基于约束最小二乘 *N* 边洞 NURBS 曲面填充算法

胡丁允[1)], 张淦宣[1)], 陈彦如[2)], 马彦军[3)], 杨义军[1,2)], 曾薇[4)*]

[1)] (西安交通大学计算机科学与技术学院 西安 710049)
[2)] (中国船舶集团海舟系统技术有限公司 上海 200010)
[3)] (沪东中华造船(集团)有限公司 上海 200100)
[4)] (西安交通大学数学与统计学院 西安 710049)
(wz@xjtu.edu.cn)

摘 要: *N* 边洞的填充在曲面建模和角点过渡中扮演着非常重要的角色. 为了解决扭矢相容性问题, 在已有算法的基础上提出一种基于约束最小二乘能量优化的 *N* 边洞 NURBS 曲面填充算法. 首先通过线性插值边界导矢生成初始曲面跨界导矢; 再算出中心点, 使用中心点及边界线中点作为首尾控制点, 结合端点处切矢构造内部线; 然后引入法向约束和扭矢相容条件最小二乘逼近初始曲面跨界导矢, 生成满足边界相容性、扭矢相容性和 ε-G^1 连续的曲面跨界导矢, 其中 ε 表示用户给定的角度偏差; 最后采用双三次混合 Coons 曲面实现 *N* 边洞各矩形区域的 G^1 连续填充. 该算法解决了 Piegl 算法为满足扭矢相容性引入的细小节点向量区间带来的数值不稳定和曲面光顺问题, 相邻曲面法向的角度误差控制在用户定义的 ε 角度容差范围之内, 对 5 个在尺寸、曲率方面各有侧重的数据上进行实验验证了所提算法的有效性.

关键词: 非均匀有理 B 样条; *N* 边洞; Coons 曲面; G^1 连续; 最小二乘
中图法分类号: TP391.41 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2025-00145

A Filling Algorithm for *N*-Sided Holes Based on Constrained Least Square Method

Hu Dingyun[1)], Zhang Ganxuan[1)], Chen Yanru[2)], Ma Yanjun[3)], Yang Yijun[1,2)], and Zeng Wei[4)*]

[1)] (*School of Computer Science and Technology, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049)
[2)] (*CSSC SEAGO System Technology Co., Ltd, Shanghai* 200100)
[3)] (*HUDONG-ZHONGHUA Shipbuilding (GROUP) Co., Ltd, Shanghai* 200100)
[4)] (*School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049)

Abstract: *N*-sided hole filling plays an important role in surface modeling. To address twist compatibility issues, an algorithm based on constrained least square method to fill *N*-sided holes with NURBS patches is proposed. Firstly, initial cross-boundary derivatives of the surface are generated through linear interpolation of boundary derivatives. Then, a central point is calculated, and this central point along with the midpoints of the boundary lines are used as the first and last control points to construct internal lines, incorporating tangent vectors at the endpoints. Subsequently, normal constraints and twist compatibility conditions are introduced, and the linear interpolation energy of the initial surface boundary derivative are selected as the optimization objective function to generate the cross-boundary derivatives that satisfy boundary compatibility, twist compatibility and ε-G^1 continuity, where ε is the angular deviation given by the user. Finally, bicubic blended Coons surfaces are employed to achieve G^1 continuous filling for each rectangular region of the *N*-sided hole. The proposed method solves the

收稿日期: 2025-05-02; 修回日期: 2025-08-07. **基金项目**: 国家重点研发计划(2021YFB3302402); 陕西省重点研发计划(2023GXLH-026). **胡丁允**(2002—), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为 CAD&CG; **张淦宣**(1998—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为 CAD&CG; **陈彦如**(1989—), 女, 硕士, 主要研究方向为 CAD&CG; **马彦军**(1982—), 男, 博士, 高级工程师, CCF 会员, 主要研究方向为船舶设计与制造; **杨义军**(1979—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 会员, 主要研究方向为 CAD&CG; **曾薇**(1980—), 女, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 会员, 论文通信作者, 主要研究方向为现代几何理论在工程与医疗领域的应用.

numerical instability and surface smoothing problems caused by the small knot vector interval introduced by the Piegl's algorithm to meet the twist compatibility. The angular deviation between normal vectors of adjacent surfaces is controlled within the user-specified ε angle tolerance. To validate the algorithm's effectiveness, five representative experimental datasets, each emphasizing distinct aspects of size and curvature, were selected.

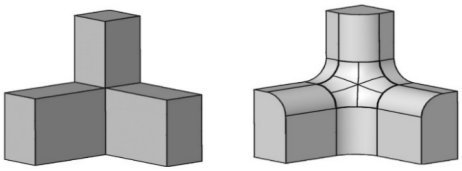
Key words: non-uniform rational B-splines; *N*-sided hole; Coons surface; G^1 continuity; least squares method

在工业产品建模领域，N 边洞的曲面填充算法是复杂曲面建模的关键技术之一. 船舶、航空器等复杂曲面的数字化设计需满足给定的几何连续性与制造精度要求，而传统基于参数连续性的高阶连续性算法往往面临计算复杂度高、曲面阶数膨胀等问题[1-8]. 尤其是在跨界导矢未知的实际应用场景中，现有算法普遍存在以下局限性: (1) 依赖先验的边界导矢信息; (2) 处理扭矢相容性时需要插入节点，导致曲面光顺性降低; (3) 连续性控制难以兼顾计算效率与几何精度. 尽管 Piegl 等[1]通过引入局部节点加密策略与跨界导矢近似算法缓解了扭矢不相容问题，但是以牺牲曲面数值稳定性和全局光顺性为代价——通过在 N 边洞边界及内部线边界处引入节点，迫使相容性缺陷向边界区域迁移. 这种基于细小节点区间插入的补偿策略会在曲面边界邻近区域产生非预期的、不自然的曲率波动，破坏曲面的制造适用性.

为了解决上述问题，本文将扭矢相容性和公共线法向作为线性约束，初始曲面边界导矢线性插值曲线作为目标曲线，生成满足边界相容性、扭矢相容性和 ε-G^1 连续的曲面跨界导矢. 与传统算法将边界跨界导矢作为已知条件的处理方式不同，本文通过插值投影法自动生成边界跨界导矢. 在扭矢相容性处理方面，摒弃 Piegl 等[1]算法采用的节点插入策略，构建法向约束下的能量最优化模型: 建立由 N 边洞剖分生成的矩形区域边界法向曲线，并将其作为强约束条件，使填充后的曲面满足 ε-G^1 连续性要求; 同时，引入扭矢相容性约束条件，以逼近初始曲面边界导矢线性插值能量的方式生成Coons曲面跨界导矢. 通过增加法向曲线的采样密度和增加跨界导矢的控制顶点，实现填充曲面之间以及与原始曲面在 N 边洞边界处达到 ε-G^1 连续. 本文算法有效地避免了曲面在公共边界处的光顺性不好造成的数值不稳定问题.

1 相关工作

在 CAD/CAE 领域，N 边洞填充是几何建模的核心问题之一. 角点过渡(如图 1 所示)和船舶曲面建模(如图 2 所示)都会生成需要填充的 N 边洞区域. N 边洞填充的技术难点如下: (1) 传统张量积曲面依赖矩形参数域，难以适应 N 边形拓扑; (2) N 边洞边界处的难以生成跨界导矢，尤其是难以满足 G^1 连续性要求的边界和扭矢相容性.



a. 3 凸 3 凹例子　　b. 角点过渡结果

图 1　角点过渡中的 N 边洞实例[9]

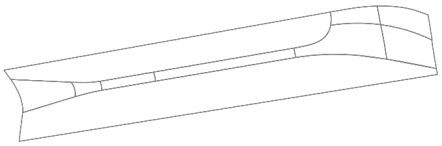


图 2　船舶曲面设计中的 N 边洞

N 边洞的数学定义为由 N 条 B 样条边界曲线围成的闭合区域，核心几何要素包括边界曲线、角点和跨界导矢. 如图 3 所示，跨界导矢作为支撑曲面沿边界参数方向的一阶微分量，决定了填充曲面在边界处的切向连续性，该矢量的模长与方向直接影响曲面的曲率传播特性，是构造满足计算几何标准的过渡曲面的关键约束条件. 其中，$\boldsymbol{C}_i$ 表示边界曲线，$\boldsymbol{D}_i$ 表示跨界导矢.

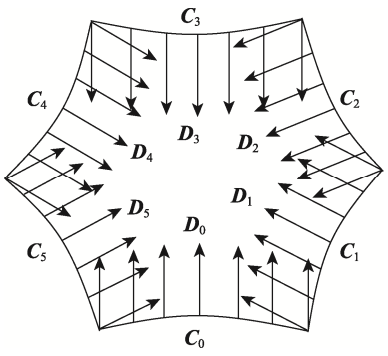


图 3　N 边洞边界线及跨界导矢

N 边洞填充作为几何建模领域的一个经典问题，得到了众多研究者的关注[1,5,9-14]. 大多数算法首先将 N 边洞分割成四边形区域，然后在每个四边形子区域中填入满足参数或者几何连续性的 Coons 曲面[1,5,9,11]；但这类算法会触发经典的扭矢相容性问题，往往难以满足角点处的扭矢相容性. 为了避免扭矢相容性问题，Chiyokura[15]采用 Gregory 面片填充 N 边洞；Piegl 等[1]通过插入节点和导矢近似生成满足扭矢相容性的曲面，曲面之间的法向偏差小于用户给定的容差；杨义军[9]将 Piegl 等[1]算法拓展到齐次空间，解决了边界曲线为有理曲线的情形；施侃乐等[11-12]和 Shi 等[13]讨论了利用退化边界处理 N 边洞的 G^1 填充扭矢相容性问题.

2　本文算法

本文算法流程共包含 6 个步骤，分别为：插值获得边界跨界导矢、计算中心点及中心法向、根据首尾处控制点和切矢生成内部线、插值得到内部线左右两侧跨界导矢、处理角点处扭矢相容性，以及构造 Coons 曲面，以确保填充得到的曲面与原始曲面在内部特征线及边界线处满足预设容差 ε 下的 G^1 几何连续性.

2.1　边界线预处理与跨界导矢计算

N 边洞边界曲线定义为

$$\boldsymbol{C}_k(u)=\sum_{i=0}^{n_k}N_{i,P_k}(u)\cdot\boldsymbol{P}_{k_i},\ k=0,1,\cdots,N;$$

其跨界导矢定义为

$$\boldsymbol{D}_k(u)=\sum_{i=0}^{n_k}N_{i,P_k}(u)\cdot\boldsymbol{V}_{k_i},\ k=0,1,\cdots,N.$$

其中，$\boldsymbol{P}_{k_i}$ 表示 N 边洞边界曲线的控制顶点；$\boldsymbol{V}_{k_i}$ 表示边界线跨界导矢的控制顶点. 针对实际工程中跨界导矢数据未知的局限性，本文提出基于边界导矢插值和切平面投影的跨界导矢构造算法.

由 N 边洞边界相容性可知，跨界导矢在角点处等于相邻边界边的切导矢. 设边界曲线端点处参数为 u_0 与 u_1，通过计算相邻边界曲线偏导数可得精确跨界导矢向量. 在参数区间 $[u_{\min},u_{\max}]$ 上，按等弧长准则采样 k 个点 $\{u_k\}$，构造线性插值函数

$$\boldsymbol{D}(u_k)=\boldsymbol{D}(u_0)+\frac{u_k-u_0}{u_1-u_0}\left(\boldsymbol{D}(u_1)-\boldsymbol{D}(u_0)\right),$$

通过计算得到一组初步的边界跨界导矢. 但是，由于这些跨界导矢并不严格符合 N 边洞边界线跨界导矢的方向要求，因此对每个采样点 $\boldsymbol{C}(u_i)$，将插值跨界导矢向量投影至过该采样点的切平面上，如图 4 所示.

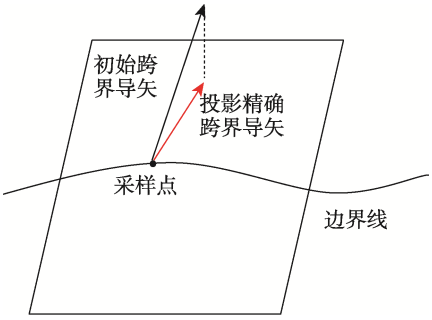


图 4　边界跨界导矢优化

对于边界线和构造的跨界导矢曲线，需满足以下约束条件：(1) 方向一致性. $\boldsymbol{D}_i(u)$ 需指向 N 边洞内部，通过控制顶点符号调整实现；(2) 参数相容性. 边界曲线与边界线跨界导矢需具有相同次数 $p=q$ 并定义在同一组节点向量上，若不相容，采用升阶算法或节点插入实现参数同步；(3) 边界线要满足位置连续，2 条边界线的相邻角点之间没有缝隙，边界曲线满足 $\boldsymbol{C}_k(t_{\max})=\boldsymbol{C}_{k+1}(t_{\min})$. 其中，$t_{\max}$ 和 $t_{\min}$ 分别表示曲线参数域的最大值和最小值，并且为了保证索引的连续性和合理性，需要对 k 进行取模 $N+1$ 运算.

2.2　中心点及中心法向计算

N 边洞填充曲面的几何形态由中心点和中心法向共同决定. 本文采用基于跨界导矢的混合加权平均法[1].

(1) 对 N 边洞各边界曲线 $\boldsymbol{C}_k(u)$ 及其跨界导矢 $\boldsymbol{D}_k(u)$ 进行参数域归一化处理和中点定位. 计算边界曲线参数域中点 $t_{\mathrm{m}}=\dfrac{t_{\max}+t_{\min}}{2}$，对应的几何边界线 $\boldsymbol{C}_k(t_{\mathrm{m}})$ 中点与跨界导矢 $\boldsymbol{D}_k(t_{\mathrm{m}})$ 中点，分别定义为 $\boldsymbol{M}_k$ 和 $\boldsymbol{T}_k$. 公式为

$$\boldsymbol{C}_k\rightarrow\left\{\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{L}},\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{R}}\right\},$$

$$\boldsymbol{D}_k\rightarrow\left\{\boldsymbol{D}_k^{\mathrm{L}},\boldsymbol{D}_k^{\mathrm{R}}\right\}.$$

其中，将边界曲线 $\boldsymbol{C}_k(t_{\mathrm{m}})$ 从中点 $\boldsymbol{M}_k$ 处划分为左半部分曲线 $\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{L}}$ 和右半部分曲线 $\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{R}}$，跨界导矢 $\boldsymbol{D}_k(t_{\mathrm{m}})$ 同理，从中点 $\boldsymbol{T}_k$ 处划分为 $\boldsymbol{D}_k^{\mathrm{L}}$ 和 $\boldsymbol{D}_k^{\mathrm{R}}$.

(2) 参数方向对齐. 翻转 $\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{R}}$ 和 $\boldsymbol{D}_k^{\mathrm{R}}$ 的参数域，始终保证 N 边洞角点处参数值为 $t_{\min}$，分割点处参数值为 $t_{\max}$. 若存在次数不匹配，即 $p_i\neq p_{i+1}$，

采用升阶算法实现次数统一. 调整跨界导矢中点的长度为左右相邻两边界弧长平均值的一半, 即

$$\left|\boldsymbol{T}_k\right|=\frac{1}{4}\left[O_{\text{ArcLength}}\left(\boldsymbol{C}_{k-1}\right)+O_{\text{ArcLength}}\left(\boldsymbol{C}_{k+1}\right)\right].$$

其中, $O_{\text{ArcLength}}$ 是一个计算 NURBS 曲线弧长长度的算子.

(3) 沿各边界线和边界跨界导矢提取 2 类中点集 $\left\{\boldsymbol{M}_k\middle|\boldsymbol{M}_k=\boldsymbol{C}_k\left(t_{\text{m}}\right)\right\}$ 和 $\left\{\boldsymbol{T}_k\middle|\boldsymbol{T}_k=\boldsymbol{D}_k\left(t_{\text{m}}\right)\right\}$, 加权得到当前边对应的初步中心点

$$\boldsymbol{Q}_k=\boldsymbol{M}_k+\frac{1}{2}\boldsymbol{T}_k;$$

再对这些中间量取平均值, 得到 N 边洞中心点

$$\boldsymbol{C}=\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{Q}_k\ .$$

N 边洞中心点计算示意图如图 5 所示.

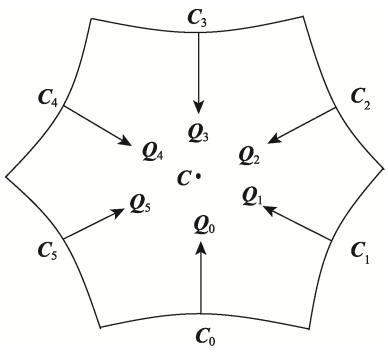


图 5 N 边洞边中心点计算

基于 N 边洞中心点 $\boldsymbol{C}$ 与相邻边界分割中点 $\boldsymbol{M}_k,\boldsymbol{M}_{k+1}$ 的几何关联性, 构建局部特征向量 $\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{M}_k-\boldsymbol{C}$ 及 $\boldsymbol{v}_{k+1}=\boldsymbol{M}_{k+1}-\boldsymbol{C}$, 通过向量叉积运算 $\boldsymbol{W}_k=\boldsymbol{v}_k\times\boldsymbol{v}_{k+1}$, 提取该边对应的局部法向量 $\boldsymbol{W}_k$. 最终, 通过加权平均生成中心法向量.

2.3 构造内部线

N 边洞的内部线会对整个待填充区域进行分割, 将 N 边洞划分成若干个子区域. 由于每条内部线都充当左右 2 个填充曲面的边界线, 因此会对 N 边洞的填充曲面形状产生影响.

内部线的构造依赖于 N 边洞的中心点和中心点的法向. 本文采用 Piegl 等[1]算法的思路构造 N 边洞内部线. 内部线定义为由端点和端点处切矢定义的三次 Bézier 曲线

$$\boldsymbol{I}_k\left(t\right)=\sum_{i=0}^{3}B_{i,3}\left(t\right)\cdot\boldsymbol{P}_{k_i},\ k=0,1,\cdots,N\ .$$

同时, 首尾控制顶点分别定义为 $\boldsymbol{P}_{k_0}=\boldsymbol{M}_k$ 和 $\boldsymbol{P}_{k_3}=\boldsymbol{C}$.

根据 Bézier 曲线的性质, 内部线的起始和终止端点即为 $\boldsymbol{M}_k$ 和 $\boldsymbol{C}$.

内部线的端点处, 切矢分别定义为 $\boldsymbol{T}_{\text{s}}=\boldsymbol{T}_k$ 和 $\boldsymbol{T}_{\text{e}}=\boldsymbol{C}-\boldsymbol{M}_k^g$; 其中, g 表示由 N 边洞中心点和中心点法向确定的切平面; $\boldsymbol{M}_k^g$ 表示点 $\boldsymbol{M}_k$ 在平面 g 上的投影. 将端点切矢单位化, 分别用 $\boldsymbol{T}_{\text{s}}^z$ 和 $\boldsymbol{T}_{\text{e}}^z$ 表示.

中间 2 个控制顶点的计算公式分别为

$$\boldsymbol{P}_{k_1}=\boldsymbol{P}_{k_0}+\frac{1}{3}\alpha\boldsymbol{T}_{\text{s}}^z,$$

$$\boldsymbol{P}_{k_2}=\boldsymbol{P}_{k_3}+\frac{1}{3}\alpha\boldsymbol{T}_{\text{e}}^z.$$

其中, α 满足方程 $a\alpha^2+b\alpha+c=0$, 方程中各项系数定义为

$$\begin{cases}a=16-\left|\boldsymbol{T}_{\text{s}}^z+\boldsymbol{T}_{\text{e}}^z\right|^2\\ b=12\left(\boldsymbol{P}_{k_3}-\boldsymbol{P}_{k_0}\right)\cdot\left(\boldsymbol{T}_{\text{s}}^z+\boldsymbol{T}_{\text{e}}^z\right)\\ c=-36\left|\boldsymbol{P}_{k_3}-\boldsymbol{P}_{k_0}\right|^2\end{cases}.$$

按上述流程, 得到内部线三次 Bézier 曲线的 4 个控制顶点, 如图 6 所示.

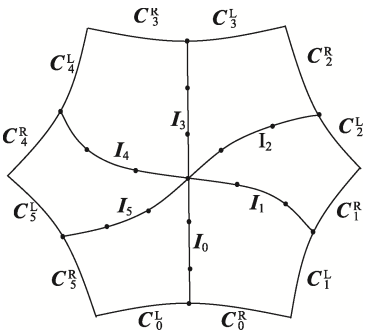


图 6 构造内部线的 4 个控制顶点

2.4 构造内部线两侧跨界导矢

在曲面填充算法中, 为了确保相邻曲面片在公共边界的几何 G^1 连续性, 需精确地构造内部线两侧的跨界导矢. 在满足角点处 G^1 连续性条件及 N 边洞边界相容性约束下, 通过计算相邻曲线在公共角点处的一阶导数, 可得到跨界导矢起始和终止矢量 $\boldsymbol{D}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_2$. 以此为基础构建线性插值 B 样条曲线跨界导矢, 生成内部线左右两侧的初始跨界导矢 $\boldsymbol{B}_k^{\text{L}}$ 和 $\boldsymbol{B}_k^{\text{R}}$, 如图 7 所示.

2.5 扭矢相容性处理

本文使用双三次 Coons 曲面填充划分后的 N 边洞的各矩形区域. 构建 Coons 曲面需要满足扭矢相容性与边界相容性.

扭矢相容性指 Coons 曲面填充的矩形区域中, 相邻边界线跨界导矢在角点处导数相等. 表达式为

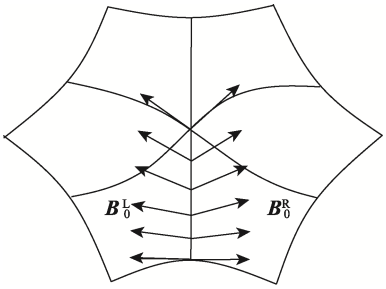


图 7　内部线两侧初始线跨界导矢

$$\begin{cases}\boldsymbol{D}_{k-1}^{\mathrm{R}}{}'(t_{\min})=\boldsymbol{D}_k^{\mathrm{L}'}(t_{\min})\\ \boldsymbol{D}_k^{\mathrm{L}'}(t_{\max})=\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{R}'}(t_{\min})\\ \boldsymbol{B}_k^{\mathrm{R}'}(t_{\max})=\boldsymbol{B}_{k-1}^{\mathrm{L}}{}'(t_{\max})\\ \boldsymbol{B}_{k-1}^{\mathrm{L}}{}'(t_{\min})=\boldsymbol{D}_{k-1}^{\mathrm{R}}{}'(t_{\max})\end{cases}.$$

这是填充 N 边洞算法的难点，扭矢不相容导致曲面在子区域交界处几何不连续. Piegl 等[1]算法在原始跨界导矢曲线节点向量端点处插入新节点，使跨界导矢末端导数等于给定扭矢. 因为末端导矢由第 2 个和倒数第 2 个控制点和相应的节点区间决定，所以通过调整节点区间使得控制点间角度偏差小于给定 ε，最终得到满足扭矢相容的曲线及 ε-G^1 填充曲面. 但是，该算法导致填充曲面后续操作的数值不稳定.

本文算法首先沿矩形区域边界线线性插值角点法向量构建法向量场，保证插值点处跨界导矢与法向量点积为 0；然后将其与扭矢相容性共同设为线性强约束，通过逼近边界导矢的线性插值曲线，得到满足扭矢相容性的跨界导矢.

填充一个局部曲面用到的 4 条跨界导矢分别为 $\boldsymbol{D}_{k-1}^{\mathrm{R}}$, $\boldsymbol{D}_k^{\mathrm{L}}$, $\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{R}}$, $\boldsymbol{B}_{k-1}^{\mathrm{L}}$，以及对应边界线 $\boldsymbol{C}_{k-1}^{\mathrm{R}}$, $\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{L}}$, $\boldsymbol{I}_k$，$\boldsymbol{I}_{k-1}$. 通过线性插值法，得到填充曲面边界上 4 组法向量组 $\boldsymbol{N}_{t,0},\boldsymbol{N}_{t,1},\cdots,\boldsymbol{N}_{t,m}, t=0,1,2,3$. 4 条拟合跨界导矢曲线为

$$\boldsymbol{C}_t(u)=\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(u)\cdot\boldsymbol{P}_{t,i}, u\in[0,1], t=0,1,2,3.$$

曲线采用均匀节点向量，控制点数 $n+1$，一般取 $p=3$. 根据边界相容性约束，跨界导矢满足端点条件. 令 $\boldsymbol{C}_t(u)$ 在采样点处的参数值为 $\{\bar{u}_{t,k}\}$, $t=0,1,2,3$.

为了保证填充曲面在边界线和内部线处满足 G^1 连续，跨界导矢需要在采样点参数值 $\{\bar{u}_{t,k}\}$, $t=0,1,2,3$ 处满足跨界导矢值与该点处的法向量垂直，即 $\boldsymbol{C}_t(\bar{u}_{t,k})\cdot\boldsymbol{N}_{t,k}=0$.

本文采用能量 $\sum_{i=0}^{n}(\boldsymbol{P}_i-\boldsymbol{P}_{oi})^2$ 为目标函数，其中，$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}_{oi}$ 分别表示跨界导矢控制顶点和边界导矢线性插值曲线控制顶点，采用 Lagrange 乘数法求解该问题的最优解，得到满足边界相容性、扭矢相容性和连续性要求的跨界导矢曲线. 最终的优化问题为

$$\begin{cases}\min\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{t=0}^{3}(\boldsymbol{P}_{t,i}-\boldsymbol{P}_{t,oi})^2\\ \text{s.t.}\,\boldsymbol{C}_t(\bar{u}_{t,k})\cdot\boldsymbol{N}_{t,k}=0, k-1,\cdots m-1, t=0,1,2,3\end{cases}\tag{1}$$

将式(1)的第 2 个公式与 4 个扭矢相容性条件共同作为约束. 扭矢相容性是跨界导矢必须满足的条件，为了防止过约束，对于每段内部曲线，本文在每段节点向量区间取一个采样点插值该点处的法向量，用于构造约束条件.

对于此最小二乘问题，令

$$\boldsymbol{S}_{t,k}=N_{0,p}(\bar{u}_{t,k})\cdot\boldsymbol{C}_t(0)+N_{n,p}(\bar{u}_{t,k})\cdot\boldsymbol{C}_t(1),$$
$$k=1,\cdots,m-1,\ t=0,1,2,3;$$

则有

$$\boldsymbol{C}_t(\bar{u}_{t,k})\cdot\boldsymbol{N}_{t,k}=\left(\boldsymbol{S}_{t,k}\cdot\boldsymbol{N}_{t,k}+\sum_{i=1}^{n-1}N_{i,p}(\bar{u}_{t,k})\cdot\boldsymbol{N}_{t,k}\cdot\boldsymbol{P}_{t,i}\right)=0\tag{2}$$

同时，令 $\boldsymbol{N}_{t,k}$ 和 $\boldsymbol{P}_{t,i}$ 的坐标分别为 $(x_{t,k}^{\boldsymbol{N}},y_{t,k}^{\boldsymbol{N}},z_{t,k}^{\boldsymbol{N}})$ 和 $(x_{t,i}^{\boldsymbol{P}},y_{t,i}^{\boldsymbol{P}},z_{t,i}^{\boldsymbol{P}})$，将式(2)和三维坐标代入式(1)后，对每个控制点变量求偏导并令其等于 0，可以得到含 $12n+4(m-1)$ 个变量及方程的线性方程组 $\boldsymbol{NP}=\boldsymbol{R}$. 为方便矩阵构造，对矩阵 $\boldsymbol{R}$ 进行适当分块如

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_X^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{R}_Y^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{R}_Z^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{R}_\Lambda^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{R}_\lambda^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}.$$

其中，$\boldsymbol{R}_X$, $\boldsymbol{R}_Y$ 和 $\boldsymbol{R}_Z$ 分别表示 $4(n-1)$ 维列向量；$\boldsymbol{R}_\Lambda$ 表示 $4(m-1)$ 维列向量；$\boldsymbol{R}_\lambda$ 表示 12 维列向量.

$\boldsymbol{P}$ 为控制点和 Lagrange 乘数构成的列向量，矩阵 $\boldsymbol{N}$ 表示上述求导得到的方程组 $\boldsymbol{NP}=\boldsymbol{R}$ 左侧的表达式，$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 的构造同理，同样可以根据矩阵组成适当分块. 对于最后得到的矩阵方程，利用 Eigen 数值求解库中函数 colPivHouseholderQr().solve 求解，得到 4 条跨界导矢曲线的控制点的 x,y,z 坐标；再结合计算出的节点向量，可构造 4 条拟合的跨界导矢曲线，记为 $\tilde{\boldsymbol{D}}_{k-1}^{\mathrm{R}},\tilde{\boldsymbol{D}}_k^{\mathrm{L}},\tilde{\boldsymbol{B}}_k^{\mathrm{R}},\tilde{\boldsymbol{B}}_{k-1}^{\mathrm{L}}$.

2.6　Coons 曲面构造

完成内部线与跨界导矢的计算后，采用双三次混合 Coons 曲面实现 N 边洞各矩形区域的 G^1 连续填充. 设 $O_{\mathrm{CUBIC_BLEND}}$ 为边界线和跨界导矢的混

合面的构造操作符，$O_{\text{TENSOR_PRODUCT}}$ 为插值边界曲线和扭矢向量的双三次张量积曲面操作符. 首先生成 uv 方向的混合曲面

$$\boldsymbol{S}_u(u,v)=O_{\text{CUBIC_BLEND}}\left\{\boldsymbol{C}_{k-1}^{\text{R}},\tilde{\boldsymbol{D}}_{k-1}^{\text{R}},\boldsymbol{I}_k,\tilde{\boldsymbol{B}}_k^{\text{R}}\right\},$$

$$\boldsymbol{S}_v(u,v)=O_{\text{CUBIC_BLEND}}\left\{\boldsymbol{C}_k^{\text{L}},\tilde{\boldsymbol{D}}_k^{\text{L}},\boldsymbol{I}_{k-1},\tilde{\boldsymbol{B}}_{k-1}^{\text{L}}\right\};$$

然后合成双三次张量积曲面

$$\boldsymbol{S}_t(u,v)=O_{\text{TENSOR_PRODUCT}}\left\{\boldsymbol{C}_{k-1}^{\text{R}},\boldsymbol{C}_k^{\text{L}},\boldsymbol{I}_k,\boldsymbol{I}_{k-1},\boldsymbol{T}_{00},\boldsymbol{T}_{10},\boldsymbol{T}_{11},\boldsymbol{T}_{01}\right\};$$

最后生成 Coons 曲面. 对 $\boldsymbol{S}_u,\boldsymbol{S}_v,\boldsymbol{S}_t$ 进行相容性处理使 3 个曲面的次数和节点向量一致，计算 Coons 曲面的控制顶点 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_u+\boldsymbol{P}_v-\boldsymbol{P}_t$.

3 实例及结果分析

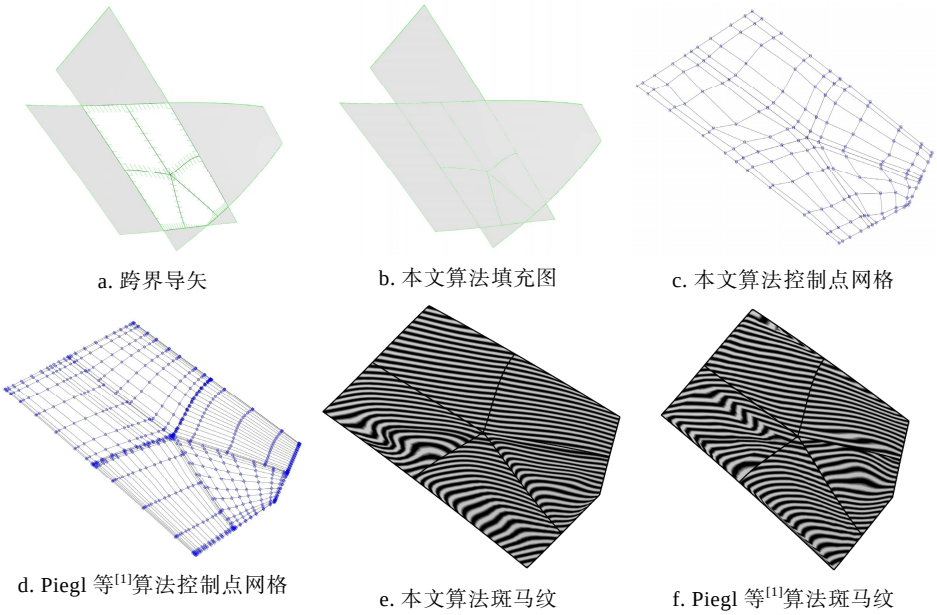
3.1 实验设置

在船舶曲面实例上，将本文算法与 Piegl 等[1]算法进行对比实验. 算法采用 C++语言实现，在 Visual Studio 2022 集成环境中实现. 实验平台为一台配备 8 核心、主频 2.50 GHz 的 CPU, 64 GB 内存, NVIDIA GeForce GTX 1660 Super 显卡的计算机.

本文给出 5 个测例，它们均来自实际船舶设计项目，可以真实地呈现工程场景下 N 边洞的几何特征，为验证算法在复杂曲面环境中的适应能力与鲁棒性提供了可靠的依据. 测例 1 尺寸较小，且边界曲面高比例属于平坦区，侧重于基础验证标准化场景；测例 2 尺寸中等，局部曲率较大，用于测试算法处理混合曲率边界的能力；测例 3 尺寸较大，且曲面弯曲程度和曲率变化更加复杂. 测例 4 和测例 5 的 N 边洞几何形状复杂度较高，因此本文算法在生成填充曲面时采用了更多的控制点，其中，测例 4 的 Coons 曲面 uv 方向的控制顶点个数分别为 23 和 23；测例 5 的 Coons 曲面 uv 方向的控制顶点个数分别为 24 和 24.

3.2 对比实验

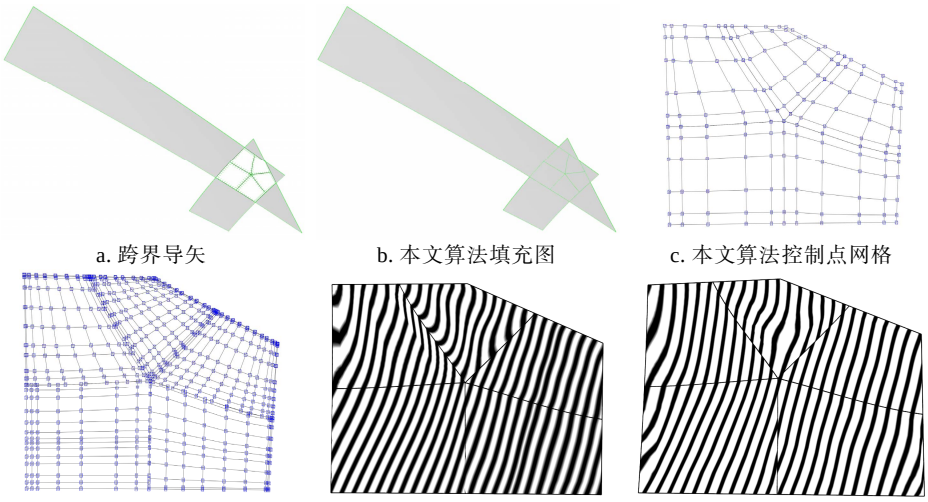
在 0.1°容差下，对测例 1，测例 2 和测例 3 的 N 边洞进行实验，结果分别如图 8~图 10 所示. 图 8d~图 10d 中，测例 1 的 Coons 曲面 uv 方向的控制顶点个数分别为 6 和 6，测例 2 的 Coons 曲面 uv 方向的控制顶点个数分别为 6 和 6，测例 3 的 Coons 曲面 uv 方向的控制顶点个数分别为 10 和 10. 可以看出，图 8b~图 10b 中，本文算法在处理具有复杂几何边界和内部结构的 N 边洞时，展现出良好的适应能力与建模质量，生成的填充曲面在边界线和内部线处能够实现良好的过渡，填充曲面在几何结构上表现出较高的光滑性与连续性，未出现明显的折痕，各相邻 Coons 曲面之间均能够平滑连接；图 8c~图 10c 中，本文算法生成的 Coons 曲面控制顶点分布更加均匀，避免了控制点过度集中的问题；图 8d~图 10d 中，Piegl 等[1]算法由于在构造过程中需要在边界处进行节点插入操作，生成的控制网格在曲面边界附近出现较大密度的控制顶点，这种非均匀分布容易引发曲面的局部数值



a. 跨界导矢　b. 本文算法填充图　c. 本文算法控制点网格

d. Piegl 等[1]算法控制点网格　e. 本文算法斑马纹　f. Piegl 等[1]算法斑马纹

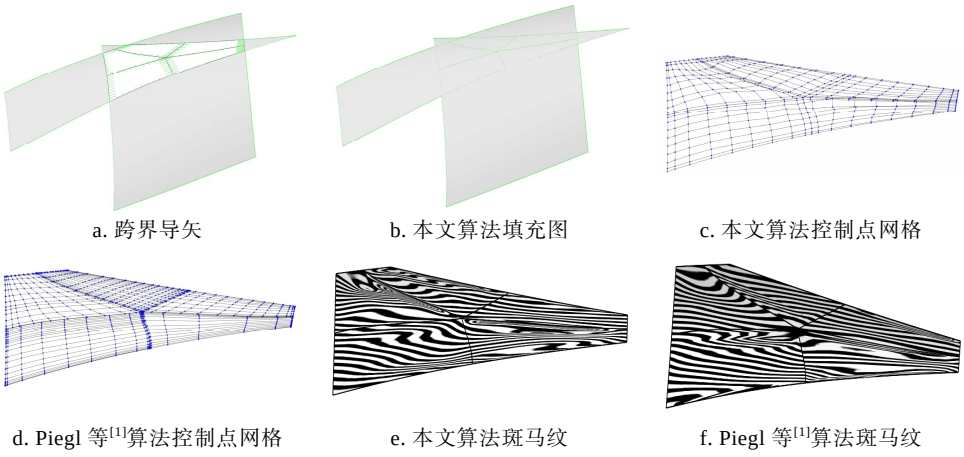
图 8　N 边洞测例 1



a. 跨界导矢　b. 本文算法填充图　c. 本文算法控制点网格

d. Piegl 等[1]算法控制点网格　e. 本文算法斑马纹　f. Piegl 等[1]算法斑马纹

图 9　N 边洞测例 2



a. 跨界导矢　b. 本文算法填充图　c. 本文算法控制点网格

d. Piegl 等[1]算法控制点网格　e. 本文算法斑马纹　f. Piegl 等[1]算法斑马纹

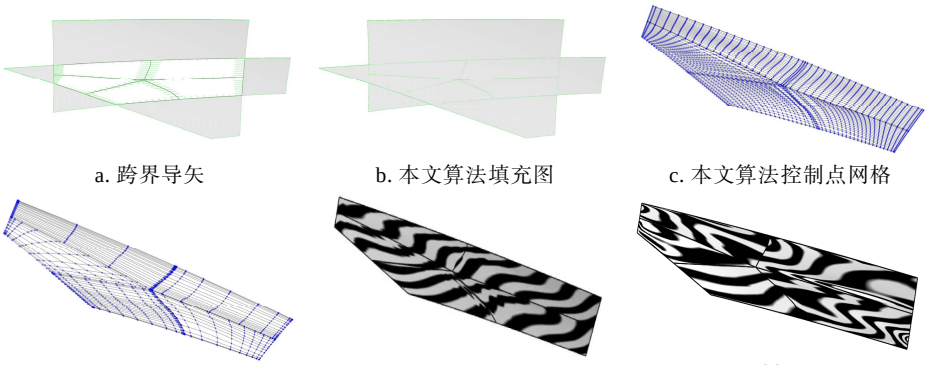
图 10　N 边洞测例 3

不稳定，限制了其在对几何精度要求较高的工业造型场景中的应用；对比图 8c~图 10c 和图 8d~图 10d，本文算法生成的曲面质量优于 Piegl 等[1]算法；图 8e~图 10e 中，各拼接区域未出现条纹折断、突变等现象，表明曲面间连接自然、过渡平滑，满足曲面之间的 G^1 几何连续性要求.

本文还对 Coons 曲面公共边界进行法向误差实验，在公共边界处，测例 1，测例 2 和测例 3 的 Coons 曲面的法向偏差最大值分别为 0.08°，0.07°和 0.10°，处于工程容差精度范围之内，可视化结果均证实了本文算法生成的填充曲面的光滑性.

在容差 0.2°下，对测例 4 和测例 5 的 N 边洞进行实验，结果分别如图 11 和图 12 所示. 可以看出，图 11b~图 12b 中，填充曲面整体形态连续、光顺，各相邻 Coons 曲面之间过渡自然；虽然 2 个测例采用了更多的控制点，但图 11c~图 12c 和图 11d~图 12d 中，本文算法生成的填充曲面在控制点的排布上仍然保持了良好的均匀性，Piegl 等[1]算法生成的曲面仍然在边界线处过于集中. 在公共边界上，测例 4 和测例 5 的法向偏差最大值分别为 0.17°和 0.13°.

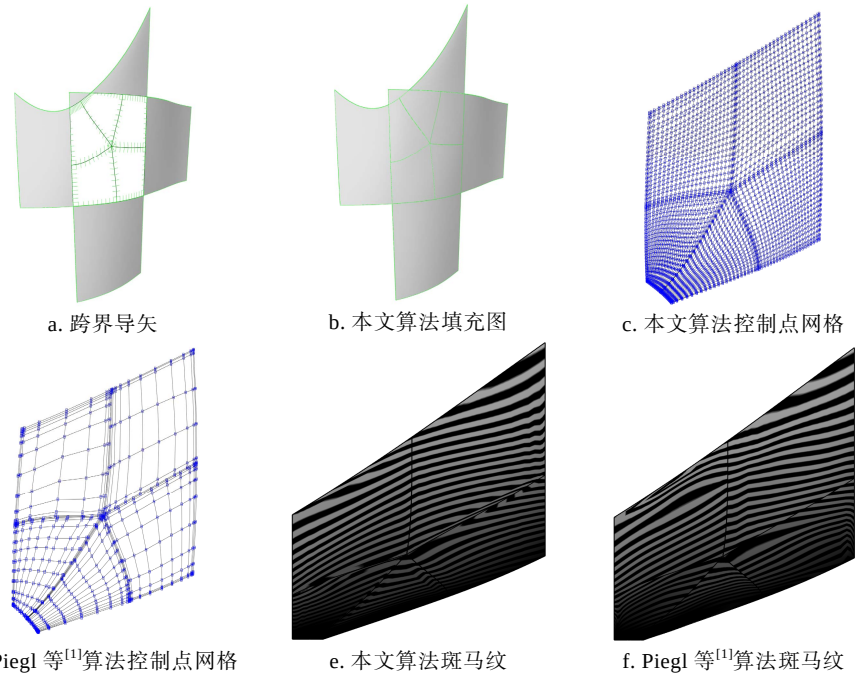
在测例 1 上，将法线场分布与本文算法计算得到的跨界导矢之间的关系进行实验，对 N 边洞剖分后形成的矩形区域边界线参数域进行等间距采样，由于法向量在计算时执行归一化的操作，为了便于观察，对图中显示的法线模长放大 100 倍，结果如图 13 所示. 可以看出，本文算法计算的跨界导矢严格位于法线场构建的切平面内，且每个采样点的跨界导矢均符合法线方向的约束，确保在公共边界处，该算法生成的跨界导矢作为条件进行插值构造的 Coons 曲面能够满足 G^1 连续. 通过确保导矢方向与法向之间的几何正交性，本文算法能够有效地提升曲面在拼接边界处的几何一致性，确保生成曲面在连续性方面的高质量表现.



a. 跨界导矢　b. 本文算法填充图　c. 本文算法控制点网格

d. Piegl 等[1]算法控制点网格　e. 本文算法斑马纹　f. Piegl 等[1]算法斑马纹

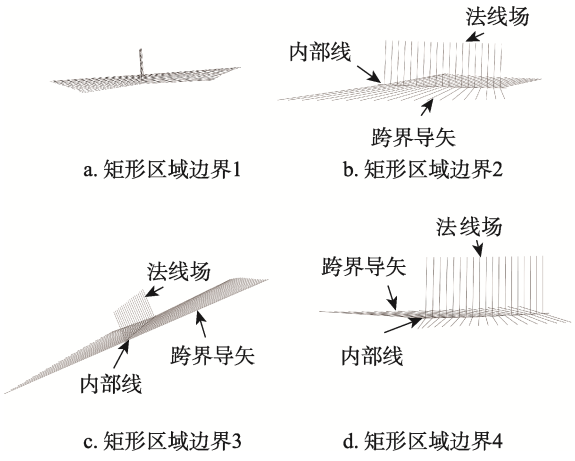
图 11　N 边洞测例 4



a. 跨界导矢　b. 本文算法填充图　c. 本文算法控制点网格

d. Piegl 等[1]算法控制点网格　e. 本文算法斑马纹　f. Piegl 等[1]算法斑马纹

图 12　N 边洞测例 5



a. 矩形区域边界1　b. 矩形区域边界2

c. 矩形区域边界3　d. 矩形区域边界4

图 13　N 边洞测例 1 法向场

为了进一步从数值上分析本文算法的有效性，将测例 1 分成 5 个矩形区域(区域 1~区域 5)，计算每个填充矩形区域的 4 条边界上的采样点进行法向偏差，取其中最大法向偏差作为衡量标准，结果如表 1 所示. 可以看出，本文算法生成的跨界导矢与法向之间的夹角与 90°夹角的偏差控制在给定容差 0.1°之内，表明在跨界导矢方向的计算过程中，该算法具备了较高的数值精度和稳定性.

表 1　测例 1 跨界导矢与法向夹角偏差　(°)

区域	内部线两侧跨界导矢角度偏差	
	左侧	右侧
1	0.015 40	0.010 44
2	0.070 55	0.018 36
3	0.027 56	0.027 69
4	0.083 95	0.030 02
5	0.042 04	0.007 91

4 结　语

为了解决扭矢相容性问题，本文提出基于约束最小二乘的跨界导矢生成算法．首先将扭矢相容性和法向共向作为线性约束，通过最小二乘逼近边界导矢的线性插值曲线生成跨界导矢；然后通过细分曲线采样点和跨界导矢，生成满足给定用户容差连续性的 ε-G^1 N 边洞填充曲面，解决了 Piegl 等[1]算法在边界端点附近引入细小节点区间带来的数值不稳定和曲面光顺问题．值得注意的是，本文采用将 N 边洞划分为 N 个子区域的方式虽具有一般性，但随着 N 增大，中心点附近的拼接压力也随之上升，可能影响整体曲面质量．未来将探索基于中轴启发的主导拓扑划分策略，在保证构造灵活性的同时，减少内部拼接边数量，进一步提升填充曲面的光顺性．

参考文献(References):

[1] Piegl L A, Tiller W. Filling n-sided regions with NURBS patches[J]. The Visual Computer, 1999, 15(2): 77-89

[2] Mancinelli C, Puppo E. Splines on manifolds: a survey[J]. Computer Aided Geometric Design, 2024, 112: Article No.102349

[3] Várady T, Salvi P, Vaitkus M. Genuine multi-sided parametric surface patches-a survey[J]. Computer Aided Geometric Design, 2024, 110: Article No.102286

[4] Zhang Y Z, Zheng J M. An overview of developable surfaces in geometric modeling[J]. Recent Patents on Engineering, 2022, 16(5): 87-103

[5] Yang Y J, Yong J H, Zhang H, *et al*. A rational extension of Piegl's method for filling *n*-sided holes[J]. Computer-Aided Design, 2006, 38(11): 1166-1178

[6] Varady T. Survey and new results in *n*-sided patch generation[M] //Martin R R. The Mathematics of Surfaces Ⅱ. Oxford: Clarendon Press, 1987: 203-235

[7] Varady T, Rockwood A. Geometric construction for setback vertex blending[J]. Computer-Aided Design, 1997, 29(6): 413-425

[8] Shi X Q, Wang T J, Yu P Q. A practical construction of G^1 smooth biquintic B-spline surfaces over arbitrary topology[J]. Computer-Aided Design, 2004, 36(5): 414-424

[9] Yang Yijun. Solid blending[D]. Beijing: Tsinghua University, 2008(in Chinese)
(杨义军. 实体过渡算法的研究与实现[D]. 北京: 清华大学, 2008)

[10] Zhou Yun. Research and implementation of surface continuity algorithm & solid blending method[D]. Beijing: Tsinghua University, 1999(in Chinese)
(周昀. 曲面连续性与实体过渡算法的研究与实现[D]. 北京: 清华大学, 1999)

[11] Shi Kanle. Research on blending free-form surfaces with constraints of geometric continuities[D]. Beijing: Tsinghua University, 2012(in Chinese)
(施侃乐. 几何连续性约束下的自由曲面过渡问题研究[D]. 北京: 清华大学, 2012)

[12] Shi Kanle, Yong Junhai, Sun Jiaguang, *et al*. G^n filling orbicular *N*-sided holes using periodic B-spline surfaces[J]. Science China Information Sciences, 2011, 41(9): 1112-1125(in Chinese)
(施侃乐, 雍俊海, 孙家广, 等. 基于周期 B 样条曲面的环状 N 边洞 G^n 连续性过渡[J]. 中国科学: 信息科学, 2011, 41(9): 1112-1125)

[13] Shi K L, Yong J H, Sun J G, *et al*. Filling *n*-sided regions with G^1 triangular Coons B-spline patches[J]. The Visual Computer, 2010, 26(6-8): 791-800

[14] Yuan Qiming, Shi Kanle, Yong Junhai, *et al*. The mixed curvature and the G^2 continuity visualization of surfaces[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2011, 23(11): 1830-1837(in Chinese)
(袁启明, 施侃乐, 雍俊海, 等. 曲面二阶几何连续性的混合曲率评价与可视化[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2011, 23(11): 1830-1837)

[15] Chiyokura H. Solid modeling with DESIGNBASE: theory and implementation[M]. Boston: Addison-Wesley, 1988