三次 Bézier 曲线曲面间的混合延拓

严兰兰，付雨楠

(东华理工大学理学院　南昌　330013)
(llyan@ecut.edu.cn)

摘　要：在保持 G^2 连续的条件下，提出一种三次 Bézier 曲线曲面间形状可调的混合延拓方法。首先设计 3 条辅助延拓曲线，其中，第 1 条与 2 条待延拓曲线在连接处均满足 G^1 连续，另外 2 条分别与待延拓曲线中的一条在连接处满足 G^2 连续、另一条在连接处满足 G^0 连续；然后借助势函数将 3 条辅助延拓曲线进行混合，生成含形状调整参数的延拓曲线；最后根据待延拓曲线的几何特征确定形状参数的赋值方案，获得最终的延拓曲线。此外，将曲线混合延拓方法推广至曲面，解决了 2 张不相邻的双三次 Bézier 曲面间的延拓问题。对具有不同几何特征的待延拓曲线曲面进行数值实验的结果表明，所提方法构造的延拓曲线曲面均具备良好的光顺性。

关键词：Bézier 曲线；G^2 连续；混合延拓；能量优化；光顺性
中图法分类号：TP391.41　　**DOI**：10.3724/SP.J.1089.2024-00138

Blending Extension of Non-Adjacent Cubic Bézier Curves and Surfaces

Yan Lanlan and Fu Yunan

(*College of Science, East China University of Technology, Nanchang*　330013)

Abstract: A method for constructing G^2 continuous and shape adjustable extension curves and surfaces between two cubic Bézier curves and surfaces is proposed. Firstly, three auxiliary extension curves are designed. Among which the first one meets G^1 continuity at the connection with the two curves to be extended, and the other two meet G^2 continuity at the connection with one curve to be extended, and G^0 continuity at the connection with the other curve to be extended. Then, the three auxiliary curves are combined by the potential function to generate the extension curve with shape parameters. Finally, the assignment scheme of shape parameters is determined according to the geometric characteristics of the curve to be extended, and the final extension curve is obtained. The curve construction method is extended to surface, and the connection between two non-adjacent bi-cubic Bézier surfaces is solved. The results of numerical experiments on the curves and surfaces with different geometric features show that the extended curves and surfaces constructed by the proposed method have good smoothness.

Key words: Bézier curve; G^2 continuity; blending extension; energy optimization; smoothness

曲线曲面延拓是曲线曲面造型设计中的重要研究课题之一，曲线延拓思想广泛应用于曲线过渡、曲线插值和曲线近似研究中[1]。曲线曲面延拓问题可分为 2 大类，以曲线延拓为例，一类是将一条曲线延拓至单个或多个目标点[2-6]，另一类是将一条曲线延拓至另一条曲线[7-14]。这 2 类延拓均要求延拓曲线与待延拓曲线在连接处满足一定的连续性。

收稿日期：2024-03-23；修回日期：2024-08-14。**基金项目**：国家自然科学基金（11761008）；江西省自然科学基金（20161BAB211028）；江西省教育厅科技项目（GJJ160558）。**严兰兰**（1982—），女，博士，教授，硕士生导师，主要研究方向为 CAGD；**付雨楠**（1999—），女，硕士研究生，主要研究方向为 CAGD。

针对曲线延拓的第 1 类问题，Hu 等[2]提出一种基于曲线端点松弛的 B 样条曲线延拓算法，通过累积弦长计算新增的节点矢量，从而将 B 样条曲线延拓至单个或多个目标点，该算法可自动达到最高阶参数连续；针对 G^2 连续约束下三次 Bézier 曲线延拓至定点的问题，周元峰等[3]分别采用曲线弧长最短、曲线能量最小和曲线曲率变化率最小定义目标函数进行分析，当目标点位于不同区域时，可通过选取不同的目标函数求解延拓曲线以保证其光顺性；Mo 等[4]基于极小化曲线应变能提出一种三次 B 样条曲线的延拓算法，运用连接点处的 G^2 连续条件，先将延拓曲线构造成三次 Bézier 曲线形式，再通过重新参数化转换为 B 样条曲线形式，该方法可通过解线性方程组确定延拓曲线的控制顶点；Lu 等[5]在文献[2]的基础上进行改进，根据待延拓曲线生成均匀 B 样条延拓曲线并逐步延拓至目标点，改进后的算法不仅提升了计算效率，而且还可推广至 NURBS 曲线延拓；文献[6]刻画了 2 条曲线间相似性的一种度量，并基于此提出一种新的 B 样条曲线延拓算法，通过度量延拓曲线与参考曲线的相似性，保证曲线整体的形状信息符合要求。

针对曲线延拓的第 2 类问题，文献[7]应用曲线延拓思想实现了 2 条不相邻的 NURBS 曲线间的过渡。文献[8-9]讨论了在保持几何连续和光顺性的条件下，通过 1 条或 2 条曲线实现 2 条不相邻曲线间的延拓，不同之处在于文献[8]构造的延拓曲线与待延拓曲线形式一致，而文献[9]利用带形状参数的 Bézier 曲线为中间媒介构造延拓曲线；与文献[8]相比，文献[9]可以处理平行情况下的曲线延拓问题，但未给出构造最佳延拓曲线的方案。宋遒志等[10]提出基于辅助曲线构造过渡曲线的方法，先构造一条符合设计需求的辅助曲线，再将辅助曲线与基曲线进行线性组合构造 G^n 连续的过渡曲线。文献[11]提出一种三次 T-Bézier 曲线间的 C^2 连续混合延拓方法，可以通过调节平衡因子的取值改变延拓曲线形状，但因势函数为有理三角函数，增加了计算复杂度。与文献[11]相比，文献[10]多构造了一条辅助延拓曲线，其与最终生成的混合延拓曲线形状相似；但文献[10]生成混合延拓曲线的过程复杂，需经历多次重新参数化。李军成等[12-13]通过选取特殊的带形状参数的曲线模型，构造 2 类带参数的调配函数，并设计了形状可调的过渡曲线，过渡曲线与被过渡曲线之间满足 C^1 或 C^2 连续，同时讨论了过渡曲面的构造方法。严兰兰等[14]构造了不含参数和含参数的 2 类多项式势函数，并将其转换成 Bernstein 基函数的线性组合形式，运用这 2 类势函数构造的过渡曲线与被过渡曲线在端点处均可满足 C^k（k 为任意自然数）连续。

梳理相关文献，可归纳出针对第 2 类曲线延拓问题主要有 3 种解决办法。（1）几何法：根据连接处的几何连续条件直接确定延拓曲线的控制顶点，从而生成延拓曲线，如文献[8]；（2）代数法：先从参数连续性要求出发构造性质合适的势函数，再通过势函数将 2 条待延拓曲线组合生成最终的延拓曲线，如文献[12-14]。（3）综合运用代数和几何方法：先根据连接处的几何连续条件，分别构造与待延拓曲线中的某一条光滑连接的辅助延拓曲线，再通过势函数将 2 条辅助延拓曲线混合形成最终的延拓曲线，如文献[11]。

比较上述 3 种方法可以看出：（1）方法 2 最简单，只需构造代数性质符合要求的势函数，即可构造在连接处满足光滑度要求的延拓曲线；而且文献[14]给出了可满足任意阶参数连续性的势函数，因此采用该方法可以构造高阶连续的延拓曲线。但因未考虑几何信息，由方法 2 得到的延拓曲线往往不能反映待延拓曲线之间的过渡趋势。（2）因为方法 1 可以将过渡趋势考虑进几何信息中，所以由方法 1 构造的延拓曲线能够比较自然地反映待延拓曲线之间的过渡关系。但是，方法 1 存在一个弊端：难以构造与待延拓曲线在连接处高阶连续的延拓曲线。如果采用最常用的三次 Bézier 曲线作为延拓曲线，通常只能保证延拓曲线与待延拓曲线在连接处 G^1 连续。要想实现高阶几何连续，只能通过构造多条曲线段组合形成最终的延拓曲线，或者提高延拓曲线的次数，如用 5 次 Bézier 曲线作为延拓曲线来实现在连接处 G^2 连续的目标。（3）方法 3 较好地综合了前 2 种方法的优点，既可以保证延拓曲线比较自然地反映待延拓曲线之间的过渡关系，又可以用较少的曲线段实现高阶连续。但是，目前采用此方法的文献[11]使用的势函数为有理函数，计算比较复杂，而且事先难以预知最终的延拓曲线形状。

基于上述分析，同时考虑到三次 Bézier 曲线在工程中最常用，并且 2 阶连续可以满足多数场合下的要求，因此本文用一条延拓曲线实现 2 条不相邻的三次 Bézier 曲线之间的过渡，要求延拓曲线与待延拓曲线之间满足 G^2 或 C^2 连续；延拓曲线能够较好地反映待延拓曲线之间的变化趋势，并且计

算尽量简单，同时考虑曲面延拓方案。

1 问题的提出

给定 2 条不相邻的三次 Bézier 曲线 $\boldsymbol{C}(t)$ 和 $\boldsymbol{D}(t)$，其中，$t\in[0,1]$，其控制顶点分别为 $\boldsymbol{c}_i$ 和 $\boldsymbol{d}_i$，$i=0,1,2,3$，如图 1 所示。拟构造一条延拓曲线实现点 $\boldsymbol{c}_3$ 和 $\boldsymbol{d}_0$ 之间的连接，要求该曲线满足条件：（1）在端点处分别与 $\boldsymbol{C}(t)$ 和 $\boldsymbol{D}(t)$ 保持 G^2 或 C^2 连续；（2）形状可调；（3）视觉光顺。此外，要求延拓曲线仅含一条曲线段，不能由多段曲线拼接而成。

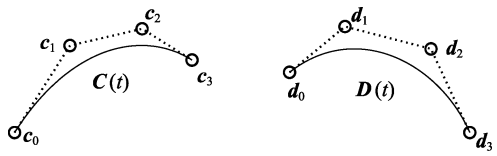


图 1 待延拓曲线

根据引言部分的分析，若采用几何法构造 2 阶连续的延拓曲线，需由 2 段三次 Bézier 曲线拼接而成，如文献[8]，不符合上述要求。因此，只有 2 种构造延拓曲线的方案。

方案 1：直接运用势函数将 2 条待延拓曲线 $\boldsymbol{C}(t)$ 和 $\boldsymbol{D}(t)$ 组合生成延拓曲线；

方案 2：先构造辅助延拓曲线，再运用势函数混合辅助延拓曲线生成最终的延拓曲线。

若采用方案 1，根据文献[14]，延拓曲线可表示为

$$\boldsymbol{G}(t)=(1-g(t))\boldsymbol{C}(t)+g(t)\boldsymbol{D}(t),\ t\in[0,1],$$

其中，

$$g(t)=(1-t)^3\left(1+3t+6t^2+20\lambda t^3\right)。$$

因为势函数 $g(t)$ 中含参数 λ，所以延拓曲线 $\boldsymbol{G}(t)$ 形状可调；另外，可得 $\boldsymbol{G}(0)=\boldsymbol{D}(0)$，$\boldsymbol{G}(1)=\boldsymbol{C}(1)$，$\boldsymbol{G}^{(i)}(0)=\boldsymbol{D}^{(i)}(0)$，$\boldsymbol{G}^{(i)}(1)=\boldsymbol{C}^{(i)}(1)$，$i=1,2$，表明曲线 $\boldsymbol{G}(t)$ 与 $\boldsymbol{C}(t)$ 和 $\boldsymbol{D}(t)$ 在连接处满足 C^2 连续。当取 $\lambda=0$ 时，由方案 1 生成的延拓曲线如图 2 所示。可以看出，曲线 $\boldsymbol{G}(t)$ 与待延拓曲线在连接处并未实现光滑过渡，因此方案 1 不可取。鉴于此，本文采用方案 2 构造延拓曲线。

注 1：曲线 $\boldsymbol{G}(t)$ 的参数方向是从 $\boldsymbol{d}_0$ 到 $\boldsymbol{c}_3$，与曲线 $\boldsymbol{C}(t)$ 和 $\boldsymbol{D}(t)$ 的参数方向相反，这是曲线 $\boldsymbol{G}(t)$ 与 $\boldsymbol{C}(t)$ 和 $\boldsymbol{D}(t)$ 在连接处满足 C^2 连续但却未实现光滑过渡的根本原因。



图 2 延拓曲线

2 三次 Bézier 曲线间的混合延拓

为了实现延拓曲线在连接处满足 2 阶连续且形状可调的目标，采用代数与几何相结合的方案 2 构造延拓曲线，并在文献[11]的基础上做出 2 点改进：（1）采用文献[14]中定义的多项式函数作为势函数；（2）增加一条与最终的延拓曲线形状相似的辅助延拓曲线，预知和控制最终的延拓曲线形状。

2.1 辅助延拓曲线的构造

基于前述设计思路，先构造 3 条形式均为三次 Bézier 曲线的辅助延拓曲线，分别记为 $\boldsymbol{P}(t)$、$\boldsymbol{Q}(t)$ 和 $\boldsymbol{R}(t)$，控制顶点分别为 $\boldsymbol{p}_i$、$\boldsymbol{q}_i$ 和 $\boldsymbol{r}_i$，其中，$i=0,1,2,3$。

辅助延拓曲线的构造过程与方法如下：

（1）取曲线 $\boldsymbol{P}(t)$ 的控制顶点

$$\begin{cases}\boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{c}_3\\ \boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{c}_3+\alpha_1(\boldsymbol{c}_3-\boldsymbol{c}_2)\\ \boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{d}_0+\alpha_2(\boldsymbol{d}_0-\boldsymbol{d}_1)\\ \boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{d}_0\end{cases},$$

其中，$\alpha_1,\alpha_2>0$。由 Bézier 曲线的端点性质可知

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}(0)=\boldsymbol{C}(1)\\ \boldsymbol{P}'(0)=\alpha_1\boldsymbol{C}'(1)\\ \boldsymbol{P}(1)=\boldsymbol{D}(0)\\ \boldsymbol{P}'(1)=\alpha_2\boldsymbol{D}'(0)\end{cases}\qquad(1)$$

表明辅助延拓曲线 $\boldsymbol{P}(t)$ 与待延拓曲线 $\boldsymbol{C}(t)$ 和 $\boldsymbol{D}(t)$ 分别在点 $\boldsymbol{c}_3$ 和 $\boldsymbol{d}_0$ 处满足 G^1 连续。

（2）取曲线 $\boldsymbol{Q}(t)$ 的控制顶点

$$\begin{cases}\boldsymbol{q}_0=\boldsymbol{c}_3\\ \boldsymbol{q}_1=\boldsymbol{c}_3+h_1(\boldsymbol{c}_3-\boldsymbol{c}_2)\\ \boldsymbol{q}_2=(h_1+1)^2\boldsymbol{c}_3-2h_1(h_1+1)\boldsymbol{c}_2+h_1^2\boldsymbol{c}_1\\ \boldsymbol{q}_3=\boldsymbol{d}_0\end{cases},$$

其中，$h_1>0$，由 Bézier 曲线的端点性质可知

$$\begin{cases}\boldsymbol{Q}(0)=\boldsymbol{C}(1)\\ \boldsymbol{Q}'(0)=h_1\boldsymbol{C}'(1)\\ \boldsymbol{Q}''(0)=h_1^2\boldsymbol{C}''(1)\\ \boldsymbol{Q}(1)=\boldsymbol{D}(0)\end{cases}\qquad(2)$$

表明辅助延拓曲线 $\boldsymbol{Q}(t)$ 与待延拓曲线 $\boldsymbol{C}(t)$ 在点 $\boldsymbol{c}_3$ 处满足 G^2 连续，与 $\boldsymbol{D}(t)$ 在点 $\boldsymbol{d}_0$ 处满足 G^0 连续。

（3）取曲线 $\boldsymbol{R}(t)$ 的控制顶点

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{c}_3\\ \boldsymbol{r}_1=(h_2+1)^2\boldsymbol{d}_0-2h_2(h_2+1)\boldsymbol{d}_1+h_2^2\boldsymbol{d}_2\\ \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{d}_0+h_2(\boldsymbol{d}_0-\boldsymbol{d}_1)\\ \boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{d}_0\end{cases},$$

其中，$h_2>0$，由 Bézier 曲线的端点性质可知

$$\begin{cases}\boldsymbol{R}(0)=\boldsymbol{C}(1)\\ \boldsymbol{R}(1)=\boldsymbol{D}(0)\\ \boldsymbol{R}'(1)=h_2\boldsymbol{D}'(0)\\ \boldsymbol{R}''(1)=h_2^2\boldsymbol{D}''(0)\end{cases}\tag{3}$$

表明辅助延拓曲线 $\boldsymbol{R}(t)$ 与待延拓曲线 $\boldsymbol{C}(t)$ 在点 $\boldsymbol{c}_3$ 处满足 G^0 连续，与 $\boldsymbol{D}(t)$ 在点 $\boldsymbol{d}_0$ 处满足 G^2 连续。

2.2　延拓曲线的构造

选择文献[14]中的势函数

$$f(t)=(1-t)^3(1+3t+6t^2),$$

其端点性质为

$$\begin{cases}f(0)=1,\ f(1)=0\\ f^{(i)}(0)=f^{(i)}(1)=0,\ i=1,2\end{cases}\tag{4}$$

为了实现 2 条不相邻的三次 Bézier 曲线之间的 2 阶连续延拓，以及延拓曲线形状可调的目标，将辅助延拓曲线 $\boldsymbol{P}(t)$ 与 $\boldsymbol{R}(t)$ 混合，得到曲线

$$\boldsymbol{S}(t)=(1-f(t))\boldsymbol{R}(t)+f(t)\boldsymbol{P}(t),\ t\in[0,1];$$

然后将曲线 $\boldsymbol{S}(t)$ 与辅助延拓曲线 $\boldsymbol{Q}(t)$ 混合，得到曲线

$$\boldsymbol{T}(t)=(1-f(t))\boldsymbol{S}(t)+f(t)\boldsymbol{Q}(t),\ t\in[0,1],$$

其为含 4 个形状调整参数的延拓曲线。

定理 1：曲线 $\boldsymbol{S}(t)$ 与待延拓曲线 $\boldsymbol{C}(t)$ 在点 $\boldsymbol{C}(1)=\boldsymbol{c}_3$ 处满足 G^1 连续，与待延拓曲线 $\boldsymbol{D}(t)$ 在点 $\boldsymbol{D}(0)=\boldsymbol{d}_0$ 处满足 G^2 连续。

证明：由式（4）可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{S}(0)=\boldsymbol{P}(0),\ \boldsymbol{S}'(0)=\boldsymbol{P}'(0),\ \boldsymbol{S}''(0)=\boldsymbol{P}''(0)\\ \boldsymbol{S}(1)=\boldsymbol{R}(1),\ \boldsymbol{S}'(1)=\boldsymbol{R}'(1),\ \boldsymbol{S}''(1)=\boldsymbol{R}''(1)\end{cases}\tag{5}$$

结合式（1）（3）（5）可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{S}(0)=\boldsymbol{C}(1),\ \boldsymbol{S}'(0)=\alpha_1\boldsymbol{C}'(1)\\ \boldsymbol{S}(1)=\boldsymbol{D}(0),\ \boldsymbol{S}'(1)=h_2\boldsymbol{D}'(0),\ \boldsymbol{S}''(1)=h_2^2\boldsymbol{D}''(0)\end{cases}\tag{6}$$

式（6）表明，曲线 $\boldsymbol{S}(t)$ 与 $\boldsymbol{C}(t)$ 在连接处 G^1 连续，与 $\boldsymbol{D}(t)$ 在连接处 G^2 连续。　　证毕。

定理 2：延拓曲线 $\boldsymbol{T}(t)$ 具备下列性质。

（1）保参数方向性：延拓曲线 $\boldsymbol{T}(t)$ 与 2 条待延拓曲线的参数方向一致；

（2）连续性：延拓曲线 $\boldsymbol{T}(t)$ 与待延拓曲线 $\boldsymbol{C}(t)$ 在点 $\boldsymbol{C}(1)=\boldsymbol{c}_3$ 处满足 G^2 连续，与待延拓曲线 $\boldsymbol{D}(t)$ 在点 $\boldsymbol{D}(0)=\boldsymbol{d}_0$ 处满足 G^2 连续；

（3）形状可调性：延拓曲线 $\boldsymbol{T}(t)$ 的形状可通过调整参数 α_i 和 h_i 的值进行调节，其中，$i=1,2$。

证明：形状可调性显然成立，下面证明保参数方向性和连续性。由式（4）可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}(0)=\boldsymbol{Q}(0),\boldsymbol{T}'(0)=\boldsymbol{Q}'(0),\boldsymbol{T}''(0)=\boldsymbol{Q}''(0)\\ \boldsymbol{T}(1)=\boldsymbol{S}(1),\boldsymbol{T}'(1)=\boldsymbol{S}'(1),\boldsymbol{T}''(1)=\boldsymbol{S}''(1)\end{cases}\tag{7}$$

结合式（2）（6）（7）可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}(0)=\boldsymbol{C}(1),\boldsymbol{T}'(0)=h_1\boldsymbol{C}'(1),\boldsymbol{T}''(0)=h_1^2\boldsymbol{C}''(1)\\ \boldsymbol{T}(1)=\boldsymbol{D}(0),\boldsymbol{T}'(1)=h_2\boldsymbol{D}'(0),\boldsymbol{T}''(1)=h_2^2\boldsymbol{D}''(0)\end{cases}\tag{8}$$

由式（8）可知，保参数方向性和连续性成立。　　证毕。

注 2：由式（8）可知，当 $h_1=h_2=1$ 时，延拓曲线与待延拓曲线在连接处满足 C^2 连续。

当取 $\alpha_1=4$，$\alpha_2=1$，$h_1=h_2=1$ 时，由方案 2 生成的辅助延拓曲线与延拓曲线如图 3 所示。可以看出，曲线 $\boldsymbol{T}(t)$ 与 $\boldsymbol{P}(t)$ 形状非常相似，因此设计人员可通过辅助延拓曲线 $\boldsymbol{P}(t)$ 的形状信息，近似确定最终的延拓曲线形状，验证了辅助延拓曲线构造方案的合理性。

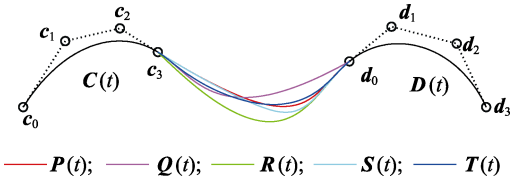


图 3　辅助延拓曲线与延拓曲线

上述分析表明，延拓曲线 $\boldsymbol{T}(t)$ 已经满足在连接处 G^2 连续、形状可调的目标。下面讨论如何对参数 α_i 和 h_i 赋值，$i=1,2$，以确保延拓曲线 $\boldsymbol{T}(t)$ 具备良好的光顺性。

2.3　延拓曲线参数赋值方案

由第 2.2 节的分析可知，延拓曲线 $\boldsymbol{T}(t)$ 的形状取决于参数 α_i 和 h_i 的值，$i=1,2$。这些参数为延拓曲线的形状调整提供了充足的自由度，但是，参数较多也带来了赋值的困难。鉴于此，首先考虑固定

$h_1=h_2=1$，构造 C^2 连续的延拓曲线，此时只需对参数 $\alpha_i\,(i=1,2)$ 赋值。当 C^2 连续的延拓曲线形状不理想时，调整 $h_i\,(i=1,2)$ 的值，构造 G^2 连续的延拓曲线。

文献[15]针对三次 G^1 Hermite 插值中 2 个内控制顶点的位置调节参数，给出基于经验的建议范围是 $0.2d\leqslant\alpha_1,\alpha_2\leqslant 5d$，其中，$d=\|\boldsymbol{d}_0-\boldsymbol{c}_3\|$。对参数 $\alpha_i\,(i=1,2)$ 赋值时，借鉴文献[15]方法，先在该范围内进行测试，通过综合观察延拓曲线及其 Bézier 控制多边形的变化趋势，确定合适的参数范围。

图 4 所示为在待延拓曲线固定的情况下，通过取不同的参数 α_1 和 α_2 得到的 C^2 连续延拓曲线。图 4c ~ 图 4e 中，红、蓝和绿色曲线为 α_1,α_2 取不同值时的延拓曲线 $\boldsymbol{T}(t)$，将其转化为 Bézier 曲线形式，图中与延拓曲线同色的折线为其 Bézier 控制多边形。从图 4 可以看出，当 α_1 固定，α_2 逐渐增大时，$\boldsymbol{T}(t)$ 在转入 $\boldsymbol{T}(1)$ 方向之前，更长的部分接近 $\boldsymbol{T}(1)$；当 α_2 固定，α_1 逐渐增大时，$\boldsymbol{T}(t)$ 在转入 $\boldsymbol{T}(1)$ 方向之前，更长的部分接近 $\boldsymbol{T}(0)$；当 α_1 和 α_2 同时增大时，$\boldsymbol{T}(t)$ 的控制顶点间距逐渐增加，且控制多边形逐渐出现打圈自交的情况，相应的延拓曲线形状由钝渐锐，导致出现尖点或二重点。除了图 4 给出的实例以外，本文通过大量数值实验分析，建议在范围 $0<\alpha_1,\alpha_2\leqslant d$ 中选取 $\alpha_i\,(i=1,2)$。

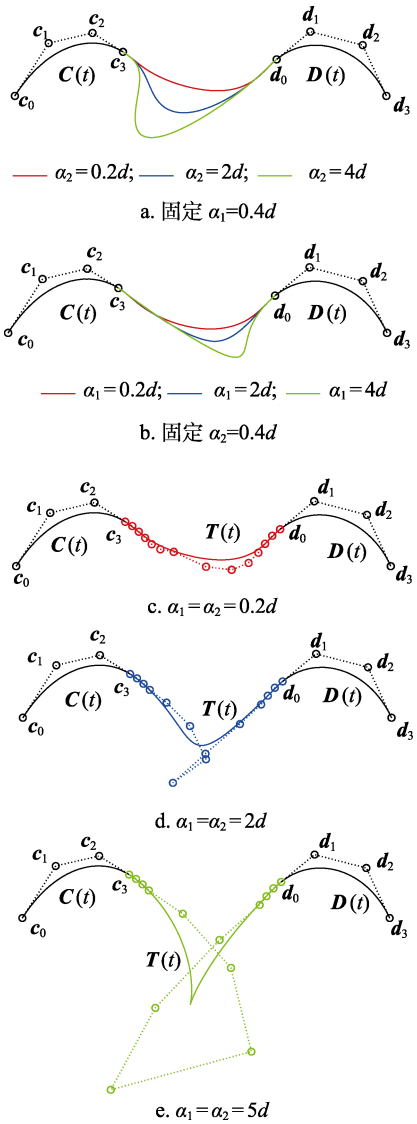


图 4 α_1,α_2 不同时的延拓曲线

图 4 中，2 条待延拓曲线的控制顶点分布相对均匀，3 个距离 $d_1=\|\boldsymbol{c}_3-\boldsymbol{c}_0\|$，$d=\|\boldsymbol{d}_0-\boldsymbol{c}_3\|$ 和 $d_2=\|\boldsymbol{d}_3-\boldsymbol{d}_0\|$ 相对均匀，控制边 $\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3$ 与 $\boldsymbol{d}_0\boldsymbol{d}_1$ 的夹角适中，2 条待延拓曲线不相交。下面将给出一些不满足这些特征的实例。

图 5a 中，控制边 $\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3$ 较长，$\boldsymbol{d}_0\boldsymbol{d}_1$ 较短；图 5b 中，控制边 $\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3$ 与 $\boldsymbol{d}_0\boldsymbol{d}_1$ 的夹角很小；图 5c 中，控制边 $\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3$ 较长，$\boldsymbol{d}_0\boldsymbol{d}_1$ 较短，且二者的夹角很大；图 5d 中，2 条待延拓曲线凹凸性相同且相交；图 5e 中，2 条待延拓曲线凹凸性相反且相交；图 5f 中，与距离 d_1 和 d_2 相比，距离 d 较小，即顶点 $\boldsymbol{c}_3$ 与 $\boldsymbol{d}_0$ 比较靠近。在图 5 中，均取 $h_1=h_2=1$，延拓曲线与待延拓曲线之间 C^2 连续。

图 6 中，均取 $h_i=d/d_i\,(i=1,2)$，延拓曲线与待延拓曲线之间 G^2 连续。图 6a~图 6c 中的待延拓曲线分别与图 5d~图 5f 中一致，比较这些图可以看出，调整 $h_i\,(i=1,2)$ 的值可有效地消除延拓曲线膨胀、尖锐、自交等现象。

为了从图 4~图 6 中获得视觉光顺的延拓曲线，需通过数值试验反复调整参数 α_1 和 α_2，直至获得满意结果。在实际应用中，人们更希望直接求取一条光顺的延拓曲线，为此可通过解能量最小化模型确定 α_1 和 α_2 的值。取应变能的近似表达式 $E(\alpha_1,\alpha_2)=\int_0^1|\boldsymbol{T}''(t)|^2\,\mathrm{d}t$ 作为目标函数，将优化模型

$$\begin{cases}\min\ E(\alpha_1,\alpha_2)=\int_0^1|\boldsymbol{T}''(t)|^2\,\mathrm{d}t\\ \text{s.t. }\ 0<\alpha_1,\alpha_2\leqslant d\end{cases}\tag{9}$$

的解作为 α_1 和 α_2 的值。

注 3：若一条曲线有尖点或者许多拐点，或一张曲面凹凸不平，则认为该曲线或曲面是不光顺的。曲线曲面的光顺性还与几何外形的美观性相关，会

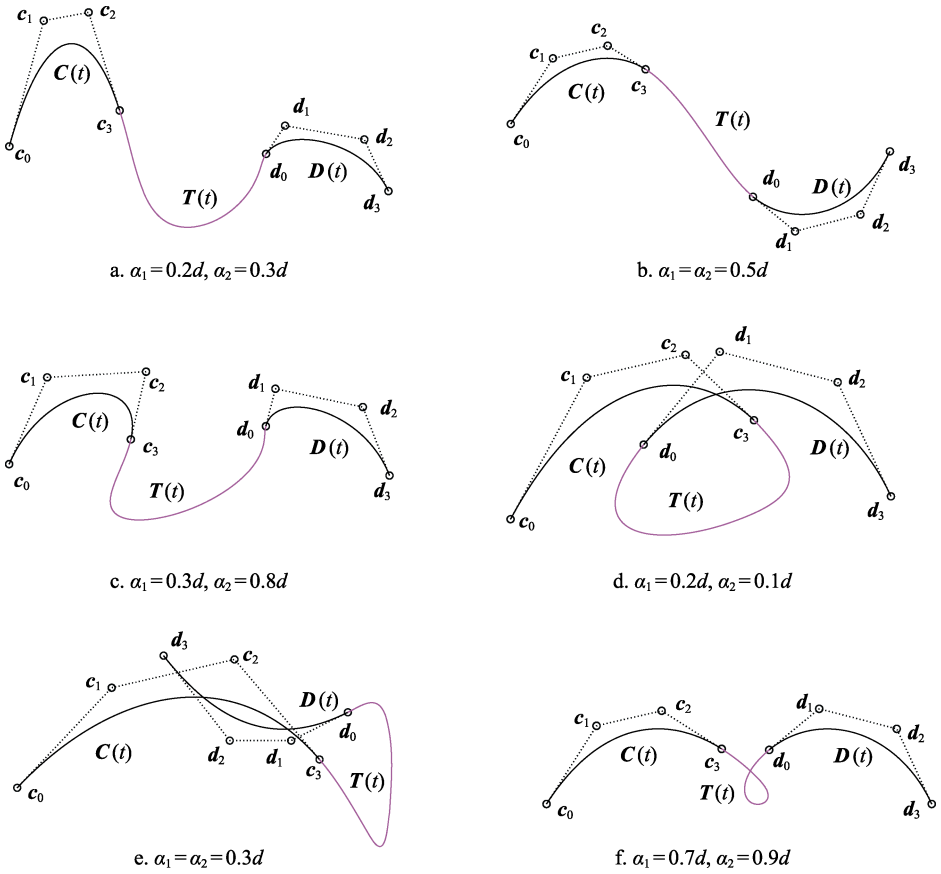


图 5　C^2 连续延拓曲线

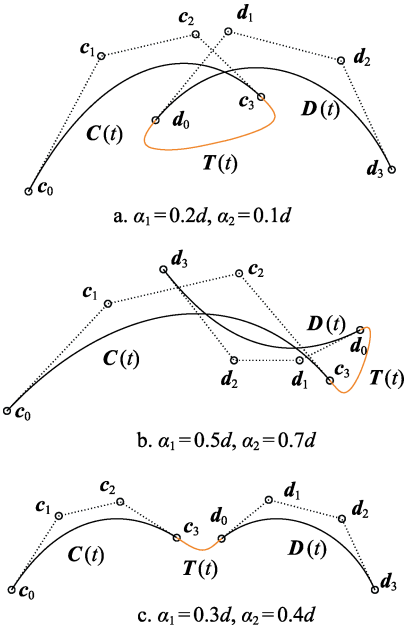


图 6　G^2 连续延拓曲线

受主观因素的影响，因此曲线曲面的光顺性问题需结合实际情况进行分析[16]。

注 4：基于“物理样条是光顺的”这一事实，本文采用曲线曲面的应变能刻画其光顺性。但由于采用的是应变能的近似表达式，因此通过解优化模型得到的结果未必光顺，有时还需要结合实际情况进行调整。

2.4　延拓曲线算法

依据第 2.1 节~第 2.3 节的分析，三次 Bézier 曲线间的混合延拓算法步骤如下。

输入：2 条待延拓的三次 Bézier 曲线。

输出：形状参数 α_1 和 α_2 的值、曲线应变能 E 和延拓曲线 $\boldsymbol{T}(t)$。

Step1：输入 2 条待延拓曲线的控制顶点 $\boldsymbol{c}_i$ 和 $\boldsymbol{d}_i$，其中，$i=0,1,2,3$，并生成相应的曲线 $\boldsymbol{C}(t)$ 与 $\boldsymbol{D}(t)$。

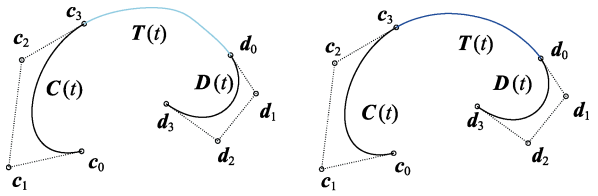
Step2：设计 3 条辅助延拓曲线，曲线 $\boldsymbol{P}(t)$ 在端点 $\boldsymbol{c}_3$ 和 $\boldsymbol{d}_0$ 处保持 G^1 连续；曲线 $\boldsymbol{Q}(t)$ 在 $\boldsymbol{c}_3$ 处保持 G^2 连续；曲线 $\boldsymbol{R}(t)$ 在 $\boldsymbol{d}_0$ 处保持 G^2 连续。

Step3：运用势函数 $f(t)$ 将辅助延拓曲线 $\boldsymbol{P}(t)$ 和 $\boldsymbol{R}(t)$ 组合生成曲线 $\boldsymbol{S}(t)$，再将曲线 $\boldsymbol{S}(t)$ 和辅助延拓曲线 $\boldsymbol{Q}(t)$ 组合生成延拓曲线 $\boldsymbol{T}(t)$。

Step4：根据待延拓曲线的几何特征，确定参数 h_1 和 h_2 的值，一般取 $h_1=h_2=1$；若 $d=\|\boldsymbol{d}_0-\boldsymbol{c}_3\|$ 的值较小，则取 $h_i=d/d_i\,(i=1,2)$。根据式（9）求解参数 α_1 和 α_2 的

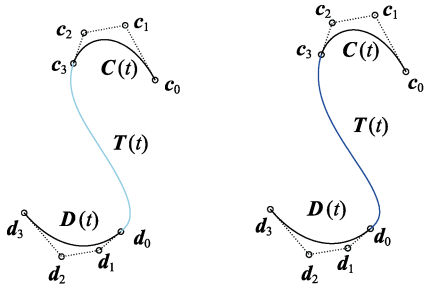
值，生成最终的延拓曲线。

图 7~图 8 所示分别为采用本文方法构造的 C 形和 S 形 C^2 连续延拓曲线，其中，图 7a 和图 8a 中，参数 α_1 和 α_2 在 $(0,d]$ 中任意选取；图 7b 和图 8b 中，参数 α_1 和 α_2 通过解式（9）确定；图 7a 和图 7b 中，延拓曲线 $\boldsymbol{T}(t)$ 的应变能分别为 $E(2.10,0.88)=246.05$ 和 $E(0.12,1.20)=190.24$；图 8a 和图 8b 中，延拓曲线 $\boldsymbol{T}(t)$ 的应变能分别为 $E(2.5,3.0)=450.88$ 和 $E(3.68,2.28)=440$。通过对比可以看出，采用优化模型构造的延拓曲线 $\boldsymbol{T}(t)$ 的应变能较小，光顺性较好。在图 7~图 8 中，均取 $h_1=h_2=1$。



a. $\alpha_1=2.10$, $\alpha_2=0.88$　　b. $\alpha_1=0.12$, $\alpha_2=1.20$

图 7　C 形 C^2 连续延拓曲线

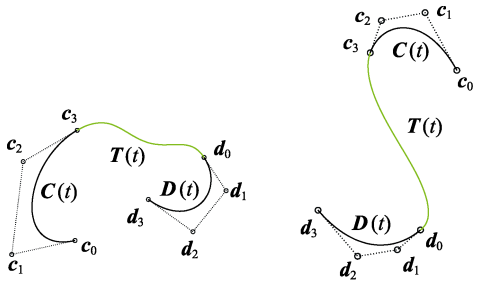


a. $\alpha_1=2.5$, $\alpha_2=3.0$　　b. $\alpha_1=3.68$, $\alpha_2=2.28$

图 8　S 形 C^2 连续延拓曲线

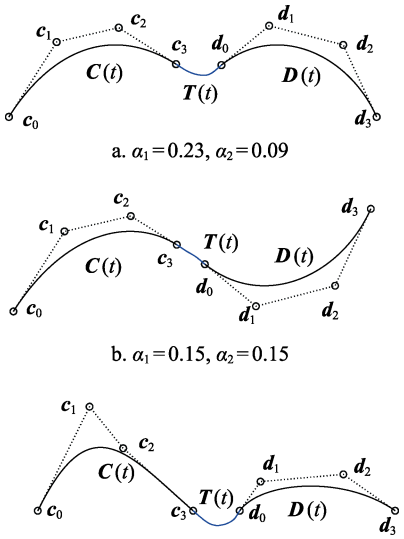
保持图 7~图 8 中待延拓曲线不变，图 9 所示为运用文献[13]方法构造的 C^2 连续延拓曲线。其中，图 9a 和图 9b 中延拓曲线的应变能分别为 $E=479.98$ 和 $E=209.15$。对比图 7b 和图 9a 可以看出，采用本文方法构造的 C 形延拓曲线的光顺效果明显优于文献[13]，并且曲线应变能明显低于文献[13]；对比图 8b 和图 9b 可以看出，采用本文方法构造的 S 形延拓曲线的应变能稍高于文献[13]，但光顺效果与文献[13]相比并无明显差别。

图 10 所示为采用本文方法构造的 G^2 连续延拓曲线，其中，均取 $h_i=d/d_i\,(i=1,2)$，参数 α_1 和 α_2 均通过解优化模型确定。图 10a~图 10d 中，延拓曲线的应变能分别为 $E(0.23,0.09)=3.16$，$E(0.15,0.15)=0.12$，$E(0.02,0.12)=7.89$ 和 $E(0.30,0.04)=419.25$。



a. C 形延拓曲线　　b. S 形延拓曲线

图 9　文献[13]中的 C^2 连续延拓曲线



a. $\alpha_1=0.23$, $\alpha_2=0.09$

b. $\alpha_1=0.15$, $\alpha_2=0.15$

c. $\alpha_1=0.02$, $\alpha_2=0.12$

d. $\alpha_1=0.30$, $\alpha_2=0.04$

图 10　基于能量法的 G^2 连续延拓曲线

3　双三次 Bézier 曲面间的混合延拓

Bézier 曲面是 Bézier 曲线向曲面的直接拓广，双三次 Bézier 曲面的一般形式为

$$\boldsymbol{M}(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\boldsymbol{m}_{ij}B_i^3(u)B_j^3(v),\ 0\leqslant u,v\leqslant 1。$$

其中，$\boldsymbol{m}_{ij}\,(0\leqslant i,j\leqslant 3)$ 表示曲面控制顶点；$B_i^3(u)$ 和 $B_j^3(v)$ 均为三次 Bernstein 基函数。

本节讨论如下问题：给定 2 张不相邻的双三次

Bézier 曲面 $\boldsymbol{C}(u,v)$ 和 $\boldsymbol{D}(u,v)$，如图 11 所示，控制顶点分别为 $\boldsymbol{c}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{d}_{ij}$，其中，$i,j=0,1,2,3$。希望构造一张从边界 $\boldsymbol{C}(u,1)$ 到 $\boldsymbol{D}(u,0)$ 的延拓曲面，且延拓曲面与待延拓曲面在边界处满足 G^2 连续。

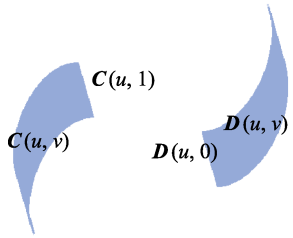


图 11　待延拓曲面

为了解决上述问题，本节将曲线延拓方法推广至曲面。

3.1　辅助延拓曲面的构造

首先构造 3 张辅助延拓曲面 $\boldsymbol{P}(u,v)$、$\boldsymbol{Q}(u,v)$ 和 $\boldsymbol{R}(u,v)$，控制顶点分别为 $\boldsymbol{p}_{ij}$、$\boldsymbol{q}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{r}_{ij}$，其中，$i,j=0,1,2,3$。

辅助延拓曲面的构造过程与方法如下：

（1）取曲面 $\boldsymbol{P}(u,v)$ 的控制顶点

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_{00}\\ \boldsymbol{p}_{10}\\ \boldsymbol{p}_{20}\\ \boldsymbol{p}_{30}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_{03}\\ \boldsymbol{c}_{13}\\ \boldsymbol{c}_{23}\\ \boldsymbol{c}_{33}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_{01}\\ \boldsymbol{p}_{11}\\ \boldsymbol{p}_{21}\\ \boldsymbol{p}_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_{03}\\ \boldsymbol{c}_{13}\\ \boldsymbol{c}_{23}\\ \boldsymbol{c}_{33}\end{bmatrix}+\beta_1\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_{03}-\boldsymbol{c}_{02}\\ \boldsymbol{c}_{13}-\boldsymbol{c}_{12}\\ \boldsymbol{c}_{23}-\boldsymbol{c}_{22}\\ \boldsymbol{c}_{33}-\boldsymbol{c}_{32}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_{02}\\ \boldsymbol{p}_{12}\\ \boldsymbol{p}_{22}\\ \boldsymbol{p}_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_{00}\\ \boldsymbol{d}_{10}\\ \boldsymbol{d}_{20}\\ \boldsymbol{d}_{30}\end{bmatrix}+\beta_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_{00}-\boldsymbol{d}_{01}\\ \boldsymbol{d}_{10}-\boldsymbol{d}_{11}\\ \boldsymbol{d}_{20}-\boldsymbol{d}_{21}\\ \boldsymbol{d}_{30}-\boldsymbol{d}_{31}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_{03}\\ \boldsymbol{p}_{13}\\ \boldsymbol{p}_{23}\\ \boldsymbol{p}_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_{00}\\ \boldsymbol{d}_{10}\\ \boldsymbol{d}_{20}\\ \boldsymbol{d}_{30}\end{bmatrix};$$

其中，$\beta_1,\beta_2>0$，由 Bézier 曲面的边界性质可知

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}(u,0)=\boldsymbol{C}(u,1)\\ \boldsymbol{P}_v(u,0)=\beta_1\boldsymbol{C}_v(u,1)\\ \boldsymbol{P}(u,1)=\boldsymbol{D}(u,0)\\ \boldsymbol{P}_v(u,1)=\beta_2\boldsymbol{D}_v(u,0)\end{cases}\tag{10}$$

表明曲面 $\boldsymbol{P}(u,v)$ 与待延拓曲面 $\boldsymbol{C}(u,v)$ 和 $\boldsymbol{D}(u,v)$ 分别在边界 $\boldsymbol{C}(u,1)$ 和 $\boldsymbol{D}(u,0)$ 处满足 G^1 连续。

（2）取曲面 $\boldsymbol{Q}(u,v)$ 的控制顶点

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_{00}\\ \boldsymbol{q}_{10}\\ \boldsymbol{q}_{20}\\ \boldsymbol{q}_{30}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_{03}\\ \boldsymbol{c}_{13}\\ \boldsymbol{c}_{23}\\ \boldsymbol{c}_{33}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_{01}\\ \boldsymbol{q}_{11}\\ \boldsymbol{q}_{21}\\ \boldsymbol{q}_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_{03}\\ \boldsymbol{c}_{13}\\ \boldsymbol{c}_{23}\\ \boldsymbol{c}_{33}\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_{03}-\boldsymbol{c}_{02}\\ \boldsymbol{c}_{13}-\boldsymbol{c}_{12}\\ \boldsymbol{c}_{23}-\boldsymbol{c}_{22}\\ \boldsymbol{c}_{33}-\boldsymbol{c}_{32}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_{02}\\ \boldsymbol{q}_{12}\\ \boldsymbol{q}_{22}\\ \boldsymbol{q}_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(k_1+1)^2\boldsymbol{c}_{03}-2k_1(k_1+1)\boldsymbol{c}_{02}+k_1^2\boldsymbol{c}_{01}\\ (k_1+1)^2\boldsymbol{c}_{13}-2k_1(k_1+1)\boldsymbol{c}_{12}+k_1^2\boldsymbol{c}_{11}\\ (k_1+1)^2\boldsymbol{c}_{23}-2k_1(k_1+1)\boldsymbol{c}_{22}+k_1^2\boldsymbol{c}_{21}\\ (k_1+1)^2\boldsymbol{c}_{33}-2k_1(k_1+1)\boldsymbol{c}_{32}+k_1^2\boldsymbol{c}_{31}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_{03}\\ \boldsymbol{q}_{13}\\ \boldsymbol{q}_{23}\\ \boldsymbol{q}_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_{00}\\ \boldsymbol{d}_{10}\\ \boldsymbol{d}_{20}\\ \boldsymbol{d}_{30}\end{bmatrix};$$

其中，$k_1>0$，由 Bézier 曲面的端点性质可知

$$\begin{cases}\boldsymbol{Q}(u,0)=\boldsymbol{C}(u,1)\\ \boldsymbol{Q}_v(u,0)=k_1\boldsymbol{C}_v(u,1)\\ \boldsymbol{Q}_{vv}(u,0)=k_1^2\boldsymbol{C}_{vv}(u,1)\\ \boldsymbol{Q}(u,1)=\boldsymbol{D}(u,0)\end{cases}\tag{11}$$

表明曲面 $\boldsymbol{Q}(u,v)$ 与待延拓曲面 $\boldsymbol{C}(u,v)$ 在边界 $\boldsymbol{C}(u,1)$ 处满足 G^2 连续，与 $\boldsymbol{D}(u,v)$ 在边界 $\boldsymbol{D}(u,0)$ 处满足 G^0 连续。

（3）取曲面 $\boldsymbol{R}(u,v)$ 的控制顶点

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_{00}\\ \boldsymbol{r}_{10}\\ \boldsymbol{r}_{20}\\ \boldsymbol{r}_{30}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_{03}\\ \boldsymbol{c}_{13}\\ \boldsymbol{c}_{23}\\ \boldsymbol{c}_{33}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_{01}\\ \boldsymbol{r}_{11}\\ \boldsymbol{r}_{21}\\ \boldsymbol{r}_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(k_2+1)^2\boldsymbol{d}_{00}-2k_2(k_2+1)\boldsymbol{d}_{01}+k_2^2\boldsymbol{d}_{02}\\ (k_2+1)^2\boldsymbol{d}_{10}-2k_2(k_2+1)\boldsymbol{d}_{11}+k_2^2\boldsymbol{d}_{12}\\ (k_2+1)^2\boldsymbol{d}_{20}-2k_2(k_2+1)\boldsymbol{d}_{21}+k_2^2\boldsymbol{d}_{22}\\ (k_2+1)^2\boldsymbol{d}_{30}-2k_2(k_2+1)\boldsymbol{d}_{31}+k_2^2\boldsymbol{d}_{32}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_{02}\\ \boldsymbol{r}_{12}\\ \boldsymbol{r}_{22}\\ \boldsymbol{r}_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_{00}\\ \boldsymbol{d}_{10}\\ \boldsymbol{d}_{20}\\ \boldsymbol{d}_{30}\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_{00}-\boldsymbol{d}_{01}\\ \boldsymbol{d}_{10}-\boldsymbol{d}_{11}\\ \boldsymbol{d}_{20}-\boldsymbol{d}_{21}\\ \boldsymbol{d}_{30}-\boldsymbol{d}_{31}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_{03}\\ \boldsymbol{r}_{13}\\ \boldsymbol{r}_{23}\\ \boldsymbol{r}_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_{00}\\ \boldsymbol{d}_{10}\\ \boldsymbol{d}_{20}\\ \boldsymbol{d}_{30}\end{bmatrix};$$

其中，$k_2>0$，由 Bézier 曲面的端点性质可知

$$\begin{cases}\boldsymbol{R}(u,0)=\boldsymbol{C}(u,1)\\ \boldsymbol{R}(u,1)=\boldsymbol{D}(u,0)\\ \boldsymbol{R}_v(u,1)=k_2\boldsymbol{D}_v(u,0)\\ \boldsymbol{R}_{vv}(u,1)=k_2^2\boldsymbol{D}_{vv}(u,0)\end{cases}\tag{12}$$

表明曲面 $\boldsymbol{Q}(u,v)$ 与待延拓曲面 $\boldsymbol{C}(u,v)$ 在边界 $\boldsymbol{C}(u,1)$ 处满足 G^0 连续，与 $\boldsymbol{D}(u,v)$ 在边界 $\boldsymbol{D}(u,0)$ 处满足 G^2 连续。

3.2 延拓曲面的构造

借助势函数 $f(v)$，将辅助延拓曲面 $\boldsymbol{P}(u,v)$ 和 $\boldsymbol{R}(u,v)$ 组合生成曲面

$$\boldsymbol{S}(u,v)=(1-f(v))\boldsymbol{R}(u,v)+f(v)\boldsymbol{P}(u,v)\tag{13}$$

然后将曲面 $\boldsymbol{S}(u,v)$ 与 $\boldsymbol{Q}(u,v)$ 组合，生成曲面

$$\boldsymbol{T}(u,v)=(1-f(v))\boldsymbol{S}(u,v)+f(v)\boldsymbol{Q}(u,v)\tag{14}$$

式（14）为含有 4 个形状调整参数的延拓曲面。

定理 3：曲面 $\boldsymbol{S}(u,v)$ 与待延拓曲面 $\boldsymbol{C}(u,v)$ 在边界 $\boldsymbol{C}(u,1)$ 处 G^1 连续，与待延拓曲面 $\boldsymbol{D}(u,v)$ 在边界 $\boldsymbol{D}(u,0)$ 处 G^2 连续。

证明：由式（4）（13）可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{S}(u,0)=\boldsymbol{P}(u,0),\boldsymbol{S}(u,1)=\boldsymbol{R}(u,1)\\ \boldsymbol{S}_v(u,0)=\boldsymbol{P}_v(u,0),\boldsymbol{S}_v(u,1)=\boldsymbol{R}_v(u,1)\\ \boldsymbol{S}_{vv}(u,0)=\boldsymbol{P}_{vv}(u,0),\boldsymbol{S}_{vv}(u,1)=\boldsymbol{R}_{vv}(u,1)\end{cases}\tag{15}$$

联立式（10）（12）（15）可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{S}(u,0)=\boldsymbol{C}(u,1),\boldsymbol{S}(u,1)=\boldsymbol{D}(u,0)\\ \boldsymbol{S}_v(u,0)=\beta_1\boldsymbol{C}_v(u,1),\boldsymbol{S}_v(u,1)=k_2\boldsymbol{D}_v(u,0)\\ \boldsymbol{S}_{vv}(u,1)=k_2^2\boldsymbol{D}_{vv}(u,0)\end{cases}\tag{16}$$

式（16）表明，曲面 $\boldsymbol{S}(u,v)$ 与 $\boldsymbol{C}(u,v)$ 在连接处 G^1 连续，与 $\boldsymbol{D}(u,v)$ 在连接处 G^2 连续。 证毕。

定理 4：延拓曲面 $\boldsymbol{T}(u,v)$ 具备下列性质。

（1）保参数方向性：延拓曲面 $\boldsymbol{T}(u,v)$ 与待延拓曲面 $\boldsymbol{C}(u,v)$ 和 $\boldsymbol{D}(u,v)$ 的参数 v 方向一致；

（2）连续性：延拓曲面 $\boldsymbol{T}(u,v)$ 与待延拓曲面 $\boldsymbol{C}(u,v)$ 在边界 $\boldsymbol{C}(u,1)$ 处 G^2 连续，与待延拓曲面 $\boldsymbol{D}(u,v)$ 在边界 $\boldsymbol{D}(u,0)$ 处 G^2 连续；

（3）形状可调性：延拓曲面 $\boldsymbol{T}(u,v)$ 的形状可通过改变参数 β_i 和 k_i 的取值进行调节，$i=1,2$。

证明：形状可调性显然成立，下面证明保参数方向性和连续性。由式（4）（14）可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}(u,0)=\boldsymbol{Q}(u,0),\boldsymbol{T}(u,1)=\boldsymbol{S}(u,1)\\ \boldsymbol{T}_v(u,0)=\boldsymbol{Q}_v(u,0),\boldsymbol{T}_v(u,1)=\boldsymbol{S}_v(u,1)\\ \boldsymbol{T}_{vv}(u,0)=\boldsymbol{Q}_{vv}(u,0),\boldsymbol{T}_{vv}(u,1)=\boldsymbol{S}_{vv}(u,1)\end{cases}\tag{17}$$

联立式（11）（16）（17）可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}(u,0)=\boldsymbol{C}(u,1),\boldsymbol{T}(u,1)=\boldsymbol{D}(u,0)\\ \boldsymbol{T}_v(u,0)=k_1\boldsymbol{C}_v(u,1),\boldsymbol{T}_v(u,1)=k_2\boldsymbol{D}_v(u,0)\\ \boldsymbol{T}_{vv}(u,0)=k_1^2\boldsymbol{C}_{vv}(u,1),\boldsymbol{T}_{vv}(u,1)=k_2^2\boldsymbol{D}_{vv}(u,0)\end{cases}\tag{18}$$

由式（18）可知，保参数方向性和连续性成立。

证毕。

注 5：由式（18）可知，当 $k_1=k_2=1$ 时，延拓曲面与待延拓曲面在连接处满足 C^2 连续。

3.3 延拓曲面参数赋值方案

由延拓曲面的性质可知，其形状与参数 β_i 和 k_i 的取值有关，$i=1,2$。针对这些参数的赋值方案与曲线类似，首先考虑固定 $k_1=k_2=1$，构造 C^2 连续的延拓曲面，此时只需对参数 $\beta_i\,(i=1,2)$ 赋值；当 C^2 连续的延拓曲面形状不理想时，调整 $k_i\,(i=1,2)$ 的值，构造 G^2 连续的延拓曲面。

图 12 所示为在待延拓曲面固定的情况下，通过取不同的参数 β_1 和 β_2 得到的 C^2 连续延拓曲面。图 12a 中，固定 $\beta_1=1$，紫、红、黄色曲面分别取 $\beta_2=1$，$\beta_2=5$ 和 $\beta_2=10$；图 12b 中，固定 $\beta_2=1$，紫、红、黄色曲面分别取 $\beta_1=1$，$\beta_1=5$ 和 $\beta_2=10$；图 12c 中，紫、红、黄色曲面分别取 $\beta_i=1$，$\beta_i=5$ 和 $\beta_i=13$，$i=1,2$。从图 12 可以看出，参数 β_1 和 β_2 变化时，延拓曲面的形状和光顺性都会随之变化。

对于参数 $\beta_i\,(i=1,2)$，可以在大量数值试验的基础上基于经验选取，也可以通过求解能量优化模型确定。取应变能的近似表达式

$$E=\int_0^1\int_0^1\left[\boldsymbol{T}_{uu}^2(u,v)+2\boldsymbol{T}_{uv}^2(u,v)+\boldsymbol{T}_{vv}^2(u,v)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

作为目标函数，将优化模型

$$\begin{cases}\min E=\int_0^1\int_0^1\left[\boldsymbol{T}_{uu}^2(u,v)+2\boldsymbol{T}_{uv}^2(u,v)+\boldsymbol{T}_{vv}^2(u,v)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ \text{s.t. }\beta_1,\beta_2>0\end{cases}\tag{19}$$

的解作为 β_1 和 β_2 的值。

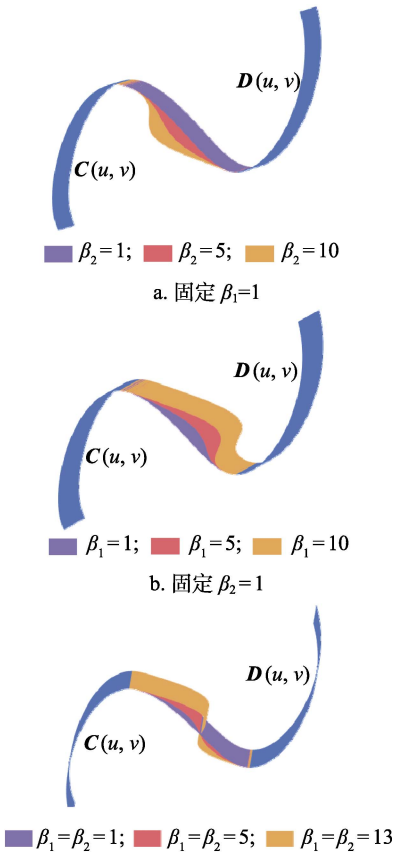


图 12　参数不同时的延拓曲面

3.4　延拓曲面算法

双三次 Bézier 曲面间混合延拓算法步骤如下。

输入：2 张待延拓的双三次 Bézier 曲面。

输出：形状参数 β_1 和 β_2 的值，曲面应变能 E 和延拓曲面 $\boldsymbol{T}(u,v)$。

Step1：输入 2 张待延拓曲面的控制顶点 $\boldsymbol{c}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{d}_{ij}$，其中，$i,j=0,1,2,3$；并生成相应的 Bézier 曲面 $\boldsymbol{C}(u,v)$ 和 $\boldsymbol{D}(u,v)$。

Step2：设计 3 张辅助延拓曲面：曲面 $\boldsymbol{P}(u,v)$ 在边界 $\boldsymbol{C}(u,1)$ 和 $\boldsymbol{D}(u,0)$ 处保持 G^1 连续；曲面 $\boldsymbol{Q}(u,v)$ 在边界 $\boldsymbol{C}(u,1)$ 处保持 G^2 连续；曲面 $\boldsymbol{R}(u,v)$ 在边界 $\boldsymbol{D}(u,0)$ 处保持 G^2 连续。

Step3：借助势函数 $f(v)$ 将辅助延拓曲面 $\boldsymbol{P}(u,v)$ 和 $\boldsymbol{R}(u,v)$ 组合生成曲面 $\boldsymbol{S}(u,v)$，再将 $\boldsymbol{S}(u,v)$ 和 $\boldsymbol{Q}(u,v)$ 组合生成延拓曲面 $\boldsymbol{T}(u,v)$。

Step4：根据待延拓曲面的几何特征确定 k_1 和 k_2 的值，一般取 $k_1=k_2=1$；若边界 $\boldsymbol{C}(u,1)$ 与 $\boldsymbol{D}(u,0)$ 距离较近，则取 $k_1=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\frac{\|\boldsymbol{c}_{i-1,3}-\boldsymbol{d}_{i-1,0}\|}{\|\boldsymbol{c}_{i-1,3}-\boldsymbol{c}_{i-1,0}\|}$，$k_2=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\frac{\|\boldsymbol{c}_{i-1,3}-\boldsymbol{d}_{i-1,0}\|}{\|\boldsymbol{d}_{i-1,3}-\boldsymbol{d}_{i-1,0}\|}$。根据优化式（19）求解 β_1 和 β_2 的值，生成最终的延拓曲面。

图 13 和图 14 所示分别为采用本文方法构造的 C 形和 S 形 C^2 连续延拓曲面。其中，图 13a 和图 14a 中，参数 β_1 和 β_2 在正数范围内任意选取；图 13b 和图 14b 中，参数 β_1 和 β_2 通过求解式（19）确定；图 13a 和图 13b 中，延拓曲面的应变能分别为 $E=217.46$ 和 $E=171.57$；图 14a 和图 14b 中，延拓曲面的应变能分别为 $E=37.94$ 和 $E=36.94$。通过对比可以看出，采用优化模型构造的延拓曲面的应变能较小，光顺性较好。图 13 和图 14 中均取 $k_1=k_2=1$。

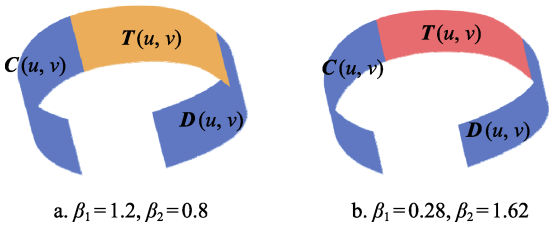


图 13　C 形 C^2 连续延拓曲面

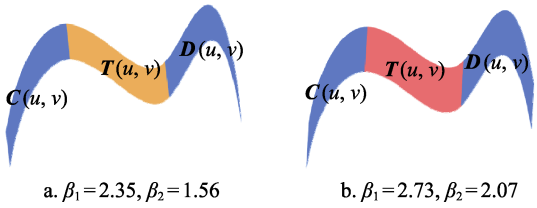


图 14　S 形 C^2 连续延拓曲面

保持图 13~图 14 中待延拓曲面不变，图 15 所示为运用文献[13]中方法构造的 C^2 连续延拓曲面。其中，图 15a 和图 15b 中延拓曲面的应变能分别为 $E=667.70$ 和 $E=33.04$。对比图 13b 和图 15a 可以看出，采用本文方法构造的 C 形延拓曲面的光顺效果明显优于文献[13]，并且曲面应变能显著低于文献[13]；对比图 14b 和图 15b 可以看出，采用本文方法构造的 S 形延拓曲面的光顺效果和应变能较文献[13]无明显差别。

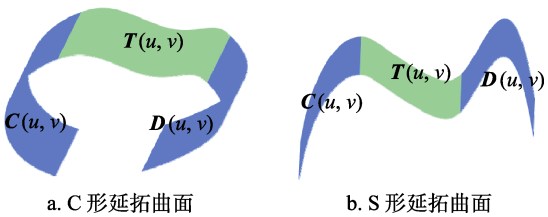
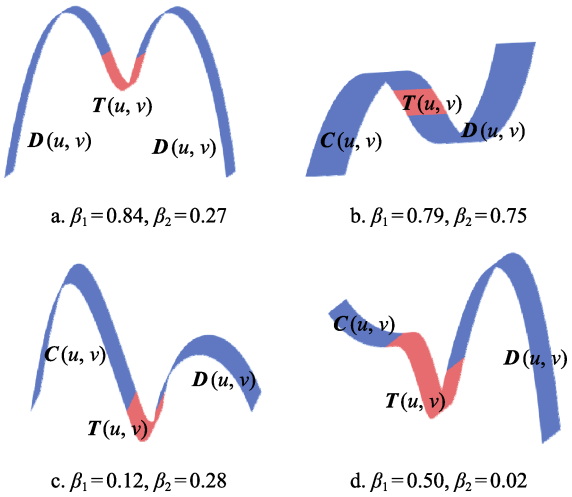


图 15　文献[13]中的 C^2 连续延拓曲面

图 16 所示为采用本文方法构造的 G^2 连续延拓曲面，其中，参数 $k_1=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\frac{\|\boldsymbol{c}_{i-1,3}-\boldsymbol{d}_{i-1,0}\|}{\|\boldsymbol{c}_{i-1,3}-\boldsymbol{c}_{i-1,0}\|}$，$k_2=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\frac{\|\boldsymbol{c}_{i-1,3}-\boldsymbol{d}_{i-1,0}\|}{\|\boldsymbol{d}_{i-1,3}-\boldsymbol{d}_{i-1,0}\|}$，$\beta_1$ 和 β_2 通过解式（19）确定。图 16a~图 16d 中，延拓曲面的应变能分别为 $E=5.90$，$E=0.12$，$E=7.65$ 和 $E=1607.58$。



a. $\beta_1=0.84, \beta_2=0.27$　b. $\beta_1=0.79, \beta_2=0.75$

c. $\beta_1=0.12, \beta_2=0.28$　d. $\beta_1=0.50, \beta_2=0.02$

图 16　基于能量法的 G^2 连续延拓曲面

4　结　语

为了实现 2 条（2 张）不相邻的三次（双三次）Bézier 曲线（曲面）之间的过渡连接，本文提出一种形状可调的 G^2 连续曲线曲面混合延拓方法。以曲线为例，本文方法首先设计 3 条辅助延拓曲线，然后借助势函数，经过 2 次混合得到最终的延拓曲线。延拓曲线中含有 4 个形状参数 α_i 和 h_i，$i=1,2$，其中，α_1 和 α_2 来自第 1 条辅助延拓曲线，h_1 和 h_2 分别来自第 2 和第 3 条辅助延拓曲线。为了缓解参数较多带来的赋值压力，根据待延拓曲线几何特征的不同，选择不同的参数赋值方案。优先考虑取 $h_i=1$，将延拓曲线形状调整的任务交给 α_i，$i=1,2$，此时延拓曲线与待延拓曲线在连接处 C^2 连续；若发现无论怎样调整 α_i 都无法获得满意的延拓曲线，则改变 h_i 的值，由 $h_i=d/d_i$ 确定，$i=1,2$，此时延拓曲线与待延拓曲线在连接处 G^2 连续。无论按照何种方案对 h_i 赋值，α_i 的值都可以通过求解能量优化模型确定；延拓曲面的构造方法以及其中形状参数的赋值方案与曲线类似。数值实例结果表明，所得延拓曲线曲面的光顺效果较好，且就 C 形延拓曲线曲面而言，与文献[13]相比，本文方法具有显著优势。

但是，本文方法经过 2 次混合后得到的延拓曲线次数较高，如何在不增加延拓曲线段数、不降低延拓曲线与待延拓曲线之间的连续阶数，以及不改变延拓曲线的类型为多项式函数的前提下，降低延拓曲线的多项式次数，是值得进一步研究的问题；另外，本文给出的数值实例有限，对于未考虑到的待延拓曲线（曲面）的几何特征，该方法是否依然有效，有待进一步验证。

参考文献（References）：

[1] Shi Fazhong. Computer aided geometric design and non-uniform rational B-spline (revised edition)[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2013: 1-9(in Chinese)
(施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条(修订版)[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2013: 1-9)

[2] Hu S M, Tai C L, Zhang S H. An extension algorithm for B-splines by curve unclamping[J]. Computer-Aided Design, 2002, 34(5): 415-419

[3] Zhou Yuanfeng, Zhang Caiming. Extension of cubic Bézier curve with G^2 constraint[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2005, 17(3): 425-430(in Chinese)
(周元峰, 张彩明. G^2 连续约束下三次 Bézier 曲线的延拓[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(3): 425-430)

[4] Mo G L, Zhao Y N. A new extension algorithm for cubic B-splines based on minimal strain energy[J]. Journal of Zhejiang University-Science A, 2006, 7(12): 2043-2049

[5] Lu Y, Shi K L, Yong J H, *et al*. A B-spline curve extension algorithm[J]. Science China Information Sciences, 2016, 59(3): Article No.32103

[6] Mu Guowang, Zhang Zhiwei, Zang Ting, *et al*. Extension of B-spline curve based on similarity to reference curve[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2018, 30(9): 1705-1711(in Chinese)
(穆国旺, 张志伟, 臧婷, 等. 基于和参考曲线相似性的 B 样条曲线延拓[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2018, 30(9): 1705-1711)

[7] Liu Y J, Qiu R Q, Liang X H. NURBS curve blending using extension[J]. Journal of Zhejiang University-Science A, 2009, 10(4): 570-576

[8] Wang Weiguo, Liu Ligang, Wang Guojin. Geometric extension of nonadjacent cubic Bézier curves[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2006, 18(12): 1911-1917(in Chinese)
(王维国, 刘利刚, 王国瑾. 三次 Bézier 曲线间的几何延拓算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2006, 18(12): 1911-1917)

[9] Cao Decai, Zhou Quan, Guo Qingwei. An extension method for plane cubic Bézier curves[J]. Journal of Hefei University of Technology, 2011, 34(6): 957-960(in Chinese)
(曹德才, 周全, 郭清伟. 平面三次 Bézier 曲线间的一种延拓

方法[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2011, 34(6): 957-960)

[10] Song Qiuzhi, Wang Jianzhong. Generating G^n blending surface based on auxiliary surfaces[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2009, 30(1): 171-178(in Chinese)
(宋遒志, 王建中. 基于辅助面的 G^n 连续过渡曲面的构造方法[J]. 航空学报, 2009, 30(1): 171-178)

[11] Jiang Mao, Yu Desheng. Blending extension of nonadjacent cubic T-Bézier curves[J]. Journal of Zhejiang University (Science Edition), 2015, 42(6): 696-703(in Chinese)
(江卯, 喻德生. 三次 T-Bézier 曲线间的混合延拓[J]. 浙江大学学报(理学版), 2015, 42(6): 696-703)

[12] Li Juncheng, Song Laizhong, Liu Chengzhi. Construction of transition curve and surface with a parameter in shape blending[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2016, 28(12): 2088-2096(in Chinese)
(李军成, 宋来忠, 刘成志. 形状调配中带参数的过渡曲线与曲面构造[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2016, 28(12): 2088-2096)

[13] Li Juncheng, Li Bing, Yi Yeqing. The shape-adjustable transition curves and surfaces with parameter direction preserving[J]. Journal of Zhejiang University (Science Edition), 2019, 46(4): 422-430+438(in Chinese)
(李军成, 李兵, 易叶青. 保参数方向的形状可调过渡曲线与曲面[J]. 浙江大学学报(理学版), 2019, 46(4): 422-430+438)

[14] Yan Lanlan, Fan Jiqiu, Huang Tao. Construction of C^k continuous transition curve based on Metaball technique[J]. Journal of Graphics, 2019, 40(1): 59-69(in Chinese)
(严兰兰, 樊继秋, 黄涛. 基于 Metaball 的 C^k 连续过渡曲线的构造[J]. 图学学报, 2019, 40(1): 59-69)

[15] Lu L Z, Jiang C K, Hu Q Q. Planar cubic G^1 and quintic G^2 Hermite interpolations via curvature variation minimization[J]. Computers & Graphics, 2018, 70: 92-98

[16] Zhu Xinxiong. Free curve and surface modeling technology[M]. Beijing: Scientific Press, 2000: 348-350(in Chinese)
(朱心雄. 自由曲线曲面造型技术[M]. 北京: 科学出版社, 2000: 348-350)