中国科学 A 辑: 数学 2008 年 第 38 卷 第 11 期: 1289～1299
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE IN CHINA PRESS

基于图方法的自回归和双线性时间序列模型系数的检验

李元[①*], 罗美华[①], 叶伟彰[②], 黄香[②]

① 广州大学数学与信息科学学院, 广东 510006
② 香港理工大学应用数学系, 香港
* E-mail: yli57@hotmail.com

收稿日期: 2007-02-05; 接受日期: 2008-02-28
国家自然科学基金 (批准号: 10671044) 和广州市科技局 (批准号: 2004J1-C0333) 资助项目

摘要 自回归和双线性时间序列模型被表示为时间序列链图模型. 在此基础上, 证明了自回归和双线性模型的系数为其他时间序列分量给定的条件下的条件相关系数. 然后提出基于图的检验方法来检验自回归和双线性模型系数的显著性, 模拟结果表明此方法在水平和功效方面表现很好.

关键词 自回归模型 双线性模型 图模型

MSC(2000) 主题分类 **62F03, 62M10**

1 引言

图模型已经成为多维数据统计分析的重要工具 [1−5]. 最近人们应用图模型来刻画多维时间序列的相关结构 [6−10]. 描述多维时间序列的图大致可以分为有向图、无向图和混合图, 例如有向非循环图、偏相关图和时间序列链图. 迄今为止, 时间序列的图形建模主要关注的是多维时间序列. 很少有文献涉及到一维时间序列. Thiesson 等人 [11] 讨论了应用图模型方法对一维 ARMA 时间序列进行建模的问题. 他们将 ARMA 时间序列表示为一个有向图. 为了应用 EM 算法来计算模型参数, 他们将 ARMA 模型推广为随机 ARMA 模型, 用 σ-ARMA 来表示.

本文将图模型方法应用到传统的 AR 模型和双线性模型. 我们将 AR 和双线性时间序列表示为时间序列的链图模型. 在时间序列的链图模型中, 每一个顶点表示固定时间点上的变量, 两顶点间的边表明两个变量具有因果关系或相关结构. 两顶点间边的方向由时间和偏相关系数确定. 然后我们证明, AR 和双线性模型的系数为去掉其他时间序列分量线性效应的条件下的偏相关系数. 基于图模型, 我们提出了一种新的方法来检验 AR 和双线性模型系数的显著性. 与传统的检验方法比较, 我们的方法更直观, 计算更简单.

我们首先通过给出在有限非空集 V 上图的定义来介绍时间序列链图 (TSC-图). 定义 V

上的图是一个有序的二元对 (V,E), 其中 V 中的元素称为顶点, E 为有向边或无向边构成的集合. 对于 V 中的顶点 a 和 b, 我们用 $a\to b$ 和 $a\leftarrow b$ 表示有向边, 而 $a-b$ 表示无向边. 假设 $X=(X_1(t),X_2(t),\ldots,X_d(t))^{\mathrm{T}}$ 为 d 维平稳时间序列. 平稳过程 X 的 TSC-图 [6] 为图 $G_{TS}=(V_{TS},E_{TS})$, 其中 $V_{TS}=V\times\mathbb{Z}$, $V=\{1,2,\ldots,d\}$, $\mathbb{Z}$ 为整数集合, 且边集合 E_{TS} 满足

$$(a,t-u)\to(b,t)\notin E_{TS}\Leftrightarrow u\leqslant 0 \ \text{ 或 } \ X_a(t-u)\perp X_b(t)|\overline{X}(t)\setminus\{X_a(t-u)\},$$
$$(a,t-u)-(b,t)\notin E_{TS}\Leftrightarrow u\neq 0 \ \text{ 或 } \ X_a(t)\perp X_b(t)|\overline{X}_V(t)\cup\{X_{V\setminus\{a,b\}}(t)\},$$

其中 $\overline{X}_A(t)=\{X_A(s),s<t\}$ 表示子过程 $X_A=\{X_A(t)\}$ 在时刻 t 以前的信息. 这里用到条件正交性: 对于随机向量 X, Y 和 Z, 如果 X 和 Y 在去掉 Z 的线性效应后是不相关的, 则称 X 和 Y 为给定 Z 的条件下是条件正交的, 记为 $X\perp Y|Z$.

接下来我们将 $AR(p)$ 模型和 $BL(p,0,m,l)$ 模型分别表示为 TSC-图模型. 对于平稳 $AR(p)$ 模型

$$X_t=\varphi_1X_{t-1}+\varphi_2X_{t-2}+\cdots+\varphi_pX_{t-p}+\varepsilon_t, \tag{1.1}$$

其中 $\{\varepsilon_t\}$ 为 i.i.d. 序列, 其均值为零, 方差为 σ^2. 因为这里只涉及到一维时间序列, 所以在 TSC-图 $G_{TS}=(V_{TS},E_{TS})$ 中, V_{TS} 为 $Z=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$, 即每一个顶点表示 $\{X_t\}$ 在某个时刻的分量. 作为示例, 图 1 给出了 AR(p) 时间序列 $\{X_t\}$ 的 TSC-图 G_{TS}, 其中 $t-2\to t$ 表示 X_{t-2} 为 X_t 的因; $t-1$ 和 t 间没有边意味着 X_{t-1} 和 X_t 间不存在因果关系.

对于平稳的上三角 $BL(p,0,m,l)$ 模型

$$X_t=\sum_{j=1}^{p}\varphi_jX_{t-j}+\varepsilon_t+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}b_{ij}X_{t-i}\varepsilon_{t-j}, \tag{1.2}$$

其中 $\{\varepsilon_t\}$ 为 i.i.d. 序列, 其均值为零, 方差为 σ^2, 且当 $i<j$ 时, $b_{ij}=0$. 为了应用 TSC-图, 我们必须处理非线性项 $X_{t-i}\varepsilon_{t-j}$. 不失一般性, 我们假定 $m=l$. 注意到位于主对角线上的非线性项 $X_{t-i}\varepsilon_{t-i}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ 恰好为时间序列 $\{X_t\varepsilon_t\}$ 在时刻 $t-1,t-2,\ldots,t-m$ 的延时分量. 类似地, 位于次主对角线上的非线性项 $X_{t-i-1}\varepsilon_{t-i}$ $(i=1,2,\ldots,m-1)$ 恰好为时间序列 $\{X_{t-1}\varepsilon_t\}$ 在时刻 $t-1,t-2,\ldots,t-m+1$ 的延时分量. 一直下去. 因此可以用 m 个时间序列 $\{X_t\varepsilon_t\}$, $\{X_{t-1}\varepsilon_t\},\ldots,\{X_{t-m+1}\varepsilon_t\}$ 的延时分量来表示 (1.2) 式中的非线性项. 基于上述思想, 令 $Y_t=(y_{1,t},y_{2,t},\ldots,y_{d,t})^{\tau}$, 其中 $y_{1,t}=X_t$, $y_{i,t}=X_{t-i+2}\varepsilon_t$, $i=2,3,\ldots,m+1$, 且 $V=\{1,2,\ldots,d\}$, $d=m+1$, 则对于平稳的上三角 $BL(p,0,m,m)$ 时间序列 $\{X_t\}$, 其 TSC-图为 $G_{TS}=(V_{TS},E_{TS})$, 其中 $V_{TS}=V\times Z$. 这里由于非线性项存在, 所以我们用到了 d 维时间序列图模型. 图 2 给出了 $BL(2,0,2,2)$ 时间序列 $\{X_t\}$ 的 TSC-图. $BL(2,0,2,2)$ 模型为

$$X_t=\varphi_1X_{t-1}+\varphi_2X_{t-2}+b_{11}X_{t-1}\varepsilon_{t-1}+b_{21}X_{t-2}\varepsilon_{t-1}+b_{22}X_{t-2}\varepsilon_{t-2}+\varepsilon_t,$$

其中 $V=\{1,2,3\}$, $y_{1,t}=X_t$, $y_{2,t}=X_t\varepsilon_t$, $y_{3,t}=X_{t-1}\varepsilon_t$. V 中的顶点 i 表示时间序列 $\{y_{i,t}\}$, 而 TSC-图 $V_{TS}=V\times Z$ 中的顶点 $(i,t-u)$ 表示分量 $y_{i,t-u}$. 我们由 TSC-图的定义可知, $(1,t-1)\to(1,t)$ 表示 X_{t-1} 为 X_t 的因, $(2,t-1)\to(1,t)$ 则表明 $X_{t-1}\varepsilon_{t-1}$ 为 X_t 的因, $(3,t-1)\to(1,t)$ 意味着 $X_{t-2}\varepsilon_{t-1}$ 为 X_t 的因, 而 $(2,t-2)$ 和 $(1,t)$ 间没有边相连则说明 $X_{t-2}\varepsilon_{t-2}$ 不是 X_t 的因.

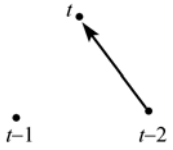

图 1 AR(2) 模型的图

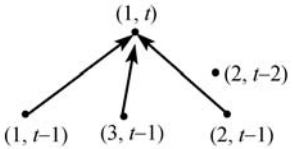

图 2 BL(2,0,2,2) 模型的图

2 基于图模型的参数检验

2.1 投影

令 X, Y, U, V 为随机变量, $\pi = \{\mu + \alpha U + \beta V | \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ 为 U 和 V 生成的线性子空间. 基于 U 和 V 的 X 的最佳线性预测定义为

$$E(X - \mathrm{Proj}_\pi X)^2 = \min_{\mu,\alpha,\beta} E(X - \mu - \alpha U - \beta V)^2, \tag{2.1}$$

并记为 $\mathrm{Proj}_\pi X$, 称为 X 在 π 上的线性投影.

$\mathrm{Proj}_\pi X$ 显然具有线性性质:

命题 2.1

$$\mathrm{Proj}_\pi(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathrm{Proj}_\pi X + \beta \mathrm{Proj}_\pi Y.$$

线性投影 $\mathrm{Proj}_\pi X$ 的定义可以推广到由随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 生成的线性子空间 π 上.

我们由 $\mathrm{Proj}_\pi X$ 定义偏协方差如下:

$$\mathrm{Cov}_L(X, Y|\pi) = E(X - \mathrm{Proj}_\pi X)(Y - \mathrm{Proj}_\pi Y).$$

2.2 $AR(p)$ 模型系数的检验

定理 2.1 对于平稳 AR(p) 模型, 我们有

$$t - k \to t \in E_{TS} \Leftrightarrow k \in \{1, 2, \ldots, p\} \text{ 且 } \varphi_k \neq 0. \tag{2.2}$$

证明 由 TSC-图知

$$t - k \to t \notin E_{TS} \Leftrightarrow X_{t-k} \perp X_t | \pi^{(-k)},$$

这等价于 $\mathrm{Cov}_L(X_t, X_{t-k}|\pi^{(-k)}) = 0$, 其中 $\pi^{(-k)}$ 为由 $\{X_{t-j}, j = 1, 2, \ldots, j \neq k\}$ 生成的线性子空间. 由 (1.1) 式和 $\mathrm{Proj}_\pi X$ 的线性性质可得

$$\mathrm{Proj}_{\pi^{(-k)}} X_t = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \varphi_j X_{t-j} + \varphi_k \mathrm{Proj}_{\pi^{(-k)}} X_{t-k} + \mathrm{Proj}_{\pi^{(-k)}} \varepsilon_t.$$

易知 $\mathrm{Proj}_{\pi^{(-k)}} \varepsilon_t = 0$. 于是

$$\mathrm{Proj}_{\pi^{(-k)}} X_t = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \varphi_j X_{t-j} + \varphi_k \mathrm{Proj}_{\pi^{(-k)}} X_{t-k},$$

从而

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}_L(X_t, X_{t-k}|\pi^{(-k)}) &= E(X_t - \mathrm{Proj}_{\pi^{(-k)}} X_t)(X_{t-k} - \mathrm{Proj}_{\pi^{(-k)}} X_{t-k}) \\
&= E[(\varphi_k(X_{t-k} - \mathrm{Proj}_{\pi^{(-k)}} X_{t-k}) + \varepsilon_t)(X_{t-k} - \mathrm{Proj}_{\pi^{(-k)}} X_{t-k})] \\
&= \varphi_k E(X_{t-k} - \mathrm{Proj}_{\pi^{(-k)}} X_{t-k})^2
\end{aligned}$$

$$= \varphi_k \mathrm{Var}_L(X_{t-k}|\pi^{(-k)}), \tag{2.3}$$

其中 $\mathrm{Var}_L(X_{t-k}|\pi^{(-k)}) = E(X_{t-k} - \mathrm{Proj}_{\pi^{(-k)}} X_{t-k})^2$. 因此由 (2.3) 式可得 (2.2) 式.

由定理 2.1 可知, 对于 AR(2) 模型, X_{t-l} 为 X_t 因的充要条件为 $\varphi_l \neq 0$. 因此如果要检验, 比如 $\varphi_l = 0$, 只需检验是否存在有向边 $t-l \to t$, 基于此我们将提出一种新的参数检验方法.

对于平稳 $AR(p)$ 模型 (1.1), 由 $\{X_t\}$ 的 Markov 性知

$$\mathrm{Proj}_{\pi^{(-k)}} X_t = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{k+p} \theta_j^{(1)} X_{t-j}, \tag{2.4}$$

其中 $\theta_j^{(1)}, 1 \leqslant j \leqslant k+p, j \neq k$ 满足

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{k+p} \theta_j^{(1)} \gamma_{l-j} = \gamma_l, \quad l = 1, 2, \ldots, k+p, \quad l \neq k, \tag{2.5}$$

这里 $\gamma_l = EX_tX_{t-l}$. 类似地有

$$\mathrm{Proj}_{\pi^{(-k)}} X_{t-k} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{k+p} \theta_j^{(2)} X_{t-j}, \tag{2.6}$$

其中 $\theta_j^{(2)}$ $(1 \leqslant j \leqslant k+p, j \neq k)$ 满足

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{k+p} \theta_j^{(2)} \gamma_{l-j} = \gamma_l, \quad l = 1, 2, \ldots, k+p, \quad l \neq k. \tag{2.7}$$

由 (2.4) 和 (2.6) 式知

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}_L(X_t, X_{t-k}|\pi^{(-k)}) &= E\left(X_t - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{k+p} \theta_j^{(1)} X_{t-j}\right)\left(X_{t-k} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{k+p} \theta_j^{(2)} X_{t-j}\right) \\ &= \gamma_k - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{k+p} \theta_j^{(2)} \gamma_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{k+p} \theta_j^{(1)} \gamma_{k-j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{k+p} \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{k+p} \theta_j^{(1)} \theta_l^{(2)} \gamma_{j-l}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

令 $\gamma_{k|\pi^{(-k)}} = \mathrm{Cov}_L(X_t, X_{t-k}|\pi^{(-k)})$, 则基于 (2.8) 式, $\gamma_{k|\pi^{(-k)}}$ 可由下式估计

$$\hat{\gamma}_{k|\pi^{(-k)}} = \hat{\gamma}_k - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{k+p} \hat{\theta}_j^{(2)} \hat{\gamma}_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{k+p} \hat{\theta}_j^{(1)} \hat{\gamma}_{k-j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{k+p} \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{k+p} \hat{\theta}_j^{(1)} \hat{\theta}_l^{(2)} \hat{\gamma}_{j-l}, \tag{2.9}$$

其中

$$\hat{\gamma}_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-l} X_i X_{i+l},$$

这里 n 为样本容量, $\hat{\theta}_j^{(1)}$ 和 $\hat{\theta}_j^{(2)}$ 分别为 $\theta_j^{(1)}$ 和 $\theta_j^{(2)}$ 的估计, 它们可通过解方程 (2.5) 和 (2.7) 得到, 在这两个方程中, 我们以 $\hat{\gamma}_l$ 代替 γ_l.

由文献 [12] 定理 1.10 知, 在适当的条件下, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\hat{\gamma}_{k|\pi^{(-k)}} \xrightarrow{p} \gamma_{k|\pi^{(-k)}}, \quad n^{1/2}(\hat{\gamma}_{k|\pi^{(-k)}} - \gamma_{k|\pi^{(-k)}}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_k^2),$$

其中

$$\sigma_k^2 = \lim_{n\to\infty} nE(\hat{\gamma}_{k|\pi^{(-k)}} - \gamma_{k|\pi^{(-k)}})^2.$$

关于 $AR(p)$ 模型的检验问题 $H_0:\ \varphi_k=0,\ \ H_1:\ \varphi_k\neq 0$, 由 (2.3) 式知, 在 H_0 下, $\gamma_{k|\pi^{(-k)}}=0$. 因此我们提出下述检验统计量

$$T_{k,n}=\frac{n^{1/2}\hat{\gamma}_{k|\pi^{(-k)}}}{\sigma_k}, \tag{2.10}$$

其渐近分布为 $N(0,1)$. 当 $|T_{k,n}|>\Phi^{-1}(1-\alpha)$ 时, 拒绝 $H_0:\ \ \varphi_k=0$, 这里 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布的分布函数, α 为显著性水平.

作为一个示例, 我们考虑平稳 $AR(2)$ 模型. 简单计算可知

$$\gamma_{1|\pi^{(-2)}}=\gamma_1(1-\gamma_2/\gamma_0),\ \ \gamma_{2|\pi^{(-1)}}=\gamma_2-\gamma_1^2/\gamma_0,$$

则 $\gamma_{1|\pi^{(-2)}}$ 和 $\gamma_{2|\pi^{(-1)}}$ 的估计分别由下式给出:

$$\hat{\gamma}_{1|\pi^{(-2)}}=\hat{\gamma}_1(1-\hat{\gamma}_2/\hat{\gamma}_0),\quad \hat{\gamma}_{2|\pi^{(-1)}}=\hat{\gamma}_2-\hat{\gamma}_1^2/\hat{\gamma}_0.$$

检验统计量为 (2.10) 式, 其中

$$\sigma_1^2=\alpha^\tau W\alpha,\ \ \sigma_2^2=\beta^\tau W\beta,$$

这里 $W=(w_{ij})_{3\times 3}$,

$$\begin{aligned}
&w_{ij}=(\eta-3)\gamma_i\gamma_j+\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\gamma_k\gamma_{k-i+j}+\gamma_{k+j}\gamma_{k-i}),\quad i,j=0,1,2,\\
&\alpha=(\gamma_1\gamma_2/\gamma_0^2,1-\gamma_2/\gamma_0,-\gamma_1/\gamma_0)^{\mathrm{T}},\\
&\beta=(\gamma_1^2/\gamma_0^2,-2\gamma_1/\gamma_0,1)^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

以及

$$\eta \text{ 满足 } E\varepsilon_t^4=\eta\sigma^4<\infty.$$

2.3 上三角 $BL(p,0,m,m)$ 模型系数的检验

定理 2.2 对于平稳上三角 $BL(p,0,m,m)$ 模型, 我们有

$$(1,t-k)\to(1,t)\in E_{TS}\Leftrightarrow k\in\{1,2,\ldots,p\}\ \text{且}\ \ \varphi_k\neq 0; \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
&(2+i-j,t-j)\to(1,t)\in E_{TS}\\
&\quad\Leftrightarrow i\in\{1,2,\ldots,m\},j\in\{1,2,\ldots,i\},\text{且}\,b_{ij}\neq 0.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

证明 仅给出 (2.12) 式的证明. (2.11) 式的证明类似于定理 2.1 故从略.

由上一节的记号, (1.2) 式可以表示为

$$y_{1,t}=\sum_{j=1}^{p}\varphi_j y_{1,t-j}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i}b_{ij}y_{2+i-j,t-j}+\varepsilon_t. \tag{2.13}$$

$$(2+i-j,t-j)\to(1,t)\notin E_{TS}\Leftrightarrow y_{2+i-j,t-j}\perp y_{1,t}|\pi^{(-(i,j))}, \tag{2.14}$$

其中 $\pi^{(-(i,j))}$ 为由 $\{Y_s,s<t\}-\{y_{2+i-j,t-j}\}$ 生成的线性子空间, 这里 $Y_t=(y_{1,t},y_{2,t},\ldots,y_{d,t})^{\mathrm{T}}$. (2.14) 式等价于 $\mathrm{Cov}_L(y_{1,t},y_{2+i-j,t-j}|\pi^{(-(i,j))})=0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Proj}_{\pi^{(-(i,j))}}y_{1,t}=&\sum_{l=1}^{p}\varphi_l y_{1,t-l}+\sum_{(i_1,j_1)\neq(i,j)}b_{i_1j_1}y_{2+i_1-j_1,t-j_1}\\
&+\mathrm{Proj}_{\pi^{(-(i,j))}}y_{2+i-j,t-j}+\mathrm{Proj}_{\pi^{(-(i,j))}}\varepsilon_t.
\end{aligned}$$

因为 $\mathrm{Proj}_{\pi^{(-(i,j))}}\varepsilon_t = 0$, 所以

$$\mathrm{Proj}_{\pi^{(-(i,j))}} y_{1,t} = \sum_{l=1}^{p} \varphi_l y_{1,t-l} + \sum_{(i_1,j_1)\neq(i,j)} b_{i_1 j_1} y_{2+i_1-j_1,t-j_1} + \mathrm{Proj}_{\pi^{(-(i,j))}} y_{2+i-j,t-j}.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}_L(y_{1,t}, y_{2+i-j,t-j}|\pi^{(-(i,j))}) \\
&\quad = E(y_{1,t} - \mathrm{Proj}_{\pi^{(-(i,j))}} y_{1,t})(y_{2+i-j,t-j} - \mathrm{Proj}_{\pi^{(-(i,j))}} y_{2+i-j,t-j}) \\
&\quad = E[(b_{ij}(y_{2+i-j,t-j} - \mathrm{Proj}_{\pi^{(-(i,j))}} y_{2+i-j,t-j}) + \varepsilon_t)(y_{2+i-j,t-j} - \mathrm{Proj}_{\pi^{(-(i,j))}} y_{2+i-j,t-j})] \\
&\quad = b_{ij} E(y_{2+i-j,t-j} - \mathrm{Proj}_{\pi^{(-(i,j))}} y_{2+i-j,t-j})^2 \\
&\quad = b_{ij} \mathrm{Var}_L(y_{2+i-j,t-j}|\pi^{(-(i,j))}), \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

其中

$$\mathrm{Var}_L(y_{2+i-j,t-j}|\pi^{(-(i,j))}) = E(y_{2+i-j,t-j} - \mathrm{Proj}_{\pi^{(-(i,j))}} y_{2+i-j,t-j})^2.$$

因此由 (2.14) 和 (2.15) 式可得 (2.12) 式.

由定理 2.2 知, 如果要检验上三角 $BL(p,0,m,m)$ 模型中是否存在非线性项 $X_{t-i}\varepsilon_{t-j}$, 即检验 $H_0:\ b_{ij}=0$, 只需要检验在 TSC-图 G_{TS} 中是否存在有向边 $(2+i-j,t-j)\to(1,t)$, 基于此我们提出了基于图模型方法的一种新的检验方法.

令

$$\begin{aligned}
\gamma_{1,2+i-j}(j) &= \mathrm{Cov}_L(y_{1,t}, y_{2+i-j,t-j}|\pi^{(-(i,j))}) \\
&= \mathrm{Cov}_L(X_t, X_{t-i}\varepsilon_{t-j}|\pi^{(-(i,j))}), \quad i\in\{1,2,\ldots,m\},\ j\in\{1,2,\ldots,i\}; \\
\gamma_{1,1}(k) &= \mathrm{Cov}_L(y_{1,t}, y_{1,t-k}|\pi^{(-(1,k))}) = \mathrm{Cov}_L(X_t, X_{t-k}|\pi^{(-(1,k))}), \quad k\in\{1,2,\ldots,p\}.
\end{aligned}$$

基于模型 (1.2) 的样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$, 并注意到只有过去的已经观测到的部分才能考虑, 则由文献 [6], $\gamma_{1,2+i-j}(j)$ 和 $\gamma_{1,1}(k)$ 的估计分别由

$$\hat{\gamma}_{1,2+i-j}(j) = \widehat{\mathrm{Cov}}_L(y_{1,u}, y_{2+i-j,u-j}|\pi_u^{(-(i,j))}), \qquad (2.16)$$

$$\hat{\gamma}_{1,1}(k) = \widehat{\mathrm{Cov}}_L(y_{1,u}, y_{1,u-k}|\pi_u^{(-(1,k))}) \qquad (2.17)$$

给出, 其中 $\pi_u^{(-(i,j))}$ 为由 $\{Y(p_0+1),\ldots,Y(u-1)\}-\{y_{2+i-j,u-j}\}$ 生成的线性子空间, 而 $\pi_u^{(-(1,k))}$ 为由 $\{Y(p_0+1),\ldots,Y(u-1)\}-\{y_{1,u-k}\}$ 生成的线性子空间, 这里 $p_0=\max\{p,m\}$, u 为一个固定的常数.

对于一般的上三角 $BL(p,0,m,m)$ 模型, 讨论 $\hat{\gamma}_{1,2+i-j}(j)$ 和 $\hat{\gamma}_{1,1}(k)$ 的渐近性质以及计算远比 $AR(p)$ 模型复杂地多. 这是因为 $BL(p,0,m,m)$ 模型中非线性项存在的缘故. 接下来, 作为一个示例, 我们考虑平稳 $BL(2,0,1,1)$ 模型. 为检验 $H_0:\ b_{11}=0,\ \ H_1:\ b_{11}\neq 0$, 首先对于某个 $u>2$ 计算

$$\gamma_{1,2}(1) = \mathrm{Cov}_L(y_{1,u}, y_{2,u-1}|\pi_u^{(-(1,1))}).$$

容易证明

$$\gamma_{1,2}(1) = \gamma_1^{x,\varepsilon} + \frac{\gamma_1\gamma_2-\gamma_1\gamma_0}{\gamma_0^2-\gamma_1^2}\gamma_0^{x,\varepsilon} + \frac{\gamma_1^2-\gamma_0\gamma_2}{\gamma_0^2-\gamma_1^2}\gamma_{-1}^{x,\varepsilon}, \qquad (2.18)$$

其中

$$\gamma_1^{x,\varepsilon} = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-1}\varepsilon_{t-1}), \quad \gamma_0^{x,\varepsilon} = \mathrm{Cov}(X_{t-1}, X_{t-1}\varepsilon_{t-1}), \quad \gamma_{-1}^{x,\varepsilon} = \mathrm{Cov}(X_{t-2}, X_{t-1}\varepsilon_{t-1}),$$

则由 (2.18) 式知, $\gamma_{1,2}(1)$ 的估计为

$$\hat{\gamma}_{1,2}(1)=\hat{\gamma}_1^{x,\varepsilon}+\frac{\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2-\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_0^2-\hat{\gamma}_1^2}\hat{\gamma}_0^{x,\varepsilon}+\frac{\hat{\gamma}_1^2-\hat{\gamma}_0\hat{\gamma}_2}{\hat{\gamma}_0^2-\hat{\gamma}_1^2}\hat{\gamma}_{-1}^{x,\varepsilon}, \tag{2.19}$$

其中

$$\hat{\gamma}_k=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(X_t-\overline{X})(X_{t+k}-\overline{X}),\qquad \hat{\gamma}_1^{x,\varepsilon}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-1}(X_{t+1}-\overline{X})(X_t\varepsilon_t-\overline{X\varepsilon}),$$

$$\hat{\gamma}_0^{x,\varepsilon}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-1}(X_t-\overline{X})(X_t\varepsilon_t-\overline{X\varepsilon}),\quad \hat{\gamma}_{-1}^{x,\varepsilon}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-1}(X_t-\overline{X})(X_{t+1}\varepsilon_{t+1}-\overline{X\varepsilon}),$$

这里

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}X_t,\quad \overline{X\varepsilon}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}X_t\varepsilon_t.$$

令

$$A=\begin{pmatrix}\varphi_1&\varphi_2&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11}&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

以及 $\widetilde{X}_t=(X_t,X_{t-1},X_{t-2})^{\mathrm{T}}$, 则 $BL(2,0,1,1)$ 模型的状态空间表示为

$$\widetilde{X}_t=C\varepsilon_t+A\widetilde{X}_{t-1}+B\widetilde{X}_{t-1}\varepsilon_{t-1}. \tag{2.20}$$

定理 2.3 对于 $BL(2,0,1,1)$ 模型, 其中 $X_t=C^\tau\widetilde{X}_t$, 假定 $E\varepsilon_t=0, E\varepsilon_t^3=0, E\varepsilon_t^2=\sigma^2<\infty, E\varepsilon_t^4<\infty$ 以及 $\rho(A\otimes A+\sigma^2B\otimes B)<1$, 则当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\hat{\gamma}_k\xrightarrow{p}\gamma_k,\quad n^{1/2}(\hat{\gamma}_k-\gamma_k)\xrightarrow{d}N(0,\sigma_k^2),\quad k=0,1,2,\ldots, \tag{2.21}$$

其中 $\sigma_k^2=\lim_{n\to\infty}nE(\hat{\gamma}_k-\gamma_k)^2$.

$$\hat{\gamma}_k^{x,\varepsilon}\xrightarrow{p}\gamma_k^{x,\varepsilon},\quad n^{1/2}(\hat{\gamma}_k^{x,\varepsilon}-\gamma_k^{x,\varepsilon})\xrightarrow{d}N(0,\sigma_{k,x,\epsilon}^2),\quad k=1,0,-1, \tag{2.22}$$

其中 $\sigma_{k,x,\epsilon}^2=\lim_{n\to\infty}nE(\hat{\gamma}_k^{x,\varepsilon}-\gamma_k^{x,\varepsilon})^2$.

$$n^{1/2}(\hat{\gamma}_{1|1,2}-\gamma_{1|1,2})\xrightarrow{d}N(0,\sigma_3^2), \tag{2.23}$$

其中 $\sigma_3^2=\theta^\tau W\theta$,

$$W=\lim_{n\to\infty}nE(\hat{\gamma}-\gamma)(\hat{\gamma}-\gamma)^\tau,$$

且

$$\hat{\gamma}=(\hat{\gamma}_0,\hat{\gamma}_1,\hat{\gamma}_2,\hat{\gamma}_0^{x,\varepsilon},\hat{\gamma}_1^{x,\varepsilon},\hat{\gamma}_2^{x,\varepsilon})^\tau,\quad \gamma=(\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_0^{x,\varepsilon},\gamma_1^{x,\varepsilon},\gamma_2^{x,\varepsilon})^\tau,$$

以及 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5,\theta_6)^\tau$, 这里

$$\theta_1=-\frac{2\gamma_0(\gamma_1\gamma_2-\gamma_1\gamma_0)}{(\gamma_0^2-\gamma_1^2)^2}\gamma_0^{x,\varepsilon}-\frac{\gamma_1\gamma_0^{x,\varepsilon}+\gamma_2\gamma_{-1}^{x,\varepsilon}}{\gamma_0^2-\gamma_1^2}-\frac{2\gamma_0(\gamma_1^2-\gamma_0\gamma_2)}{(\gamma_0^2-\gamma_1^2)^2}\gamma_{-1}^{x,\varepsilon},$$

$$\theta_2=\frac{2\gamma_1(\gamma_1\gamma_2-\gamma_1\gamma_0)+(\gamma_2-\gamma_0)(\gamma_0-\gamma_1)}{(\gamma_0^2-\gamma_1^2)^2}\gamma_0^{x,\varepsilon}+\frac{2\gamma_1[(\gamma_1^2-\gamma_0\gamma_2)+\gamma_0^2-\gamma_1^2]}{(\gamma_0^2-\gamma_1^2)^2}\gamma_{-1}^{x,\varepsilon},$$

$$\theta_3=\frac{\gamma_1}{\gamma_0^2-\gamma_1^2}\gamma_0^{x,\varepsilon}-\frac{\gamma_0}{\gamma_0^2-\gamma_1^2}\gamma_{-1}^{x,\varepsilon},\quad \theta_4=\frac{\gamma_1\gamma_2-\gamma_1\gamma_0}{\gamma_0^2-\gamma_1^2},\quad \theta_5=1;\quad \theta_6=\frac{2(\gamma_1^2-\gamma_0\gamma_2}{\gamma_0^2-\gamma_1^2}.$$

定理 2.3 的证明可由文献 [12, 13] 直接得到, 故从略.

令

$$T_{b,n} = \frac{n^{1/2}\hat{\gamma}_{1,2}(1)}{\sigma_3}. \tag{2.24}$$

由 (2.15) 式知, 在 $H_0: \ b_{11} = 0$ 下, $\gamma_{1,2}(1) = 0$. 因此由定理 2.3 知, 当 $n \to \infty$ 时, $T_{b,n} \xrightarrow{d} N(0,1)$. 于是当 $|T_{b,n}| > \Phi^{-1}(1-\alpha)$ 时, 我们拒绝 $H_0: \ b_{11} = 0$.

为检验 $H_0: \ b_{11} = 0$, 必须计算 $\hat{\gamma}_{1,2}(1)$, 这又涉及到 ε_t 的计算. ε_t 可以通过首先估计参数 φ_1, φ_2 和 b_{11}, 然后再递推计算而得到

$$\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{\varphi}_1 X_{t-1} - \hat{\varphi}_2 X_{t-2} - \hat{b}_{11} X_{t-1}\hat{\varepsilon}_{t-1}.$$

然而这过于复杂. 下面介绍一种简单的方法来计算 $\hat{\gamma}_{1,2}(1)$:

步骤 1. 将 X_t 对 $X_{t-1}, \ X_{t-2}$ $(t = 3, 4, \ldots, n)$ 做回归, 从而得到 $\hat{\alpha}_0, \ \hat{\alpha}_1, \ \hat{\alpha}_2$, 以及残差

$$e_t = X_t - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 X_{t-1} - \hat{\alpha}_2 X_{t-2}, \quad t = 3, 4, \ldots, n.$$

步骤 2. 将 $X_{t-1}e_{t-1}$ 对 $X_{t-1}, \ X_{t-2}$ $(t = 3, 4, \ldots, n)$ 再做回归, 然后得到 $\hat{\beta}_0, \ \hat{\beta}_1, \ \hat{\beta}_2$, 以及残差

$$v_t = X_{t-1}e_{t-1} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{t-1} - \hat{\beta}_2 X_{t-2}, \quad t = 4, 5, \ldots, n.$$

步骤 3. $\hat{\gamma}_{1,2}(1)$ 由

$$\hat{\gamma}_{1,2}(1) = \frac{1}{n-3}\sum_{t=4}^{n} e_t v_t$$

给出.

3 模拟结果

为评价本文提出的检验方法, 我们对于 $AR(2)$ 和 $BL(2,0,1,1)$ 模型进行了模拟. 对应于模型 (1.1) 和 (1.2), 我们的模型具有以下形式:

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \sigma\varepsilon_t, \tag{3.1}$$

和

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \phi X_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \sigma\varepsilon_t, \tag{3.2}$$

其中 ε_t 服从标准正态分布.

对于上述两个模型, 样本容量分别取为 50, 100 和 200; 噪声水平分别取为 $\sigma = 0.2$, 0.6, 1.2, 1.6 和 2. 相关参数 φ_1, φ_2, ϕ 和 σ^2 都满足平稳性条件. 模拟重复 500 次. 表 1 给出了 $AR(2)$ 模型的经验水平和功效, 而表 2 则给出了 $BL(2,0,1,1)$ 模型的模拟结果.

由表 1 可以看出, 对于 $AR(2)$ 模型, 检验的水平和功效都表现的很好. 检验的水平和功效随着样本容量的增加而变好, 而随着噪声水平的增加而变差. 表 1 还表明关于水平, 我们的方法总体上比传统的 t-检验要好. 但是对于功效而言, 当样本容量较小时 (例如, $n = 50$), 传统的 t-检验要比我们的方法好; 当样本容量较大时 (例如, $n = 100, 200$), 两种方法在功效上没有显著差异. 表 2 给出了 $BL(2,0,1,1)$ 模型的类似于 $AR(2)$ 模型的模拟结果. 水平表现依然好, 但是功效比 $AR(2)$ 模型差. 功效的损失也许归结于 $BL(2,0,1,1)$ 模型的非线性. 然而, 随着样本容量的增加, 功效增加地很快. 模拟结果表明我们的检验表现令人满意.

表 1 $AR(2)$ 模型系数检验的经验水平和功效 [a)]

	n=50		n=100		n=200	
σ	$\alpha=5\%$	$\alpha=10\%$	$\alpha=5\%$	$\alpha=10\%$	$\alpha=5\%$	$\alpha=10\%$
$H_0:\varphi_2=0$, $\varphi_1=0.4$; $\varphi_2=0$ 的水平/%						
0.2	5.4 (4.2)	10.2 (11.4)	4.8 (5.0)	10.4 (11.8)	4.8 (4.6)	10.8 (9.8)
0.6	6.8 (6.0)	10.4 (10.2)	4.6 (5.2)	9.0 (11.6)	4.8 (4.2)	10.4 (11.0)
1.2	4.8 (6.0)	9.2 (10.4)	4.8 (5.6)	9.8 (11.4)	6.4 (5.8)	10.0 (11.4)
1.6	6.2 (5.8)	9.4 (10.8)	5.0 (5.0)	9.0 (10.4)	4.2 (4.8)	9.4 (10.0)
2.0	4.6 (5.4)	9.6 (10.0)	4.8 (3.8)	9.2 (10.2)	5.6 (5.6)	10.6 (10.4)
$H_0:\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$; $\varphi_1=0.4$ 的功效/%						
0.2	60.6 (76.8)	75.4 (86.4)	94.2 (97.6)	96.6 (99.0)	100.0 (100.0)	100.0 (100.0)
0.6	68.0 (89.4)	77.8 (89.0)	90.6 (96.6)	95.0 (98.0)	99.6 (100.0)	100.0 (100.0)
1.2	68.2 (76.0)	76.2 (83.8)	95.4 (97.6)	97.6 (99.2)	100.0 (100.0)	100.0 (100.0)
1.6	67.0 (79.8)	78.6 (87.4)	96.4 (97.2)	98.8 (98.2)	100.0 (100.0)	100.0 (100.0)
2.0	65.6 (76.0)	76.0 (87.8)	93.0 (98.2)	95.8 (99.2)	99.6 (100.0)	99.8 (100.0)
$H_0:\varphi_1=0$, $\varphi_2=0.4$; $\varphi_1=0$ 的水平/%						
0.2	5.4 (5.6)	9.8 (9.8)	5.6 (4.4)	10.4 (8.8)	5.4 (5.2)	9.8 (8.8)
0.6	6.0 (7.4)	10.4 (10.2)	4.8 (4.2)	10.0 (9.8)	5.8 (3.6)	10.6 (10.2)
1.2	6.8 (5.8)	10.6 (10.6)	4.8 (2.2)	9.6 (7.0)	4.6 (3.0)	11.2 (8.8)
1.6	5.8 (4.2)	9.0 (8.8)	4.4 (5.2)	10.2 (9.6)	6.0 (4.0)	10.8 (8.8)
2.0	4.2 (5.8)	9.8 (10.2)	4.4 (6.0)	10.6 (12.4)	5.2 (3.8)	10.0 (8.2)
$H_0:\varphi_2=0$, $\varphi_1=0$; $\varphi_2=0.4$ 的功效/%						
0.2	47.0 (73.0)	60.0 (81.2)	81.2 (97.8)	90.0 (98.6)	99.2 (100.0)	100.0 (100.0)
0.6	44.8 (74.2)	59.4 (81.0)	77.8 (97.4)	87.4 (98.6)	98.8 (100.0)	99.8 (100.0)
1.2	43.0 (73.8)	56.0 (83.2)	81.6 (96.8)	89.8 (98.4)	98.6 (100.0)	99.6 (100.0)
1.6	44.2 (72.8)	54.8 (82.8)	73.4 (96.6)	85.2 (98.4)	99.0 (100.0)	100.0 (100.0)
2.0	45.4 (73.6)	56.6 (81.8)	80.0 (96.6)	87.8 (98.2)	99.4 (100.0)	99.6 (100.0)
$H_0:\varphi_2=0$, $\varphi_1=0.2$; $\varphi_2=0.4$ 的功效/%						
0.2	27.2 (29.2)	36.4 (40.8)	58.2 (54.2)	69.8 (67.0)	81.8 (85.2)	88.2 (90.8)
0.6	31.4 (29.8)	41.8 (43.2)	53.8 (54.8)	65.8 (67.8)	85.0 (85.0)	91.8 (92.8)
1.2	29.6 (30.6)	41.4 (42.2)	55.2 (58.2)	68.6 (70.6)	84.8 (82.8)	91.8 (90.6)
1.6	29.6 (27.8)	40.4 (39.8)	55.2 (54.6)	67.2 (68.6)	82.4 (87.6)	89.8 (92.4)
2.0	33.4 (26.0)	42.6 (39.2)	57.4 (56.4)	69.4 (68.2)	87.2 (82.2)	93.8 (91.6)
$H_0:\varphi_1=0$, $\varphi_2=0.2$; $\varphi_1=0.4$ 的功效/%						
0.2	40.2 (73.4)	52.8 (81.0)	77.6 (94.4)	85.2 (97.4)	98.6 (100.0)	99.8 (100.0)
0.6	46.6 (74.0)	60.6 (83.0)	76.6 (97.6)	86.2 (99.0)	98.2 (100.0)	99.4 (100.0)
1.2	45.0 (75.8)	56.4 (83.6)	85.2 (95.8)	92.4 (98.0)	99.6 (99.4)	99.8 (99.8)
1.6	41.2 (75.2)	53.8 (82.8)	82.8 (96.8)	93.0 (98.2)	98.8 (100.0)	99.6 (100.0)
2.0	46.2 (73.6)	56.4 (83.8)	79.6 (97.2)	88.4 (98.6)	99.2 (100.0)	99.8 (100.0)

a) 括弧中的数字为 t-检验

表 2　$BL(2,0,1,1)$ 模型系数检验的经验水平和功效

	n=50		n=100		n=200	
σ	$\alpha=5\%$	$\alpha=10\%$	$\alpha=5\%$	$\alpha=10\%$	$\alpha=5\%$	$\alpha=10\%$
$H_0:\phi=0,\ \varphi_1=0.2,\ \ \varphi_2=0.4,\ \ \phi=0$ 的水平/%						
0.2	5.2%	10.0%	5.0%	8.6%	5.2%	10.4%
0.6	6.4%	10.6%	4.8%	8.6%	4.2%	9.8%
1.2	5.4%	9.8%	4.2%	10.4%	5.0%	8.8%
1.6	4.8%	9.0%	5.4%	11.4%	5.8%	8.8%
2.0	6.0%	9.4%	5.4%	9.6%	5.0%	11.6%
$H_0:\phi=0,\ \varphi_1=0.2,\ \ \varphi_2=0.4,\ \ \phi=0.2$ 的功效/%						
0.2	15.6%	24.0%	31.0%	43.2%	58.4%	73.8%
0.6	15.8%	24.0%	26.2%	38.8%	58.4%	72.4%
1.2	15.8%	21.6%	29.4%	44.2%	61.4%	74.2%
1.6	19.6%	27.4%	29.0%	37.6%	63.6%	76.4%
2.0	15.2%	20.8%	27.4%	40.0%	61.2%	77.8%
$H_0:\phi=0,\ \varphi_1=0.2,\ \ \varphi_2=0,\ \ \phi=0$ 的水平/%						
0.2	5.2%	10.8%	5.4%	10.2%	4.6%	9.6%
0.6	6.2%	9.0%	6.2%	9.2%	5.4%	9.8%
1.2	5.8%	8.6%	5.2%	10.0%	6.8%	10.8%
1.6	6.6%	9.4%	5.0%	11.4%	5.0%	10.2%
2.0	6.2%	11.4%	5.0%	9.4%	4.8%	10.8%
$H_0:\phi=0,\ \varphi_1=0.2,\ \ \varphi_2=0,\ \ \phi=0.2$ 的功效/%						
0.2	16.2%	23.0%	35.4%	48.2%	60.4%	70.6%
0.6	19.8%	28.2%	31.6%	42.8%	62.4%	76.8%
1.2	17.6%	23.4%	33.2%	47.0%	59.4%	73.0%
1.6	12.0%	19.6%	35.6%	48.8%	66.8%	79.8%
2.0	16.8%	24.4%	26.2%	36.0%	52.4%	66.2%
$H_0:\phi=0,\ \varphi_1=0,\ \ \varphi_2=0.4,\ \ \phi=0$ 的水平/%						
0.2	6.2%	10.0%	6.6%	9.0%	5.2%	9.6%
0.6	5.8%	10.0%	5.4%	11.4%	4.6%	9.2%
1.2	5.4%	9.4%	3.8%	7.8%	4.0%	9.2%
1.6	5.4%	8.4%	5.8%	10.8%	4.0%	10.2%
2.0	6.2%	10.8%	5.6%	9.0%	4.4%	8.4%
$H_0:\phi=0,\ \varphi_1=0,\ \ \varphi_2=0.4,\ \ \phi=0.2$ 的功效/%						
0.2	16.0%	22.6%	29.8%	42.2%	68.4%	80.8%
0.6	14.4%	22.2%	28.0%	40.6%	64.4%	77.6%
1.2	15.8%	23.8%	26.2%	37.6%	58.4%	70.4%
1.6	16.6%	23.6%	30.8%	44.8%	61.0%	74.4%
2.0	16.4%	22.0%	25.4%	34.6%	70.2%	82.4%

致谢 审稿人对本文提出了很有价值的建议, 作者在此表示衷心的感谢.

参考文献

1 Brillinger D R. Remarks concerning graphical models for time series and point processes. *Revi de Econometrica*, **16**: 1–23 (1996)

2 Cox D R, Wermuth N. Multivariate Dependencies-Models, Analysis and Interpretation. London: Chapman & Hall, 1996

3 Edwards D. Introduction to Graphical Modelling. New York: Springer-Verlag, 2000

4 Lauritzen S L. Graphical Models. Oxford: Oxford University Press, 1996

5 Whittaker J. Graphical Models in Applied Multivariate Statistics. Chichester: John Wiley, 1990

6 Dahlhaus R, Eichler M. Causality and graphical models for time series. In: Green P, Hjort N, Richardson S, eds. Highly Structured Stochastic Systems. Oxford: University Press, 2002

7 Eichler M. Graphical modelling of time series. Preprint, Universit Heidelberg, 2001

8 Eichler M. Granger-causality and path diagrams for multivariate time series. *J Econometrics*, **137**(2): 334–353 (2007)

9 Oxley L, Reale M, Wilson G T. Finding directed acyclic graphs for vector autoregressions. In: Antoch J, ed. Proceedings in Computational Statistics. Heidelberg: Physical-Verlag, 2004, 1621–1628

10 Real M, Wilson G T. The sampling properties of conditional independence graphs for structural vector autoregression. *Biometrika*, **8**: 7–461 (2002)

11 Thiesson B, Chickering D M, Heckerman D, et al. ARMA time-series modelling with graphical models. In: Proceedings of the Twentieth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. Banff, Canada: AUAI Press, 2004, 552–560

12 Shao J. Mathematical Statistics. New York: Springer-Verlag, 1999

13 Liu J. On stationarity and asymptotic inference of bilinear time series models. *Statist Sinica*, **2**: 479–494 (1992)