

几何引擎中基于光顺渐近迭代逼近的曲面覆盖

行一凡¹⁾, 蔺宏伟^{1,2)*}, 陈羽¹⁾

¹⁾ (浙江大学数学科学学院 杭州 310058)

²⁾ (浙江大学计算机辅助设计与图形系统全国重点实验室 杭州 310058)
(hwlin@zju.edu.cn)

摘要: 在 CAD 几何引擎中, 覆盖是广泛应用的关键功能, 它用一张曲面拟合给定的一条或多条边界曲线。然而由于缺乏足够的几何信息, 很难生成满足要求的覆盖曲面, 也很少有专门解决这类问题的相关工作。为此, 提出用光顺渐近迭代逼近(Fairing-PIA)生成单张 B 样条曲面覆盖给定边界曲线的方法。与传统的光顺方法只优化单一权重不同, Fairing-PIA 对每个控制点指定不同的光顺权重, 极大地提高了方法的灵活度。首先提出一种鲁棒的方法生成拟合给定边界曲线的初始曲面, 如果边界曲线不超过 4 条, 使用 Coons 曲面作为初始曲面; 如果边界曲线超过 4 条, 使用点云参数化方法生成初始曲面。然后使用 Fairing-PIA 提高曲面质量, 得到最终的理想曲面。基于不同类型边界样例与传统方法对比的数值实验表明所提方法能够拟合多种类型边界, 可以通过光顺权重调节控制曲面形态, 且相较于直接求解矩阵方程的传统方法得到约 2 倍的性能提升, 兼具灵活性和高效性。

关键词: 曲面覆盖; 渐近迭代逼近; 能量最小化; 动态基曲面; 几何引擎

中图法分类号: TP391.41

DOI: 10.3724/SP.J.1089.2025-00114

Surface Covering by Fairing Progressive Iterative Approximation in Geometry Engine

Xing Yifan¹⁾, Lin Hongwei^{1,2)*}, and Chen Yu¹⁾

¹⁾ (School of Mathematical Science, Zhejiang University, Hangzhou 310058)

²⁾ (State Key Laboratory of CAD & CG, Zhejiang University, Hangzhou 310058)

Abstract: Covering is a widely employed key function in CAD geometry engine, which fits a surface through one or more given boundary curves. However, it is a difficult problem to generate a desirable covering surface due to the lack of enough geometric information, and there are very few relevant works that address the problem. In this paper, we develop a method of generating one B-spline surface to cover given boundary curves by fairing progressive iterative approximation (Fairing-PIA). Differently from traditional fairing methods which have only global smoothing weight, Fairing-PIA can set different smoothing weights for each control point, leading to great flexibility. Firstly, robust methods are developed to generate stable initial surface fitting the given boundary curves. Specifically, on the one hand, if there are no more than four boundary curves, an initial surface is obtained by constructing Coons surface; on the other hand, for more than four boundary curves, a trimmed surface is generated by fitting the boundary curves as the initial surface. Then, Fairing-PIA is applied to improve the surface quality, leading to a desirable covering surface. Numerical experiments comparing the proposed method with traditional methods across different types of boundary examples demonstrate that the proposed method can fit vari-

收稿日期: 2025-04-14; 修回日期: 2025-09-01. 基金项目: 国家自然科学基金(62272406, 61932018); 浙江省“领雁”研发攻关计划(2024C01103). 行一凡(2001—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为几何设计; 蔺宏伟(1973—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 会员, 论文通信作者, 主要研究方向为几何设计、拓扑设计、量子图形学; 陈羽(2000—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为计算几何、计算拓扑.

ous types of boundaries, allows for surface shape control through fairing weight adjustments, and achieves approximately twice the performance of traditional methods that directly solve matrix equations, offering both flexibility and efficiency.

Key words: surface covering; progressive iterative approximation; energy minimization; dynamic base surface; geometry engine

在 CAD 中, 通常需要设计方法生成拟合给定边界曲线的光顺曲面, 主要挑战是构建 B 样条曲面以满足不充分的几何约束, 然而很少有工作关注设计专门的曲面覆盖方法. 与曲面覆盖类似的问题是高级曲面拟合^[1-2], 旨在使用裁剪曲面拟合非四边三角网格或点云, 但在曲面覆盖问题中, 能够使用的只有边界曲线信息. 因此, 曲面覆盖能够利用的几何信息远少于高级曲面拟合, 而使用传统最小二乘法构造的系统通常非常病态, 导致不稳定的覆盖曲面, 使得问题更具挑战性.

本文提出一种使用光顺渐近迭代逼近(fairing progressive iterative approximation, Fairing-PIA)^[3]最小化曲面光顺能量生成覆盖曲面的方法. 由于它可以对 B 样条曲面的每个控制点分配不同的光顺权重, 因此能够平衡控制点影响区域的拟合和光顺效果, 为方法提供极高的灵活度. 例如, 对于需要提高拟合精度的控制点, 可以分配较小的光顺权重; 对于需要提高光顺性的控制点, 则分配较大的光顺权重. 光顺权重的选取策略由实验给出. 首先提出一种鲁棒的方法用于生成稳定的初始覆盖曲面, 如果边界曲线不超过 4 条, 则使用 Coons 曲面^[4]作为初始覆盖曲面; 否则使用点云参数化^[5]生成稳定的初始覆盖曲面. 然后在保持拟合精度几乎不变的情况下, 使用 Fairing-PIA 提高曲面质量, 通过精心地为不影响边界拟合精度的控制点设置更大的光顺权重, Fairing-PIA 的每步迭代都几乎保持边界附近的控制点不变, 而其他控制点被移动, 进而得到更光顺的曲面. 基于不同类型边界样例与传统方法对比的数值实验表明, 本文方法能够有效应对多种不同类型边界条件, 具有高效性和灵活性.

1 相关工作

1.1 高级曲面拟合

近年来, 已有许多高级曲面拟合方法^[1-2]和约束建模方法^[6-8]. 虽然 Coons 曲面^[9]被广泛用于严格插值边界曲线, 但是其无法处理开放边界和多

于 4 条边界的情况. Weiss 等^[1]使用曲面二阶偏导的积分能量与最小二乘系统结合求解约束曲面, 并且给出一种基于控制点影响范围的光顺权重策略. Vaitkus 等^[2]使用交互式方法标记曲面裁剪边界, 并通过三角化获得初始参数化. 基于曲面变形满足几何约束的方法也得到了发展. Fowler 等^[10-11]不是直接计算控制点, 而是通过调整曲线和曲面上的点来满足预先给定的几何约束, 如位置、切向和曲率; Celniker 等^[12]通过位置能量和法向能量约束要求曲面变形来插值给定曲线或法向.

在能量泛函使用的早期工作中, 因为通常认为具有最小光顺能量的曲面更自然, 所以人们提出基于能量最小化的方法. Reinsch^[13]使用带有一阶差分约束的二阶导数能量最小化方法求解样条函数. Hosaka^[14]在给定边界条件插值时, 引入误差函数与能量函数的混合目标函数合成曲面. 当前, 弯曲能量、拉伸能量等常用的能量泛函在 B 样条曲面设计的相关研究中都得到应用. Moreton 等^[15]直接使用薄板能量结合曲面的位置和法向约束求解非线性优化问题, 生成高质量曲面. Greiner^[16]讨论了使用薄板能量求解光顺问题的困难性, 并指出弯曲能量对参数空间的依赖性, 提出利用 Laplace-Beltrami 算子内积构造能量函数的思路. Welch 等^[17]使用分层 B 样条实现交互式曲面建模, 利用硬约束构造目标函数, 优化近似薄板能量的一阶和二阶混合偏导积分能量得到光顺曲面. Vassilev^[18]使用均匀 B 样条以预计算能量矩阵, 并在求解优化系统时附加额外的数据点来提供自由度. Hagen 等^[19]使用带有三阶导数的应变能并利用有限差分近似展开, 得到低阶的非线性系统求解有理 Bézier 曲线. Pottmann^[20]证明, 求解多阶导数能量加权混合的目标函数可以得到具有高阶连续性的曲线. Eck 等^[21]和 Hadenfeld^[22]分别提出对 B 样条曲线和曲面进行迭代改进, 通过移除和重新插入节点优化光顺能量, 但是每步迭代只能移动单个控制点. Li 等^[23]根据曲率信息识别需要优化的控制点和曲线段, 通过弯曲能量加权调整 1 个或 2 个控制点优化局部能量.

1.2 渐近迭代逼近

渐近迭代逼近(progressive iterative approximation, PIA)是 Lin 等^[24]提出并命名的数据拟合方法, 其对曲线或曲面执行迭代调整, 基于当前控制点和数据点的差向量更新控制点. 与传统的拟合方法不同, PIA 可避免求解大规模线性系统, 并且提供了可扩展的巨大灵活性. Lin^[25]提出局部 PIA 方法, 通过只调整局部控制点实现自适应拟合数据点. Lu^[26]提出一种加权 PIA 方法, 通过选择优化权重加速其收敛速度.

然而, PIA 要求控制点数量与数据点数量匹配, 在处理大规模数据集时面临困难. Lin 等^[27]提出扩展 PIA(extended PIA, EPIA), 将对影响域内的差向量加权平均作为更新向量, 允许控制点数少于数据点数. Deng 等^[28]提出最小二乘 PIA(least-squares PIA, LSPIA), 作为传统最小二乘拟合的等价形式, 用于逼近而非精确地拟合数据点, 并且显著地提高了计算效率. Lin 等^[29]进一步证明, 即使在迭代矩阵奇异的情况下, LSPIA 也收敛. Hamza 等^[30]提出隐式 PIA(implicit PIA, I-PIA), 控制点沿着等值面法向迭代调整, 以重建点云的零水平集. Wang^[31]提出隐式随机 PIA(implicit randomized PIA, IR-PIA), 根据差向量模长构建概率分布, 每步迭代将有重点地、随机地选择调整控制点, 避免调整所有控制点, 加快了收敛速度. Jiang 等^[3]将 PIA 扩展为 Fairing-PIA, 使用光滑泛函构造差向量, 将迭代格式推广到任意形式的能量优化函数, 这种扩展允许对每个控制点分配单独的权重来微调差向量; 作为传统能量优化光滑模型的推广方法, 为光滑方法引入了极大的灵活性.

2 预备知识

2.1 Coons 曲面

Coons 曲面^[4]是生成插值给定边界曲线的常见方法. 由于本文更希望得到 B 样条曲面, 因此考虑定义在 $[0,1]$ 上的边界曲线

$$\begin{cases} c_i(s) = \sum_{k=1}^n P_k^{c_i} N_{k,n}(s), i=1,2 \\ d_j(t) = \sum_{k=1}^m P_k^{d_j} N_{k,m}(t), j=1,2 \end{cases} \quad (1)$$

其中, $N_{k,n}, N_{k,m}$ 表示 p, q 次样条基函数; $P_k^{c_i}, P_k^{d_j}$ 表示 $c_i, d_j, i, j=1,2$ 的 n, m 个控制点. 如图 1 所示, 边界曲线标记为实线, 沿着边界曲线的切向场标记为虚线.

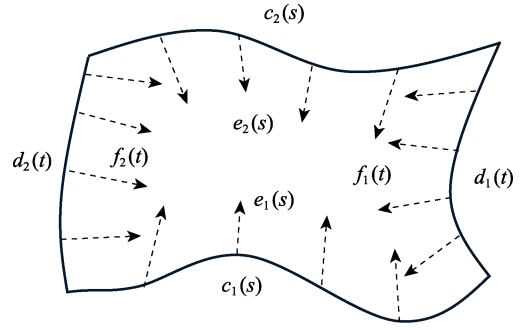


图 1 Coons 曲面的边界条件

假设沿着 4 条边界的切向场为

$$\begin{cases} e_i(s) = \sum_{k=1}^n Q_k^{c_i} N_{k,n}(s), i=1,2 \\ f_j(t) = \sum_{k=1}^m Q_k^{d_j} N_{k,m}(t), j=1,2 \end{cases} \quad (2)$$

其中, $e_i(s), f_j(t)$ 表示有 n, m 个控制点并且与边界曲线 $c_i(s), d_j(t)$ 具有相同次数和节点向量的 B 样条曲线. 使用切向场和边界曲线的控制点可以构造出插值对边的曲面, 具体构造方法见第 3.1 节.

最终, Coons 曲面具有如下形式

$$P(s,t) = S_1(s,t) + S_2(s,t) - T(s,t) \quad (3)$$

其中, S_1, S_2 表示插值 $c_1(s), c_2(s)$ 和 $d_1(t), d_2(t)$ 且满足导数约束的曲面; T 表示插值 4 个角点的双线性曲面.

2.2 传统光滑模型

传统的光滑方法^[32]求解最优化问题公式为

$$\begin{cases} \min_P E_P \\ \text{subject to constraints } \mathbf{AP} = \mathbf{b} \end{cases};$$

其中, E_P 表示弯曲能量; $\mathbf{AP} = \mathbf{b}$ 表示约束的线性系统. 例如, 计算目标 B 样条曲面

$$P(s,t) = \sum_{h=1}^n \sum_{l=1}^m N_h(s) N_l(t) P_{hl} = \sum_{j=1}^{nm} N_j(s,t) \mathbf{P}_j, 0 \leq s, t \leq 1 \quad (4)$$

其中, N_h, N_l 表示 B 样条基函数; $\mathbf{P}_j, N_j$ 分别表示控制点和基函数乘积的字典序重排向量, 满足

$$N_h(s) N_l(t) P_{hl} = \mathbf{N}_{(h-1) \times m + l}(s,t) \mathbf{P}_{(h-1) \times m + l}.$$

弯曲能量 E_P 可以表示为

$$E_P = \iint \left\| \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} \right\|^2 + 2 \left\| \frac{\partial^2 P}{\partial s \partial t} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right\|^2 ds dt =$$

$$\mathbf{P}^T \left[\iint (\mathbf{N}_{ss}^T \mathbf{N} + 2 \mathbf{N}_s^T \mathbf{N}_t + \mathbf{N}_t^T \mathbf{N}_{tt}) ds dt \right] \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{DP}.$$

其中, $\mathbf{N}_s, \mathbf{N}_t, \mathbf{N}_{ss}, \mathbf{N}_{tt}$ 表示关于 s, t 的偏导; $\mathbf{P}$ 表

示控制点组成的向量.

在覆盖问题中, 边界条件作为硬约束使用, 即固定能够影响到采样点拟合效果的控制点. 本文将控制点和向量 $\mathbf{D}$ 按照约束类型重排, 得到向量 $\mathbf{P}_s, \mathbf{P}_f, \mathbf{D}_s, \mathbf{D}_f$; 其中, 下标 s, f 分别表示光顺(smooth)和拟合(fitting)项. 要最小化光顺能量, 应将偏导项设为 0, 得到超定线性系统

$$\mathbf{D}_s^T \mathbf{P}_s = -\mathbf{D}_f^T \mathbf{P}_f \quad (5)$$

该系统的解确定了 B 样条曲面的控制点.

3 本文方法

3.1 覆盖不超过 4 条曲线的初始曲面生成

如果有 4 条边界曲线, 需要构造 Coons 曲面作为初始曲面. 首先对边界曲线均匀采样; 然后使用 LSQ^[33]和 LSPIA^[28]等方法, 用不超过 5 次的 B 样条曲线插值. 由于在构造 Coons 曲面之前需要指定边界切向信息, 因此通过角点处的切向沿着边界曲线线性插值得到切向场.

如果有 3 条边界曲线, 则计算每条曲线的长度, 将它们分为 2 部分: 一部分由长度相近的 2 条曲线组成; 余下的曲线对应的角点作为边界曲线处理, 即将其视作退化的线性 B 样条曲线. 如果有 2 条边界曲线, 则将 2 个角点视为退化的线性 B 样条曲线. 最后应用输入 4 条边界曲线时的处理方法.

处理后的 4 条曲线被分为沿着参数 (s, t) 的 2 部分, 如式(1)和图 1 所示, 每部分通过升阶和节点插入, 得到具有相同次数和节点向量的曲线. 进一步, 调整边界曲线的参数方向, 使得沿着逆时针方向前进时每段边界曲线参数递增, 具有下列关系

$$\begin{cases} c_1(1) = d_1(0) \\ d_1(1) = c_2(0) \\ c_2(1) = d_2(0) \\ d_2(1) = c_1(0) \end{cases}$$

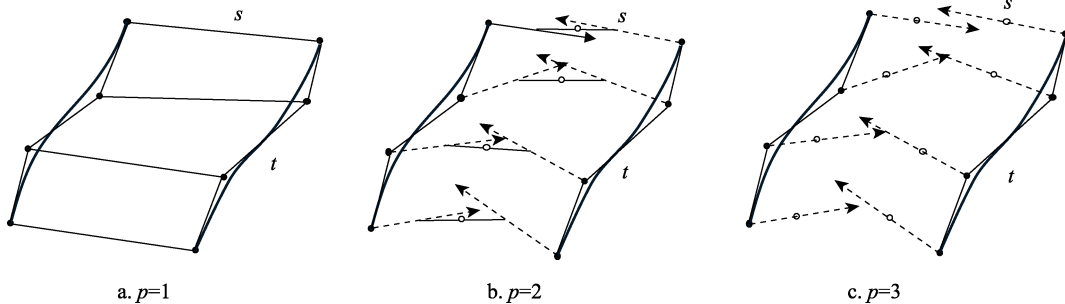


图 2 边界和切向场的控制点插值计算内部控制点

通过角点处的切向量线性插值, 得到沿着边界的切向场. 这些切向场可以表示成与相应边界曲线具有相同的次数和节点向量的 B 样条曲线, 如式(2)所示.

考虑沿着 s 参数方向的 p 次边界曲线:

- (1) 如果 $p=1$, 则直接使用 t 参数方向边界曲线的控制点 $P_{1,j} = P_j^{d_1}$, $P_{2,j} = P_{m-j+1}^{d_2}$;
- (2) 如果 $p=2$, 则将 $d_i(t)$ 升到 2 次, 内部控制点通过

$$\begin{cases} P_{1,j} = P_j^{d_1}, j=1, 2, \dots, m \\ P_{2,j} = \frac{1}{2}(P_j^{d_1} + P_{m-j+1}^{d_2}) + \frac{1}{4}(Q_j^{d_1} + Q_{m-j+1}^{d_2}) \\ P_{3,j} = P_{m-j+1}^{d_2} \end{cases}$$

得到.

- (3) 如果 $p \geq 3$, 则将 $d_i(t)$ 升到 3 次, 内部控制点通过

$$\begin{cases} P_{1,j} = P_j^{d_1}, j=1, 2, \dots, n_2 \\ P_{2,j} = P_j^{d_1} + \frac{1}{3}Q_j^{d_1} \\ P_{3,j} = P_{m-j+1}^{d_2} + \frac{1}{3}Q_{m-j+1}^{d_2} \\ P_{4,j} = P_{m-j+1}^{d_2} \end{cases}$$

得到. 沿着 s 参数方向, 次数 p 不同的控制点插值计算结果如图 2 所示, 其中, 空心点就是新构造的控制点, 它们与边界上的实心点构成沿着 s 参数方向的 Bézier 曲线 $B_i(s)$, 通过 $B_i(s)$, $d_i(t)$ 的控制点和节点向量得到曲面 $S_1(s, t)$.

使用这种方法生成的曲面 S_1, S_2 分别插值 2 组对边, 4 个角点双线性插值可以得到曲面 T . 最后对 S_1, S_2, T 应用升阶和节点插入方法, 确保曲面之间的兼容性, 将 S_1, S_2, T 代入式(3)得到初始曲面.

3.2 覆盖多于 4 条曲线的初始曲面生成

由于不存在生成严格插值多于 4 条边界曲线的曲面通用的构造方法, 因此本文使用基于点云参数化的逼近方法. 点云参数化方法在曲面重构、网格生成和纹理映射^[33-35]等计算机图形学领域有诸多应用.

本文通过迭代动态优化的方式构造曲面^[5]. 给定采样点集 $\{Q_i\}_{i=1}^N$, 首先构造包含采样点的有向包围盒, 将具有最大面积的包围盒面作为基曲面, 记为 $P^{(0)}$; 然后将数据点投影到基曲面上得到初始参数化 $\{(s_i^{(0)}, t_i^{(0)})\}_{i=1}^N$. 在此基础上构造均匀节点向量

$$\mathbf{k}_h^s = \begin{cases} 0, & 0 < h \leq p+1 \\ \frac{h-p-1}{n-p-1}, & p+1 < h \leq n \\ 1, & n < h \leq n+p+1 \end{cases},$$

$$\mathbf{k}_l^t = \begin{cases} 0, & 0 < l \leq q+1 \\ \frac{l-q-1}{m-q-1}, & q+1 < l \leq m \\ 1, & m < l \leq m+q+1 \end{cases}.$$

其中, $\mathbf{k}_h^s, \mathbf{k}_l^t$ 分别表示 s, t 参数方向上的节点向量; n, m 表示控制点的个数. 最小二乘拟合目标表示为

$$E_1(P_{\text{surf}}) = \sum_{i=1}^N \|Q_i - P(s_i^{(0)}, t_i^{(0)})\|^2 \quad (6)$$

其中, P_{surf} 表示目标 B 样条曲面, 得到与式(4)具有相同形式的曲面.

求解式(6)得到的曲面作为新的基曲面 $P_{\text{surf}}^{(1)}$. 将采样点集正交投影^[9,36]到 $P_{\text{surf}}^{(1)}$ 上, 得到新的参数化 $\{(s_i^{(1)}, t_i^{(1)})\}_{i=1}^N$, 使得

$$(Q_i - P^{(0)}(s_i^{(1)}, t_i^{(1)})) \cdot \mathbf{n}(s_i^{(1)}, t_i^{(1)}) = 0, i = 1, 2, \dots, N.$$

其中, $\mathbf{n}(s, t)$ 表示基曲面在 (s, t) 处的法向, 公式为

$$\mathbf{n}(s, t) = \frac{P_s(s, t) \times P_t(s, t)}{\|P_s(s, t) \times P_t(s, t)\|}.$$

在此基础上构造新的节点向量, 重新求解式(6)生成拟合曲面 $P_{\text{surf}}^{(1)}$, 将其作为新的基曲面, 将采样点集正交投影到 $P_{\text{surf}}^{(1)}$ 上, 得到新的参数化结果 $\{(s_i^{(2)}, t_i^{(2)})\}_{i=1}^N$. 这个过程迭代进行, 交替使用正交投影和最小二乘拟合提高曲面和参数化质量. 通常, 经过 3 次迭代即可得到理想的参数化结果. Q_i 投影到 $P(s, t)$ 上得到具有新参数值 $(s_i^{(1)}, t_i^{(1)})$ 的

点如图 3 所示, 其中, 蓝色点集表示边界曲线上的采样点, 空心点表示投影点.

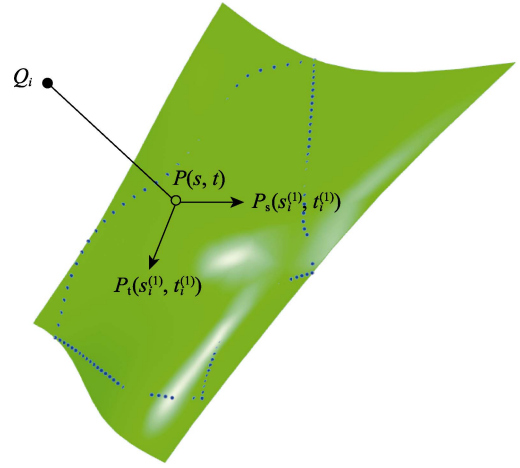


图 3 Q_i 投影到 $P(s, t)$ 上得到参数值 $(s_i^{(1)}, t_i^{(1)})$

与传统的点云参数化不同, 由于边界曲线上的采样点数量不足以唯一地确定拟合曲面, 最小二乘系统通常具有奇异性. 因此为了得到光顺的曲面, 可以添加能量项约束^[12]. 本文采用相邻控制顶点的差分构建能量项来简化问题

$$E_2(P_{\text{surf}}) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \sum_{l=2}^{m-1} \|P_{h,l-1} - 2P_{h,l} + P_{h,l+1}\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{h=2}^{n-1} \sum_{l=1}^m \|P_{h-1,l} - 2P_{h,l} + P_{h+1,l}\|^2 \quad (7)$$

最终目标函数可以定义为

$$E(P_{\text{surf}}) = (1-\alpha)E_1(P_{\text{surf}}) + \alpha E_2(P_{\text{surf}}).$$

其中, α 称为平衡拟合项和光顺项的参数化权重. 该优化问题可以转化为线性系统

$$[(1-\alpha)N^T N + \alpha A_2] \mathbf{P} = (1-\alpha)N^T \mathbf{Q} \quad (8)$$

其中, $\mathbf{P}$ 表示控制点组成的向量; N 表示 B 样条基函数在采样点上的配置矩阵; A_2 表示式(7)得到的对称正定矩阵; $\mathbf{Q}$ 表示采样点构成的向量.

使用边界曲线的长度信息自适应地设置采样点数. 给将定的最大采样点数 N 分配给具有最大长度的边界曲线, 其余边界曲线则根据其长度比例指定采样点数. 设最大边界曲线长度为 L , 边界曲线 c_i 对应长度为 L_i , 则 $N_i = NL_i/L$ 就是 c_i 的采样点数; 然后使用 Lu 等^[37]针对平面参数曲线拟合的采样方法获得采样点. 首先在边界曲线上均匀采样 N_i 个点, 使用分段二次多项式拟合采样点的曲率信息求解曲率极值点, 对应的点作为特征点; 这些特征点作为当前采样点集时, 还需要更多

的点来确保采样点数达到 N_i . 本文简单地使用弧长信息, 向特征点对应参数区间中具有最大弧长的区间中插入均分弧长的新采样点; 然后更新采样点集, 持续插入过程直至达到需要的采样点数.

由于在边界曲线围成的洞中没有采样点, 式(6)中的最小二乘矩阵 $\mathbf{N}^T \mathbf{N}$ 是稀疏矩阵, 并且矩阵 $\mathbf{A}_2$ 也是稀疏矩阵, 因此当控制网格规模固定时可以预计算系数矩阵. 利用最终线性系统的对称性, 可以使用 Cholesky 分解, 该方法可以高效地求解对称稀疏系统

每步迭代中, 将采样点投影到当前曲面上得到优化的参数化结果; 然后增加目标曲面控制网格的规模和参数化权重 α 的大小, 构造能够求解更高精度逼近曲面和更优参数化的线性系统. 图 4a 所示为通过点云参数化迭代 3 次得到的初始曲面, 图 4b 所示为该曲面沿着边界裁剪得到的覆盖曲面; 其中, 蓝色点集是从边界曲线上采样得到的拟合约束.

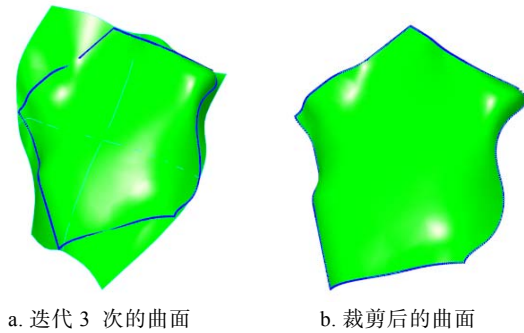


图 4 点云参数化生成曲面

3.3 使用 Fairing-PIA 改进曲面质量

针对传统的光顺模型缺乏控制目标曲面区域光顺性的能力的问题, 使用 Fairing-PIA 方法^[3]迭代地优化每个控制点.

将给定的 $\{Q_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m_1, m_2}$ 按照字典序重排为 $\{Q_i\}_{i=1}^N$, 每个点对应参数值 (s_i, t_i) ; 其中, s_i, t_i 均单调递增. 假设初始曲面 $P^{(0)}(s, t)$ 具有与式(4)相同的形式, 其控制点和基函数重排为 $P_j^{(0)}, N_j(s, t)$, $j=1, 2, \dots, nm$. 定义光顺泛函

$$\begin{cases} F_{ss,j}(f) = \int_{s_1}^{s_m} \int_{t_1}^{t_m} N_{ss,j}(s, t) f ds dt \\ F_{st,j}(f) = \int_{s_1}^{s_m} \int_{t_1}^{t_m} N_{st,j}(s, t) f ds dt \\ F_{tt,j}(f) = \int_{s_1}^{s_m} \int_{t_1}^{t_m} N_{tt,j}(s, t) f ds dt \end{cases} \quad (9)$$

其中, $N_{ss,j}(s, t), N_{st,j}(s, t), N_{tt,j}(s, t)$ 表示 $N_j(s, t)$ 关于 s, t 的偏导函数. 假设已经得到第 k 次迭代后的曲面 $P^{(k)}(s, t)$, 则曲面控制点可由公式

$$\begin{cases} \mathbf{d}_i^{(k)} = Q_i - P^{(k)}(s_i, t_i), i=1, 2, \dots, N \\ \boldsymbol{\delta}_j^{(k)} = \sum_{h \in \hat{I}_j} N_j(s_h, t_h) \mathbf{d}_h^{(k)}, j=1, 2, \dots, nm \\ \boldsymbol{\eta}_j^{(k)} = \sum_{l=1}^{nm} (F_{ss,l} + 2F_{st,l} + F_{tt,l}) P_l^{(k)} \end{cases}$$

更新. 其中, $\mathbf{d}_i^{(k)}$ 表示目标曲面对应参数值 (s_i, t_i) 处的点与第 i 个数据点的差向量, 如图 5 所示; $\hat{I}_j$ 表示受第 j 个控制点影响的数据点索引集; $\boldsymbol{\delta}_j^{(k)}$ 表示第 j 个控制点的加权差向量; $\boldsymbol{\eta}_j^{(k)}$ 表示光顺向量. 控制点更新公式为

$$P_j^{(k+1)} = P_j^{(k)} + \mu_j [(1 - \omega_j) \boldsymbol{\delta}_j^{(k)} - \omega_j \boldsymbol{\eta}_j^{(k)}].$$

其中, μ_j, ω_j 表示步长和光顺项权重. 更新得到目标曲面

$$P_j^{(k+1)} = \sum_{h=1}^n \sum_{l=1}^m N_h(s) N_l(t) P_{hl}^{(k+1)}.$$

通过这种方式, Fairing-PIA 可以迭代地调整目标曲面, 并且可以为每个控制点指定不同的权重, 达到不同的优化目标.

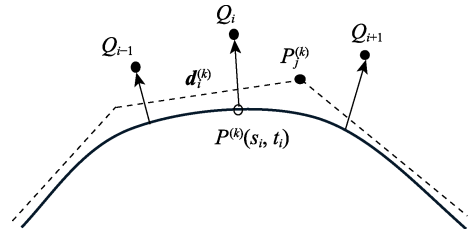


图 5 第 i 个数据点对应的差向量

针对曲面覆盖问题的局部插值特性, 可以通过 Fairing-PIA, 而非传统的能量最小化方法提供更高的自由度. 根据 B 样条基函数的局部支撑性, 本文固定被采样点影响的控制点, 记为 $\mathbf{P}_f$; 剩余控制点记为 $\mathbf{P}_s$. 迭代过程被分为 2 部分, 即

$$\begin{cases} P_{s,j}^{(k+1)} = P_{s,j}^{(k)} + \mu_{s,j} [(1 - \omega_{s,j}) \boldsymbol{\delta}_{s,j}^{(k)} - \omega_{s,j} \boldsymbol{\eta}_{s,j}^{(k)}] \\ P_{f,j}^{(k+1)} = P_{f,j}^{(k)} + \mu_{f,j} [(1 - \omega_{f,j}) \boldsymbol{\delta}_{f,j}^{(k)} - \omega_{f,j} \boldsymbol{\eta}_{f,j}^{(k)}] \end{cases}$$

本文为 $\mathbf{P}_s$ 中的控制点分配更大的 $\omega_{s,j}$, $\mathbf{P}_f$ 中的控制点分配更小的 $\omega_{s,j}$, 拟合权重取为 $\omega_{f,j} = 1 - \omega_{s,j}$. 为了在保证当前拟合精度的情况下优化曲面, 对应 $\mathbf{P}_f$ 的光顺权重应该近似为 0. 实验

中, 通常设置 P_s 和 P_f 的权重分别为 $\omega_{s,j}=10^{-1}$, $\omega_{s,j}=10^{-16}$. 由于初始曲面具有高精度, 因此初始拟合分量已经接近 0.

如果边界曲线多于 4 条, 则曲面 $P(s,t)$ 应该沿着边界曲线裁剪得到最终的覆盖曲面. 将采样点集投影到迭代得到的曲面上, 获得参数化结果 $\{(s_i, t_i)\}_{i=1}^N$; 然后使用 B 样条曲线在参数域上拟合生成参数曲线, 沿着曲线参数方向左侧的部分是保留的裁剪区域, 用于生成覆盖曲面.

4 数值实验和讨论

4.1 初始设置

当不超过 4 条边界曲线时, Coons 曲面能够严格覆盖边界, 因此不需要更新边界处的控制点. 当多于 4 条边界曲线时, 本文使用点云参数化获得采样点的参数值; 然后采用具有 9×9 控制网格的双 3 次 B 样条曲面拟合. 式(8)中, 初始参数化权重设为 $\alpha=10^{-4}$, 每步迭代后都降低到 10%. 本文执行

3 步迭代, 最终覆盖曲面具有 36×36 控制网格.

在 Fairing-PIA 的光顺过程中, 使用均方误差 (mean square error, MSE), 公式为

$$\text{MSE}^{(k)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|P^{(k)}(s_i, t_i) - Q_i\|^2 \quad (10)$$

其中, $P^{(k)}(s_i, t_i)$ 表示当前曲面在第 i 个采样点处的值. 可以设置默认的阈值计算每步迭代后的 MSE, 达到指定误差精度后停止迭代. 本文执行固定迭代步数, 以节省每步对所有采样点计算误差的开销.

本文使用 C++ 实现覆盖方法, 使用 Eigen3 库执行线性代数运算, 该方法在 i7-11700K @3.60 GHz CPU, 16 GB 内存上运行.

4.2 参数化权重的影响

讨论式(8)中的参数化权重 α 的影响. 在使用固定权重和带有缩放因子 2 种情况下, 计算 MSE; 进一步, 在每步迭代后减小权重, 结果如表 1 所示. 可以看出, 通过点云参数化生成曲面的 MSE 在每步迭代后减小, 这种策略可以让 MSE 收敛更快.

表 1 参数化权重 α 对逼近精度的影响

迭代次数	控制网格	固定权重		减小权重		耗时/s
		α	MSE	α	MSE	
1	6×6	10^{-6}	4.46×10^{-2}	10^{-6}	4.46×10^{-2}	0.178
2	12×12	10^{-6}	1.05×10^{-4}	10^{-7}	3.26×10^{-5}	0.162
3	24×24	10^{-6}	1.40×10^{-6}	10^{-8}	5.80×10^{-8}	0.144
4	48×48	10^{-6}	4.58×10^{-8}	10^{-9}	3.27×10^{-10}	0.148
5	96×96	10^{-6}	3.85×10^{-9}	10^{-10}	3.40×10^{-12}	0.237

可以看出, α 能够平衡拟合和光顺项. 如果方法初始就使用 36×36 控制网格并使用非常小的权重 $\alpha=10^{-10}$, 就不能产生光顺的曲面, 会得到糟糕的参数化效果. 迭代过程能够同时改善曲面质量和参数化结果, 最终得到理想的覆盖曲面.

4.3 光顺权重的影响

对 Fairing-PIA 方法中的光顺权重 ω_s 的影响进

行实验, 令 $\omega_f = \omega_s$, 让生成曲面的变化更明显. 在 4 条边界曲线情形下, 使用不同 ω_s 迭代 100 次后, 生成的覆盖曲面及其斑马纹如图 6 所示, 其中, ω_s 从 $10^{-1} \sim 10^{-3}$ 变化. 可以看出, 随着权重的减小, 覆盖曲面精度不断提高, 斑马纹中曲面的光顺性下降.

对式(9)的弯曲能量、式(10)的 MSE 与 ω_s 的关

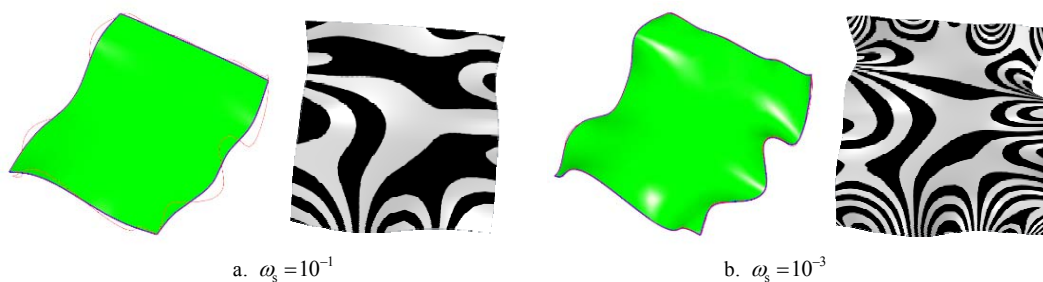


图 6 在 4 条边界曲线下 ω_s 迭代 100 次产生的覆盖曲面及其斑马纹

系进行实验, 结果如图 7 所示. 可以看出, 当 ω_s 较小时, 覆盖曲面的弯曲能量几乎不变, 而拟合误差快速减小; 表明在局部拟合条件下, 使用极小的光顺权重能够有效地降低拟合误差, 同时保证一定的光顺性.

4.4 覆盖不超过 4 条边界曲线

在不超过 4 条边界曲线的情形下, 首先构造

Coons 曲面作为初始曲面, 然后应用 Fairing-PIA 方法光顺曲面. 在具有 4 条边界曲线的情形下, 初始 Coons 曲面与通过 Fairing-PIA 迭代优化 100 次后, 曲面平均曲率的对比结果如图 8 所示. 可以看出, 对于初始高曲率部分, 优化后相应部分的曲率有显著的下降, 说明 Fairing-PIA 能够产生比 Coons 曲面更光顺的曲面.

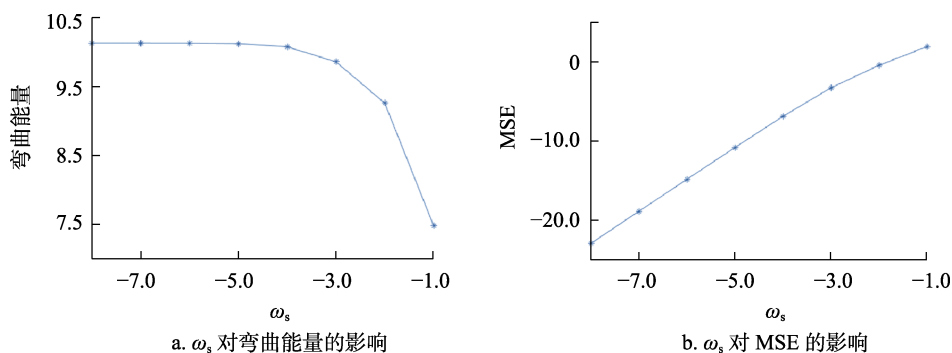


图 7 ω_s 对图 6 中覆盖曲面的影响

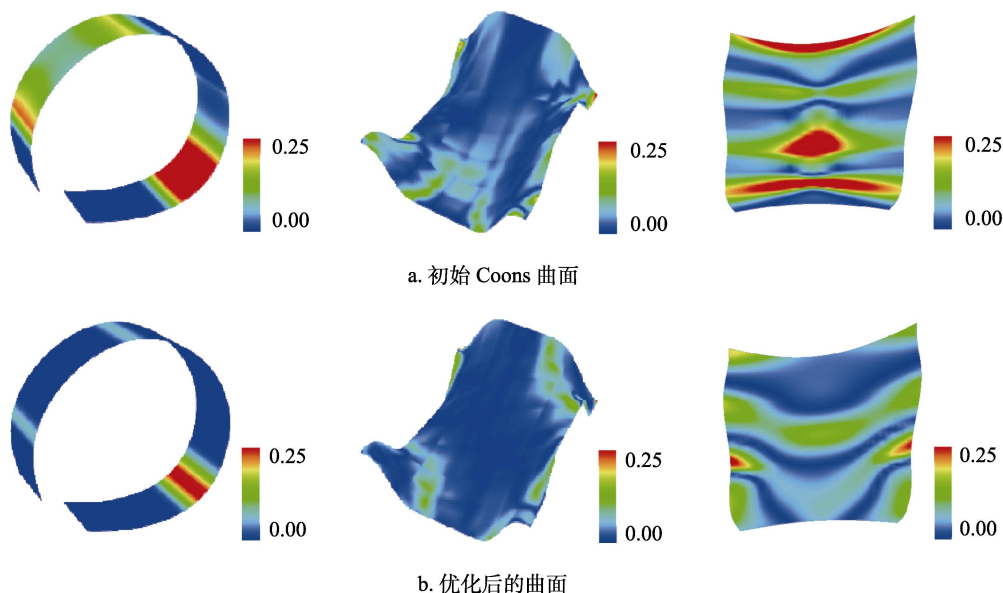


图 8 在 4 条边界曲线情形下初始 Coons 曲面与通过 Fairing-PIA 迭代优化 100 次后曲面平均曲率对比

图 9 展示了在 2, 3, 4 条边界曲线的情形下, 生成曲面及其斑马纹; 其中, 曲面边界用蓝色标记. 在图 9c 和图 9e 中, 输入边界为 1 次 B 样条曲线, 将次数提升为 2 次后再构造 Coons 曲面, 确保生成曲面具有二阶导数; 之后应用 Fairing-PIA 方法优化曲面. 可以看出, 对于低阶曲面, 斑马纹出现弯折, 说明曲面次数不足以达到 G^2 连续性; 而对于其他高阶曲面, Coons 曲面本身足够光顺, Fairing-PIA 方法在此基础上进一步降低了曲面的弯曲能量.

对于图 9 中输入的边界曲线, 构造 Coons 曲面和应用 Fairing-PIA 方法得到的弯曲能量、计算时长结果如表 2 所示. 可以看出, Fairing-PIA 方法确实能够达到更低的弯曲能量, 并提高曲面的光顺质量.

4.5 覆盖多于 4 条边界曲线

本节对传统能量法与 Fairing-PIA 方法覆盖多种边界类型的效果进行实验. 通常, 传统能量法需要使用约为 10^{-8} 的光顺权重来确保线性系统式(5)的稳定性, 使得 MSE 更高、光顺能量更小. 尽管传统能量优化方法可以通过调整整体的光顺权重

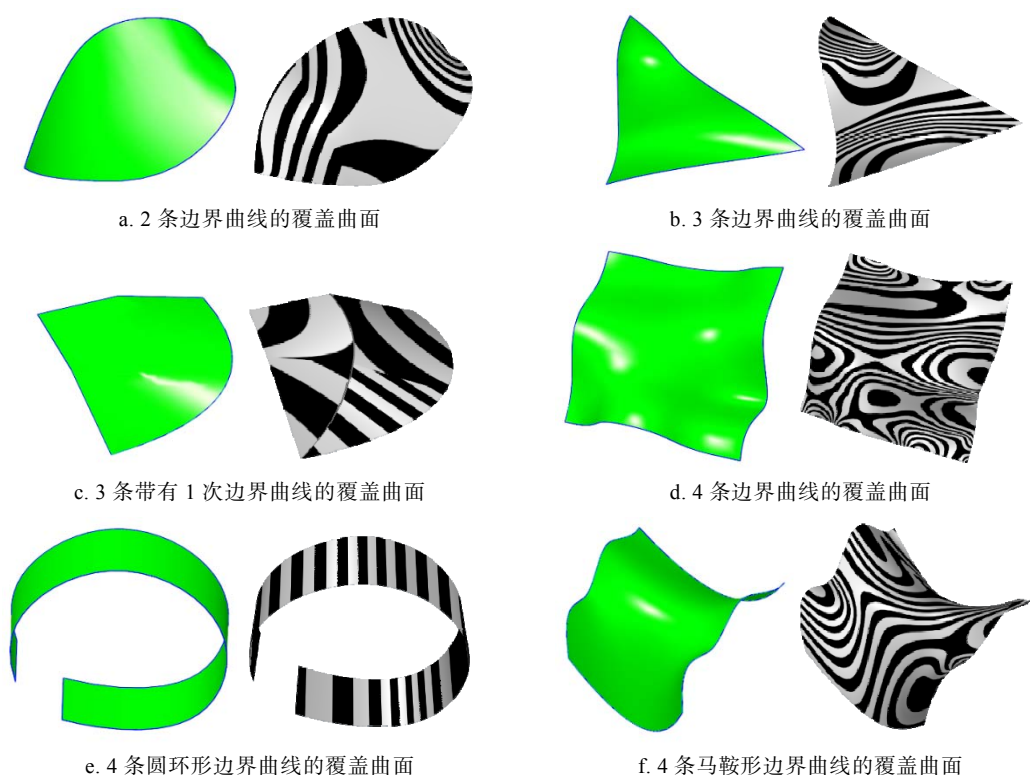


图 9 在 2, 3, 4 条边界曲线的情形下生成的曲面及其斑马纹

表 2 初始曲面和通过 Fairing-PIA 优化后的曲面性能对比

边界曲线	弯曲能量		耗时/s
	初始曲面	优化曲面	
图 9a	5.14×10^4	4.99×10^4	<0.001
图 9b	2.50×10^{-5}	2.03×10^5	<0.001
图 9c	8.48×10^1	6.89×10^1	0.001
图 9d	8.77×10^4	6.94×10^4	0.013
图 9e	1.73×10^2	1.03×10^{-1}	0.001
图 9f	6.53×10^4	2.97×10^4	0.001

平衡误差与能量, 然而在实际应用中, 选择良好的光顺权重非常困难, 目前尚未发现已知有效的权重调整策略. Fairing-PIA 方法凭借对每个控制点选择权重的能力, 可以简单地为需要拟合的控制点设置约 10^{-16} 的光顺权重, 为其余控制点设置约 10^{-1} 的光顺权重, 以减小拟合误差并得到足够小的光顺能量.

在输入复杂边界类型下, 如形状为椅子、蝴蝶和花瓣的多条曲线时, 生成的光顺覆盖曲面及其斑马纹如图 10 所示; 其中, 曲面的不同相邻边界标记为不同颜色以区分边界. 可以看出, 曲面形状与斑马纹都相当光顺, 表明本文方法具备处理复杂边界形状的能力.

多管道模型建模是广泛使用的技术, 建模时



图 10 复杂边界类型下生成的光顺覆盖曲面及其斑马纹

通常给定多个相交管道, 在删去接合部分的曲面后, 使用曲面填充技术构造逼近边界线的 B 样条曲面. 本文截取多管道模型的待填充边界线, 使用

点云参数化方法构造初始曲面和参数化,然后应用Fairing-PIA方法优化曲面,在迭代1000次后终止.多管道模型补洞边界的覆盖曲面如图11所示;进一步,还对比了使用传统能量法计算得到的曲面及其斑马纹.可以看出,图11c中,由于拟合精度不高,因此曲面无法直接沿着空间曲线裁剪得到裁剪曲面;图11b中,本文方法保留了整张拟合曲面.

在图10和图11所示的模型上,分别基于弯曲能量最小化的传统能量法和本文方法生成覆盖曲面进行实验,它们的MSE、弯曲能量和耗时对比结果如表3所示.可以看出,本文方法能够得到更小的MSE,代价是相对更高的弯曲能量,但其能够得到与传统能量法近似的斑马纹(如图11所示),并以更小的耗时完成优化.本文方法的优势来自初期的点云参数化,其线性系统式(8)的极度稀疏性带来了高速度、高质量的初始拟合曲面和参数化;通过限制最大迭代次数,后续使用Fairing-PIA方法迭代优化的开销也可以进一步降低.与传统能量方法相比,本文方法得到的MSE

更低.由于传统方法的MSE过大,因此其裁剪操作失败,如图11所示.

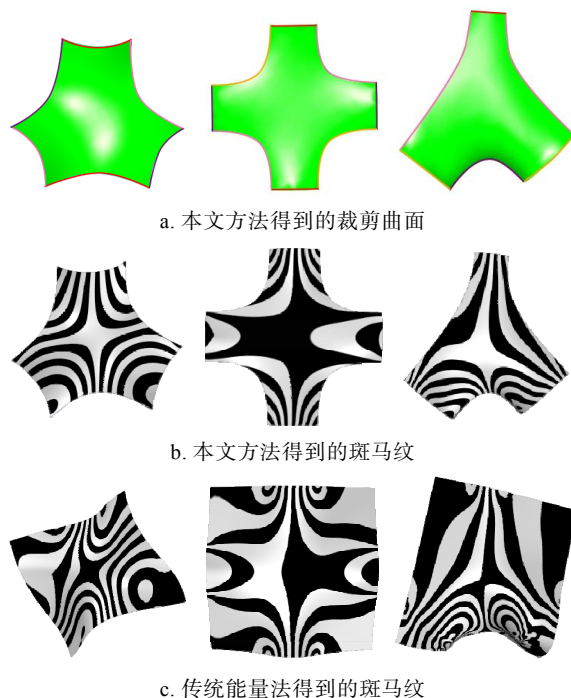


图11 多管道模型边界曲线的光顺覆盖曲面及其斑马纹

表3 2种覆盖方法迭代优化曲面的性能对比

模型	传统能量法 ^[32]			本文方法		
	MSE	弯曲能量	耗时/s	MSE	弯曲能量	耗时/s
图10a	4.27×10^{-5}	6.43×10^7	13.88	5.48×10^{-11}	3.71×10^9	4.85
图10b	1.01×10^{-5}	8.74×10^7	11.02	2.95×10^{-10}	4.06×10^8	4.28
图10c	5.61×10^{-6}	1.73×10^8	12.13	1.26×10^{-9}	3.64×10^8	4.41
图11a	6.39×10^{-8}	4.42×10^7	15.16	2.06×10^{-12}	8.05×10^7	4.52
图11b	3.73×10^{-7}	4.41×10^7	11.02	9.89×10^{-10}	4.11×10^8	5.96
图11c	1.81×10^{-4}	2.83×10^8	12.67	1.08×10^{-8}	3.79×10^8	4.44

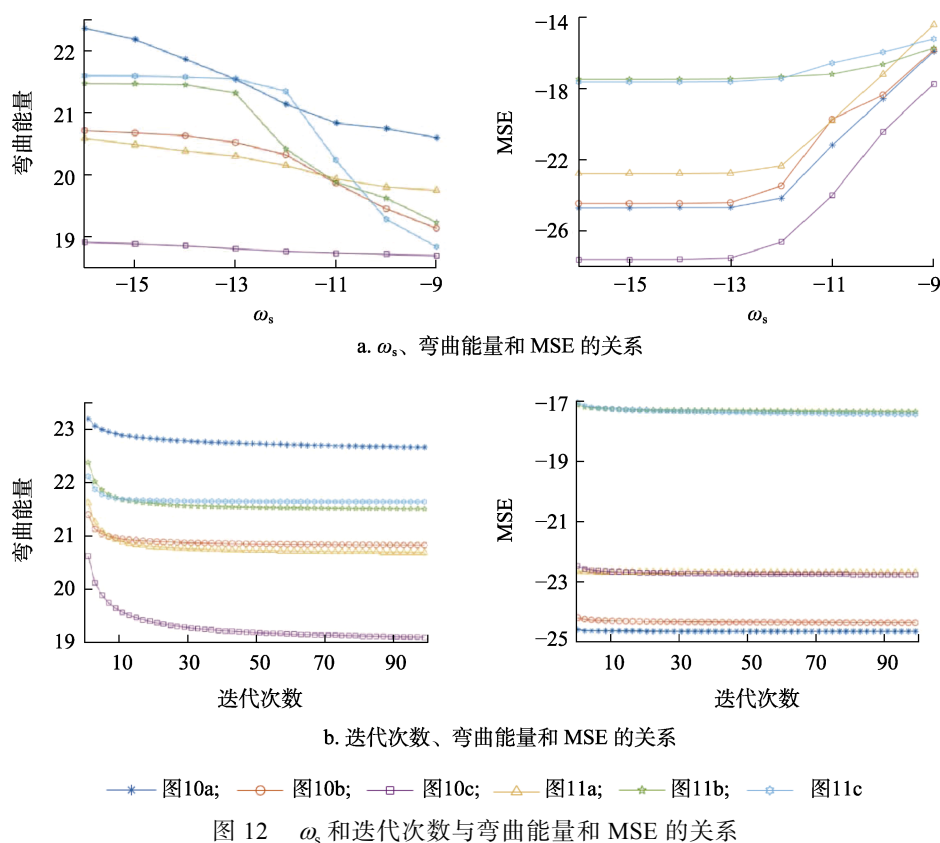
在图10和图11所示的模型上,分别基于均匀采样策略和本文采样策略优化生成覆盖曲面进行实验,它们的MSE和弯曲能量对比结果如表4所示.均匀采样策略对每条边界曲线采样100个点;本文采样策略首先均匀采样40个点,每相邻3个点拟合1条2次多项式曲线,提取曲率极值点作为特征点,然后根据弧长信息补充采样点,得到100个点.可以看出,本文采样策略对边界曲率变化较大的图10中的模型得到更小的MSE;对图11中具有平滑边界的多管道模型则有部分光顺效果.

在图10和图11中的模型上,对采用本文方法生成曲面的弯曲能量与MSE的关系进行实验,结果如图12所示.可以看出,图12a中,随着 ω_s 的增

加,弯曲能量减小而MSE增大;图12b中,弯曲能量在初始迭代中快速衰减,MSE呈现轻微减少的趋势,说明只需要很少的迭代步数,本文方法就可以在显著地降低曲面的能量同时改善拟合误差.

表4 2种采样策略迭代优化曲面的性能对比

模型	均匀采样		本文方法	
	MSE	弯曲能量	MSE	弯曲能量
图10a	5.30×10^{-8}	3.25×10^8	1.31×10^{-8}	3.38×10^8
图10b	1.29×10^{-8}	8.99×10^8	9.00×10^{-9}	1.02×10^9
图10c	3.53×10^{-9}	2.55×10^8	2.75×10^{-9}	2.16×10^8
图11a	2.61×10^{-10}	9.12×10^7	1.40×10^{-9}	9.55×10^7
图11b	6.16×10^{-9}	3.17×10^8	8.73×10^{-9}	3.27×10^8
图11c	1.48×10^{-8}	1.14×10^8	1.85×10^{-8}	1.11×10^8

图 12 ω_s 和迭代次数与弯曲能量和 MSE 的关系

5 结 语

本文提出一种基于 Fairing-PIA 的曲面覆盖方法. 从初始覆盖曲面开始, 通过迭代动态地优化曲面, 在提高拟合精度的同时, 减小曲面的光顺能量. 当不多于 4 条边界曲线时, 使用该方法生成 Coons 曲面作为初始曲面; 当超过 4 条边界曲线时, 使用基于动态基曲面的点云参数化方法生成初始曲面. 为了确保生成稳定、光顺的初始曲面, 本文将最小二乘拟合系统与光顺能量组合使用, 并在每步迭代中减小光顺权重, 以生成高质量的初始曲面和良好的参数化. 初始曲面构造完成后, 应用 Fairing-PIA 方法迭代光顺曲面, 基于控制点的位置为采样点附近的控制点选取更小的光顺权重, 对其余的控制点选取更大的光顺权重, 能够灵活地平衡拟合和光顺效果. 数值实验结果证明, 本文方法是有效的; 与传统能量法相比, 该方法能够更高效地提供更高精度的覆盖曲面.

但是, 本文方法也有局限性: (1) 使用有向包围盒投影得到初始参数化的方法可能失败. 如对于在投影面上交错的边界曲线, 采样点可能投影得到重合的参数值, 导致糟糕的参数化结果; (2) Fairing-PIA 在光顺优化阶段为边界附近的控制点选择

更小的光顺权重, 目的是避免光顺项影响这些控制点, 降低拟合精度. 然而, 当曲面的控制网格规模较小时, 大部分控制点都将失去光顺效果, 意味着必须使用相对大规模的控制网格, 导致该方法运行效率较低; (3) 本文方法虽然能够减小光顺能量, 但是不能保证生成曲面的形状符合预期, 可能需要在边界曲线上提供额外的引导信息, 如切向或曲率信息. 另外, 本文着重讨论覆盖曲面的拟合精度和光顺性, 未来还需要考虑高阶连续性.

参考文献(References):

- [1] Weiss V, Andor L, Renner G, et al. Advanced surface fitting techniques[J]. Computer Aided Geometric Design, 2002, 19(1): 19-42
- [2] Vaitkus M, Várady T. Parameterizing and extending trimmed regions for tensor-product surface fitting[J]. Computer-Aided Design, 2018, 104: 125-140
- [3] Jiang Y N, Lin H W, Huang W X. Fairing-PIA: progressive-iterative approximation for fairing curve and surface generation[J]. The Visual Computer, 2024, 40(3): 1467-1484
- [4] Farin G, Hansford D. Discrete Coons patches[J]. Computer Aided Geometric Design, 1999, 16(7): 691-700
- [5] Azariadis P N. Parameterization of clouds of unorganized points using dynamic base surfaces[J]. Computer-Aided Design, 2004, 36(7): 607-623

- [6] Cheutet V, Daniel M, Hahmann S, *et al.* Constraint modeling for curves and surfaces in CAGD: a survey[J]. *International Journal of Shape Modeling*, 2007, 13(2): 159-199
- [7] Kovács I, Várady T. Constrained fitting with free-form curves and surfaces[J]. *Computer-Aided Design*, 2020, 122: Article No.102816
- [8] Benkő P, Kós G, Várady T, *et al.* Constrained fitting in reverse engineering[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2002, 19(3): 173-205
- [9] Piegl L, Tiller W. The NURBS book[M]. 2nd ed. Berlin, Heidelberg: Springer, 1997
- [10] Fowler B, Bartels R. Constraint-based curve manipulation[J]. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1993, 13(5): 43-49
- [11] Fowler B. Geometric manipulation of tensor product surfaces[C] // *Proceedings of the Symposium on Interactive 3D Graphics*. New York: ACM Press, 1992: 101-108
- [12] Celniker G, Welch W. Linear constraints for deformable non-uniform B-spline surfaces[C] // *Proceedings of the Symposium on Interactive 3D Graphics*. New York: ACM Press, 1992: 165-170
- [13] Reinsch C H. Smoothing by spline functions. II [J]. *Numerische Mathematik*, 1971, 16(5): 451-454
- [14] Hosaka M. Theory of curve and surface synthesis and their smooth fitting[J]. *Information Processing in Japan*, 1969, 9: 60-68
- [15] Moreton H P, Séquin C H. Functional optimization for fair surface design[J]. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, 1992, 26(2): 167-176
- [16] Greiner G. Variational design and fairing of spline surfaces[J]. *Computer Graphics Forum*, 1994, 13(3): 143-154
- [17] Welch W, Witkin A. Variational surface modeling[J]. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, 1992, 26(2): 157-166
- [18] Vassilev T I. Fair interpolation and approximation of B-splines by energy minimization and points insertion[J]. *Computer-Aided Design*, 1996, 28(9): 753-760
- [19] Hagen H, Bonneau G P. Variational design of smooth rational Bezier-surfaces[M] // *Farin G, Noltemeier H, Hagen H, et al. Geometric Modelling*. Vienna: Springer, 1993: 133-138
- [20] Pottmann H. Smooth curves under tension[J]. *Computer-Aided Design*, 1990, 22(4): 241-245
- [21] Eck M, Hadenfeld J. Local energy fairing of B-spline curves[M] // *Hagen H, Farin G, Noltemeier H. Geometric Modelling*. Vienna: Springer, 1995: 129-147
- [22] Hadenfeld J. Local energy fairing of B-spline surfaces[M] // *Dæhlen M, Lyche T, Schumaker L L. Mathematical Methods for Curves and Surfaces*. Nashville: Vanderbilt University Press, 1995: 203-212
- [23] Li W S, Xu S H, Zheng J M, *et al.* Target curvature driven fairing algorithm for planar cubic B-spline curves[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2004, 21(5): 499-513
- [24] Lin H W, Wang G J, Dong C S. Constructing iterative non-uniform B-spline curve and surface to fit data points[J]. *Science in China Series: Information Sciences*, 2004, 47(3): 315-331
- [25] Lin H W. Local progressive-iterative approximation format for blending curves and patches[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2010, 27(4): 322-339
- [26] Lu L Z. Weighted progressive iteration approximation and convergence analysis[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2010, 27(2): 129-137
- [27] Lin H W, Zhang Z Y. An extended iterative format for the progressive-iteration approximation[J]. *Computers & Graphics*, 2011, 35(5): 967-975
- [28] Deng C Y, Lin H W. Progressive and iterative approximation for least squares B-spline curve and surface fitting[J]. *Computer-Aided Design*, 2014, 47: 32-44
- [29] Lin H W, Cao Q, Zhang X T. The convergence of least-squares progressive iterative approximation for singular least-squares fitting system[J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2018, 31(6): 1618-1632
- [30] Hamza Y F, Lin H W, Li Z H. Implicit progressive-iterative approximation for curve and surface reconstruction[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2020, 77: Article No.101817
- [31] Wang H D. Implicit randomized progressive-iterative approximation for curve and surface reconstruction[J]. *Computer-Aided Design*, 2022, 152: Article No.103376
- [32] Liu X D. Filling N -sided holes with trimmed B-spline surfaces based on energy-minimization method[J]. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 2015, 15(1): Article No.011001
- [33] Ma W Y, Kruth J P. Parameterization of randomly measured points for least squares fitting of B-spline curves and surfaces[J]. *Computer-Aided Design*, 1995, 27(9): 663-675
- [34] Hormann K, Polthier K, Sheffer A. Mesh parameterization: theory and practice[C] // *Proceedings of the ACM SIGGRAPH ASIA Courses*. New York: ACM Press, 2008: Article No.12
- [35] Hormann K, Greiner G. MIPS: an efficient global parametrization method[M] // *Laurent P J, Sablonnière P, Schumaker L L. Curve and Surface Design: Saint-Malo 1999*. Nashville: Vanderbilt University Press, 2000: 153-162
- [36] Hu S M, Wallner J. A second order algorithm for orthogonal projection onto curves and surfaces[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2005, 22(3): 251-260
- [37] Lu L Z, Zhao S Q. High-quality point sampling for B-spline fitting of parametric curves with feature recognition[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2019, 345: 286-294