

宽顶堰逆向设计

彭兴辉, 刘利刚*

(中国科学技术大学数学科学学院 合肥 230026)
(lglu@ustc.edu.cn)

摘要: 针对传统宽顶堰几何优化依赖经验公式、难以精准调控下游水位的问题, 提出一种基于不可压缩流体仿真的可微分优化模型。所提模型将堰体几何参数化为可优化变量, 构建基于不可压缩 Navier-Stokes 方程的流场正向求解器; 以目标区域与模拟区域的横向流速之差构造损失函数, 利用自动微分技术高效计算关于几何参数的梯度; 通过梯度下降算法迭代更新堰体形态, 使下游横向流速分布逐步逼近设计目标, 从而实现了对下游水位的间接调控。数值实验采用共轭梯度法 (CG) 和自动微分法 (AD) 2 种梯度求解路径验证了模型的收敛性与一致性。定量评价结果表明, 所提模型结合 CG 的均方误差 (MSE) 为 0.150 92, 结合 AD 的 MSE 为 0.313 47, 而传统经验公式的 MSE 为 1.234 97, 相较于传统方法最高可降低 87.78%。研究表明, 所提可微分框架实现了堰体几何与水力性能的高精度耦合优化, 为复杂水工建筑物的智能化设计提供了新的技术途径, 可扩展至溢洪道、鱼道等其他水利结构的几何优化问题。

关键词: 宽顶堰优化; 可微分流体建模; 不可压缩流体

中图分类号: TP391.9 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2025-00239

Inverse Design Study of Broad-Crested Weirs

Peng Xinghui and Liu Ligang*

(School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

Abstract: Traditional wide-crested weir geometry optimization relies heavily on empirical formulas and struggles with precise control of downstream water levels. To address these limitations, we propose a differentiable optimization model based on incompressible fluid simulation. In this model, the weir geometry is parameterized as optimizable variables, and a forward solver based on the incompressible Navier-Stokes equations is constructed to simulate the flow field. A loss function is defined based on the difference between the transverse velocity in the target region and the simulated region. Automatic differentiation (AD) is then employed to efficiently compute gradients with respect to the geometric parameters. The weir shape is iteratively updated using a gradient descent algorithm, progressively matching the downstream transverse velocity distribution to the design target, thus indirectly controlling the downstream water level. Numerical experiments, utilizing both the conjugate gradient (CG) method and AD for gradient calculation, demonstrate the model's convergence and consistency. Quantitative evaluation shows that the mean squared error (MSE) achieved by the proposed model combined with CG is 0.150 92, while that with AD is 0.313 47. In contrast, the MSE of traditional empirical formulas is 1.234 97, indicating a reduction of up to 87.78% compared to conventional methods. The results demonstrate that the proposed differentiable framework achieves high-precision coupled optimization of weir geometry and hydraulic performance, providing a novel technological approach for the intelligent design of complex hydraulic structures. This

收稿日期: 2025-07-03; 修回日期: 2025-12-01。基金项目: 国家自然科学基金 (62025207)。彭兴辉 (2001—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为计算机图形学; 刘利刚 (1975—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 论文通信作者, CCF 高级会员, 主要研究方向为计算机图形学。

framework can be extended to geometric optimization problems in other hydraulic structures, such as spillways and fishways.

Key words: broad-crested weir optimization; differentiable fluid modeling; incompressible fluid

堰体作为水利工程中关键的流量调控设施,其几何形态设计对泄流能力、消能效率和结构稳定性等核心性能指标具有决定性影响。其中,宽顶堰作为一种典型的长顶堰结构,凭借其稳定的流量系数和简便的施工工艺,广泛应用于明渠流量测量与调控中^[1]。然而,现有的堰体设计模型大多依赖经验公式和工程实践积累^[2],无法有效地应对实际水力环境中的高度复杂性和动态变化,难以平衡多目标性能优化,甚至可能引发安全隐患。此外,现有的理论模型在处理复杂堰体几何形态时往往难以准确地捕捉流场特征^[3],限制了其在堰体形态优化设计中的指导价值。因此,建立基于流体数值模拟的宽顶堰设计优化模型,不仅能够突破传统经验设计的局限性,还能在一定程度上提升工程性能,具有一定的理论和实践价值。

近年来,物质点法(material point method, MPM)结合自动微分(automatic differentiation, AD)技术在可微分流体模拟领域展现出巨大潜力,为流体力学反问题提供了新的解决思路。该方法特别适合处理大变形和复杂边界条件问题^[4],将其与 AD 技术的相结合显著地提高了梯度计算的效率,为形状优化等反问题研究打下了坚实基础。DiffTaichi^[5]等高性能计算框架已经在多个仿真任务中验证了其在梯度优化方面的高效性和可扩展性。

尽管 MPM 在正演模拟中,尤其是在处理大变形和复杂边界条件方面表现优异,但在不可压缩流体的反问题求解中仍面临诸多挑战。现有方法往往通过放宽密度约束换取实时性,然而这会在高动态场景中引发非物理性的密度波动,影响仿真结果可靠性。不可压缩性约束通常依赖全局压力求解,计算代价高、数值刚性强,易导致优化过程震荡甚至发散。此外,MPM 本身也存在粒子穿插、数值扩散等问题,进一步加剧了求解精度与稳定性的矛盾。因此,尽管 MPM 已有初步探索,但在不可压缩流体反演问题的应用中仍需更稳健、高效的建模与求解策略,以应对不可压缩流体反问题的复杂性。

鉴于现有宽顶堰设计模型在复杂水动力环境下的适应性不足,以及基于 MPM 在不可压缩流体反问题求解中面临的挑战,本文提出一种基于不可压缩流体仿真的可微分优化模型,通过精确地调控

下游流速实现对水位高度的间接控制。该模型系统地考虑了堰体几何形态对流量控制、能量耗散及下游水位调节的综合影响,结合数值模拟与优化算法,有效地突破了传统模型对经验公式的依赖;通过构建高效、可微的优化框架,在提升设计精度的同时也增强了其对复杂流动条件的适应能力。为了验证本文模型的有效性,本文在 2 种不同的梯度求解路径下开展数值实验。结果表明,该模型在高密度变化流体环境中具有良好的收敛性和一致性,显著地提高了堰体结构的设计精度,为宽顶堰的几何优化设计探索了新的理论思路和工程实践途径,展现出良好的应用前景和一定的推广潜力。

1 相关工作

1.1 传统堰体优化模型

传统堰体优化模型依托经验公式体系、物理模型实验数据和工程专业知识这三大技术支柱,通过参数化几何建模与多目标优化算法的有机结合,实现了对堰体形态与结构参数的系统性优化,进而达成流量控制、消能效率与结构安全性的多目标协同优化。

在理论研究方面,Bos^[1]率先系统地总结各类堰体的流量测量结构理论,为后续研究奠定了坚实基础;French^[6]和 Chanson^[2]对明渠水力学理论进行系统阐述;Chaudhry^[7]则进一步完善了开放渠道流动的计算方法体系:这些经典理论研究为堰体优化提供了重要的理论支撑。

随着计算流体力学(computational fluid dynamics, CFD)技术的发展,数值模拟方法在堰体优化中得到了广泛的应用。Haun 等^[8]采用数值模拟方法对梯形宽顶堰的过流特性进行了深入研究;Fulasa^[9]通过 CFD 方法对比分析了不同形状宽顶堰的水力性能;Ferziger 等^[10]提出流体动力学计算方法,为水利工程数值模拟提供了重要的工具。

近年来,在堰体优化设计领域,关键几何参数对宽顶堰水力性能的影响成为研究热点。Sargison 等^[11]通过实验发现,侧坡斜率从 1:1 调整为 1:2 时,流量系数可以提升约 8%,该结果凸显了微小几何参数调整对泄流效率的显著改善作用;Azimi

等^[12]进一步分析了有限堰顶长度的宽顶堰, 提出适用于短顶堰的改进经验公式, 与经典模型相比, 该公式对短顶堰流量计算结果的预测误差约降低 15%; Mirnaseri 等^[13]采用 CFD 技术对堰-闸组合结构的水力特性进行研究, 通过这种组合设计能够协同提升流量调控范围与消能率, 在同等水头下, 泄流能力较单一宽顶堰提高 22%。虽然这些研究成果为堰体几何形态的优化设计提供了重要依据, 但是它们大多局限于单一参数或固定边界条件的探讨, 未能通过系统地控制优化堰体的主要参数 (如高度、宽度等), 实现对水位流速或水位高度的精准控制。

1.2 可微流体模型

近年来, 可微流体模型作为反问题求解和物理模拟领域的重要研究方向, 通过将物理仿真与 AD 技术相结合, 实现了从仿真过程中直接提取梯度信息, 为基于梯度的优化设计提供了新的技术手段。该领域的早期研究基于伴随方法和变分框架, 如 McNamara 等^[14]将伴随方法应用于流体控制问题, Batty 等^[15]提出高精度固液耦合的快速变分框架, Gerszewski 等^[16]则提出基于物理的流体控制方法, 金晓威等^[17]提出一种物理增强的流场深度学习建模与模拟方法。

随着深度学习技术的发展, 可微流体模型与机器学习模型的融合展现出巨大的潜力。这一融合不仅体现在仿真过程本身, 也拓展至前端的网格生成等关键辅助环节, 例如, StruMNet^[18]通过神经网络与偏微分方程的结合, 实现了结构化网格的智能快速生成。在仿真求解器方面, Ladický 等^[19]率先提出数据驱动光滑粒子流体动力学 (smoothed-particle hydrodynamics, SPH) 方法, 开创了机器学习与粒子流体模拟相结合的先河; Schenck 等^[20]开发的 SPNets 框架, 通过神经网络实现了可微流体动力学的端到端学习。在此基础上, Fulton 等^[21]提出的 “Latent Space Physics” 方法, 通过在潜在空间中学习和控制偏微分方程, 将计算效率提升 40%, 显著地降低了高维流体模拟的计算成本。DiffTaichi 框架^[5]对弱可压缩流体反问题提供了高效的求解方案; 进一步, Li 等^[22]发展傅里叶神经算子 (FNO-MPM), 通过频域方法有效地提升了 MPM 对大变形流体的长时程预测能力。特别值得关注的是, Holl 等^[23]提出连续卷积框架, 通过创新的卷积核设计实现了亚网格尺度细节的精确捕捉, 与 Um 等^[24]提出的 “Solver-in-the-loop” 方法形成互补, 后者通过将物理求解器与神经网络深度耦

合, 在保持物理一致性的同时提升了模拟精度: 这些研究共同构建了一个多尺度、高效率的可微流体模拟技术体系。

当前, 该领域的研究在复杂流固耦合模拟方面取得了显著的进展。Takahashi 等^[25]提出可微流固耦合框架, Li 等^[26]提出基于 SPH 的 DiffR 流固耦合控制方法, Li 等^[27]将各向异性混合模型成功地应用于流体拓扑优化; 此外, Nava 等^[28]和 Shen 等^[29]的研究展示了可微模型在非线性问题和系统优化中的应用潜力, Su 等^[30]提出的统一 MPM 公式进一步拓展了模型的适用范围。与此同时, 为了提升流固交互正向模拟的精度与效率, 也有许立群等^[31]通过自适应网格和粒子重采样等方法, 显著地增强了 MPM 对交互表面细节的捕捉能力。

然而, 现有方法 (如 DiffTaichi^[5]和 SPNets^[20]等) 仍然存在一定的局限性, 特别是在严格不可压缩流体条件下, 传统的弱可压缩方法会引入近似和松弛策略, 可能导致非物理的密度波动, 影响梯度计算的数值稳定性和优化效率。这些局限性为未来的研究指明了方向, 包括严格不可压缩条件下的可微模拟方法、提高高动态流动的模拟精度、优化计算效率等关键问题。

2 堰体正向模拟

本文围绕基于 MPM 的宽顶堰水流建模及其正向模拟机制, 探讨 MPM 的基本原理及其在堰体正向模拟中的适用性和表现, 为水利工程中复杂边界条件下的数值分析提供一种高效、可靠的解决方案, 推动相关建模和仿真技术的进一步发展。

2.1 宽顶堰正向模拟机制

宽顶堰是一种水平顶部且宽度显著大于水流厚度的固定式水力结构, 常设置于明渠内, 用于测量水流流量或调节水位; 其顶部长度远大于水流过流时的水深, 水流通过堰顶时形成临界流状态, 实现流量的精确测量。当水流经过宽顶堰时, 在特定条件 (如自由出流) 下, 水流在堰顶上形成临界流, 此时水流速度达到最大值, 断面面积最小, 水深变为临界水深。从水力学角度看, 宽顶堰在大坝中具有产生临界流以用于流量测量、减缓水流速度以防止坝体受到强烈冲刷、调节水位以在非汛期维持下游生态水位, 以及辅助排水以在紧急情况下快速排洪的作用。

假设上游水流源自高山, 且水流持续不断地流入下游。为了防止下游水位过高而引发灾害,

需要在河道中设计堰体以降低下游水位并调控流速。在模拟过程中, 假定入流速度保持恒定, 忽略黏性、紊流和边界层效应等复杂因素。图 1 所示为宽顶堰水流特性模型示意图, 其中标注了关键水力参数, 包括堰上水头 H 、初始入流速度 v 、临界水深 h_c 、临界流速 v_c 、总流量 Q , 以及下游水位高度 h_* 和下游表面流速 v_* ; h 和 b 分别表示堰体的高度和宽度。

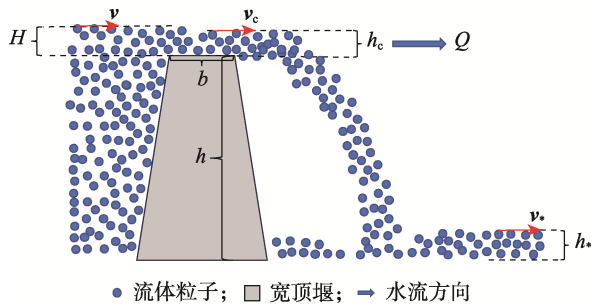


图 1 宽顶堰水流特性简化模型示意图

宽顶堰具有精准调控水流流量和水位的能力, 在水利工程、给排水工程等领域得到了广泛的应用。与其他堰型相比, 宽顶堰的显著特征是相对堰高比 ($2 \leq b/H \leq 10$)。在正向模拟中, 为了简化计算与分析, 通常假定 $H = b/5$ 。

在明渠水流研究中, 临界水深表示水流比能最小的状态。当 Froude 数 $F_r = 1$ 时, 水流处于临界状态, 此时的水深为临界水深 $h_c = \left(\frac{Q^2}{g \cdot b^2} \right)^{1/3}$, 临界

横向流速 $v_c = \sqrt{gh_c}$ 。通过 CFD 技术对宽顶堰的水流特性进行分析^[8], 在堰顶中部形成的收缩断面处水流达到临界状态 ($F_r = 1$), 堰顶水深高度与 h_c 具有良好的一致性, 两者的相对误差 (即 CFD 计算水深与理论临界水深 h_c 的偏差) 小于 5%, 该结果为宽顶堰的后续计算提供了重要的理论依据。

基于能量守恒方程和水流连续性原理, 建立 h_* 与 v_* 的映射关系

$$h + h_c + \frac{v_c^2}{2g} = h_* + \frac{v_*^2}{2g} \quad (1)$$

然而, 从近似能量方程式 (1) 出发推导 $\frac{\partial h_*}{\partial v_*}$ 时, 需要格外警惕其可能引发的物理意义失真问题^[32]。临界水深的微分分析需要充分地考虑流动的非线性特性^[33], 而传统简化模型 $h_c = \left(\frac{Q^2}{g \cdot b^2} \right)^{1/3}$ 存在以下局

限性: (1) 该模型无法准确地捕捉流动中的高阶效应 (如湍动能、涡量等二阶及以上项的影响);

(2) 临界水深数值与堰顶水深测量值之间存在约 5% 的系统性误差, 并非严格恒定。这种基于简化模型的微分分析可能导致 $\frac{\partial h_*}{\partial v_*}$ 的计算结果显著地

偏离真实值。因此, 通过构建下游水位高度与流速能量关系的映射模型, 能够实现对下游流速的调控, 并间接地实现对下游水位的控制。该模型有效地规避了水位高度相对于堰体几何参数梯度难以显式求解的问题, 通过求解流速关于几何参数的梯度信息, 提升了模型的可微性与优化的可操作性。

2.2 MPM 不可压缩流体模拟

本节使用下标 i 表示网格节点量, p 表示粒子量, 上标 n 表示时刻。表 1 所示为本节中使用的重要符号列表。

表 1 MPM 正向模拟机制重要符号

符号	类型	含义	符号	类型	含义
Δt	标量	时间步长	m_p	标量	粒子质量
Δx	标量	网格单元大小	v_i	向量	网格速度
g	标量	重力加速度	m_i	标量	网格质量
ρ	标量	流体密度	P_i	向量	网格动量
α	标量	PIC-FLIP 系数	p_i	标量	网格压强
μ	标量	动力黏度	w_i	标量	网格权重
x_p	向量	粒子位置	N_i	集合	网格邻域集合
v_p	向量	粒子速度			

MPM 是一种混合数值方法, 它巧妙地结合了 Lagrange 与 Euler 描述的优势。具体而言, Lagrange 描述将连续体离散为一系列粒子, 随物质一同运动, 从而精确地追踪其历史和边界; 而 Euler 描述则在固定的背景网格上求解控制方程, 有效地避免了传统 Lagrange 方法在大变形下的网格畸变问题。该方法最初由 Sulsky 等^[34]于 1994 年提出。MPM 模拟包括 3 个步骤:

Step1: 粒子到网格 (particle-to-grid, P2G)。将材料点的属性转移到背景网格, 采用紧凑的 B 样条核计算权重 w , 从而有效地将粒子的质量、动量等信息传递到相邻的网格节点

$$m_i^n = \sum_p m_p w_i(x_p^n),$$

$$P_i^n = \sum_p m_p v_p^n w_i(x_p^n).$$

Step2: 网格更新。首先将网格动量除以网格质量得到网格速度 $v_i^n = \frac{P_i^n}{m_i^n}$ 。然后用重力、黏滞力 $f_{i,v}^n$ 和压

力对流体网格速度进行更新

$$f_{i,v}^n = \mu \sum_{j \in N_i} \frac{v_j^n - v_i^n}{\Delta x^2} \quad (2)$$

$$v_i^{n+1} = v_i^n + \frac{\Delta t}{m_i^n} f_{i,v}^n - (0, 0, g\Delta t)^T - \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (\Delta p_{i,x}, \Delta p_{i,y}, \Delta p_{i,z})^T \quad (3)$$

其中, $\Delta p_{i,x}$, $\Delta p_{i,y}$ 和 $\Delta p_{i,z}$ 分别表示压强 p_i 在 x , y 和 z 方向上的差值。 p_i 采用共轭梯度 (conjugate gradient, CG) 法求解 Poisson 方程^[35], 可以准确地得到数值结果; 此外, 也可以借助深度学习模型快速求解 Poisson 方程, 并反向传递梯度信息^[36-37], 不仅提高求解效率, 还为复杂梯度求解提供了新的解决方案。

Step3: 网格到粒子 (grid-to-particle, G2P)。更新后的网格信息通过加权插值反馈材料点, 完成一个时间步长的计算。采用 PIC-FLIP 混合方法^[38-39], 利用 PIC (particle in cell) 方法的稳定性和 FLIP (fluid implicit particle) 方法减少数值耗散的特性。通过 PIC 方法, 粒子的速度更新为 $v_{p,PIC}^{n+1} = \sum_i v_i^n w_i(x_p^n)$; 同时, 利用 FLIP 方法, 粒子的速度更新为 $v_{p,FLIP}^{n+1} = v_p^n + \sum_i (v_i^{n+1} - v_i^n) w_i(x_p^n)$ 。粒子在 $n+1$ 时刻的最终速度 v_p^{n+1} 通过结合混合系数 α 得到, 表达式为

$$v_p^{n+1} = (1-\alpha) \cdot v_{p,PIC}^{n+1} + \alpha \cdot v_{p,FLIP}^{n+1}。$$

通过调整混合系数 $\alpha \in [0,1]$, 可以针对不同的应用场景实现计算稳定性和准确性之间的平衡, 对于堰体优化设计中反问题的实现具有重要意义, 能够更准确地模拟结构驱动流体模拟过程, 提高设计的精度和可靠性。

3 堰体优化逆向过程

本文聚焦于宽顶堰的逆向优化设计, 通过分析水流横向速度与堰体几何参数之间的梯度关系, 实现对下游水流流速的精准调控, 并间接地控制下游水位高度。采用具有上下游斜坡的梯形堰进行结构设计, 不仅显著地增强结构的稳定性, 还有效地减缓动水压力对堰体的冲击力, 提升了堰体的

抗冲刷能力, 尤其在防洪场景中具有重要意义。文献[11,40-41]的研究表明, 上游斜坡设计为 1:3 可优化压力分布, 延长结构寿命; 下游斜坡设计为 1:2 可加速水流扩散, 降低下游冲刷风险。本文在堰体设计中综合考虑上下游斜坡角度的配置, 实现结构性能与水流调控能力的协同优化。

基于 MPM 进一步探讨了堰体优化的反向传播过程。图 2 所示为正向、反向传播计算流程。正向传播模拟粒子在 t_n 到 t_{n+1} 时刻的进展, 采用 MPM 模拟流体-堰体相互作用, 获取流场和压力分布等关键参数; 反向传播过程被描述为跟踪设计参数对粒子行为的影响, 利用梯度信息确定优化方向, 实现基于梯度的堰体设计优化。在 MPM 框架内, 流体运动通过动量方程和质量方程进行描述, 而堰体设计参数通过边界条件等影响流体行为。反向传播过程步骤如下:

Step1: 进行 MPM 正向仿真, 并记录速度场和压力等关键物理量, 详见第 2 节。

Step2: 根据优化目标定义目标函数 J 。

Step3: 利用链式法则计算目标函数对于设计参数的梯度 $\partial J / \partial \theta$, 其中 θ 表示堰体设计参数。

Step4: 利用梯度信息更新设计参数, 逐步逼近堰体设计最优解。

3.1 设定目标函数

设定目标函数时, 首要目标是优化宽顶堰的几何形状, 确保下游流体颗粒的横向速度在流动达到稳态后尽可能地接近目标速度, 间接地实现控制下游水位高度。本文中, 目标函数由速度匹配项和惩罚控制项 2 部分组成, 即

$$J = \sum_{p=1}^N (v_p^n - v_{\text{target}})^2 / N + R(\theta)。$$

假设流量在时刻 t_n 达到稳态, 其中, v_p^n 表示时刻 t_n 第 p 个下游表面流体粒子的横向速度 (粒子速度 v_p^n 第 1 个分量); v_{target} 表示预设的目标横向速度; N 表示下游表面流体粒子总数; $\theta = (h, b)^T$ 分别为

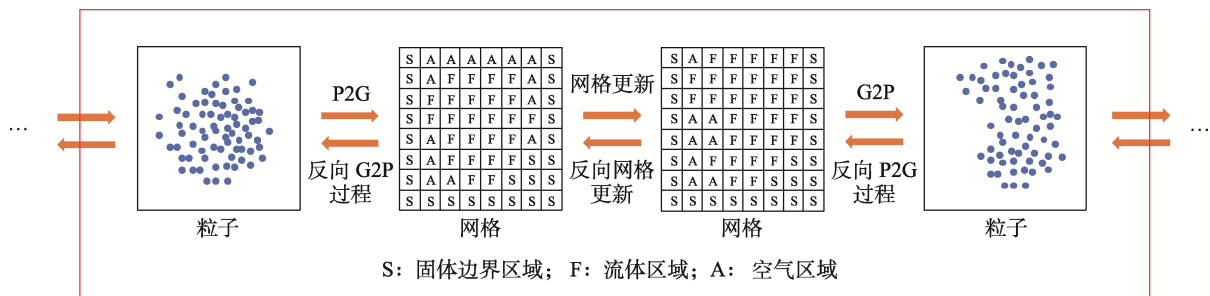


图 2 MPM 中从 t_n 到 t_{n+1} 时刻的正向、反向传播计算流程

宽顶堰的高度 h 和宽度 b ; $R(\theta)$ 表示控制堰体体积的惩罚项, 定义为

$$R(\theta) = \lambda \cdot h \cdot \frac{2 \cdot b + 5h/6}{2 \cdot C} \quad (4)$$

其中, 分子项表示宽顶堰的截面面积; C 表示建造成本系数, 通过将面积转换为成本单位实现量化。权重系数与堰体设计材质相关, 其取值范围一般为 0.02~0.05, 主要作用是调节惩罚项在整个优化目标中的重要性, 确保优化过程中各因素之间的平衡, 使优化结果更具科学性和实用性。

设计惩罚控制项时, 将约束条件整合入目标函数, 并利用惩罚 λ 系数对违反约束的解施加惩罚。针对防洪、灌溉等特定的工程场景, 该目标函数通过有效地处理优化 θ 问题中的约束条件^[42], 以适应不同的设计需求和约束条件^[43]。此外, 惩罚项设计通过直接量化成本影响, 为决策者提供在性能与预算之间寻求平衡的有力工具, 显著地提升了优化过程的经济性。这种设计不仅增强设计的鲁棒性, 而且通过优化成本效益比, 为工程实践提供了更合理的解决方案。

3.2 梯度计算

梯度计算是反向传播过程的重要组成部分, 主要任务是运用链式法则求解目标函数 J 对宽顶堰设计参数的偏导数 $\partial J / \partial \theta$ 。为了实现这一目标, 本节采用迭代法逐步求解梯度, 并结合流体动力学方程及其边界条件, 对梯度计算涉及的数学过程进行了详细推导。 J 由速度匹配项和控制项组成, 其关于设计参数 $\theta = (h, b)^T$ 的梯度可以表示为

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = \frac{2}{N} \sum_{p=1}^N \left(v_p^n - v_{\text{target}} \right) \frac{\partial v_p^n}{\partial \theta} + \frac{\partial R(\theta)}{\partial \theta},$$

其中, $\partial v_p^n / \partial \theta$ 表示粒子横向速度对设计参数 θ 的偏导数。根据式 (4) 可知, 惩罚控制项对应的偏导数为

$$\frac{\partial R(\theta)}{\partial \theta} = \lambda \frac{(b + 5h/6, h)^T}{C}.$$

由于粒子速度的更新是在 G2P 过程中实现的, 因此首先分析网格更新过程。使用链式法则, 确定网格横向速度对设计参数的偏导数为

$$\frac{\partial v_i^n}{\partial \theta} = \sum_{j \in N_i} \frac{\partial v_i^n}{\partial v_j^{n-1}} \cdot \frac{\partial v_j^{n-1}}{\partial \theta}.$$

其中, N_i 表示网格 i 的邻域集。假设网格横向速度 v_i 仅对其邻域集内的粒子具有非零偏导数, 然后将其传递给流体粒子

$$\frac{\partial v_p^n}{\partial \theta} = \sum_i \frac{\partial v_i^n}{\partial \theta} w_i(x_p^n).$$

对式 (3) 中网格速度 v_i^n 的更新进行分析, 关于横向速度微分 $\partial v_i^n / \partial v_j^{n-1}$, 根据式 (2) 黏滞力 f_v 可以推导出其微分表达式, 然而压强差的微分 $\partial \Delta p_{i,x} / \partial v_j^{n-1}$ 推导则相对复杂。为此, 采取 2 种模型: (1) 采用 CG 法求解不可压缩流体问题, 在梯度计算过程中仅考虑流体周边区域的影响, 从而在保证计算精度的同时显著地降低计算复杂度; (2) 利用 AD 技术对离散 Poisson 求解并实现微分操作, 通过精确计算其梯度, 以有效地避免手动推导复杂表达式的烦琐过程, 进而提升数值求解的效率与准确性。

深入分析流体横向速度对于堰体设计参数的初始灵敏度 $\partial v_j^{n-1} / \partial \theta$, 分析堰体设计参数 $\theta = (h, b)^T$ 如何影响流体的横向速度。

(1) 针对堰宽 b 的偏导数分析。根据上述宽顶堰正向模拟机制研究, 临界水深 $h_c = \left(\frac{Q^2}{g \cdot b^2} \right)^{1/3}$ 可

近似为堰顶上方水深, 因此宽顶堰上方表面流体的速度可近似为临界横向流速 $v_c = \sqrt{gh_c}$, 故其偏导数为 $\partial v_c / \partial b = -v_c / 3b$ 。然后对堰体上方内部流体横向速度进行分析, 在临界水深附近应用幂律分布^[44], $v(z) = v_c (z/h_c)^{1/m}$, 其中, z 表示垂向坐标 (从堰顶起算), 在理想条件下, 光滑宽顶堰的幂律分布指数 m 的理论值通常为 1.5^[45], 故其偏导数为

$$\frac{\partial v(z)}{\partial b} = \frac{v(z)(2-m)}{3 \cdot b \cdot m}.$$

(2) 堰高 h 的影响分析。考虑堰体以边界条件形式对流体网格行为产生的影响, 并在下文中将这种影响简称为“堰力”。由于仅有堰体周围的流体网格受到弹性边界条件的调控, 如图 3 所示, 因此本文对堰力在不同高度流体网格上的分布进行近似建模。通过引入双曲正切函数 (自带特征尺度归一化特性), 实现了堰体周围流体网格速度的动态更新, 对应公式为

$$v_i^k = \tanh \left(\frac{z_i - h}{\Delta x} \right) \cdot v_i^{k-1};$$

对应的灵敏度分析公式为

$$\frac{\partial v_i^k}{\partial h} = \tanh \left(\frac{z_i - h}{\Delta x} \right) \cdot \frac{\partial v_i^{k-1}}{\partial h} - \frac{v_i^{k-1}}{\Delta x} \cdot \text{sech}^2 \left(\frac{z_i - h}{\Delta x} \right).$$

基于上述构建的可微分堰体设计模型, 可以通

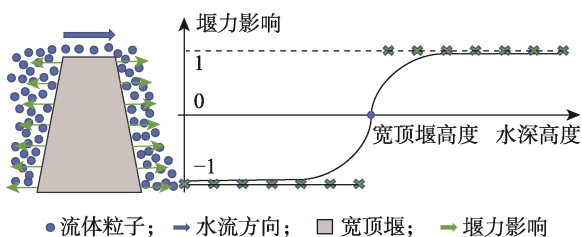


图3 堰力对流体流动的影响

过反向传播实现参数优化,获得堰体设计的最优解。

4 实验与结果分析

基于宽顶堰优化模型,本文设计并实现了一个用于堰体几何参数反向优化的求解器。该求解器采用 CUDA 并行编程框架开发,计算网格规模为 $192 \times 96 \times 96$ 的流体仿真任务。以宽顶堰泄流过程为研究对象,选取宽顶堰的高度 h 和宽度 b 为核心设计变量,构建了一个基于梯度回传机制的逆向优化模型。该模型以控制下游表面流体横向速度为目标,通过最小化实际下游表面流体横向速度 v_i 与预设目标速度 v_{target} 之间的均方误差 (mean squared error, MSE),实现对堰体几何参数的自动优化设计。

然而,本文实验采用固定边界、稳态流场,缺乏复杂或非线性场景下的适应性测试,实验结果是在理想化实验环境下得到的。未来,将引入更复杂的边界条件和非线性因素,增强模型在实际应用中的适应性和鲁棒性。

在模型求解过程中,采用 CG 法和 AD 技术这 2 种不同的数值路径求解 Poisson 方程并回传梯度信息,将它们均嵌入优化流程中,以评估不同数值策略下模型的表现差异,并进一步验证所构建模型在结构准确性与求解一致性方面的可靠性;分别给出在不同技术路径下优化实验的结果与通过传统经验公式 (Kindsvater-Carter 公式^[46])

$$Q = C \cdot (b+k) \cdot (h+H)^{3/2}$$

得到的结果。其中, Q 表示设计流量; h 表示堰高; b 表示堰宽; C 表示修正后的流量系数,典型值为 $0.41 \sim 0.43$; k 表示宽度修正量,一般取 -0.2 ; H 表示堰上水头。首先根据设计规范等约束^[47]选定 b 的数值,然后独立算出堰高

$$h = \left(\frac{Q}{C(b+k)} \right)^{2/3} - H。$$

在确定了堰高和堰宽等参数后,通过对比分析,从多个维度对本文模型的性能和优势进行全面验证。

将传统模型与本文提出的在 CG 和 AD 这 2 种方法路径支持下的模型进行实验,不同迭代步骤中 3 种模型的 MSE 对比如表 2 所示。可以看出,CG 和 AD 这 2 种方法路径均表现出良好的收敛性,并获得显著优于传统模型的优化精度;从相对误差的角度分析,与传统模型相比,本文模型采用 CG 方法使得 MSE 降低 87.78%,采用 AD 方法的 MSE 降低 74.62%,均显著地优于传统模型。实验结果表明,本文模型在不同数值框架下均能稳定、有效地调控下游流速,间接地实现对下游水位的有效控制,为堰体结构的优化提供了可靠的支持。

表2 3种方法 MSE 结果对比

方法	MSE
本文模型+CG	0.150 92
本文模型+AD	0.313 47
传统	1.234 97

尽管 CG 和 AD 在实现方式和计算流程上存在显著差异,但得到的模拟结果在精度和分布特征上高度一致,进一步验证了本文模型的一致性,即该模型具备良好的跨框架通用性和可靠性。在优化迭代过程中,本文模型结合 CG 和 AD 方法时的 MSE 下降趋势对比如图 4 所示。可以看出:(1)收敛曲线最终趋于同一水平,充分地验证了本文模型具备良好的跨框架通用性和数值稳定性,为堰体结构的优化提供了可靠的支持。(2)在 2 种框架中,基于 AD 方法尤其展现出独特的先进性,将 MPM 与 AD 结合能够自动且精确地计算梯度信息,从根本上避免人为近似或差分带来的误差,显著地提高了模型的鲁棒性和泛化能力;AD 的引入也增强了模型的可调参性和优化空间,有助于加速收敛并提升最终解的质量。因此,MPM 与 AD 的融合在误差控制、计算效率和模型稳定性方面具有综合优势,尤其适用于求解复杂水流结构与非线性响应问题。

将本文模型的优化结果应用于具体几何形态设计实例中,进一步阐明该优化模型的工程实践价值。假定设计目标为在特定上游来流条件(如入口平均流速 $v=1$)下,对下游水位进行精确控制。在 $192 \times 96 \times 96$ 的计算网格域中,本文模型通过优化求解得到以无量纲的网格单元数表示的最优堰体核心尺寸参数:堰高 h 为 30 个单元,堰宽 b 为 24 个单元,该结果具有尺度无关性,可以根据具体工程场景赋予其实际物理尺寸。基于这 2 个关键尺寸,设计人员便可以结合标准水工设计准则进行深化:构建上游坡度为 1:3、下游坡度为 1:2 的实

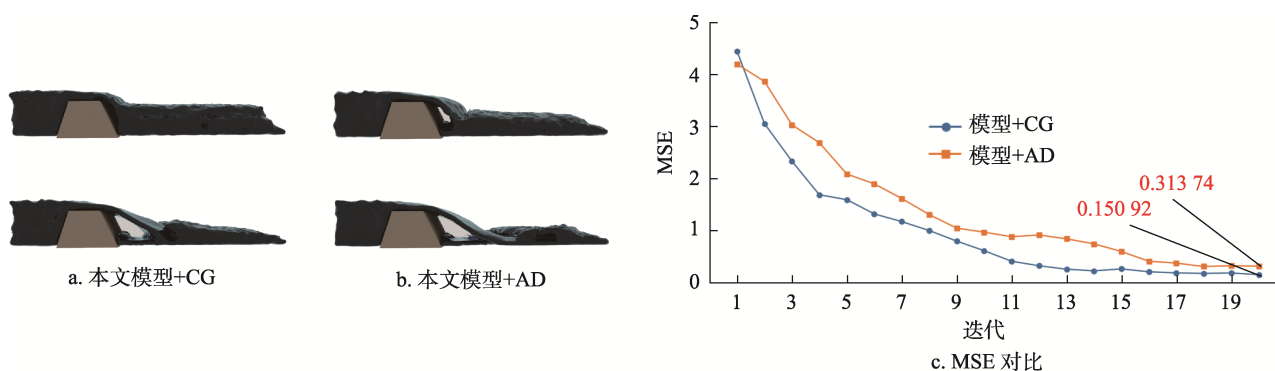


图 4 优化过程中 2 种方法的可视化结果和 MSE 对比

用堰剖面。该流程中, 模型输出的抽象数值参数可以高效地转化为一个水力性能优良、结构形态完整的具体工程方案。

5 结 语

本文围绕宽顶堰设计中的水位调控问题, 提出一种基于不可压缩流体仿真的可微分优化模型, 通过调控下游流速实现对水位高度的间接控制, 较好地满足了复杂水动力环境下的多目标优化需求。通过对不同梯度求解路径下的优化效果与收敛行为进行实验, 验证本文模型在准确性和一致性方面的综合性能。结果表明, 在优化精度和数值稳定性方面, 与传统模型相比, 该模型展现出一定优势, 且在不同实现机制下均保持了良好的优化表现。总体来看, 本文模型在宽顶堰几何优化设计中具备较好的工程适应性和实际应用潜力, 以及具有在精准调控下游流速与水位方面的能力, 为今后在更复杂水利系统中的推广应用提供了模型支撑与理论基础。

尽管当前本文模型取得了积极成果, 但是仍然存在一些局限性和适用边界。例如, 本文模型主要针对特定类型的宽顶堰结构进行优化, 对于其他复杂几何形状或不同流体特性的堰体, 其适用性需要进一步验证; 在极端工况下, 该模型的稳定性和精度仍然需要通过更多实验进行评估。未来, 将重点针对湍流扩展和泥沙耦合问题进一步拓展模型的应用边界和优化能力, 致力于拓展模型的适用范围, 探索其在更复杂水利系统中的应用潜力, 并针对当前研究中发现的局限性进行改进, 进一步提升模型的工程适应性和实际应用价值。

参考文献 (References):

[1] Bos M G. Discharge measurement structures[M]. 3rd rev. ed.

Wageningen, The Netherlands: International Institute for Land Reclamation and Improvement, 1989

- [2] Chanson H. Hydraulics of open channel flow: an introduction basic principles, sediment motion, hydraulic modelling, design of hydraulic structures[M]. 2nd ed. Amsterdam: Elsevier, 2004
- [3] Ansar M, Chen Z M. Generalized flow rating equations at prototype gated spillways[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2009, 135(7): 602-608
- [4] Hu Y M, Fang Y, Ge Z H, *et al.* A moving least squares material point method with displacement discontinuity and two-way rigid body coupling[J]. ACM Transactions on Graphics, 2018, 37(4): Article No.150
- [5] Hu Y, Anderson L, Li T M, *et al.* DiffTaichi: differentiable programming for physical simulation[C] //Proceedings of the 8th International Conference on Learning Representations. Washington DC: ICLR, 2020: 1-20
- [6] French R H. Open-channel hydraulics[M]. New York: McGraw-Hill, 1985
- [7] Chaudhry M H. Open-channel flow[M]. New York: Springer, 2008
- [8] Haun S, Olsen N R B, Feurich R. Numerical modeling of flow over trapezoidal broad-crested weir[J]. Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics, 2011, 5(3): 397-405
- [9] Fulasa B F. Investigation on different shapes of broad-crested weirs by means of CFD[D]. Trondheim: Norwegian University of Science and Technology, 2019
- [10] Ferziger J H, Perić M, Street R L. Computational methods for fluid dynamics[M]. 4th ed. Cham: Springer, 2019
- [11] Sargison J E, Percy A. Hydraulics of broad-crested weirs with varying side slopes[J]. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 2009, 135(1): 115-118
- [12] Azimi A H, Rajaratnam N. Discharge characteristics of weirs of finite crest length[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2009, 135(12): 1081-1085
- [13] Mirnaseri M, Emadi A. Hydraulic performance of combined flow rectangular labyrinth weir-gate[J]. Middle-East Journal of Scientific Research, 2013, 18(9): 1335-1342
- [14] McNamara A, Treuille A, Popović Z, *et al.* Fluid control using the adjoint method[J]. ACM Transactions on Graphics, 2004, 23(3): 449-456
- [15] Batty C, Bertails F, Bridson R. A fast variational framework for accurate solid-fluid coupling[J]. ACM Transactions on Graphics, 2007, 26(3): Article No.100
- [16] Gerszewski D, Bargteil A W. Physics-based animation of large-scale splashing liquids[J]. ACM Transactions on Graph-

- ics, 2013, 32(6): Article No.185
- [17] Jin Xiaowei, Laima Shujin, Li Hui. Physics-enhanced deep learning methods for modelling and simulating flow fields[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 53(10): 2616-2629(in Chinese)
(金晓威, 赖马树金, 李惠. 物理增强的流场深度学习建模与模拟方法[J]. 力学学报, 2021, 53(10): 2616-2629)
- [18] Peng Jiaming, Chen Xinhai, Liu Jie. StruMNet: a structural mesh generation method integrating neural networks and partial differential equations[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2025, 37(9): 1537-1543(in Chinese)
(彭嘉明, 陈新海, 刘杰. StruMNet: 一种融合神经网络和偏微分方程的结构网格生成方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2025, 37(9): 1537-1543)
- [19] Ladický L, Jeong S H, Solenthaler B, *et al.* Data-driven fluid simulations using regression forests[J]. ACM Transactions on Graphics, 2015, 34(6): Article No.199
- [20] Schenck C, Fox D. SPNets: differentiable fluid dynamics for deep neural networks[C] //Proceedings of the 2nd Annual Conference on Robot Learning. New York: PMLR, 2018: 317-335
- [21] Fulton L, Modi V, Duvenaud D, *et al.* Latent-space dynamics for reduced deformable simulation[J]. Computer Graphics Forum, 2019, 38(2): 379-391
- [22] Li Z Y, Kovachki N B, Azizzadenesheli K, *et al.* Fourier neural operator for parametric partial differential equations[C] //Proceedings of the 9th International Conference on Learning Representations. Washington DC: ICLR, 2021: 1-16
- [23] Holl P, Thuerey N, Koltun V. Learning to control PDEs with differentiable physics[C] //Proceedings of the 34th International Conference on Neural Information Processing Systems. New York: ACM Press, 2020: Article No.513
- [24] Um K, Brand R, Fei Y, *et al.* Solver-in-the-loop: learning from differentiable physics to interact with iterative PDE-solvers[C] //Proceedings of the 34th International Conference on Neural Information Processing Systems. New York: ACM Press, 2020: Article No.513
- [25] Takahashi T, Liang J B, Qiao Y L, *et al.* Differentiable fluids with solid coupling for learning and control[C] //Proceedings of the 35th AAAI Conference on Artificial Intelligence. Palo Alto: AAAI Press, 2021: 6138-6146
- [26] Li Z H, Xu Q Y, Ye X H, *et al.* DiffFR: differentiable SPH-based fluid-rigid coupling for rigid body control[J]. ACM Transactions on Graphics, 2023, 42(6): Article No.179
- [27] Li Y F, Du T, Srinivasan S G, *et al.* Fluidic topology optimization with an anisotropic mixture model[J]. ACM Transactions on Graphics, 2022, 41(6): Article No.239
- [28] Nava E, Zhang J Z, Michelis M Y, *et al.* Fast aquatic swimmer optimization with differentiable projective dynamics and neural network hydrodynamic models[C] //Proceedings of the 39th International Conference on Machine Learning. New York: PMLR, 2022: 16413-16427
- [29] Shen S Y, Yang Y, Shao T J, *et al.* High-order differentiable autoencoder for nonlinear model reduction[J]. ACM Transactions on Graphics, 2021, 40(4): Article No.68
- [30] Su H Z, Xue T, Han C G Z, *et al.* A unified second-order accurate in time MPM formulation for simulating viscoelastic liquids with phase change[J]. ACM Transactions on Graphics, 2021, 40(4): Article No.119
- [31] Xu Liqun, Wang Jiayan, Yuan Haipeng, *et al.* Fluid-Solid coupling surface detail optimization algorithm based on material point method[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2024, 36(2): 303-312(in Chinese)
(许立群, 王佳炎, 袁海鹏, 等. 物质点法流固交互表面细节优化算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2024, 36(2): 303-312)
- [32] Rajaratnam N, Muralidhar D. Flow below deeply submerged rectangular weirs[J]. Journal of Hydraulic Research, 1969, 7(3): 355-374
- [33] Montes S. Hydraulics of open channel flow[M]. Reston: ASCE Press, 1998
- [34] Sulsky D, Chen Z, Schreyer H L. A particle method for history-dependent materials[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, 118(1-2): 179-196
- [35] Shewchuk J R. An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain[R]. Pittsburgh: Carnegie Mellon University, 1994
- [36] Raissi M, Perdikaris P, Karniadakis G E. Physics informed deep learning (Part I): data-driven solutions of nonlinear partial differential equations[OL]. [2025-07-03]. <https://arxiv.org/abs/1711.10561>
- [37] Yao Shaobo, He Weifeng, Chen Lihua, *et al.* Physics informed neural network in flowfield reconstruction[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2022, 40(5): 30-38(in Chinese)
(尧少波, 何伟峰, 陈丽华, 等. 融合物理的神经网络方法在流场重建中的应用[J]. 空气动力学学报, 2022, 40(5): 30-38)
- [38] Müller M, Charypar D, Gross M. Particle-based fluid simulation for interactive applications[C] //Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. New York: ACM Press, 2003: 154-159
- [39] Bridson R. Fluid simulation for computer graphics[M]. New York: A K Peters/CRC Press, 2015
- [40] Azimi A H, Rajaratnam N, Zhu D Z. Discharge characteristics of weirs of finite crest length with upstream and downstream ramps[J]. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 2013, 139(1): 75-83
- [41] Crookston B M, Tullis B P. Labyrinth weirs: Nappe interference and local submergence[J]. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 2012, 138(8): 757-765
- [42] Deb K. Multi-objective optimisation using evolutionary algorithms: an introduction[M] //Wang L H, Ng A H C, Deb K. Multi-Objective Evolutionary Optimisation for Product Design and Manufacturing. London: Springer, 2011: 3-34
- [43] Novak P, Moffat A I B, Nalluri C, *et al.* Hydraulic structures[M]. 4th ed. London: CRC Press, 2017
- [44] Nakagawa H, Nezu I, Ueda H. Turbulence of open channel flow over smooth and rough beds[J]. Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, 1975, 1975(241): 155-168
- [45] Castro-Orgaz O, Hager W H. Non-hydrostatic free surface flows[M]. Cham: Springer, 2017
- [46] Kindsvater C E, Carter R W. Discharge characteristics of rectangular thin-plate weirs[J]. Journal of the Hydraulics Division, 1957, 83(6): Article No.1453
- [47] Qiu Jing, Huang Bensheng, Lai Guanwen. Study and application of orifice flow coefficient of plane gate of broad crested weir[J]. China Rural Water and Hydropower, 2002(9): 41-42(in Chinese)
(邱静, 黄本胜, 赖冠文. 宽顶堰平板门闸孔出流流量系数的研究与应用[J]. 中国农村水利水电, 2002(9): 41-42)