带引导线的扩展 Coons 曲面算法

胡新宇[1)], 陈鑫[2)], 赵启轩[1)], 马彦军[3)], 李效伟[4)], 杨义军[1,4)], 曾薇[2)*]

[1)] (西安交通大学计算机科学与技术学院 西安 710049)
[2)] (西安交通大学数学与统计学院 西安 710049)
[3)] (沪东中华造船(集团)有限公司 上海 200100)
[4)] (中国船舶集团海舟系统技术有限公司 上海 200010)
(wz@xjtu.edu.cn)

摘 要: 为解决传统 Coons 曲面无法处理引导线, 以及 Gordon 曲面因需插值双向曲线而引入大量控制顶点的问题, 针对实际工程设计的需要, 提出一种带引导线的扩展 Coons 曲面算法. 先依据给定边界线生成基础 Coons 曲面, 对引导线均匀采样并将采样点投影到该曲面上, 得到偏移向量; 再以最小二乘法拟合偏移向量, 同时加入控制顶点光顺能量约束, 生成与基础曲面相容的偏移曲面; 最后将偏移曲面叠加到基础 Coons 曲面上, 得到带引导线的扩展 Coons 曲面. 在实际工程中的船舶曲面和汽车外壳曲面等案例上进行实验, 结果表明, 与传统 Coons 曲面相比, 所提算法生成的曲面能够在 5 mm 容差范围内逼近引导线, 且生成的曲面比传统 Gordon 曲面的控制顶点减少约 40%, 验证了该算法的有效性.

关键词: Gordon 曲面; Coons 曲面; 引导线; 曲面拟合; 最小二乘
中图法分类号: TP391.41 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2025-00140

An Algorithm to Generate Extended Coons Surface with Guide Curves

Hu Xinyu[1)], Chen Xin[2)], Zhao Qixuan[1)], Ma Yanjun[3)], Li Xiaowei[4)], Yang Yijun[1,4)], and Zeng Wei[2)*]

[1)] (*School of Computer Science and Technology, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049)
[2)] (*School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049)
[3)] (*HUDONG-ZHONGHUA Shipbuilding* (*GROUP*) *Co., Ltd, Shanghai* 200100)
[4)] (*CSSC SEAGO System Technology Co., Ltd, Shanghai* 200010)

Abstract: In order to solve the problems of traditional Coons surfaces not being able to handle guide curves, and Gordon surfaces requiring the interpolation of bi-directional isoparametric curves which brings in a large number of control points, an extended Coons surface algorithm with guide curves was proposed for the needs of practical engineering design. Firstly, a Coons surface is generated based on the given boundary curves, and the offset vectors are obtained by uniformly sampling the guide curves and projecting the sampling points onto the surface. Then, the offset vectors are fitted by the least squares method, and the smooth energy constraints of the control points are added to generate the offset surface compatible with the base surface. Finally, the offset surface is superimposed onto the base Coons surface to obtain the extended Coons surface with guide curves. The results show that the proposed algorithm is able to approximate the guide curves within a tolerance of 5 mm compared with the traditional Coons surface, and the control points are reduced by about 40% compared with those of the traditional Gordon surface, which verifies the effectiveness of the algorithm.

收稿日期: 2025-04-30; 修回日期: 2025-07-13. **基金项目**: 国家重点研发计划(2021YFB3302402); 陕西省重点研发计划(2023GXLH-026). **胡新宇**(2001—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为 CAD&CG; **陈鑫**(2002—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为 CAD&CG; **赵启轩**(2000—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为 CAD&CG; **马彦军**(1982—), 男, 博士, 高级工程师, CCF 会员, 主要研究方向为船舶设计与制造; **李效伟**(1989—), 男, 博士, 讲师, 主要研究方向为 CAD&CG; **杨义军**(1979—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 会员, 主要研究方向为 CAD&CG; **曾薇**(1980—), 女, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 会员, 论文通信作者, 主要研究方向为现代几何理论在工程与医疗领域的应用.

Key words: Gordon surface; Coons surface; guide curve; surface fitting; least squares method

曲面构造技术是 CAD 领域中一个重要的研究课题, 为现代工程设计提供了关键的几何建模支撑, 在船舶流线型设计[1-2]、汽车外形优化[3]、建筑自由曲面构建[4]和航空航天[5]等工程领域发挥着不可替代的作用. Coons 曲面作为参数化曲面构造领域的经典方法, 通过 4 条参数化边界曲线的数学定义, 能够生成严格插值所有边界的光滑过渡曲面, 该方法在复杂曲面的初步设计中具有一定的优势.

在 20 世纪 60 年代, Coons[6]提出一种插值给定边界曲线的曲面, 称为 Coons 曲面. Gordon[7]提出一种插值于双向等参曲线网络的曲面构造方法, 采用三次 Hermite 基函数构造出双三次 Coons 曲面, 并将该方法推广到三角形域中, 提出三角形域中的 Coons 曲面构造方法[8].

传统 Gordon 方法需要对输入的双向曲线和边界线进行相容化处理, 引入了大量控制顶点[9-10], 给实际工程增加了复杂度. 此外, 在工业应用场景中, 输入曲线恰好为等参线的情况很少[2], 曲面构造除了需要满足边界线外, 通常还需要考虑拟合额外的内部引导线, 特别是非等参引导线, 设计师可以通过引导线控制生成曲面的形状. 而传统 Coons 曲面构造算法属于插值算法, 只能插值 4 条边界曲线, 无法对额外的引导线进行处理. 实际工程中的曲面建模不要求在数学上完全插值内部引导线, 只需要在一定容差范围内逼近引导线, 希望用相对简单有效的方法构造出尽量平滑光顺的曲面.

本文提出一种带引导线的 Coons 曲面扩展算法. 首先通过给定的边界线生成 Coons 曲面, 对内部引导线采样并投影[9,11]到初始 Coons 曲面得到偏移向量; 然后使用拉格朗日乘子法拟合这些偏移向量得到偏移曲面; 最后将偏移曲面叠加到基础 Coons 曲面上, 得到同时逼近内部引导线的扩展 Coons 曲面. 为了使生成的曲面符合实际工程应用, 定义最小二乘优化方程时加入控制顶点光顺能量, 以保证在达到逼近引导线的同时使曲面有较好的光顺性.

1　预备知识

1.1　双线性 Coons 曲面

设给定 4 条在空间围成封闭曲边四边形的相容的参数曲线 $\boldsymbol{C}_0(u)$, $\boldsymbol{C}_1(u)$, $\boldsymbol{C}_0(v)$ 和 $\boldsymbol{C}_1(v)$, 公式为

$$\boldsymbol{C}_k(u)=\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(u)\boldsymbol{P}_{k,i},\ k=0,1;u\in[0,1];$$

$$\boldsymbol{C}_l(v)=\sum_{j=0}^{m}N_{j,q}(v)\boldsymbol{P}_{l,j},\ l=0,1;v\in[0,1].$$

其中, p 和 q 表示曲线的次数. 目标是以这 4 条曲线为边界构造曲面 $\boldsymbol{S}(u,v)$.

在 u 向进行线性插值, 可以得到以 $\boldsymbol{C}_0(v)$ 和 $\boldsymbol{C}_1(v)$ 为边界的直纹面

$$\boldsymbol{S}_1(u,v)=\boldsymbol{C}_0(v)(1-u)+\boldsymbol{C}_1(v)u.$$

在 v 向进行线性插值, 可以得到以 $\boldsymbol{C}_0(u)$ 和 $\boldsymbol{C}_1(u)$ 为边界的直纹面

$$\boldsymbol{S}_2(u,v)=\boldsymbol{C}_0(u)(1-v)+\boldsymbol{C}_1(u)v.$$

若将 $\boldsymbol{S}_1(u,v)$ 和 $\boldsymbol{S}_2(u,v)$ 直接叠加, 产生的新曲面除给定的边界外, 多出了连接边界端点的直边. 为此, 需要再构造一张插值 4 个角点的曲面

$$\boldsymbol{S}_3(u,v)=\left[\boldsymbol{C}_0(0)(1-u)+\boldsymbol{C}_1(0)u\right](1-v)+\left[\boldsymbol{C}_0(1)(1-u)+\boldsymbol{C}_1(1)u\right]v;$$

则双线性 Coons 曲面可以定义为

$$\boldsymbol{S}(u,v)=\boldsymbol{S}_1(u,v)+\boldsymbol{S}_2(u,v)-\boldsymbol{S}_3(u,v).$$

1.2　一般曲面拟合方法

Piegl 等[9]提出一种带约束的曲线逼近算法, 一般曲面拟合算法将其推广到曲面, 使用一张拥有 $(n+1)(m+1)$ 个控制顶点的 (p,q) 次非有理曲面 $\boldsymbol{S}(u,v)$ 插值约束数据项, 并在最小二乘意义下逼近非约束数据项.

确定目标曲面是一个带约束的最小化问题, 其包含 $(n+1)(m+1)$ 个未知量和 $N+1$ 个约束条件. 求解约束最小化问题的标准方法是拉格朗日乘子法. 引入额外的 $N+1$ 个未知量, 获得一个分块的方程系统, 通过解此方程系统可以求得控制顶点的解. 本文采用一般曲面拟合方法, 对采样得到的偏移向量进行拟合, 得到偏移曲面.

2　本文算法

2.1　偏移向量

生成 Coons 曲面后, 为了让曲面更精确地遵循引导线的形状, 需要通过计算偏移向量对曲面进行优化. 偏移向量表示引导线与 Coons 曲面之间的差距, 该过程的核心是计算每个引导线采样点

的偏移向量, 并使用这些偏移向量拟合出一个新的曲面.

由于将整条引导线投影到曲面上较为复杂, 本文算法选择在引导线进行均匀采样, 得到采样点集, 并用其代表引导线, 这些点将用于计算其在 Coons 曲面上的投影. 使用投影方法[9,11]将采样点集投影到基础曲面上, 记录每一个采样点对应的投影点以及投影点在曲面上的参数坐标. 采样点与投影点之间的位移即所需的偏移向量, 每个偏移向量对应曲面参数域中的一个参数坐标, 这些偏移向量将用于修正Coons曲面, 使得最终生成的曲面紧密贴合引导线.

设引导线上的采样点集为 $\{\boldsymbol{Q}_i\}, i=0,1,\cdots,N$, 它们来自所有的引导线, 其数量为 $N+1$. 设采样点集对应的偏移向量集合为 $\{\boldsymbol{O}_i\}$, $i=0,1,\cdots,N$, 每个偏移向量 $\boldsymbol{O}_i=\boldsymbol{Q}_i-\boldsymbol{S}_0(u_i,v_i)$, 其中, $\boldsymbol{S}_0(u_i,v_i)$ 表示采样点在基础曲面上的投影点, 其参数坐标为 (u_i,v_i).

2.2 偏移曲面拟合

2.2.1 问题定义

为了得到最终的偏移曲面, 将偏移向量作为目标值, 利用最小二乘法进行曲面拟合. 拟合过程是通过调整曲面的控制顶点, 使其能够尽可能小地偏离偏移向量.

为了避免后续曲面叠加过程中的节点细分导致生成曲面的节点过于复杂, 在拟合偏移曲面时使用与基础 Coons 曲面相同的节点向量和曲面次数. 设基础曲面为 (p,q) 次 B 样条曲面, 在第 2.1 节中已经得到一组偏移向量 $\{\boldsymbol{O}_k\}, k=0,1,\cdots,N$ 和对应的投影点参数坐标 $\{(u_k,v_k)\}, k=0,1,\cdots,N$, 现在需要生成一张 (p,q) 次 B 样条曲面, 即偏移曲面

$$\boldsymbol{O}(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)\boldsymbol{P}_{i,j}.$$

在参数坐标 (u_k,v_k) 处逼近 $\boldsymbol{O}_k$, 即

$$\boldsymbol{O}(u_k,v_k)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(u_k)N_{j,q}(v_k)\boldsymbol{P}_{i,j}=\boldsymbol{O}_k.$$

由于本文算法以 Coons 曲面为基础曲面, 需要约束生成的新曲面边界不动, 因此在拟合偏移曲面时需要添加边界控制顶点恒为 **0** 的约束.

为了使生成的曲面尽可能地具有较好的光顺性, 在拟合偏移曲面时选择添加控制顶点光顺能量 E_{f}, 保证偏移曲面的控制顶点变化相对平滑.

对控制顶点网格做 Laplace 平滑, 在曲面控制顶点网格上考虑能量

$$E(\boldsymbol{P})=\sum_{i,j}\left(\Delta\boldsymbol{P}_{i,j}\right)^2=\sum_{i,j}\left(\left.\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial u^2}\right|_{\boldsymbol{P}_{i,j}}+\left.\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial v^2}\right|_{\boldsymbol{P}_{i,j}}\right)^2;$$

目标是生成一个符合引导线约束且控制顶点较为规整的B样条曲面. 假设相邻的控制顶点网格点之间距离在 u 和 v 方向均为 h, 记 $\boldsymbol{P}_{i+1,j}=\boldsymbol{P}(i+h,j)$, $\boldsymbol{P}_{i,j+1}=\boldsymbol{P}(i,j+h)$. 以 u 方向为例, 在 $\boldsymbol{P}_{i,j}$ 处进行泰勒展开

$$\boldsymbol{P}(i+h,j)=\boldsymbol{P}(i,j)+h\left.\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial u}\right|_{\boldsymbol{P}_{i,j}}+\frac{h^2}{2!}\left.\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial u^2}\right|_{\boldsymbol{P}_{i,j}}+\frac{h^3}{3!}\left.\frac{\partial^3\boldsymbol{P}}{\partial u^3}\right|_{\boldsymbol{P}_{i,j}}+O(h^4) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{P}(i-h,j)=\boldsymbol{P}(i,j)-h\left.\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial u}\right|_{\boldsymbol{P}_{i,j}}+\frac{h^2}{2!}\left.\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial u^2}\right|_{\boldsymbol{P}_{i,j}}-\frac{h^3}{3!}\left.\frac{\partial^3\boldsymbol{P}}{\partial u^3}\right|_{\boldsymbol{P}_{i,j}}+O(h^4) \tag{2}$$

将式(1)(2)相加, 可得

$$\boldsymbol{P}(i+h,j)+\boldsymbol{P}(i-h,j)=2\boldsymbol{P}(i,j)+h^2\left.\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial u^2}\right|_{\boldsymbol{P}_{i,j}}+O(h^4);$$

移项处理后可得

$$\left.\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial u^2}\right|_{\boldsymbol{P}_{i,j}}=\frac{\boldsymbol{P}(i+h,j)+\boldsymbol{P}(i-h,j)-2\boldsymbol{P}(i,j)}{h^2}-O(h^2)\approx\frac{\boldsymbol{P}_{i+1,j}+\boldsymbol{P}_{i-1,j}-2\boldsymbol{P}_{i,j}}{h^2} \tag{3}$$

同理, 在 v 方向有

$$\left.\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial v^2}\right|_{\boldsymbol{P}_{i,j}}\approx\frac{\boldsymbol{P}_{i,j+1}+\boldsymbol{P}_{i,j-1}-2\boldsymbol{P}_{i,j}}{h^2} \tag{4}$$

根据式(3)(4), 可将能量简化为

$$E(\boldsymbol{P})=\sum_{i,j}\frac{1}{h^4}E_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{P}_{i,j})=\sum_{i,j}\frac{1}{h^4}\left\|4\boldsymbol{P}_{i,j}-\boldsymbol{P}_{i,j-1}-\boldsymbol{P}_{i,j+1}-\boldsymbol{P}_{i-1,j}-\boldsymbol{P}_{i+1,j}\right\|^2.$$

h 对于能量优化没有作用可以忽略, 每个控制顶点对应的光顺能量可定义为

$$E_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{P}_{i,j})=\left\|4\boldsymbol{P}_{i,j}-\boldsymbol{P}_{i,j-1}-\boldsymbol{P}_{i,j+1}-\boldsymbol{P}_{i-1,j}-\boldsymbol{P}_{i+1,j}\right\|^2.$$

通过上面的分析, 求解在约束条件下使能量最小的控制顶点来生成偏移曲面. 目标能量函数定义为

$$E=(1-\omega)\sum_{k=0}^{N}\left\|\boldsymbol{O}(u_k,v_k)-\boldsymbol{O}_k\right\|^2+\omega\sum_{i,j}E_{\mathrm{f}}\left(\boldsymbol{P}_{i,j}\right).$$

其中, u_k 和 v_k 表示采样点对应投影点的参数坐标; ω 表示光顺能量权重, $\omega\in(0,1)$, 优化参数是偏移曲面的控制顶点. 目标函数希望生成的偏移曲面尽量通过预先给定的偏移向量, 同时要求偏移曲面的控制顶点变化均匀, 以达到最终曲面的光顺目的, 并约束曲面的边界控制顶点不动. 上述优化问题是一个在线性约束下的最小二乘优化问题, 本文使用拉格朗日乘子法[12]求解出能量极小时约束方程的解, 得到偏移曲面.

2.2.2　偏移曲面拟合算法

通过带边界约束的条件拟合给定的偏移向量与参数坐标, 构造光顺的偏移曲面的算法流程. 构造出约束方程和非约束方程后引入拉格朗日乘子向量, 在满足约束的条件下最小化误差, 构造函数求解.

算法步骤如下:

输入. 偏移向量 $\{\boldsymbol{O}_k\},k=0,1,\cdots,N$, 投影点参数坐标 $\{(u_k,v_k)\},k=0,1,\cdots,N$, 基础曲面节点向量 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$.

输出. 偏移曲面 $\boldsymbol{O}(u,v)$.

Step1. 构造约束方程.

首先定义元素为 $(n+1)(m+1)$ 个控制顶点的向量

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{0,0}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{P}_{0,m}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{P}_{n,0}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{P}_{n,m}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{(n+1)(m+1)\times 3};$$

然后定义边界控制顶点的系数矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{n+1} & & & & \\ & \boldsymbol{J}_{n+1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boldsymbol{J}_{n+1} & \\ & & & & \boldsymbol{I}_{n+1}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2(n+m)\times(n+1)(m+1)}.$$

其中, $\boldsymbol{I}_n\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 表示 n 阶单位矩阵, 而

$$\boldsymbol{J}_{n+1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times(n+1)}.$$

则约束方程可以构造为 $\boldsymbol{MP}=\boldsymbol{0}$.

Step2. 构造非约束方程:

Step2.1. 定义偏移向量的矩阵

$$\hat{\boldsymbol{O}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_0 & \cdots & \boldsymbol{O}_N\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{(N+1)\times 3};$$

Step2.2. 构造投影点参数坐标的系数矩阵

$$\hat{\boldsymbol{N}}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{N}}_0 & \cdots & \hat{\boldsymbol{N}}_N\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{(N+1)\times(n+1)(m+1)};$$

其中,

$$\hat{\boldsymbol{N}}_k=\begin{bmatrix}N_{0,p}(u_k) & \cdots & N_{n,p}(u_k)\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}N_{0,q}(v_k) & \cdots & N_{m,q}(v_k)\end{bmatrix},$$

$\hat{\boldsymbol{N}}_k\in\mathbb{R}^{(n+1)(m+1)}$, $\otimes$ 表示 Kronecker 积;

Step2.3. 构造控制顶点光顺能量系数矩阵 $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{D}$ 表示由 $\boldsymbol{D}_0$ 在控制顶点网格上卷积得到的卷积矩阵, 卷积核为

$$\boldsymbol{D}_0=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix};$$

则非约束方程可以构造为

$$\boldsymbol{NP}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{N}} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{O}} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T},$$

其误差为 $\boldsymbol{T}-\boldsymbol{NP}$;

Step2.4. 构造权重矩阵

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_{1-\omega} & \\ & \boldsymbol{W}_{\omega}\end{bmatrix},$$

其中, $\boldsymbol{W}_{1-\omega}$ 表示主对角线为 $1-\omega$ 的对角矩阵, $\boldsymbol{W}_{\omega}$ 表示主对角线为 ω 的对角矩阵.

Step3. 引入拉格朗日乘子向量, 构造目标函数求解.

定义 $2(n+m)$ 个拉格朗日乘子的向量

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\lambda}_0^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{\lambda}_{2(n+m)-1}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

在满足约束 $\boldsymbol{MP}=\boldsymbol{0}$ 的条件下最小化误差

$$\left(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\right)(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{NP}),$$

构造拉格朗日函数

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{\Lambda})=\left(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{W}(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{NP})+\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{MP};$$

将其梯度设为 0, 得到方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial\boldsymbol{P}}=-2\left(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WN}-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WN}\right)+\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{0}\\ \dfrac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial\boldsymbol{\Lambda}}=\boldsymbol{MP}=\boldsymbol{0}\end{cases}\tag{5}$$

令 $\boldsymbol{\Lambda}'=\boldsymbol{\Lambda}/2$, 可得分块矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WN} & \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{\Lambda}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WT}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}.$$

解式(5), 可以得到偏移曲面的控制顶点.

2.3　叠加曲面生成

在生成带引导线的曲面过程中, 叠加偏移曲面的目标是将通过引导线修正生成的偏移曲面与初始的 Coons 曲面进行结合, 实现对引导线的逼近. 偏移曲面生成后, 将偏移曲面叠加到基础 Coons 曲面上, 就得到了对基础 Coons 曲面的一次修正

$$\boldsymbol{S}_1(u,v)=\boldsymbol{O}_0(u,v)+\boldsymbol{S}_0(u,v).$$

由于在拟合偏移曲面时使用的节点向量和次数与基础曲面相同, 因此在叠加曲面时无需对基础曲面和偏移曲面进行相容化操作, 基础曲面和偏移曲面的叠加可以通过对控制顶点的运算实现[9,13], 即 $\boldsymbol{S}_1(u,v)$ 的控制顶点可以由 $\boldsymbol{P}_{i,j}^{\boldsymbol{S}_1}=\boldsymbol{P}_{i,j}^{\boldsymbol{O}_0}+\boldsymbol{P}_{i,j}^{\boldsymbol{S}_0}$ 得到. 其中, $\boldsymbol{P}_{i,j}^{\boldsymbol{S}_1}$, $\boldsymbol{P}_{i,j}^{\boldsymbol{O}_0}$ 和 $\boldsymbol{P}_{i,j}^{\boldsymbol{S}_0}$ 分别表示叠加曲面、偏移曲

面和基础 Coons 曲面的控制顶点.

3 实验及结果分析

本节给出本文算法的结果, 并与传统的 Coons 曲面进行对比, 分析该算法在传统 Coons 曲面基础上扩展引导线的效果.

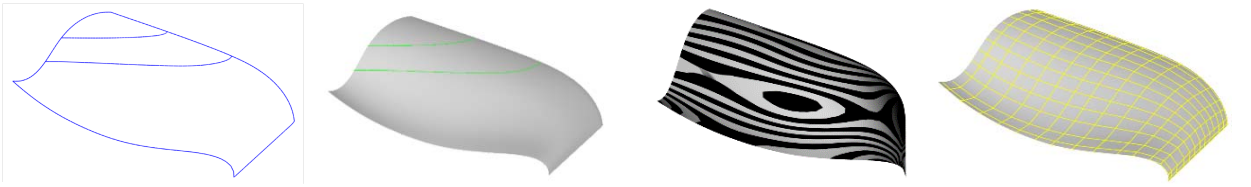
3.1 曲面生成结果

通过 7 个实例的实验结果展示本文算法的有效性. 图 1~图 3 所示分别为简单的船壳曲面, 图 4 所示为多张船壳曲面拼接成的球鼻艏曲面, 图 5~图 7 所示分别为较复杂的茶壶、汽车外壳和人脸曲面.

3.2 迭代误差分析

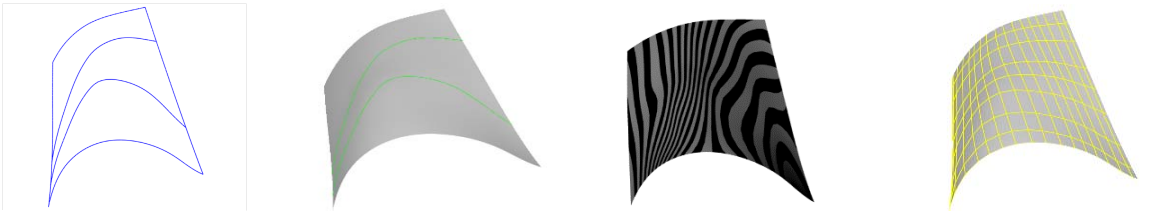
为了尽可能地表达引导线, 在引导线上将采样点个数设置为 200, 采样点和生成曲面之间的距离作为误差, 设置容差为 5 mm.

在数值逼近过程中, 由于给定节点向量张成的基函数空间与目标解空间存在固有距离, 单次逼近无法获得全局最优解[14]. 特别是在基础 Coons 曲面与引导线几何偏差显著的情况下, 单次叠加修正往往难以满足工程精度要求. 为此, 本文采用迭代优化策略[15], 连续计算残余误差并逐次修正. 每次迭代中, 将误差大于容差的采样点对应投影点的 *uv* 参数插入曲面的节点向量中, 再进行下一



a. 初始边界线与引导线 b. 扩展 Coons 曲面与引导线 c. 扩展 Coons 曲面斑马纹 d. 扩展 Coons 曲面控制点网格

图 1 船壳面 1



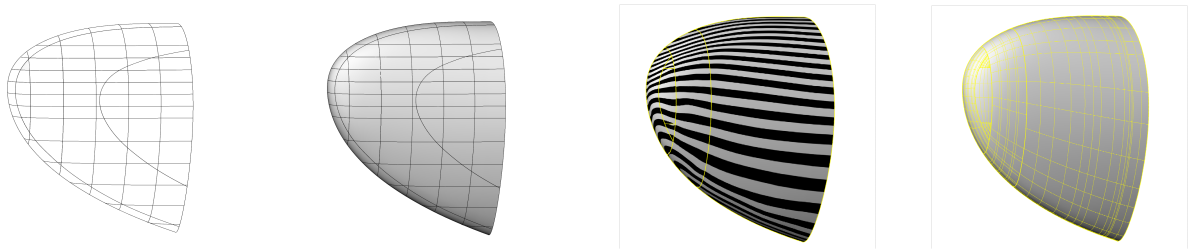
a. 初始边界线与引导线 b. 扩展 Coons 曲面与引导线 c. 扩展 Coons 曲面斑马纹 d. 扩展 Coons 曲面控制点网格

图 2 船壳面 2



a. 初始边界线与引导线 b. 扩展 Coons 曲面与引导线 c. 扩展 Coons 曲面斑马纹 d. 扩展 Coons 曲面控制点网格

图 3 船壳面 3



a. 初始边界线与引导线 b. 扩展 Coons 曲面与引导线 c. 扩展 Coons 曲面斑马纹 d. 扩展 Coons 曲面控制点网格

图 4 多张船壳面拼接成的球鼻艏曲面



a. 初始边界线与引导线　b. 扩展 Coons 曲面与引导线　c. 扩展 Coons 曲面斑马纹　d. 扩展 Coons 曲面控制点网格

图 5　茶壶外壳曲面



a. 初始边界线与引导线　b. 扩展 Coons 曲面与引导线　c. 扩展 Coons 曲面斑马纹　d. 扩展 Coons 曲面控制点网格

图 6　汽车顶盖曲面



a. 初始边界线与引导线　b. 扩展 Coons 曲面与引导线　c. 扩展 Coons 曲面斑马纹　d. 扩展 Coons 曲面控制点网格

图 7　人脸曲面

步迭代，增稠节点密度能够使曲面更快收敛，减少迭代次数，最终确保所有采样点的最大偏差严格控制在预设容差范围之内.

表 1 所示为基础 Coons 曲面与引导线的初始误差对比，表 2 所示为使用带引导线的扩展 Coons 曲面算法生成的曲面与引导线的误差和算法耗时对比. 可以看出，算法时间效率与迭代次数和引导线条数密切相关，迭代次数越多，每次迭代需重新计算残余误差，插入节点并拟合偏移曲面，导致矩阵运算等计算量增加，耗时相应增长；引导线条数越多，所需采样点数量越多，投影及偏移向量计算复杂度提升，且引导线密集或曲率大的区域需更频繁地插入节点以保证精度，进一步增加了计算量.

表 1　基础 Coons 曲面与引导线的初始误差对比

实例	平均误差	最大误差
船壳面 1	119.396	271.054
船壳面 2	133.580	328.915
船壳面 3	82.687	168.960
茶壶外壳面	126.217	474.911
汽车顶盖面	166.690	499.126
人脸面	372.976	677.456

表 2　扩展 Coons 曲面与引导线的误差对比

实例	平均误差	最大误差	算法耗时/s
船壳面 1	0.120	0.547	0.955
船壳面 2	0.187	1.714	1.628
船壳面 3	0.415	2.955	0.443
茶壶外壳面	0.141	2.254	12.265
汽车顶盖面	0.162	4.865	46.772
人脸面	0.118	3.778	72.206

对茶壶外壳、汽车顶盖和人脸曲面的迭代过程进行实验，结果分别如图 8~图 10 所示，图中红色部分所示为曲面与引导线之间的迭代误差；迭代误差对比分别如表 3~表 5 所示. 可以看出，本文算法弥补了传统 Coons 曲面无法拟合内部引导线的缺陷.

实验中发现，在部分 Coons 曲面与引导线偏移量较大和引导线处曲率较大的位置上，尽管在迭代下能够满足给定容差，且在数学上为正确结果，但偏移的不规则可能导致引导后的曲面出现褶皱，如图 11 所示. 而当引导线较为规整且与基础曲面的间距较小时，算法生成的曲面则不会产生褶皱.



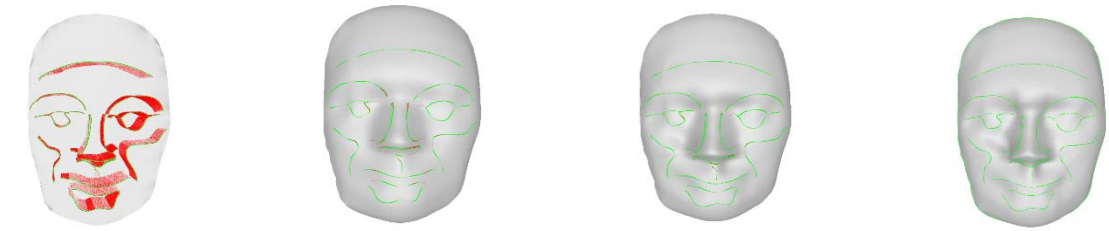
a. 初始 Coons 曲面　b. 第 1 次迭代　c. 第 3 次迭代　d. 第 4 次迭代

图 8　茶壶外壳面迭代过程



a. 初始 Coons 曲面　b. 第 1 次迭代　c. 第 3 次迭代　d. 第 4 次迭代

图 9　汽车顶盖面迭代过程



a. 初始 Coons 曲面　b. 第 1 次迭代　c. 第 3 次迭代　d. 第 5 次迭代

图 10　人脸面迭代过程

表 3　茶壶外壳面的迭代误差对比

迭代次数	平均误差	最大误差
0	126.217	474.911
1	2.209	33.613
2	1.767	22.599
3	0.302	5.611
4	0.141	2.254

表 4　汽车顶盖面的迭代误差对比

迭代次数	平均误差	最大误差
0	166.690	499.126
1	1.092	29.244
2	0.576	14.294
3	0.285	6.011
4	0.162	4.865

表 5　人脸面的迭代误差对比

迭代次数	平均误差	最大误差
0	372.976	677.456
1	1.564	26.384
2	0.699	15.023
3	0.418	8.541
4	0.320	6.215
5	0.118	3.778

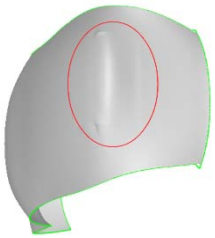
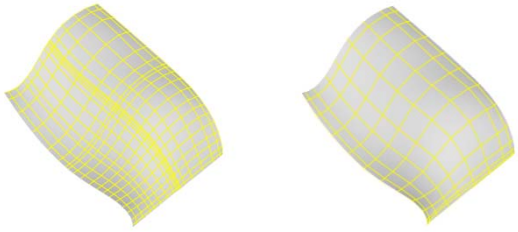


图 11　存在褶皱的案例

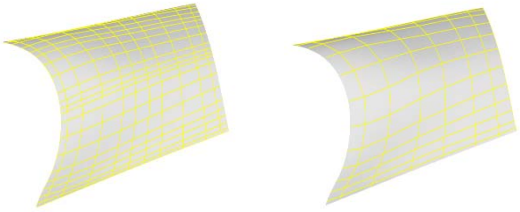
3.3　与 Gordon 曲面的控制顶点对比

传统 Gordon 曲面要求严格插值于 2 组满足相容条件的等参线，通常会引入大量控制顶点[9]. 以 3 张船壳面为例，比较本文算法生成曲面与传统 Gordon 曲面在控制顶点上的差异. 其中，在 u 和 v 方向各设置 3 条等参线，以 2 组等参线按照传统 Gordon 方法生成插值于双向曲线网格的曲面[9]，生成 Gordon 曲面的控制顶点网格如图 12a~图 14a 所示；将 2 组等参线作为引导线应用于本文算法，得到扩展 Coons 曲面，其控制顶点网格如图 12b~图 14b 所示. 表 6 所示为扩展 Coons 曲面与 Gordon 曲面的控制点数对比. 可以看出，与传统 Gordon 曲面相比，本文算法能够有效地减少控制顶点数量.



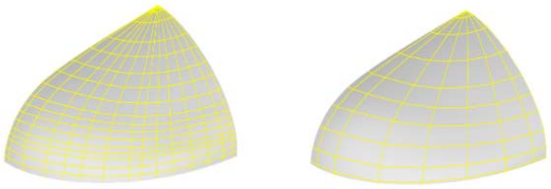
a. Gordon 曲面控制点网格　　b. 扩展 Coons 曲面控制点网格

图 12　船壳面 1 与传统 Gordon 对比



a. Gordon 曲面控制点网格　　b. 扩展 Coons 曲面控制点网格

图 13　船壳面 2 与传统 Gordon 对比



a. Gordon 曲面控制点网格　　b. 扩展 Coons 曲面控制点网格

图 14　船壳面 3 与传统 Gordon 对比

表 6　扩展 Coons 曲面与 Gordon 曲面控制点数对比

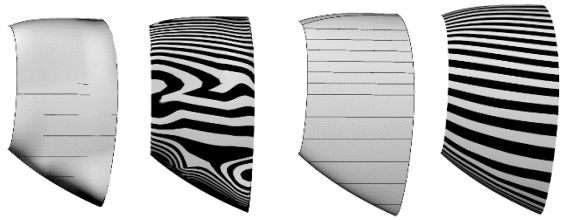
实例	*u* 向控制顶点		*v* 向控制顶点	
	扩展 Coons	Gordon[9]	扩展 Coons	Gordon[9]
船壳面 1	**13**	20	**10**	18
船壳面 2	**8**	12	**12**	20
船壳面 3	**9**	16	**11**	19

注. 粗体表示控制点数较少.

3.4　与 OCCT 中 GeomPlate_BuildPlateSurface 的功能对比

OCCT(open CASCADE technology) 中的 GeomPlate_BuildPlateSurface 是基于约束最小化能量的曲面构造类，通过一组约束条件生成光滑的曲面，与本文算法有类似的功能.

图 15 所示为 OCCT 算法与本文算法对相同曲线输入生成的结果曲面. OCCT 算法生成的曲面与引导线的平均误差为 3.221 mm，最大误差为 8.752 mm；本文算法的平均误差为 0.141 mm，最大误差为 1.270 mm，均小于 OCCT 算法. 从曲面斑马纹可以看出，本文算法得到的扩展 Coons 曲面在光顺性方面也优于 OCCT 算法生成的曲面.



生成的曲面　曲面斑马纹　生成的曲面　曲面斑马纹

a. OCCT　　b. 本文

图 15　2 种算法生成的曲面及其斑马纹

4　结　语

本文提出一种带引导线的扩展 Coons 曲面算法，将传统 Coons 曲面与引导线之间的几何偏差建模为一张连续的偏移曲面，通过最小二乘拟合方法构建该偏移曲面，并将其叠加至基础 Coons 曲面，突破传统 Coons 曲面仅能处理边界约束的固有局限. 该算法也可以作为 Gordon 曲面的一种拓展，能够处理非等参引导线的 Gordon 曲面算法.

由于本文算法仅考虑生成曲面与引导线间的逼近程度，因此对于 Coons 曲面引导线处曲率较大的情况，最终生成的曲面可能存在一些褶皱，如图 11 曲面存在褶皱的情况. 未来，将深入优化在这种极端情况下保持较小的误差的同时得到更加光顺的曲面的问题. 此外，本文算法中，拟合曲面添加的光顺能量本质上是一个加权平均的 Laplace 平滑，其中未根据实际曲面设置权重系数，仅考虑了曲面控制顶点分布均匀的情况，未来将针对控制顶点非均匀分布的曲面进一步研究.

参考文献(References):

[1] Ko K H. A survey: application of geometric modeling techniques to ship modeling and design[J]. International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering, 2010, 2(4): 177-184

[2] Okumoto Y, Takeda Y, Mano M, *et al*. Design of ship hull structures: a practical guide for engineers[M]. Berlin: Springer, 2009

[3] Tovey M. Concept design CAD for the automotive industry[J]. Journal of Engineering Design, 2002, 13(1): 5-18

[4] Eastman C M. Architectural CAD: a ten year assessment of the state of the art[J]. Computer-Aided Design, 1989, 21(5): 289-292

[5] Wei Mingqiang, He Xueyan, Wu Meng, *et al*. Geometric design of B-spline aircraft inlet based on curvature guidance[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2023, 35(12): 1822-1832(in Chinese)
(魏明强，何雪滟，吴梦，等. 基于曲率指导的 B 样条飞机进

气道几何设计[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2023, 35(12): 1822-1832)

[6] Coons S A. Surfaces for computer aided design of space forms[R]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1967

[7] Gordon W J. Spline-blended surface interpolation through curve networks[J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 1969, 18(10): 931-952

[8] Gordon W J. Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1971, 8(1): 158-177

[9] Piegl L, Tiller W. The NURBS book[M]. 2nd ed. New York: Springer, 1997

[10] Park H, Kim K, Lee S C. A method for approximate NURBS curve compatibility based on multiple curve refitting[J]. Computer-Aided Design, 2000, 32(4): 237-252

[11] Farin G. Curves and surfaces for CAGD: a practical guide[M]. 5th ed. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers Inc, 2001

[12] Bertsekas D P. Constrained optimization and Lagrange multiplier methods[M]. New York: Academic Press, 2014

[13] Böhm W, Farin G, Kahmann J. A survey of curve and surface methods in CAGD[J]. Computer Aided Geometric Design, 1984, 1(1): 1-60

[14] Gautschi W. Numerical analysis[M]. 2nd ed. Boston: Birkhäuser, 2011

[15] Cao Juan, Ouyang Yongsheng, Chen Zhonggui, *et al*. Adaptive knot placement in non-uniform B-spline surface fitting[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2015, 27(1): 60-67(in Chinese)
(曹娟, 欧阳永昇, 陈中贵, 等. 非均匀 B 样条曲面的自适应节点设置方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2015, 27(1): 60-67)