带局部参数的五次 Catmull-Rom 样条

李军成, 刘成志, 刘珊君, 胡丽娟

(湖南人文科技学院数学与金融学院 娄底 417000)
(2528@huhst.edu.cn)

摘 要: 针对五次 Catmull-Rom 样条曲线在形状调整方面存在的不足, 提出带局部参数的五次 Catmull-Rom 样条曲线. 首先构造带局部参数的五次 Catmull-Rom 样条基函数, 并由此定义了带局部参数的五次 Catmull-Rom 样条曲线, 称之为改进五次 Catmull-Rom 样条曲线; 然后给出利用应变能极小构造光顺改进五次 Catmull-Rom 样条曲线的方法; 最后讨论对应的改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数, 对插值误差进行分析, 并给出构造最优插值函数的方法. 曲线设计与函数插值实例结果表明, 所提曲线保留原五次 Catmull-Rom 样条曲线的插值性、C^2 连续性、形状可调性等主要特性, 且在控制顶点保持不变时可利用所含自由参数实现形状的局部调整; 与优化后的原五次 Catmull-Rom 样条曲线相比, 优化后的改进五次 Catmull-Rom 样条曲线更光顺; 最佳改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数的整体误差小于最佳原五次 Catmull-Rom 样条插值函数.

关键词: 插值样条; Catmull-Rom 样条; 局部参数; 形状调整
中图法分类号: TP391.72 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2025-00195

The Quintic Catmull-Rom Spline with Local Parameters

Li Juncheng, Liu Chengzhi, Liu Shanjun, and Hu Lijuan

(*College of Mathematics and Finance, Hunan University of Humanities, Science and Technology, Loudi* 417000)

Abstract: Aiming at the shortcomings in shape adjustment of the quintic Catmull-Rom spline curve, a quintic Catmull-Rom spline curve with local parameters is proposed. Firstly, the quintic Catmull-Rom spline basis functions with local parameters are constructed, and the corresponding quintic Catmull-Rom spline curve with local parameters is defined, which is called the improved quintic Catmull-Rom spline curve. Then, the method for constructing fair improved quintic Catmull-Rom spline curve using strain energy minimization is presented. Finally, the improved quintic Catmull-Rom spline interpolation function is discussed, the interpolation error of the interpolation function is analyzed, and the method for constructing the optimal interpolation function is given. The results of curve design and function interpolation examples show that the proposed curve retains the main characteristics of the previous quintic Catmull-Rom spline curve, such as interpolation, C^2 continuity, and shape adjustability, and can use the free parameters to achieve local shape adjustment while keeping the control points unchanged. Compared with the optimized previous quintic Catmull-Rom spline curve, the optimized improved quintic Catmull-Rom spline curve has better fairness. The overall error of the optimal improved quintic Catmull-Rom spline interpolation function is smaller than that of the optimal previous quintic Catmull-Rom spline interpolation function.

Key words: interpolatory spline; Catmull-Rom spline; local parameter; shape adjustment

收稿日期: 2025-06-17; 修回日期: 2025-08-18. **基金项目**: 湖南省自然科学基金(2024JJ7254); 国家自然科学基金(12101225).
李军成(1982—), 男, 博士, 教授, 硕士生导师, CCF 会员, 主要研究方向为 CAGD; **刘成志**(1986—), 男, 博士, 副教授, 硕士生导师, CCF 会员, 主要研究方向为 CAGD; **刘珊君**(1995—), 女, 硕士, 讲师, 主要研究方向为 CAGD; **胡丽娟**(1989—), 女, 硕士, 讲师, 主要研究方向为 CAGD.

在计算机辅助几何设计、计算机图形学等领域, 利用基函数与控制顶点的线性组合构造参数曲线是一种常见方式, 这些参数曲线可大致分为逼近型曲线与插值型曲线 2 类. 逼近型曲线以逼近控制多边形为目标, 如 Bézier 曲线、B 样条曲线、NURBS 曲线等[1]. 插值型曲线则以插值控制顶点为目标, 如三次 Cardinal 样条曲线[2]、三次 Catmull-Rom 样条曲线[3]等. 本文以插值型曲线为研究对象.

三次 Catmull-Rom 样条曲线作为一种插值型曲线, 因其 C^1 连续性且无需求解方程系统即可以直接插值控制顶点, 已应用在许多工程领域[4-6]. 但是当控制顶点固定时, 三次 Catmull-Rom 样条曲线的形状无法调整, 不利于其在工程领域中的应用. 为了解决这一问题, 一种常见的做法是构造带自由参数的 Catmull-Rom 样条曲线. 文献[7]将三次 Catmull-Rom 样条曲线的定义区间由 $[0,1]$ 扩展为 $[0,\alpha]$, 得到含自由参数 α 的三次 α-Catmull-Rom 样条曲线; 文献[8-9]分别通过将基函数的次数提高到五次和七次, 得到了 C^2 连续的五次 Catmull-Rom 样条曲线和 C^3 连续的七次 Catmull-Rom 样条曲线; 文献[7-9]构造的 Catmull-Rom 样条曲线虽然在控制顶点固定时可利用所含自由参数进行形状调整, 但仅能实现形状的整体调整, 无法做到形状的局部调整. 在动画设计、产品外形设计、游戏角色设计等实际问题中, 往往需要对插值曲线的形状进行局部调整, 以更好地满足设计意图和功能需求. 虽然文献[10]提出一种具有局部形状可调性的四次 Catmull-Rom 样条曲线, 但该曲线仅为 C^1 连续, 不适用于连续性要求较高的应用场合.

为了使 Catmull-Rom 样条曲线同时具有较高阶连续性和局部形状可调性, 本文在文献[8]的基础上提出一种带有局部参数的五次 Catmull-Rom 样条曲线, 在保留原五次 Catmull-Rom 样条曲线 C^2 连续性的前提下, 可在控制顶点固定时通过所含自由参数对其形状进行局部调整. 进一步, 本文还讨论了该样条曲线的光顺问题、对应的样条插值函数及其最优插值问题.

1　原五次 Catmull-Rom 样条曲线

给定控制顶点 $\boldsymbol{p}_i \in \mathbb{R}^d\ (d=2,3; i=0,1,\cdots,n)$, 对于 $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, 原五次 Catmull-Rom 样条曲线可表示[8]为

$$\boldsymbol{r}_i(t)=\sum_{j=0}^{3} b_j(t)\,\boldsymbol{p}_{i+j},\ i=0,1,\cdots,n-3.$$

其中, $b_j(t)\ (j=0,1,2,3)$ 表示原五次 Catmull-Rom 样条基函数, 表达式为

$$\begin{cases} b_0(t)=\dfrac{1}{2}\left(-t+(3-2\alpha)t^2-(3-6\alpha)t^3+(1-6\alpha)t^4+2\alpha t^5\right) \\ b_1(t)=\dfrac{1}{2}\left(2-(6-4\alpha)t^2+(5-14\alpha)t^3-(1-16\alpha)t^4-6\alpha t^5\right) \\ b_2(t)=\dfrac{1}{2}\left(t+(3-2\alpha)t^2-(1-10\alpha)t^3-(1+14\alpha)t^4+6\alpha t^5\right) \\ b_3(t)=\dfrac{1}{2}\left(-(1+2\alpha)t^3+(1+4\alpha)t^4-2\alpha t^5\right) \end{cases}.$$

由文献[8]可知, 原五次 Catmull-Rom 样条曲线不仅插值 $\boldsymbol{p}_k\ (k=1,2,\cdots,n-1)$, 满足 C^2 连续, 且在控制顶点固定时可通过修改 α 的取值对其形状进行调整, 这些优点为插值曲线的构造提供了便利. 但是, α 对原五次 Catmull-Rom 样条曲线的形状调整是整体性的, 无法实现对曲线形状的局部调整.

为了增强原五次 Catmull-Rom 样条曲线的形状表达能力, 下面构造一种形状局部可调的五次 Catmull-Rom 样条曲线.

2　改进五次 Catmull-Rom 样条基函数

2.1　基函数的构造

为了定义带局部参数的五次 Catmull-Rom 样条, 首先需要构造出对应的基函数. 设所要构造的基函数为 $f_{i,j}(t)\ (j=0,1,2,3)$, 为了保证所要构造的基函数不仅与原五次 Catmull-Rom 样条基函数[8]具有相似的端点性质, 而且还带有局部参数, 不妨假设其在端点处满足

$$\begin{cases} f_{i,0}(0)=0, f_{i,1}(0)=1, f_{i,2}(0)=0, f_{i,3}(0)=0 \\ f_{i,0}(1)=0, f_{i,1}(1)=0, f_{i,2}(1)=1, f_{i,3}(1)=0 \\ f'_{i,0}(0)=-1/2, f'_{i,1}(0)=0, f'_{i,2}(0)=1/2, f'_{i,3}(0)=0 \\ f'_{i,0}(1)=0, f'_{i,1}(1)=-1/2, f'_{i,2}(1)=0, f'_{i,3}(1)=1/2 \\ f''_{i,0}(0)=\alpha_i, f''_{i,1}(0)=-2\alpha_i, f''_{i,2}(0)=\alpha_i, f''_{i,3}(0)=0 \\ f''_{i,0}(1)=0, f''_{i,1}(1)=\alpha_{i+1}, f''_{i,2}(1)=-2\alpha_{i+1}, \\ \quad f''_{i,3}(1)=\alpha_{i+1} \end{cases} \tag{1}$$

其中, α_i 与 α_{i+1} 为引入的参数.

设

$$\left(f_{i,0}(t)\quad f_{i,1}(t)\quad f_{i,2}(t)\quad f_{i,3}(t)\right)= \left(1\quad t\quad t^2\quad t^3\quad t^4\quad t^5\right)\boldsymbol{M} \tag{2}$$

其中，$0\leqslant t\leqslant 1$，$\boldsymbol{M}$表示大小为 6×4 的待定矩阵.

由式(2)可得

$$\begin{pmatrix} f_{i,0}(0) & f_{i,1}(0) & f_{i,2}(0) & f_{i,3}(0)\\ f_{i,0}(1) & f_{i,1}(1) & f_{i,2}(1) & f_{i,3}(1)\\ f'_{i,0}(0) & f'_{i,1}(0) & f'_{i,2}(0) & f'_{i,3}(0)\\ f'_{i,0}(1) & f'_{i,1}(1) & f'_{i,2}(1) & f'_{i,3}(1)\\ f''_{i,0}(0) & f''_{i,1}(0) & f''_{i,2}(0) & f''_{i,3}(0)\\ f''_{i,0}(1) & f''_{i,1}(1) & f''_{i,2}(1) & f''_{i,3}(1) \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 \end{pmatrix}\boldsymbol{M} \tag{3}$$

由式(1)(3)经计算可得

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2\\ \alpha_i & -2\alpha_i & \alpha_i & 0\\ 0 & \alpha_{i+1} & -2\alpha_{i+1} & \alpha_{i+1} \end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ \alpha_i & -2\alpha_i & \alpha_i & 0\\ 6-3\alpha_i & 6\alpha_i+\alpha_{i+1}-16 & 14-3\alpha_i-2\alpha_{i+1} & \alpha_{i+1}-4\\ 3\alpha_i-8 & 23-6\alpha_i-2\alpha_{i+1} & 3\alpha_i+4\alpha_{i+1}-22 & 7-2\alpha_{i+1}\\ 3-\alpha_i & 2\alpha_i+\alpha_{i+1}-9 & 9-\alpha_i-2\alpha_{i+1} & \alpha_{i+1}-3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

将式(4)代入式(2)并经过简单推导，可得到构造的五次 Catmull-Rom 样条基函数.

定义 1. 对于$0\leqslant t\leqslant 1,\alpha_k\in\mathbb{R}(k=i,i+1)$，函数

$$\begin{cases} f_{i,0}(t)=\dfrac{1}{2}\left(-t+\alpha_i t^2+3(2-\alpha_i)t^3+\right.\\ \quad\left.(3\alpha_i-8)t^4+(3-\alpha_i)t^5\right)\\ f_{i,1}(t)=\dfrac{1}{2}\left(2-2\alpha_i t^2+(6\alpha_i+\alpha_{i+1}-16)t^3+\right.\\ \quad\left.(23-6\alpha_i-2\alpha_{i+1})t^4+(2\alpha_i+\alpha_{i+1}-9)t^5\right)\\ f_{i,2}(t)=\dfrac{1}{2}\left(t+\alpha_i t^2+(14-3\alpha_i-2\alpha_{i+1})t^3+\right.\\ \quad\left.(3\alpha_i+4\alpha_{i+1}-22)t^4+(9-\alpha_i-2\alpha_{i+1})t^5\right)\\ f_{i,3}(t)=\dfrac{1}{2}\left((\alpha_{i+1}-4)t^3+(7-2\alpha_{i+1})t^4+(\alpha_{i+1}-3)t^5\right) \end{cases} \tag{5}$$

称为改进五次 Catmull-Rom 样条基函数.

2.2 基函数的性质

定理 1. 改进五次 Catmull-Rom 样条基函数具有性质:

(1) 归一性. 对任意的$\alpha_k\in\mathbb{R}(k=i,i+1)$，有

$$\sum_{j=0}^{3}f_{i,j}(t)\equiv 1.$$

(2) 对称性. 当$\alpha_i=\alpha_{i+1}$时，有

$$f_{i,j}(1-t)=f_{i,3-j}(t)(j=0,1,2,3).$$

(3) 端点性质. 对任意的$\alpha_k\in\mathbb{R}(k=i,i+1)$，基函数在端点处满足式(1).

证明. 为便于证明，将式(5)改写为

$$\begin{cases} f_{i,0}(t)=\dfrac{1}{20}\left(-2B_1^5(t)+(\alpha_i-4)B_2^5(t)\right)\\ f_{i,1}(t)=\dfrac{1}{20}\left(20B_0^5(t)+20B_1^5(t)+\right.\\ \quad\left.2(10-\alpha_i)B_2^5(t)+(\alpha_{i+1}+4)B_3^5(t)+2B_4^5(t)\right)\\ f_{i,2}(t)=\dfrac{1}{20}\left(2B_1^5(t)+(\alpha_i+4)B_2^5(t)+\right.\\ \quad\left.2(10-\alpha_{i+1})B_3^5(t)+20B_4^5(t)+20B_5^5(t)\right)\\ f_{i,3}(t)=\dfrac{1}{20}\left((\alpha_{i+1}-4)B_3^5(t)-2B_4^5(t)\right) \end{cases} \tag{6}$$

其中，$B_i^5(t)=C_5^i(1-t)^{5-i}t^i(i=0,1,\cdots,5)$.

(1) 由式(6)经过简单推导可得$\sum_{j=0}^{3}f_{i,j}(t)=\sum_{i=0}^{5}B_i^5(t)$. 由于$\sum_{i=0}^{5}B_i^5(t)\equiv 1$，故归一性成立.

(2) 由于$B_i^5(1-t)=B_{5-i}^5(t)(i=0,1,\cdots,5)$，因此由式(6)不难验证，当$\alpha_i=\alpha_{i+1}$时对称性成立.

(3) 由基函数的构造过程可知，端点性质成立.

证毕.

定理 1 表明，改进五次 Catmull-Rom 样条基函数与原五次 Catmull-Rom 样条基函数[8]具有几乎相同性质. 当$\alpha_i=\alpha_{i+1}=3-2\alpha$时，改进五次 Catmull-Rom 样条基函数即为原五次 Catmull-Rom 样条基函数.

图 1 所示为$\alpha_k(k=i,i+1)$取不同值时的改进五次 Catmull-Rom 样条基函数图.

3 改进五次 Catmull-Rom 参数样条曲线

3.1 曲线的定义与性质

基于改进五次 Catmull-Rom 样条基函数，可以定义对应的改进五次 Catmull-Rom 参数样条曲线.

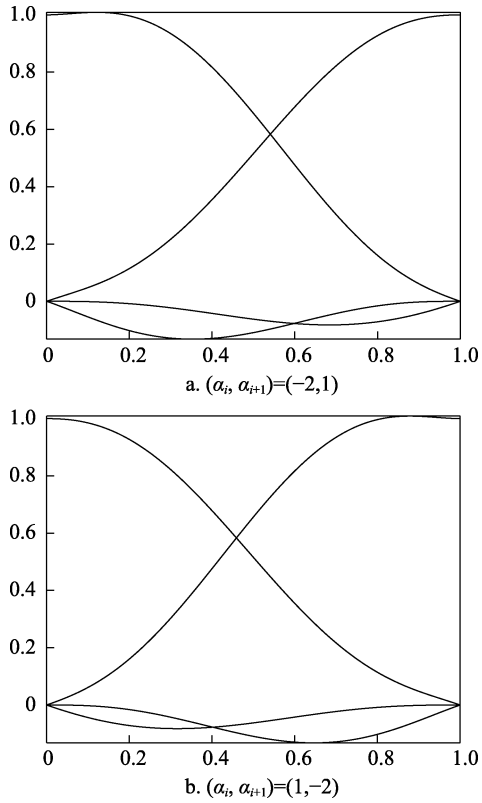


图 1　参数取不同值时的基函数图

定义 2. 给定 $\boldsymbol{p}_i \in \mathbb{R}^d \left(d=2,3; i=0,1,\cdots,n\right)$, 对于 $0 \leqslant t \leqslant 1$, 称分段曲线

$$\boldsymbol{b}_i(t)=\sum_{j=0}^{3} f_{i,j}(t)\,\boldsymbol{p}_{i+j},\ i=0,1,\cdots,n-3 \tag{7}$$

为含 $\alpha_i\left(i=0,1,\cdots,n-2\right)$ 的改进五次 Catmull-Rom 参数样条曲线. 其中, $f_{i,j}(t)\left(j=0,1,2,3\right)$ 为式(5)表示的改进五次 Catmull-Rom 样条基函数.

显然, 当 $\alpha_i=3-2\alpha\left(i=0,1,\cdots,n-2\right)$ 时, 改进五次 Catmull-Rom 参数样条曲线即为原五次 Catmull-Rom 参数样条曲线[8].

定理 2. 改进五次 Catmull-Rom 参数样条曲线具有性质:

(1) 插值性. 曲线插值 $\boldsymbol{p}_k\left(k=1,2,\cdots,n-1\right)$.

(2) 连续性. 曲线满足 C^2 连续.

(3) 对称性. 当 $\alpha_i=\alpha_{i+1}$ 时, 由 $\boldsymbol{p}_{i+j}\left(j=0,1,2,3\right)$ 定义的曲线段与由 $\boldsymbol{p}_{i+3-j}\left(j=0,1,2,3\right)$ 定义的曲线段相同, 仅参数方向相反.

(4) 局部性. 改变其中 1 个控制顶点的位置最多影响 4 条曲线段的形状.

(5) 几何不变性. 曲线形状与坐标系选取无关.

(6) 形状可调性. 当 $\boldsymbol{p}_i\left(i=0,1,\cdots,n\right)$ 固定时, 可通过修改 $\alpha_i\left(i=0,1,\cdots,n-2\right)$ 的取值实现形状的局部或整体调整.

证明.

(1) 由改进五次 Catmull-Rom 样条基函数的端点性质及式(7)经过计算可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{b}_i(0)=\boldsymbol{p}_{i+1}\\ \boldsymbol{b}_i(1)=\boldsymbol{p}_{i+2}\end{cases} \tag{8}$$

其中, $i=0,1,\cdots,n-3$. 式(8)表明, 曲线插值 $\boldsymbol{p}_k\left(k=1,2,\cdots,n-1\right)$.

(2) 依据改进五次 Catmull-Rom 样条基函数的端点性质, 由式(7)进一步计算可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{b}_i'(0)=\dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{p}_{i+2}-\boldsymbol{p}_i\right)\\ \boldsymbol{b}_i'(1)=\dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{p}_{i+3}-\boldsymbol{p}_{i+1}\right)\\ \boldsymbol{b}_i''(0)=\alpha_i\left(\boldsymbol{p}_i-2\boldsymbol{p}_{i+1}+\boldsymbol{p}_{i+2}\right)\\ \boldsymbol{b}_i''(1)=\alpha_{i+1}\left(\boldsymbol{p}_{i+1}-2\boldsymbol{p}_{i+2}+\boldsymbol{p}_{i+3}\right)\end{cases} \tag{9}$$

其中, $i=0,1,\cdots,n-3$. 由式(8)(9)可得 $\boldsymbol{b}_i^{(k)}(1)=\boldsymbol{b}_{i+1}^{(k)}(0)\left(k=0,1,2; i=0,1,\cdots,n-4\right)$, 表明曲线满足 C^2 连续.

(3) 当 $\alpha_i=\alpha_{i+1}$ 时, 由改进五次 Catmull-Rom 样条基函数的对称性及式(7)可得

$$\boldsymbol{b}_i(1-t)=\sum_{j=0}^{3} f_{i,j}(1-t)\,\boldsymbol{p}_{i+j}=\sum_{j=0}^{3} f_{i,3-j}(t)\,\boldsymbol{p}_{i+j} \tag{10}$$

其中, $i=0,1,\cdots,n-3$. 式(10)表明, 曲线的对称性成立.

(4) 由式(7)知, $\boldsymbol{b}_i(t)$ 仅与 $\boldsymbol{p}_{i+j}\left(j=0,1,2,3\right)$ 有关, 因此局部性成立.

(5) 由于式(7)为参数式, 因此几何不变性成立.

(6) 由式(7)可知, $\boldsymbol{b}_i(t)$ 含 α_i 与 $\alpha_{i+1}\left(i=0,1,\cdots,n-3\right)$. 当控制顶点固定时, 修改 $\alpha_k\left(k=0,n-2\right)$ 的取值仅对 $\boldsymbol{b}_j(t)\left(j=0,n-3\right)$ 的形状产生影响; 修改 $\alpha_k\left(k=1,2,\cdots,n-3\right)$ 的取值仅对曲线段 $\boldsymbol{b}_j(t)$ 与 $\boldsymbol{b}_{j+1}(t)\left(j=1,2,\cdots,n-4\right)$ 的形状产生影响. 表明可通过修改 $\alpha_k\left(k=0,1,\cdots,n-2\right)$ 的取值对曲线形状进行局部调整. 特别地, 当 $\alpha_k=\alpha\left(k=0,1,\cdots,n-2\right)$ 时, 可通过修改 α 的取值对曲线形状进行整体调整.

证毕.

定理 2 表明, 改进五次 Catmull-Rom 参数样条曲线与原五次 Catmull-Rom 参数样条曲线[8]具有类似性质. 然而, 原五次 Catmull-Rom 参数样条曲线仅能利用所含参数实现形状的整体调整, 无法做

到形状的局部调整, 但改进五次 Catmull-Rom 参数样条曲线的形状可通过 $\alpha_i\,(i=0,1,\cdots,n-2)$ 进行局部或整体调整, 为插值曲线的构造带来更大便利.

$\alpha_i\,(i=0,1,\cdots,n-2)$ 对改进五次 Catmull-Rom 参数样条曲线的形状有如下影响.

定理 3. 给定 $\boldsymbol{p}_i\,(i=0,1,\cdots,n)$, 记 $\boldsymbol{p}_{i,t}=(1-t)\,\boldsymbol{p}_{i+1}+t\boldsymbol{p}_{i+2}$, 则 $\|\boldsymbol{b}_i(t)-\boldsymbol{p}_{i,t}\|$ 的上界由 $|\alpha_k|$ $(k=i,i+1)$ 的值决定.

证明. 由式(6), 可将式(7)改写为

$$\boldsymbol{b}_i(t)=\boldsymbol{A}_i(t)\alpha_i+\boldsymbol{B}_i(t)\alpha_{i+1}+\boldsymbol{C}_i(t) \tag{11}$$

其中,

$$\boldsymbol{A}_i(t)=\frac{1}{20}B_2^5(t)\left(\boldsymbol{p}_i-2\boldsymbol{p}_{i+1}+\boldsymbol{p}_{i+2}\right),$$

$$\boldsymbol{B}_i(t)=\frac{1}{20}B_3^5(t)\left(\boldsymbol{p}_{i+1}-2\boldsymbol{p}_{i+2}+\boldsymbol{p}_{i+3}\right),$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_i(t)=&\frac{1}{20}\Big(2\Big(B_1^5(t)+2B_2^5(t)\Big)\left(\boldsymbol{p}_{i+2}-\boldsymbol{p}_i\right)-\\&2\Big(2B_3^5(t)+B_4^5(t)\Big)\left(\boldsymbol{p}_{i+3}-\boldsymbol{p}_{i+1}\right)+\\&20\Big(B_3^5(t)+B_4^5(t)+B_5^5(t)\Big)\left(\boldsymbol{p}_{i+2}-\boldsymbol{p}_{i+1}\right)+20\boldsymbol{p}_{i+1}\Big).\end{aligned}$$

于是有

$$\boldsymbol{b}_i(t)-\boldsymbol{p}_{i,t}=\boldsymbol{A}_i(t)\alpha_i+\boldsymbol{B}_i(t)\alpha_{i+1}+\boldsymbol{D}_i(t) \tag{12}$$

其中,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_i(t)=&\boldsymbol{C}_i(t)-\boldsymbol{p}_{i,t}=\\&\frac{1}{10}\Big(B_1^5(t)+2B_2^5(t)\Big)\left(\boldsymbol{p}_{i+2}-\boldsymbol{p}_i\right)-\\&\frac{1}{10}\Big(2B_3^5(t)+B_4^5(t)\Big)\left(\boldsymbol{p}_{i+3}-\boldsymbol{p}_{i+1}\right)+\\&\Big(B_3^5(t)+B_4^5(t)+B_5^5(t)-t\Big)\left(\boldsymbol{p}_{i+2}-\boldsymbol{p}_{i+1}\right).\end{aligned}$$

当 $\boldsymbol{p}_i\,(i=0,1,\cdots,n)$ 固定时, 不妨记

$$a_i=\|\boldsymbol{p}_i-2\boldsymbol{p}_{i+1}+\boldsymbol{p}_{i+2}\|,$$

$$b_i=\|\boldsymbol{p}_{i+2}-\boldsymbol{p}_i\|,$$

$$c_i=\|\boldsymbol{p}_{i+2}-\boldsymbol{p}_{i+1}\|.$$

由式(12)有

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{b}_i(t)-\boldsymbol{p}_{i,t}\|\leqslant\\&\|\boldsymbol{A}_i(t)\|\,|\alpha_i|+\|\boldsymbol{B}_i(t)\|\,|\alpha_{i+1}|+\|\boldsymbol{D}_i(t)\|\leqslant\\&\frac{1}{20}u\left(a_i|\alpha_i|+a_{i+1}|\alpha_{i+1}|\right)+\frac{1}{10}v\left(b_i+b_{i+1}\right)+wc_i\end{aligned} \tag{13}$$

其中,

$$u=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left\{B_2^5(t)\right\}=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left\{B_3^5(t)\right\},$$

$$v=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left\{B_1^5(t)+2B_2^5(t)\right\}=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left\{2B_3^5(t)+B_4^5(t)\right\},$$

$$w=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left\{\left|B_3^5(t)+B_4^5(t)+B_5^5(t)-t\right|\right\}.$$

由于 $a_k,b_k\,(k=i,i+1)$, c_i,u,v,w 均为常数, 因此由式(13)可知定理成立. 证毕.

例 1. 给定控制顶点

$$\boldsymbol{p}_0=(2,2),\ \boldsymbol{p}_1=(1.5,3),\ \boldsymbol{p}_2=(0.5,2.5),$$

$$\boldsymbol{p}_3=(0,1),\ \boldsymbol{p}_4=(0.5,0),\ \boldsymbol{p}_5=(1.5,0.5),$$

$$\boldsymbol{p}_6=(1,1.5),\ \boldsymbol{p}_7=(0.5,1).$$

当控制顶点固定时, 通过修改参数的取值实现对改进五次 Catmull-Rom 参数样条曲线形状的局部调整与整体调整, 如图 2 所示. 图 2a 中, 将被调整的部分取 $\alpha_3=-2$ (短虚线), $\alpha_3=0$ (实线), $\alpha_3=2$ (长虚线), 其他参数均取为 1; 图 2b 中, 将所有参数设置为同一值 α, 且 $\alpha=-2$ (短虚线), $\alpha=0$ (实线), $\alpha=2$ (长虚线).

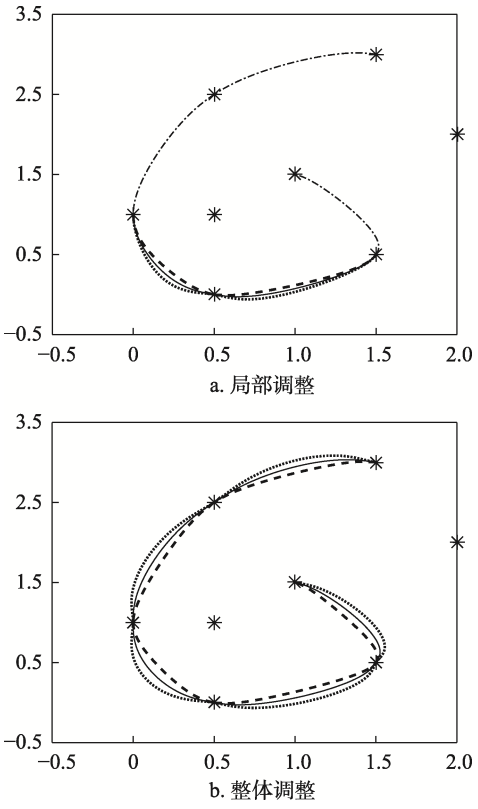


图 2 曲线的形状调整

需要指出的是, 改进五次 Catmull-Rom 参数样条曲线不插值 $\boldsymbol{p}_0$ 和 $\boldsymbol{p}_n$, 若要求插值这 2 个控制顶点, 可补充 $\boldsymbol{p}_{-1}$ 和 $\boldsymbol{p}_{n+1}$. 对于封闭曲线, 则可补充 $\boldsymbol{p}_{n+1}=\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{p}_{n+2}=\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_{n+3}=\boldsymbol{p}_2$.

例 2. 给定控制顶点

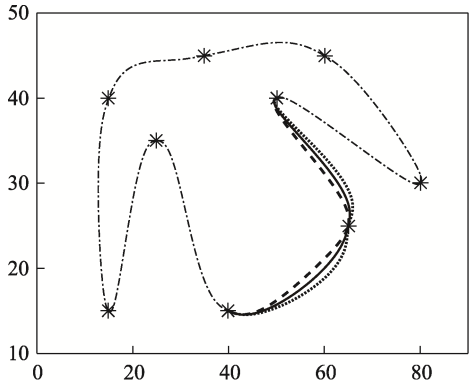
$$\boldsymbol{p}_0=(35,45),\ \boldsymbol{p}_1=(15,40),\ \boldsymbol{p}_2=(15,15),$$

$$\boldsymbol{p}_3=(25,35),\ \boldsymbol{p}_4=(40,15),\ \boldsymbol{p}_5=(65,25),$$

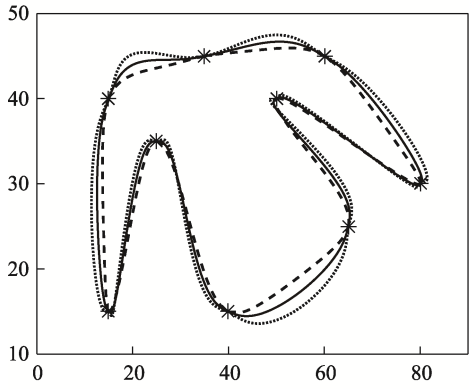
$\boldsymbol{p}_6=(50,40)$, $\boldsymbol{p}_7=(80,30)$, $\boldsymbol{p}_8=(60,45)$,

$\boldsymbol{p}_9=(35,45)$, $\boldsymbol{p}_{10}=(15,40)$, $\boldsymbol{p}_{11}=(15,15)$;

当控制顶点固定时, 通过修改参数的取值实现对封闭改进五次 Catmull-Rom 参数样条曲线形状的局部调整与整体调整, 如图 3 所示. 图 3a 中, 将被调整的部分取 $\alpha_4=-2.5$ (短虚线), $\alpha_4=0$ (实线), $\alpha_4=2.5$ (长虚线), 其他参数均取为 0.5; 图 3b 中, 将所有参数设置为同一值 α, 且 $\alpha=-2.5$ (短虚线), $\alpha=0$ (实线), $\alpha=2.5$ (长虚线).



a. 局部调整



b. 整体调整

图 3　封闭曲线的形状调整

3.2　曲线的光顺

虽然改进五次 Catmull-Rom 参数样条曲线在构造插值曲线时具有丰富的形状调整能力, 但是在一些应用领域中, 可能需要在给定目标下确定改进五次 Catmull-Rom 参数样条曲线所含参数的最优取值, 使得插值曲线的形状满足特定要求. 由于光顺性是曲线的一种重要几何特征, 构造光顺曲线一直以来都是计算机图形学等领域的重要内容, 因此本文讨论改进五次 Catmull-Rom 参数样条曲线的光顺方案.

利用弯曲能(也称应变能)极小构造光顺曲线是一种常用手段[11-15]. 对于参数曲线 $\boldsymbol{r}(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$, 其弯曲能可近似表示[11-12]为

$$E=\int_0^1\|\boldsymbol{r}''(t)\|^2\,\mathrm{d}t \tag{14}$$

依据式(14), 可将改进五次 Catmull-Rom 参数样条曲线的弯曲能近似表示为

$$E=\sum_{i=0}^{n-3}\int_0^1\|\boldsymbol{b}_i''(t)\|^2\mathrm{d}t \tag{15}$$

其中, $\boldsymbol{b}_i(t)$ 由式(7)表示.

将式(12)代入式(15), 经过计算可得

$$\begin{aligned}E=\sum_{i=0}^{n-3}\Big(&\alpha_i^2\int_0^1\|\boldsymbol{A}_i''(t)\|^2\,\mathrm{d}t+\alpha_{i+1}^2\int_0^1\|\boldsymbol{B}_i''(t)\|^2\,\mathrm{d}t+\\&2\alpha_i\alpha_{i+1}\int_0^1\big(\boldsymbol{A}_i''(t)\cdot\boldsymbol{B}_i''(t)\big)\mathrm{d}t+\\&2\alpha_i\int_0^1\big(\boldsymbol{A}_i''(t)\cdot\boldsymbol{C}_i''(t)\big)\mathrm{d}t+\\&2\alpha_{i+1}\int_0^1\big(\boldsymbol{B}_i''(t)\cdot\boldsymbol{C}_i''(t)\big)\mathrm{d}t+\int_0^1\|\boldsymbol{C}_i''(t)\|^2\,\mathrm{d}t\Big)\end{aligned} \tag{16}$$

易知, 给定控制顶点 $\boldsymbol{p}_i\,(i=0,1,\cdots,n)$ 后, 式(16)是关于 $\alpha_i\,(i=0,1,\cdots,n-2)$ 的二次多项式函数. 于是, 要构造光顺改进五次 Catmull-Rom 参数样条曲线, 需要优化模型

$$\min_{(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-2})\in\mathbb{R}^{n-1}}E(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-2}) \tag{17}$$

利用常用的计算软件(如 MATLAB 软件中的“fminsearch”函数或“fminunc”函数), 易求得式(17)的解.

例 3. 对于例 1 中给定的控制顶点, 求解式(17), 可得光顺改进五次 Catmull-Rom 参数样条曲线所含参数为

$\alpha_0=\alpha_1=1.384\ 6$, $\alpha_2=1.365\ 9$,

$\alpha_3=1.609\ 8$, $\alpha_4=1.987\ 5$, $\alpha_5=2.166\ 0$.

为了进行对比分析, 利用同样的方法构造光顺原五次 Catmull-Rom 参数样条曲线[8]. 经过计算可得, 光顺原五次 Catmull-Rom 参数样条曲线所含参数为 $\alpha=0.667\ 0$. 绘制出的光顺改进五次 Catmull-Rom参数样条曲线和光顺原五次Catmull-Rom参数样条曲线, 以及对应的曲率图如图 4 所示.

例 4. 对于例 2 中给定的控制顶点, 求解式(17), 可得光顺改进五次 Catmull-Rom 参数样条曲线所含参数为

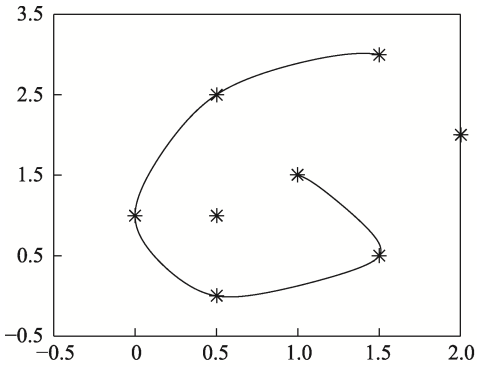
$\alpha_0=2.779\ 3$, $\alpha_1=2.486\ 5$, $\alpha_2=2.806\ 0$,

$\alpha_3=2.622\ 9$, $\alpha_4=2.590\ 4$, $\alpha_5=2.808\ 7$,

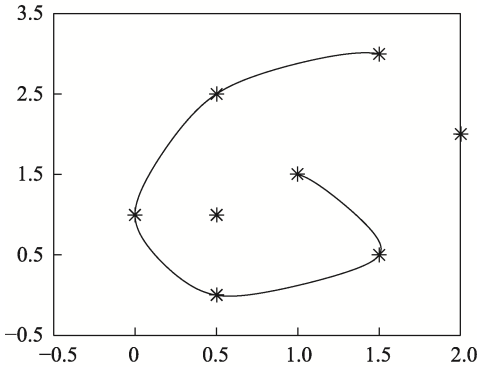
$\alpha_6=2.375\ 5$, $\alpha_7=2.041\ 8$, $\alpha_8=-0.566\ 9$,

$\alpha_9=1.690\ 3$.

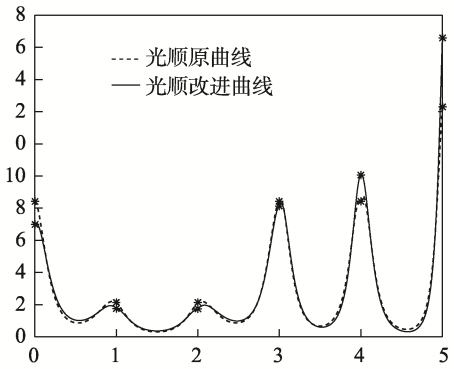
为了进行对比分析, 利用同样的方法构造光顺原五次 Catmull-Rom 参数样条曲线[8]. 经过计算



a. 光顺改进曲线

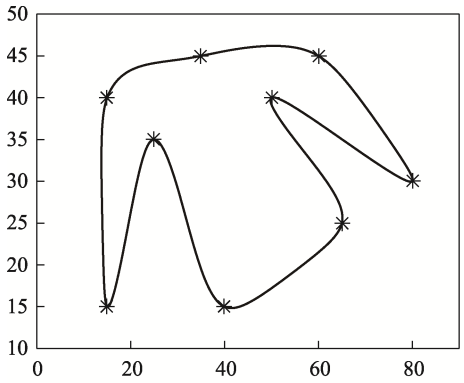


b. 光顺原曲线

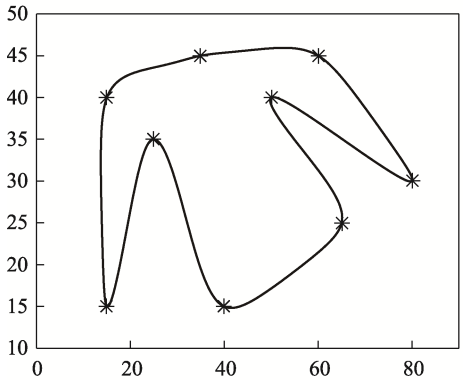


c. 2种光顺曲线的曲率图

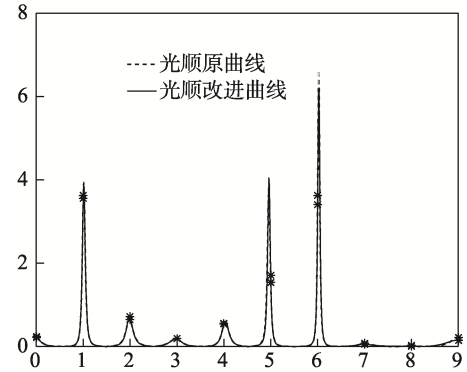
图 4　2 种光顺样条曲线及其曲率图



a. 光顺改进曲线



b. 光顺原曲线



c. 2种光顺曲线的曲率图

图 5　2 种封闭的光顺样条曲线及其曲率图

可得, 光顺原五次 Catmull-Rom 参数样条曲线所含参数为 $\alpha = 0.233\,0$. 绘制出的光顺改进五次 Catmull-Rom 参数样条曲线和光顺原五次 Catmull-Rom 参数样条曲线, 以及对应的曲率图如图 5 所示.

为了便于观察, 图 4 和图 5 中的曲率图是将第 i 条曲线段的曲率图向右平移 i 个单位的结果. 可以看出, 从整体上看, 光顺改进五次 Catmull-Rom 参数样条曲线的曲率变化情况稍好于光顺原五次 Catmull-Rom 参数样条曲线, 表明优化后的改进五次 Catmull-Rom 参数样条曲线在光顺性方面稍好于优化后的原五次 Catmull-Rom 参数样条曲线.

4　改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数

若将改进五次 Catmull-Rom 样条用于函数插值, 则可讨论其函数形式.

定义 3. 给定函数 $y = f(x)(a \leqslant x \leqslant b)$,

$x_k = a + hk,\ h = (b-a)/n,\ y_k = f(x_k)$,

$k = 0,1,\cdots,n$. 取 $x_{-1} = a - h$, $x_{n+1} = b + h$, 且 $f(x)$ 在 $x = x_{-1}$ 与 $x = x_{n+1}$ 处有定义, 设 $y_{-1} = f(x_{-1})$, $y_{n+1} = f(x_{n+1})$. 对于 $x_{i+1} \leqslant x \leqslant x_{i+2}$, 称函数

$$r_i(x) = \sum_{j=0}^{3} f_{i,j}(t) y_{i+j}, i = -1,0,\cdots,n-2 \qquad (18)$$

为 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数, 其中, $t=(x-x_{i+1})/h$, $f_{i,j}(t)$ $(j=0,1,2,3)$ 为式(5)表示的改进五次 Catmull-Rom 样条基函数.

显然, 当 $\alpha_i=3-2\alpha(i=-1,0,\cdots,n-1)$ 时, 改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数即为原五次 Catmull-Rom 样条插值函数[8].

依据定理 2 可知, 式(18)表示的改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数具有性质:

(1) 插值性. 函数插值 $(x_k,y_k)(k=0,1,\cdots,n)$.

(2) 连续性. 函数满足 C^2 连续.

(3) 局部性. $r_i(x)$ 仅与 $(x_{i+j},y_{i+j})(j=0,1,2,3)$ 有关, 改变 1 个数据点的位置最多对 4 段函数产生影响.

(4) 形状可调性. 当 $(x_k,y_k)(k=-1,0,\cdots,n+1)$ 保持不变时, 可通过修改 $\alpha_i(i=-1,0,\cdots,n-1)$ 的取值对函数曲线的形状进行局部或整体调整.

当 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 满足特定条件时, 可对改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数进行误差分析.

定理 4. 给定函数 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$, 设

$$x_k=a+hk,h=(b-a)/n,y_k=f(x_k),$$

$k=0,1,\cdots,n$. 取 $x_{-1}=a-h,x_{n+1}=b+h$, 且 $f(x)$ 在 $x=x_{-1}$ 与 $x=x_{n+1}$ 有定义, 设 $y_{-1}=f(x_{-1})$, $y_{n+1}=f(x_{n+1})$. 令

$$\omega=\sup\{|f(s)-f(t)|:|s-t|\leqslant h\},$$

$$\xi_i=|y_{i+2}-y_i|,\ \eta_i=|y_i-2y_{i+1}+y_{i+2}|;$$

当 $x_{i+1}\leqslant x\leqslant x_{i+2}(i=-1,0,\cdots,n-2)$ 时, 有

$$|r_i(x)-f(x)|\leqslant \omega+\frac{8}{81}(\xi_i+\xi_{i+1})+\frac{54}{3125}(|\alpha_i|\eta_i+|\alpha_{i+1}|\eta_{i+1}) \quad (19)$$

证明. 因为

$$B_0^5(t)+B_1^5(t)+B_2^5(t)+B_3^5(t)+B_4^5(t)+B_5^5(t)\equiv 1,$$

所以当 $x_{i+1}\leqslant x\leqslant x_{i+2}(i=-1,0,\cdots,n-2)$ 时, 由式(18)经过计算可得

$$\begin{aligned}r_i(x)-f(x)=&\left(B_0^5(t)+B_1^5(t)+B_2^5(t)\right)(y_{i+1}-f(x))+\\&\left(B_3^5(t)+B_4^5(t)+B_5^5(t)\right)(y_{i+2}-f(x))+\\&\frac{1}{10}\left(B_1^5(t)+2B_2^5(t)\right)(y_{i+2}-y_i)+\\&\frac{1}{20}\alpha_iB_2^5(t)(y_i-2y_{i+1}+y_{i+2})+\\&\frac{1}{20}\alpha_{i+1}B_3^5(t)(y_{i+1}-2y_{i+2}+y_{i+3})+\\&\frac{1}{10}\left(2B_3^5(t)+B_4^5(t)\right)(y_{i+1}-y_{i+3})\end{aligned} \quad (20)$$

由于 $|y_{i+1}-f(x)|\leqslant\omega,|y_{i+2}-f(x)|\leqslant\omega$, 因此由式(20)可知

$$\begin{aligned}|r_i(x)-f(x)|\leqslant&\ \omega+\frac{1}{10}\left(B_1^5(t)+2B_2^5(t)\right)\xi_i+\\&\frac{1}{20}|\alpha_i|B_2^5(t)\eta_i+\frac{1}{20}|\alpha_{i+1}|B_3^5(t)\eta_{i+1}+\\&\frac{1}{10}\left(2B_3^5(t)+B_4^5(t)\right)\xi_{i+1}\end{aligned} \quad (21)$$

易求得

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left\{B_1^5(t)+2B_2^5(t)\right\}=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left\{2B_3^5(t)+B_4^5(t)\right\}=\frac{80}{81},$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left\{B_2^5(t)\right\}=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left\{B_3^5(t)\right\}=\frac{216}{625}.$$

于是, 由式(21)经过简单推导可得式(19)成立.

证毕.

由定理 4 可知, 若数据点 (x_k,y_k) $(k=-1,0,\cdots,n+1)$ 固定, 可确定 $\alpha_i(i=-1,0,\cdots,n-1)$ 的最优取值使得 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数具有最佳插值效果. 若令

$$\varepsilon=\sum_{i=-1}^{n-2}\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}}\left(r_i(x)-f(x)\right)^2\mathrm{d}x \quad (22)$$

则式(22)可作为改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数整体误差的一个评判标准. ε 的值越小, 改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数的整体误差越小.

由式(6), 可将式(18)改写为

$$r_i(x)=L_i(x)\alpha_i+M_i(x)\alpha_{i+1}+N_i(x) \quad (23)$$

其中,

$$L_i(x)=\frac{1}{20}B_2^5(t)(y_i-2y_{i+1}+y_{i+2}),$$

$$M_i(x)=\frac{1}{20}B_3^5(t)(y_{i+1}-2y_{i+2}+y_{i+3}),$$

$$\begin{aligned}N_i(x)=&\frac{1}{20}\left(2\left(B_1^5(t)+2B_2^5(t)\right)(y_{i+2}-y_i)-\right.\\&2\left(2B_3^5(t)+B_4^5(t)\right)(y_{i+3}-y_{i+1})+\\&\left.20\left(B_3^5(t)+B_4^5(t)+B_5^5(t)\right)(y_{i+2}-y_{i+1})+20y_{i+1}\right),\end{aligned}$$

$t=(x-x_{i+1})/h$, $h=(b-a)/n$.

将式(23)代入式(22), 经过计算可得

$$\begin{aligned}\varepsilon=\sum_{i=-1}^{n-2}\Bigg(&\alpha_i^2\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}}\left(L_i(x)\right)^2\mathrm{d}x+\\&\alpha_{i+1}^2\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}}\left(M_i(x)\right)^2\mathrm{d}x+\\&2\alpha_i\alpha_{i+1}\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}}\left(L_i(x)M_i(x)\right)\mathrm{d}x+\\&2\alpha_i\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}}\left(L_i(x)\left(N_i(x)-f(x)\right)\right)\mathrm{d}x+\\&2\alpha_{i+1}\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}}\left(M_i(x)\left(N_i(x)-f(x)\right)\right)\mathrm{d}x+\\&\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}}\left(N_i(x)-f(x)\right)^2\mathrm{d}x\Bigg)\end{aligned}\tag{24}$$

显然, 当插值条件给定时, 式(24)是关于参数 $\alpha_i\left(i=-1,0,\cdots,n-1\right)$ 的二次多项式函数. 于是, 要使 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数具有最佳插值效果, 可得优化模型

$$\min_{(\alpha_{-1},\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1})\in\mathbb{R}^{n+1}}\varepsilon\left(\alpha_{-1},\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}\right)\tag{25}$$

利用常用的计算软件易求得式(25)的解. 从而由式(18), 即可获得 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最佳改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数.

例 5. 给定被插值函数 $y=f(x)=4/\left(1+x^2\right)$, $\left(-4\leqslant x\leqslant 4\right)$, 设 $x_i=-4+8i/n$, $y_i=f\left(x_i\right)$, $i=0,1,\cdots,n$. 取

$$x_{-1}=-4-8/n,\ x_{n+1}=8+8/n,$$
$$y_{-1}=f\left(x_{-1}\right),\ y_{n+1}=f\left(x_{n+1}\right).$$

求解式(25), 可得 $y=4/\left(1+x^2\right)$ 在 $[-4,4]$ 上的最佳改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数所含参数. 为了进行对比分析, 利用同样的方法构造最佳原五次 Catmull-Rom 样条插值函数[8]. 经过计算, 当 n 取不同值时, 最佳改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数和最佳原五次 Catmull-Rom 样条插值函数的整体插值误差对比如表 1 所示.

表 1 例 5 中 2 种方法的整体插值误差对比

n	最佳改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数	最佳原五次 Catmull-Rom 样条插值函数
4	$0.207\ 0\times10^{-1}$	$0.234\ 7\times10^{0}$
6	$0.150\ 0\times10^{-2}$	$0.139\ 0\times10^{-1}$
8	$0.630\ 0\times10^{-2}$	$0.860\ 0\times10^{-2}$
10	$0.630\ 0\times10^{-2}$	$0.780\ 0\times10^{-2}$

可以看出, 当 n 取不同值时, 函数 $y=4/\left(1+x^2\right)$ 在 $[-4,4]$ 上的最佳改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数的整体误差小于最佳原五次 Catmull-Rom 样条插值函数. 图 6 所示为 $n=8$ 时, 最佳改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数曲线(实线)和被插值函数曲线(长虚线), 以及最佳原五次 Catmull-Rom 样条插值函数曲线(实线)和被插值函数曲线(长虚线). 图 7 所示为 $n=8$ 时, 最佳改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数的误差曲线(实线)与最佳原五次 Catmull-Rom 样条插值函数的误差曲线(长虚线).

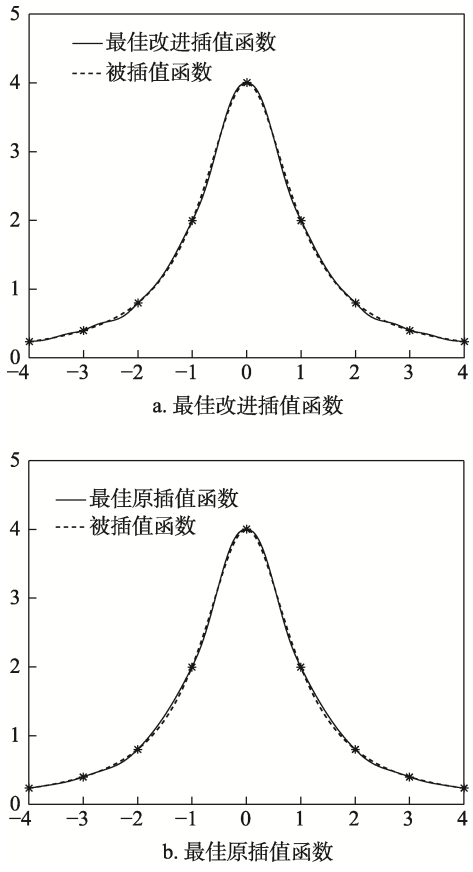


图 6 例 5 中 2 种最佳插值函数 $(n=8)$

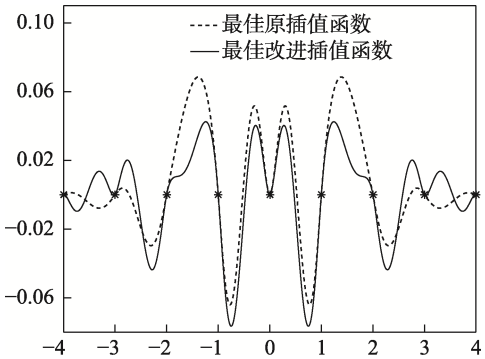


图 7 例 5 中 2 种最佳插值函数的误差曲线 $(n=8)$

例 6. 给定被插值函数

$$y=f(x)=x\sin x\left(0\leqslant x\leqslant 6\right),$$

设 $x_i = 6i/n, y_i = f(x_i), i = 0,1,\cdots,n$. 取

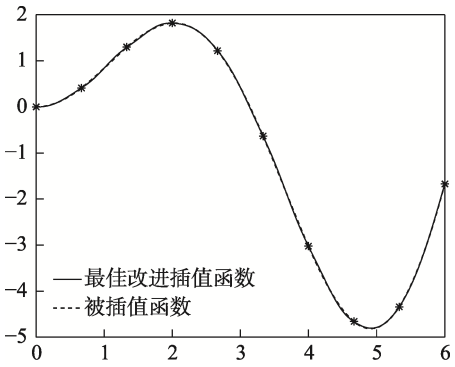
$$x_{-1} = -6/n, x_{n+1} = 6/n,$$

$$y_{-1} = f(x_{-1}), y_{n+1} = f(x_{n+1}).$$

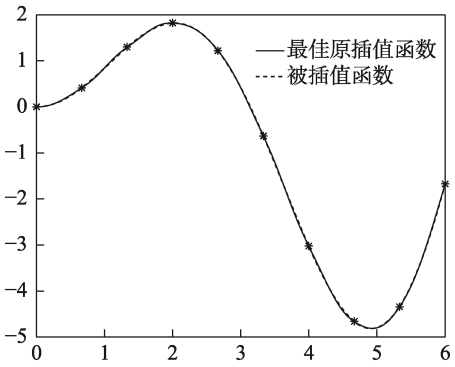
求解式(25), 可得 $y = x\sin x$ 在 $[0,6]$ 上的最佳改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数所含参数. 为了进行对比分析, 利用同样的方法构造最佳原五次 Catmull-Rom 样条插值函数[8]. 经过计算, 当 n 取不同值时, 最佳改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数与最佳原五次 Catmull-Rom 样条插值函数的整体插值误差对比如表 2 所示. 可以看出, 当 n 取不同值时, 函数 $y = x\sin x$ 在 $[0,6]$ 上的最佳改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数的整体误差小于最佳原五次 Catmull-Rom 样条插值函数. 图 8 所示为 $n = 9$ 时, 最佳改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数曲线(实线)和被插值函数曲线(长虚线), 以及最佳原五次 Catmull-Rom 样条插值函数曲线(实线)和被插值函数曲线(长虚线). 图 9 所示为 $n = 9$ 时, 最佳改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数的误差曲线(实线)与最佳原五次 Catmull-Rom 样条插值函数的误差曲线(长虚线).

表 2　例 6 中 2 种方法的整体插值误差对比

n	最佳改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数	最佳原五次 Catmull-Rom 样条插值函数
3	0.8287×10^{0}	0.1888×10^{1}
6	0.1390×10^{-1}	0.1731×10^{-1}
9	0.1300×10^{-2}	0.1437×10^{-2}
12	0.2357×10^{-3}	0.2517×10^{-3}



a. 最佳改进插值函数



b. 最佳原插值函数

图 8　例 6 中 2 种最佳插值函数 $(n = 9)$

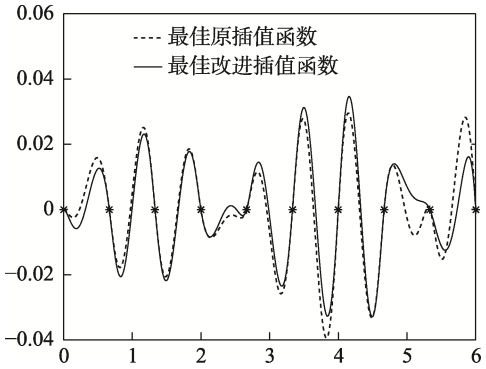


图 9　例 6 中 2 种最佳插值函数的误差曲线 $(n = 9)$

5　结　语

本文提出改进五次 Catmull-Rom 样条曲线, 在保留原五次 Catmull-Rom 样条曲线主要特性的基础上, 还可以利用所含自由参数对曲线的形状进行局部调整. 实验结果表明, 通过应变能极小化方法构造的改进五次 Catmull-Rom 样条曲线在光顺性方面要优于原五次 Catmull-Rom 样条曲线; 所构造的最优改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数的整体误差要小于原五次 Catmull-Rom 样条插值函数. 这些优势使得改进五次 Catmull-Rom 样条更适用于工程领域.

未来, 将改进五次 Catmull-Rom 样条曲线推广至曲面形式, 并讨论基于能量极小的曲面光顺问题; 进一步, 讨论二元改进五次 Catmull-Rom 样条插值函数的最优插值问题.

参考文献(References):

[1] Farin G. Curves and surfaces for CAGD: a practical guide[M]. 5th ed. San Diego: Morgan Kaufmann, 2002

[2] Hearn D, Baker M P. Computer graphics: C version[M]. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996

[3] DeRose T D, Barsky B A. Geometric continuity, shape parameters, and geometric constructions for Catmull-Rom splines[J]. ACM Transactions on Graphics, 1988, 7(1): 1-41

[4] Uncini A, Piazza F. Blind signal processing by complex domain adaptive spline neural networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2003, 14(2): 399-412

[5] Yuksel C, Schaefer S, Keyser J. Parameterization and applications of Catmull-Rom curves[J]. Computer-Aided Design, 2011, 43(7): 747-755

[6] Scarpiniti M, Comminiello D, Parisi R, *et al*. Nonlinear spline adaptive filtering[J]. Signal Processing, 2013, 93(4): 772-783

[7] Li J C, Chen S. The cubic α-Catmull-Rom spline[J]. Mathematical and Computational Applications, 2016, 21(3): Article No.33

[8] Li Juncheng, Liu Chengzhi, Yi Yeqing. C^2 continuous quintic Cardinal spline and Catmull-Rom spline with shape factors[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2016, 28(11): 1821-1831(in Chinese)
(李军成, 刘成志, 易叶青. 带形状因子的 C^2 连续五次 Cardinal 样条与 Catmull-Rom 样条[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2016, 28(11): 1821-1831)

[9] Li Juncheng, Liu Chengzhi. The C^3 quasi Catmull-Rom spline function with parameters[J]. Mathematica Numerica Sinica, 2018, 40(1): 96-106(in Chinese)
(李军成, 刘成志. 带参数的 C^3 连续拟 Catmull-Rom 样条函数[J]. 计算数学, 2018, 40(1): 96-106)

[10] Li J C, Liu C Z, Liu S J. The quartic Catmull-Rom spline with local adjustability and its shape optimization[J]. Advances in Continuous and Discrete Models, 2022, 2022(1): Article No.59

[11] Xu G, Wang G Z, Chen W Y. Geometric construction of energy-minimizing Bézier curves[J]. Science ChinaInformation Sciences, 2011, 54(7): 1395-1406

[12] Xu G, Zhu Y F, Deng L S, *et al*. Efficient construction of B-spline curves with minimal internal energy[J]. Computers, Materials & Continua, 2019, 58(3): 879-892

[13] Zhang C M, Zhang P F, Cheng F H. Fairing spline curves and surfaces by minimizing energy[J]. Computer-Aided Design, 2001, 33(13): 913-923

[14] Jaklič G, Žagar E. Planar cubic G^1 interpolatory splines with small strain energy[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, 235(8): 2758-2765

[15] Lu L Z. Planar quintic G^2 Hermite interpolation with minimum strain energy[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 274: 109-117