化方法进行实验. 本文实验均在 Windows 操作系统，Intel i5-11400H 2.70 GHz CPU, 8 GB 内存下进行.

在二维悬臂梁模型优化问题中，其定义和边界受力条件如文献[6-7]所示. 悬臂梁形状优化的目标是在体积约束下使荷载点的垂直位移最小化，初始模型如图 4 所示，其中，梁长度 L =30 mm，高度 H =6 mm，允许的高度变化范围是 1.0~1.5 mm；设计模型的控制网格为 6×2 大小，横轴参数方向为二次样条，纵轴参数方向为一次样条；杨氏模量为 200 GPa，泊松比为 0.3，边界条件为左端固定，右下端点受到沿纵轴向下的力 $\boldsymbol{F}$ =10 N.

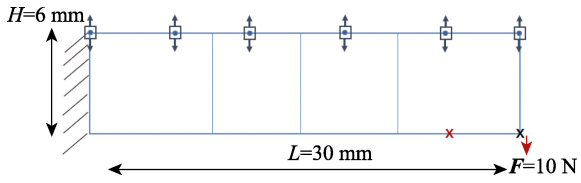
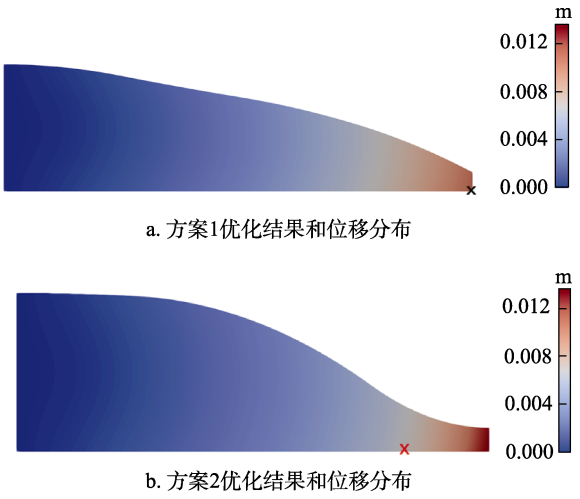


图 4 悬臂梁初始模型

进行优化时，使用2种优化目标方案测试优化结果，优化的设计变量均为模型上边界的6个控制点纵轴坐标. 方案1的优化目标是在悬臂梁面积不超过最大面积的 70%前提下的黑色叉号处的位移最小，最大面积指模型优化范围内的最大面积，即300；方案 2 的优化目标则是红色叉号处的位移最小. 为了确保分析的准确性，模型被细分 4 次，总共 1 024 个分析单元. 选择的材料模型是 St.Venant-Kirchhoff 材料，优化结果如图 5 所示.



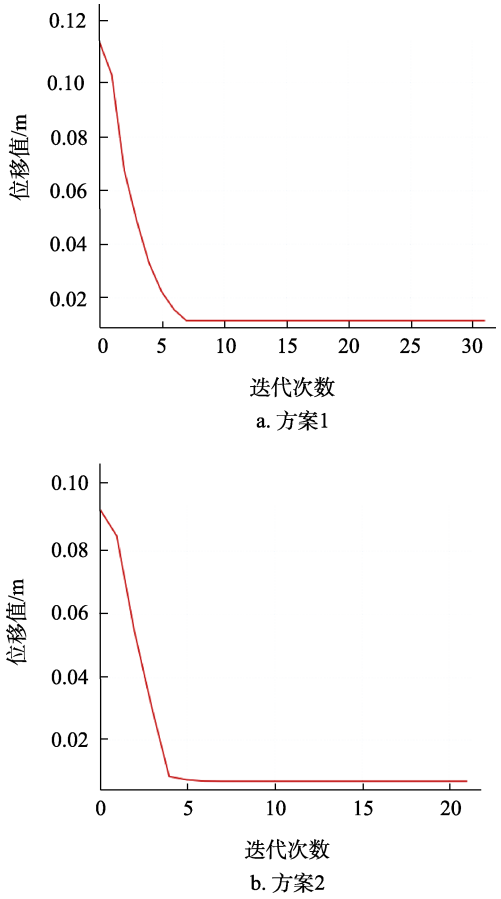
a. 方案1优化结果和位移分布

b. 方案2优化结果和位移分布

图 5　悬臂梁优化结果对比

方案 1 迭代过程中，端点位移值从优化前的 0.115 2 m 下降到 0.011 38 m，迭代历史如图 6a 所示；可以看出，优化过程收敛较快，在 10 次以内目标值收敛到极小值范围，且目标函数减少为原数值的 10%左右，完成了优化预期. 作为对比，方案 2 迭代历史如图 6b 所示，可以看出，迭代在第 23 次结束，且在 5 次迭代内趋于平滑，收敛速度更快. 实验结果表明，方案 2 迭代中出现了类似方案 1 优化的结果，但由于此时目标点在内部，因此模型外形继续调整为有利于目标点抵抗变化的形状. 优化的最终形状加强了位移固定边和目标点之间的控制，导致中间部分更为凸起，而且目标点右侧位置的部分更为平缓，整体结果使得目标点具有更强的抵抗变形的能力.

带孔平板是另一个数值仿真和形状优化的经典模型，其原模型是一个中间带孔洞的大型板，板的四面受到向外的拉伸力. 由于受力和模型是对称的，因此可以仅对板的四分之一进行建模仿真，其他部分仿真结果根据这四分之一部分映射得到. 带孔平板形状优化目标是在面积约束下柔度最小，Wall 等[6]设定的目标和约束下平板孔洞最佳的形状是圆形. 本文对该问题模型进行调整，使用 2 张



a. 方案1

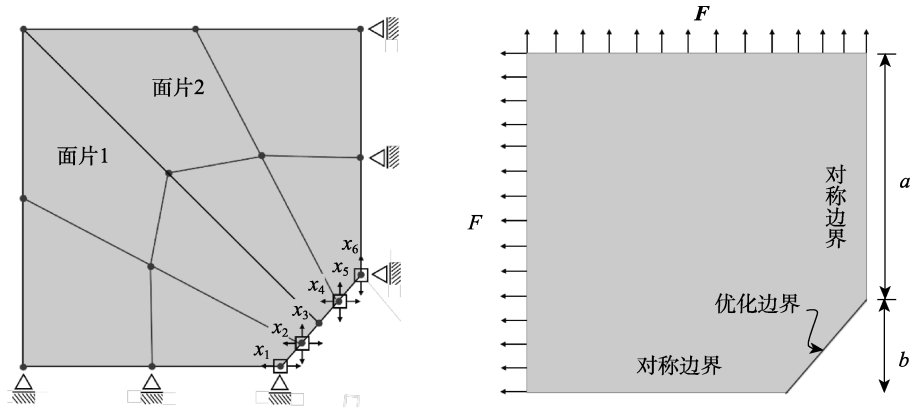
b. 方案2

图 6　悬臂梁优化迭代次数对比

样条曲面构建模型；重新选择设计变量和约束，检验多片模型下形状优化结果的正确性，并测试不同体积约束对平板形状优化结果的影响.

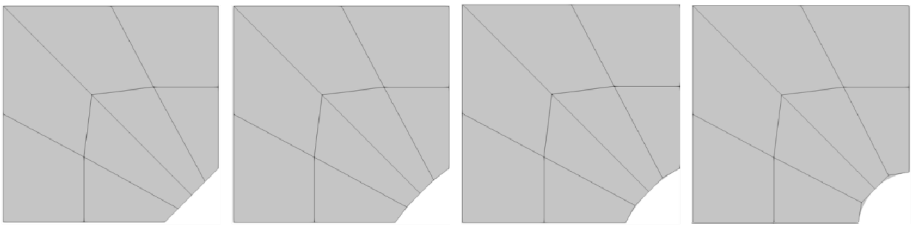
四分之一带孔平板初始模型如图 7 所示，平板模型分成 2 张面片，每张面片是一个双二次变量 NURBS 曲面，控制网格均为 3×3 大小；2 张面片在对称轴处交界，有 3 个控制点在中间重合；板的对称边界长度 a =3 mm，孔边界是边长 b =1 mm 的正方形斜边；杨氏模量为 200 GPa，泊松比为 0.3，边界条件是对称边界固定，板的左边界和上边界受到向外的拉力 $\boldsymbol{F}$ =10 N/mm^2. 优化的设计变量为控制孔洞的 4 个控制点，图 7 中，2 个控制点的优化方向是 x 轴和 y 轴，因此总共有 6 个设计变量，本文以 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 代表 6 个设计变量值；设计变量允许的变化范围是 0~1 mm，即以 b 为边长的正方形区域内. 需要注意的是，4 个控制点的中间位置还有一个重合控制点，该控制点不作为设计变量. 为了保证优化后模型的对称性，中间控制点以约束形式加入优化流程，即该控制点的位置始终处于 x_2 和 x_3 控制点的中间位置. 对于算例中最大面积为 4×4=16 的正方形平板，此处设 3 种面积

约束, 对应以下 3 种优化方案: (1) 小于最大面积的 96%; (2) 小于模型面积; (3) 小于最大面积的 99%. 3 种约束分别对比小于、等于和大于原面积 3 种情况下的形状优化, 优化结果如图 8 所示.

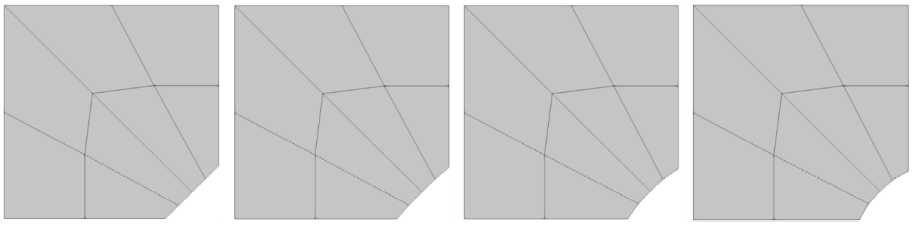


a. 带孔平板模型 b. 分片控制网格

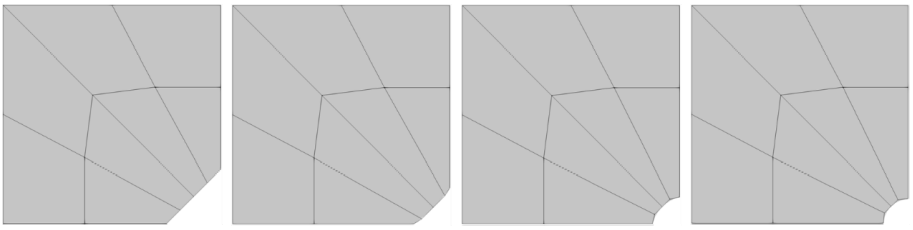
图 7 四分之一带孔平板初始模型



a. 小于最大面积 96%(15.36 mm^2)



b. 小于最大原面积(15.50 mm^2)



c. 小于最大面积 99%(15.84 mm^2)

图 8 带孔平板形状优化的迭代过程

在第 1 种约束条件下, 模型经过 44 次迭代得到了经典的四分之一圆孔形状, 柔度值从一开始的 922.117×10^{-5} 变为 941.112×10^{-5}, 增加了 18.995×10^{-5}. 虽然模型目标是柔度值最小, 但模型的面积约束是小于面积上限的 96%, 即 15.36 mm^2, 优化后的面积必定会比原面积 15.50 mm^2 小, 所以柔度值会上升. 在第 2 种约束条件下, 模型经过 66 次迭代后收敛, 此时孔洞形状变为椭圆弧, 柔度值下降到 916.452×10^{-5}. 在第 3 种约束条件下, 模型迭代 43 次后收敛, 此时孔洞变为更小的四分之一圆孔形状, 因为此时约束的面积上限增加, 平板可以通过增大面积减少结构应变能的存储. 表 1 所示为初始设计超弹性优化结果的类型、迭代次数、柔度值和面积对比. 由于该带孔平板示例中面片包含控制

点数较少，因此效率较高，此处单独给出 3 种约束下测试的平均用时，整个形状优化过程平均用时为 1 679 ms，其中，在灵敏度分析上的平均用时为 545 ms，在超弹性分析上的平均用时为 718 ms.

表 1　超弹性材料带孔平板优化结果信息

类型	迭代次数	柔度值	面积/mm^2
初始设计	N	922.117×10^{-5}	15.50
面积约束 1	43	941.112×10^{-5}	15.36
面积约束 2	63	916.452×10^{-5}	15.50
面积约束 3	41	854.764×10^{-5}	15.84

图 9 所示为开口扳手的模型设计和边界参数，其中，b =2.5 mm，h =5 mm，L =25 mm，厚度 t = 3 mm，黑色框点代表设计变量，红色框点为联合变量. 开口扳手是一个上下 2 张面片的模型，每张面片的长、宽均为三次样条，厚度方向是线性样条，控制网格为 12×8×2；在顶点处施加固定位移条件，右边界的中间点处施加向上的力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}}$. 模型的目标是在体积约束下最小化柔度，杨氏模量为 200 GPa，泊松比为 0.3. 可以看出，联合变量位移大小始终与最右侧的设计变量位移大小一致，其他内部点为伴随变量，它们随着边界移动而等比例移动.

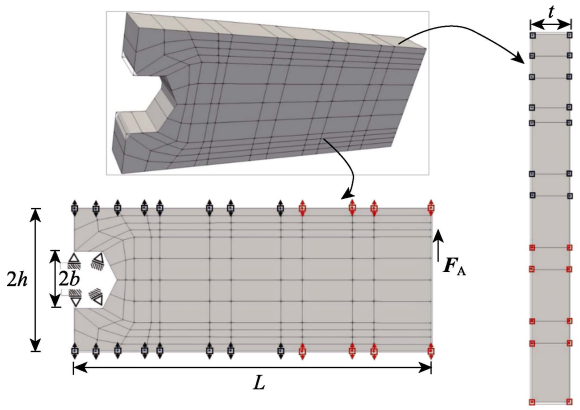


图 9　开口扳手初始模型和参数信息

图 10 所示为在超弹性材料下不同迭代次数时形状优化的结果，在 6 次迭代后收敛. 可以看出，模型的体积约束是原体积的 33%，优化结果在满足约束下得到了符合扳手的结果，满足优化目标，良好地展示了本文优化方法的准确性. 此外，本文在该例子中对程序用时进行了统计，其中，单次IGA平均用时为 204 ms，每次超弹性分析平均需要 7 个迭代步达到收敛，每次能量函数灵敏度与约束函数灵敏度计算平均用时分别为 334 ms 和 121 ms.

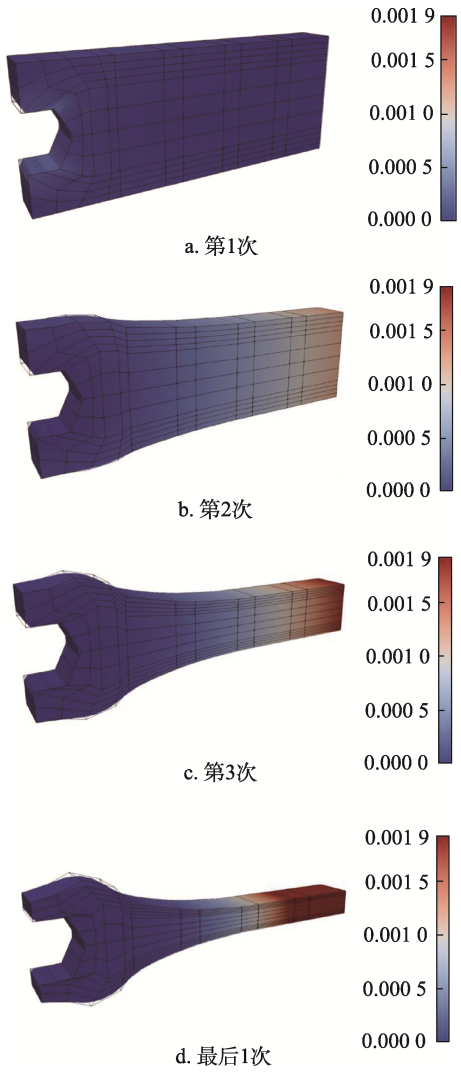


图 10　开口扳手超弹性材料下不同迭代次数时的形状优化结果

7　结　语

本文提出一种基于 IGA 的超弹性材料模型形状优化方法，给出 2 个常用的优化目标，并提供其灵敏度计算方式，保证优化的质量和速度；仿真和优化中均使用样条模型，通过改变控制点坐标直接实现原模型的形状变化，且始终能保持几何外形的连续光滑. 通过对多个不同的模型进行实验，证明了本文方法的准确性和鲁棒性.

本文方法可以应用在二维或三维的多片模型中，但在面对多片模型时，未考虑如何保证片与片交界点处的连续性，因此当设计变量位于交界点时容易出现不光滑的优化结果，这是下一步工作需要改进的问题. 此外，本文工作集中于单目标的优化问题，多目标下的形状优化也是未来工作的重点.

参考文献(References):

[1] Hassani B, Tavakkoli S M, Moghadam N Z. Application of isogeometric analysis in structural shape optimization[J]. Scientia Iranica, 2011, 18(4): 846-852

[2] Burman E, Elfverson D, Hansbo P, *et al*. Shape optimization using the cut finite element method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 328: 242-261

[3] Ertl F J, Dhondt G, Bletzinger K U. Vertex assigned morphing for parameter free shape optimization of 3-dimensional solid structures[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2019, 353: 86-106

[4] Lebair T M, Shen J L. Minimax lower bound of *k*-monotone estimation in the sup-norm[C] //Proceedings of the 53rd Annual Conference on Information Sciences and Systems. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2019: 1-6

[5] Kamensky D, Hsu M C, Yu Y, *et al*. Immersogeometric cardiovascular fluid-structure interaction analysis with divergence-conforming B-splines[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2017, 314: 408-472

[6] Wall W A, Frenzel M A, Cyron C. Isogeometric structural shape optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2008, 197(33-40): 2976-2988

[7] Qian X P. Full analytical sensitivities in NURBS based isogeometric shape optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010, 199(29-32): 2059- 2071

[8] Song Y U, Hur J Y, Youn S K. 2D Isogeometric shape optimization considering both control point positions and weights as design variables[C] //Proceedings of the 10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization. Orlando: ISSMO, 2013: 1-8

[9] Seo Y D, Kim H J, Youn S K. Shape optimization and its extension to topological design based on isogeometric analysis[J]. International Journal of Solids and Structures, 2010, 47(11-12): 1618-1640

[10] Blanchard L, Duvigneau R, Vuong A V, *et al*. Shape gradient computation in isogeometric analysis for linear elasticity[OL]. [2023-07-18]. https://www.researchgate.net/publication/278629214_Shape_Gradient_Computation_in_Isogeometric_Analysis_for_Linear_Elasticity

[11] López J, Anitescu C, Valizadeh N, *et al*. Structural shape optimization using Bézier triangles and a CAD-compatible boundary representation[J]. Engineering with Computers, 2020, 36(4): 1657-1672

[12] Chen Long, Zhu Ying, Xu Li, *et al*. Isogeometric optimization method for structural shapes based on analysis of weight Sensitivity[J]. China Mechanical Engineering, 2020, 31(11): 1306-1314(in Chinese)
(陈龙, 朱颖, 徐力, 等. 基于权重灵敏度分析的结构形状等几何优化方法[J]. 中国机械工程, 2020, 31(11): 1306-1314)

[13] Weeger O, Narayanan B, Dunn M L. Isogeometric shape optimization of nonlinear, curved 3D beams and beam structures[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2019, 345: 26-51

[14] Osher S J, Santosa F. Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints: I. Frequencies of a two-density inhomogeneous drum[J]. Journal of Computational Physics, 2001, 171(1): 272-288

[15] Martínez-Frutos J, Herrero-Pérez D, Kessler M, *et al*. Robust shape optimization of continuous structures via the level set method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2016, 305: 271-291

[16] Fujii G, Akimoto Y. Topology-optimized thermal carpet cloak expressed by an immersed-boundary level-set method via a covariance matrix adaptation evolution strategy[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2019, 137: 1312-1322

[17] Picelli R, Townsend S, Brampton C, *et al*. Stress-based shape and topology optimization with the level set method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 329: 1-23

[18] Song Y L, Ma Q P, He Y, *et al*. Stress-based shape and topology optimization with cellular level set in B-splines[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2020, 62(5): 2391-2407

[19] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(39-41): 4135-4195

[20] Yoon M, Lee J, Koo B. Shape design optimization of thermoelasticity problems using isogeometric boundary element method[J]. Advances in Engineering Software, 2020, 149: Article No.102871

[21] Piegl L, Tiller W. The NURBS book[M]. Heidelberg: Springer, 1995

[22] Svanberg K. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987, 24(2): 359-373