



一些整数子集的组合性质

献给文兰教授 80 寿辰

叶向东*, 黄文, 邵松

中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026

E-mail: yexd@ustc.edu.cn, wenh@mail.ustc.edu.cn, songshao@ustc.edu.cn

收稿日期: 2024-12-17; 接受日期: 2025-03-10; 网络出版日期: 2025-04-28; * 通信作者

国家重点研发计划 (批准号: 2024YFA1013601, 2024YFA1013602 和 2024YFA1013600) 和国家自然科学基金 (12426201, 12371196, 12031019 和 12090012) 资助项目

摘要 本综述回顾一些整数“大”子集的组合性质, 此处大子集包括正上 Banach 密度子集、分段相对稠密子集等. 在此过程中, 本文给出 Furstenberg-Glasner 定理的上 Banach 密度多项式版本以及高维版本的证明, 并且利用遍历论工具证明, 如果 $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ 是两个具有正上 Banach 密度的子集, $p_1, p_2, \dots, p_k$ 是一组满足 $p_i(0) = 0, 1 \leq i \leq k$ 的整值多项式, 则 $\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m + p_1(n), m + p_2(n), \dots, m + p_k(n) \in A - B\}$ 在 $\mathbb{Z}^2$ 中是分段相对稠密的. 此外, 本文提供 Jin 定理的一个简单动力系统证明, 即上述提到的 $A - B$ 是分段相对稠密的. 同时, 对于 Kra 等提出的一个问题, 当涉及的集合是分段相对稠密时, 本文给出肯定的回答.

关键词 遍历 Ramsey 理论 分段相对稠密 正上 Banach 密度

MSC (2020) 主题分类 37A05, 37A30

1 引言

在本文中, 整数、非负整数和自然数分别用 $\mathbb{Z}$ 、 $\mathbb{Z}_+$ 和 $\mathbb{N}$ 表示. 整值多项式是指在整数处取整数值的多项式. 本文主要讨论 $\mathbb{Z}$ 中的子集, 大部分结果也适用于 $\mathbb{N}$ 中的子集.

遍历 Ramsey 理论始于 Furstenberg 著名的论文 [15], 它将来自动力系统理论的技术、方法和思想应用于在 Ramsey 理论和组合数论中出现的问题. 本文从动力系统的角度介绍整数大子集的一些组合性质.

Bergelson [4] 列出了 Ramsey 理论的三个原则. 第一条原则为: 结构在有限划分下保持. 而第二个原则解释了什么是大集合: “... 这是 Ramsey 理论的第二个原则, 即在幕后总有一个适当的大的概念, 使得任何大集合都包含着所寻求的高度有组织的子结构. 大的概念应该满足的唯一其他要求是, 如果

英文引用格式: Ye X, Huang W, Shao S. Combinatorial properties of some big sets (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 727–746, doi: 10.1360/SSM-2024-0377

A 是大的, 并且 $A = \bigcup_{i=1}^r C_i$, 则其中一个 $C_i, i = 1, \dots, r$ 也是大的.” 于是具有正上 (Banach) 密度和分段相对稠密性的集合是 $\mathbb{Z}$ 的典型大子集.

集合 $S \subseteq \mathbb{Z}$ 的上密度和上 Banach 密度分别定义为

$$\bar{d}(S) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S \cap [-n, n]|}{2n+1}, \quad d^*(S) = \limsup_{|I| \rightarrow \infty} \frac{|S \cap I|}{|I|},$$

其中 I 取遍 $\mathbb{Z}$ 上的区间, $\mathbb{Z}$ 上的区间指形如 $[a, b] = \{a, a+1, \dots, b\}$ 的子集. 如果存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\bigcup_{i=1}^N (S-i)$ 包含任意长的区间, 则称 $\mathbb{Z}$ 的子集 S 是分段相对稠密的. 这个概念可以推广到一般交换半群 $(G, +)$ 上. 设 S 为交换半群 $(G, +)$ 的子集, 如果存在一个有限子集 F 使得 $\bigcup_{i \in F} (S-i)$ 在 G 中是厚的, 即对于任何有限子集 K 存在 $x \in G$ 使得 $K+x \subseteq \bigcup_{i \in F} (S-i)$, 则称 S 是分段相对稠密.

本文首先讨论具有正上 Banach 密度的子集与分段相对稠密子集之间的关系. 例如, Jin 定理指出, 如果 $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ 是具有正上 Banach 密度的集合, 则 $A-B$ 是分段相对稠密的 (参见文献 [29]). 本文将给出这个定理的一个简单的动力系统证明.

在论文的第二部分, 我们介绍一些围绕 van der Waerden 定理的结果. van der Waerden 定理指出, $\mathbb{Z}$ 中的每个分段相对稠密子集都包含任意有限长度的等差数列, 即如果 $S \subseteq \mathbb{Z}$ 是分段相对稠密的, 则对于所有 $k \in \mathbb{N}$, 集合 $\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m, m+n, \dots, m+(k-1)n \in S, n \neq 0\}$ 是非空的. Furstenberg 和 Glasner^[17] 使用 Stone-Čech 紧化理论得到了以下漂亮的结果: 设 $k \in \mathbb{N}$ 且 S 在 $\mathbb{Z}$ 中是分段相对稠密的, 则集合 $\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m, m+n, \dots, m+(k-1)n \in S\}$ 在 $\mathbb{Z}^2$ 中是分段相对稠密的.

文献 [4] 指出的 Ramsey 理论的第三原则是 “我们想在本节讨论的 Ramsey 理论的第三个也是最后一个原则是, 在大集合中所寻求的构形是丰富的. 此处丰富不仅意味着描述构形的参数在参数空间中形成大集合, 而且这些参数在整数的所有子集族中都很好地分散开来.” Furstenberg-Glasner 定理是这一原则的极好例证. 第 4 节将给出 Furstenberg-Glasner 定理的高维版本和密度版本.

在论文的最后部分, 介绍关于 Erdős 和集猜想的最新进展. 此外, 还将给出一些关于和集的新结果. 例如, 本文证明了如果 $A \subset \mathbb{Z}$ 是一个分段相对稠密集, 则存在无限集合 $B_1, B_2, \dots$ 使得对于每一个 $k \in \mathbb{N}$, 有 $B_1 + B_2 + \dots + B_k \subset A$.

本文余下内容的安排如下. 第 2 节提供本文涉及的必要概念和结果. 第 3 节讨论具有正上 Banach 密度子集与分段相对稠密子集之间的关系. 第 4 节介绍一些围绕 van der Waerden 定理的结果. 特别是, 本文给出 Furstenberg-Glasner 定理的高维版本和密度版本. 第 5 节介绍关于 Erdős 和集猜想的最新结果.

2 预备知识

本节介绍本文涉及的必要概念和结果.

2.1 动力系统

一个保测系统是一个四元组 $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$, 其中 $(X, \mathcal{X}, \mu)$ 是一个 Lebesgue 概率空间, 而 $T: X \rightarrow X$ 是一个可逆的保测变换, 即 X 可以被赋予一个紧致度量空间的结构, 而 $\mathcal{X}$ 是它的 Borel σ -代数. 对于一个保测系统 $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$, 与 T 相关的酉算子 (Koopman 算子) 指 $U_T: L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu)$, $f \mapsto f \circ T$. 在后文中, 通常用 Tf 来表示 $U_T f$.

对于一个保测系统 $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$, 记 $\mathcal{I}(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ 为不变集的 σ -代数 $\{A \in \mathcal{X} : T^{-1}A = A\}$. 有时会简写为 $\mathcal{I}$ 或 $\mathcal{I}(T)$. 一个保测系统是遍历的是指所有 T 不变集的测度要么是 0 要么是 1.

一个拓扑动力系统是指一个二元组 (X, T) , 其中 X 是一个紧致度量空间且 $T: X \rightarrow X$ 是一个同胚映射. 一个非空闭不变子集 $Y \subset X$ 自然地定义了 (X, T) 的一个子系统 (Y, T) . 点 x 的轨道 $\mathcal{O}(x, T)$ (或者简单地写作 $\mathcal{O}(x)$) 是指集合 $\{T^n x : n \in \mathbb{Z}\}$.

一个拓扑动力系统 (X, T) 称为极小的, 如果任意 $x \in X$ 的轨道在 X 中稠密. 等价地, (X, T) 是极小的当且仅当它不包含任何非平凡的子系统. 通过使用 Zorn 引理的论证, 可知任何拓扑动力系统 (X, T) 都包含极小的子系统. 此子集也被称为 X 的一个极小子集. 一个点 $x \in X$ 被称为极小的或几乎周期性的, 如果子系统 $(\overline{\mathcal{O}(x, T)}, T)$ 是极小的.

对于一个拓扑动力系统 (X, T) , 记 $\mathcal{M}(X)$ 为 X 上所有 Borel 概率测度的集合. 定义 $\mathcal{M}_T(X) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) : T_*\mu = \mu \circ T^{-1} = \mu\}$ 为 X 上所有 T 不变 Borel 概率测度的集合. 在弱 * 拓扑下, $\mathcal{M}(X)$ 和 $\mathcal{M}_T(X)$ 是紧致凸空间.

2.2 Furstenberg 族

本小节介绍一些与 Furstenberg 族相关的概念 (详细内容参见文献 [16]). 设 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ 是 $\mathbb{Z}$ 的所有子集的集合. $\mathcal{P}$ 的子集 $\mathcal{F}$ 是一个 (Furstenberg) 族, 如果它是向上遗传的, 即如果 $F_1 \subset F_2$ 且 $F_1 \in \mathcal{F}$, 则 $F_2 \in \mathcal{F}$. 如果 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{P}$ 的真子集, 即既不为空也不是 $\mathcal{P}$ 的全部, 则称族 $\mathcal{F}$ 为真的. 容易看出, $\mathcal{F}$ 是真的当且仅当 $\mathbb{Z} \in \mathcal{F}$ 且 $\emptyset \notin \mathcal{F}$. $\mathcal{P}$ 的任何子集 $\mathcal{A}$ 可以生成一个族 $[\mathcal{A}] = \{F \in \mathcal{P} : \text{存在 } A \in \mathcal{A} \text{ 使得 } F \supset A\}$. 如果一个真族 $\mathcal{F}$ 在交运算下是封闭的, 则 $\mathcal{F}$ 称为一个滤子. 对于一个族 $\mathcal{F}$, 其对偶族定义为

$$\mathcal{F}^* = \{F \in \mathcal{P} : \mathbb{Z} \setminus F \notin \mathcal{F}\} = \{F \in \mathcal{P} : F \cap F' \neq \emptyset, \forall F' \in \mathcal{F}\}.$$

如果 $\mathcal{F}$ 是真的, 则 $\mathcal{F}^*$ 也是一个真族. 显然, 对于任何真族 $\mathcal{F}$, 有

$$(\mathcal{F}^*)^* = \mathcal{F} \quad \text{以及} \quad \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_2^* \subset \mathcal{F}_1^*.$$

2.3 一些重要的族

一个子集 $S \subseteq \mathbb{Z}$ 称为是相对稠密的 (syndetic 或 relatively dense), 如果它有有限的间隔, 即存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对于每一个 $i \in \mathbb{Z}$, 都有 $[i, i+N] \cap S = \{i, i+1, \dots, i+N\} \cap S \neq \emptyset$. S 是厚的 (thick), 如果它包含任意长的区间, 即存在一个序列 n_i 使得 $S \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} [n_i, n_i+i]$. 所有相对稠密 (厚) 子集的集合用 $\mathcal{F}_s$ ($\mathcal{F}_t$) 表示. 注意 $\mathcal{F}_s^* = \mathcal{F}_t$ 和 $\mathcal{F}_t^* = \mathcal{F}_s$.

易见一个子集是分段相对稠密的当且仅当它是某个相对稠密子集与某个厚子集的交集. 用 $\mathcal{F}_{ps}$ 表示所有分段相对稠密子集的集合.

设 $\{b_i\}_{i \in I}$ 为 $\mathbb{Z}$ 中的有限或无限序列. 定义有限和集合为

$$FS(\{b_i\}_{i \in I}) = \left\{ \sum_{i \in \alpha} b_i : \alpha \text{ 为 } I \text{ 非空有限子集} \right\}.$$

如果 F 包含某个 $FS(\{p_i\}_{i=1}^{\infty})$, 则称 F 是一个 IP 集. IP 集的全体用 $\mathcal{F}_{ip}$ 表示. 如果一个子集与任何 IP 集都有非空交集, 则称其为一个 IP* 集.

设 S 为 $\mathbb{Z}$ 的一个子集. S 的上 Banach 密度和下 Banach 密度分别定义为

$$d^*(S) = \limsup_{|I| \rightarrow \infty} \frac{|S \cap I|}{|I|} \quad \text{和} \quad d_*(S) = \liminf_{|I| \rightarrow \infty} \frac{|S \cap I|}{|I|},$$

其中 I 跑遍 $\mathbb{Z}$ 的所有区间. S 的上密度和下密度分别定义为

$$\bar{d}(S) = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{|S \cap [-N, N]|}{2N+1} \quad \text{和} \quad \underline{d}(S) = \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{|S \cap [-N, N]|}{2N+1}.$$

如果上下密度相等, 则 $d(A) = \bar{d}(S) = \underline{d}(S)$ 称为 S 的密度. 令 $\mathcal{F}_{\text{pubd}} = \{S \subseteq \mathbb{Z} : d^*(S) > 0\}$ 以及 $\mathcal{F}_{\text{pd}} = \{S \subseteq \mathbb{Z} : \bar{d}(S) > 0\}$.

类似地, 可以在 $\mathbb{Z}^k$ 中定义上述概念. 例如, 对于 $k \in \mathbb{N}$ 和 $S \subseteq \mathbb{Z}^k$, S 的上密度定义为

$$\bar{d}(S) = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{|S \cap [-N, N]^k|}{(2N+1)^k};$$

而 $S \subseteq \mathbb{Z}^k$ 的上 Banach 密度定义为

$$d^*(S) = \limsup_{N_i - M_i \rightarrow \infty, 1 \leq i \leq k} \frac{|S \cap \prod_{i=1}^k [M_i, N_i - 1]|}{\prod_{i=1}^k (N_i - M_i)}.$$

2.4 Furstenberg 对应原则

以下是著名的 Furstenberg 对应原则.

定理 2.1 (Furstenberg 对应原则, 参见文献 [15, 定理 1.1]) 令 $C \subseteq \mathbb{Z}$ 且 $d^*(C) > 0$, 则存在一个保测系统 $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ 和一个子集 $A \in \mathcal{X}$, 使得 $\mu(A) = d^*(C)$, 且对于所有 $k \in \mathbb{N}$ 和 $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$, 都有

$$d^*(C \cap (C - n_1) \cap \dots \cap (C - n_k)) \geq \mu(A \cap T^{-n_1} A \cap \dots \cap T^{-n_k} A).$$

它的高维版本如下:

定理 2.2 (Furstenberg 对应原则, 参见文献 [8, 命题 7.2]) 设 $C \subseteq \mathbb{Z}^r$ 且 $d^*(C) > 0$, 则存在一个概率空间 $(X, \mathcal{X}, \mu)$, r 个在 X 上的交换的保测变换 $T_1, \dots, T_r$, 以及一个子集 $A \in \mathcal{X}$ 使得 $\mu(A) = d^*(C)$, 且对于所有 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_k \in \mathbb{Z}^r$, 有

$$d^*(C \cap (C - \mathbf{n}_1) \cap \dots \cap (C - \mathbf{n}_k)) \geq \mu(A \cap T_{\mathbf{n}_1}^{-1} A \cap \dots \cap T_{\mathbf{n}_k}^{-1} A),$$

其中对于 $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}^r$, 有 $T_{\mathbf{n}} = T_1^{n_1} \circ \dots \circ T_r^{n_r}$.

2.5 Stone-Čech 紧化

本小节简要介绍 $\mathbb{Z}$ 的 Stone-Čech 紧化, 详细内容参见文献 [22]. $\mathbb{Z}$ 取离散拓扑, 所有 $\mathbb{Z}$ 上超滤子的集合用 $\beta\mathbb{Z}$ 表示. 设 $A \subset \mathbb{Z}$, 并定义 $\bar{A} = \{p \in \beta\mathbb{Z} : A \in p\}$. 可以验证 $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cap B}$, $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$, 其中 $A, B \subset \mathbb{Z}$. 集合 $\{\bar{A} : A \subset \mathbb{Z}\}$ 构成了 $\beta\mathbb{Z}$ 的开集 (同时也是闭集) 的基. 在这种拓扑下, $\beta\mathbb{Z}$ 是一个紧的 Hausdorff 空间. 定义 $j : \mathbb{Z} \rightarrow \beta\mathbb{Z}$ 使得 $j(t) = \{A \subset \mathbb{Z} : t \in A\}$. 则 $(j, \beta\mathbb{Z})$ 是 $\mathbb{Z}$ 的最大紧化, 称为 Stone-Čech 紧化.

3 正上 Banach 密度子集与分段相对稠密子集

本节讨论 $\mathbb{Z}$ 具有正上 Banach 密度的子集与分段相对稠密子集之间的关系.

3.1 正上 Banach 密度子集与分段相对稠密子集

众所周知, 对于 $\mathbb{Z}$ 的一个子集 C , 如果 $d^*(C) > 0$, 则 $C - C$ 是相对稠密子集. Følner 证明了一个更强的结论, 即 $C - C$ 是“几乎” Bohr₀ 集 (见下文定义 3.1), 即存在一个 Bohr₀ 集 A 和一个集合 $N \subseteq \mathbb{Z}$, 使得 $d^*(N) = 0$ 和 $C - C \supseteq A \setminus N$ (参见文献 [2]).

定理 3.1 (Jin 定理, 参见文献 [29]) 设 $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ 是具有正上 Banach 密度的集合, 则 $A - B$ 是分段相对稠密的.

目前有多个证明 Jin 定理的方法 (参见文献 [2, 5, 29]). 关于一般群下的 Jin 定理, 参见文献 [3, 9]. 后面将给出 Jin 定理的一个简单动力系统证明.

Bergelson 等^[5] 推广了 Jin 的结果, 他们证明了 $A - B$ 具有更好的结构. 在介绍他们的结果之前, 我们需要以下概念:

定义 3.1 一个 $\mathbb{Z}$ 的子集 A 称为 Bohr 集, 是指存在 $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{T}^m$ 和一个非空开集 $U \subset \mathbb{T}^m$ 使得 $\{n \in \mathbb{Z} : n\alpha \in U\}$ 包含在 A 中; 如果还要求 $0 \in U$, 则称 A 是一个 Bohr₀ 集.

一个 $\mathbb{Z}$ 的子集 S 称为分段 Bohr 的, 是指它是某个 Bohr 集与某个厚集的交集.

关于 Bohr 集的详情, 参见文献 [3, 5]. 下面是 Bergelson 等的结果:

定理 3.2^[5] 设 $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ 是具有正上 Banach 密度的集合, 则 $A - B$ 是分段 Bohr 的.

反之, 我们有如下定理:

定理 3.3^[3] 对于每一个分段 Bohr 集合 $S \subseteq \mathbb{Z}$, 存在具有正上 Banach 密度子集 $A, B \subseteq \mathbb{Z}$, 使得 $A - B \subseteq S$.

3.2 Jin 定理的动力系统证明

文献 [5] 已经给出了一个 Jin 定理的动力系统证明. 这里给出一个更为简洁的证明. 首先需要有一个引理.

引理 3.1 设 $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ 是具有正上 Banach 密度的集合. 对于任意的 $R \in \mathbb{N}$ 和实数 $C > 1$, 存在 $m, n \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} \mathbf{1}_A(m+j) \mathbf{1}_B(n+j) \geq \frac{d^*(A)d^*(B)}{C}. \quad (3.1)$$

证明 由于 $d^*(A)d^*(B) > 0$, 选取 $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}$ 和 $L_1, L_2 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{|A \cap [u_1, u_1 + L_1 - 1]|}{L_1} > \frac{d^*(A)}{C^{\frac{1}{4}}}, \quad \frac{R}{L_1} < \left(\frac{1}{C^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{C^{\frac{1}{2}}} \right) d^*(A) \quad (3.2)$$

且

$$\frac{|B \cap [u_2, u_2 + L_2 - 1]|}{L_2} > \frac{d^*(B)}{C^{\frac{1}{4}}}, \quad \frac{R}{L_2} < \left(\frac{1}{C^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{C^{\frac{1}{2}}} \right) d^*(B). \quad (3.3)$$

于是对于任意 $j \in \{0, 1, \dots, R-1\}$, 根据 (3.2), 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_1} \sum_{m=u_1}^{u_1+L_1-1} \mathbf{1}_A(m+j) &= \frac{1}{L_1} |A \cap [j+u_1, j+u_1+L_1-1]| \\ &\geq \frac{1}{L_1} |A \cap [u_1, u_1+L_1-1]| - \frac{1}{L_1} |A \cap [u_1, u_1+j-1]| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{d^*(A)}{C^{\frac{1}{4}}} - \frac{R}{L_1} \\
&\geq \frac{d^*(A)}{C^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

类似地, 对于任意 $j \in \{0, 1, \dots, R-1\}$, 根据 (3.3), 有

$$\frac{1}{L_2} \sum_{m=u_2}^{u_2+L_2-1} \mathbf{1}_B(m+j) \geq \frac{d^*(B)}{C^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.5}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{L_1 L_2} \sum_{m=u_1}^{u_1+L_1-1} \sum_{n=u_2}^{u_2+L_2-1} \left(\frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} \mathbf{1}_A(m+j) \mathbf{1}_B(n+j) \right) \\
&= \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} \left(\frac{1}{L_1} \sum_{m=u_1}^{u_1+L_1-1} \mathbf{1}_A(m+j) \right) \left(\frac{1}{L_2} \sum_{n=u_2}^{u_2+L_2-1} \mathbf{1}_B(n+j) \right) \\
&\stackrel{(3.4), (3.5)}{\geq} \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} \frac{d^*(A)}{C^{\frac{1}{2}}} \frac{d^*(B)}{C^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{d^*(A)d^*(B)}{C}.
\end{aligned}$$

从而存在 $m \in [u_1, u_1 + L_1 - 1]$ 和 $n \in [u_2, u_2 + L_2 - 1]$ 使得

$$\frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} \mathbf{1}_A(m+j) \mathbf{1}_B(n+j) \geq \frac{d^*(A)d^*(B)}{C}.$$

证毕. □

注 3.1 容易将引理 3.1 推广到有限个具有正上 Banach 密度的情形. 具体来讲, 设 $k \geq 2$, $A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq \mathbb{Z}$ 是具有正上 Banach 密度的集合. 对于任意的 $R \in \mathbb{N}$ 和一个实数 $C > 1$, 存在 $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} \mathbf{1}_{A_1}(m_1+j) \mathbf{1}_{A_2}(m_2+j) \cdots \mathbf{1}_{A_k}(m_k+j) \geq \frac{d^*(A_1)d^*(A_2) \cdots d^*(A_k)}{C}. \tag{3.6}$$

下面给出 Jin 定理的简单动力系统证明.

定理 3.1 证明 设 $(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ 为全符号转移系统, 设 $[1] = \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} : x(0) = 1\}$. 由于 A 和 B 具有正上 Banach 密度, 根据引理 3.1, 可以选取 $R_i \in \mathbb{N}$, $m_i, n_i \in \mathbb{Z}$ 和实数 $C_i > 1$ 使得 $\lim_{i \rightarrow \infty} R_i = \infty$, $\lim_{i \rightarrow \infty} C_i = 1$ 且

$$\frac{1}{R_i} \sum_{j=0}^{R_i-1} \mathbf{1}_A(m_i+j) \mathbf{1}_B(n_i+j) \geq \frac{d^*(A)d^*(B)}{C_i}. \tag{3.7}$$

不失一般性, 假设在弱 * 拓扑下,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{R_i} \sum_{j=0}^{R_i-1} (\sigma \times \sigma)^j \delta_{(\sigma^{m_i} \mathbf{1}_A, \sigma^{n_i} \mathbf{1}_B)} = \mu \in \mathcal{M}(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}, \sigma \times \sigma). \tag{3.8}$$

根据 (3.7), 有

$$\mu([1] \times [1]) \geq d^*(A)d^*(B) > 0. \quad (3.9)$$

设

$$E = \{n \in \mathbb{Z} : \mu([1] \times [1]) \cap (\sigma \times \sigma)^{-n}([1] \times [1]) > 0\}.$$

根据 Poincaré 回复定理, 可知 E 为相对稠密的. 则对于任意足够大的 $N \in \mathbb{N}$, 有 $E \cap [-N, N] \neq \emptyset$. 设 $E \cap [-N, N] = \{k_1, k_2, \dots, k_M\}$. 由于 $k_1, k_2, \dots, k_M \in E$, 于是

$$\mu([1] \times [1]) \cap (\sigma \times \sigma)^{-k_t}([1] \times [1]) > 0, \quad t = 1, 2, \dots, M.$$

由于 $([1] \times [1]) \cap (\sigma \times \sigma)^{-k_t}([1] \times [1])$ 是既开又闭的, 所以对于足够大的 i 和 $t = 1, 2, \dots, M$, 有

$$\frac{1}{R_i} \sum_{j=0}^{R_i-1} (\sigma \times \sigma)^j \delta_{(\sigma^{m_i} \mathbf{1}_A, \sigma^{n_i} \mathbf{1}_B)}([1] \times [1]) \cap (\sigma \times \sigma)^{-k_t}([1] \times [1]) > 0.$$

于是对于 $t = 1, 2, \dots, M$, 存在 $j_t \in [0, R_i - 1]$ 使得

$$(\sigma^{m_i+j_t} \mathbf{1}_A, \sigma^{n_i+j_t} \mathbf{1}_B) \in ([1] \times [1]) \cap (\sigma \times \sigma)^{-k_t}([1] \times [1]).$$

由此可得 $m_i + j_t, m_i + j_t + k_t \in A$ 和 $n_i + j_t, n_i + j_t + k_t \in B$. 从而有

$$A - B \supseteq \{k_t + m_i - n_i : t = 1, 2, \dots, M\},$$

即 $E \cap [-N, N] + (m_i - n_i) \subseteq A - B$, 这意味着 $A - B$ 是分段相对稠密的. 证毕. $\square$

注 3.2 对于一个遍历系统 $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ 和 $B \in \mathcal{X}$, 如果 $\mu(B) > 0$, 则集合 $E = \{n \in \mathbb{Z} : \mu(B \cap T^{-n}B) > 0\}$ 不仅是相对稠密的, 而且是“几乎” Bohr₀ 的, 即存在一个 Bohr₀ 集 A 和一个集合 $N \subseteq \mathbb{Z}$, 使得 $d^*(N) = 0$ 且 $E \supseteq A \setminus N$ (参见文献 [27, 定理 2.2.4]). 这意味着 E 是一个分段 Bohr 集. 在定理 3.1 的证明中, 我们证明了对于足够大的 $N \in \mathbb{N}$, 存在某个 $t_N \in \mathbb{Z}$ 使得 $E \cap [-N, -N] + t_N \subseteq A - B$. 根据文献 [3, 引理 5.4]¹⁾, 我们由此得到 $A - B$ 是分段 Bohr 集, 即也提供了定理 3.2 的一个证明.

由上面的证明可得到以下结果, 它具有独立的意义, 并且可以视为 Furstenberg 相应原则的一种推广.

定理 3.4 设 $k \geq 2$ 且 $A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq \mathbb{Z}$ 是具有正上 Banach 密度的集合, 则存在一个保测系统 $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ 和一个子集 $B \in \mathcal{X}$, 使得 $\mu(B) \geq \prod_{s=1}^k d^*(A_s) > 0$, 并且对于所有 $t \in \mathbb{N}$ 和 $n_1, n_2, \dots, n_t \in \mathbb{Z}$, 如果 $\mu(T^{-n_1}B \cap T^{-n_2}B \cap \dots \cap T^{-n_t}B) > 0$, 则

$$(A_j - n_1) \cap (A_j - n_2) \cap \dots \cap (A_j - n_t) \neq \emptyset, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

证明 设 $(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ 为全符号转移系统, 设 $[1] = \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} : x(0) = 1\}$. 设 $X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \times \dots \times \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ (共 k 次), $T = \sigma \times \dots \times \sigma$ (共 k 次), $B = [1] \times \dots \times [1]$ (共 k 次).

1) 文献 [3, 引理 5.4] 陈述如下. 设 $S, H \subseteq \mathbb{Z}$. 如果 $S \subseteq \mathbb{Z}$ 是分段 Bohr 集, 并且对于每个 $N \in \mathbb{N}$ 存在某个 $t_N \in \mathbb{Z}$ 使得 $S \cap [-N, N] + t_N \subseteq H$, 则 H 也是分段 Bohr 集.

由于 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 具有正上 Banach 密度, 根据注 3.1, 可以选择 $R_i \in \mathbb{N}$, 实数 $C_i > 1$ 和 $m_1^{(i)}, \dots, m_k^{(i)} \in \mathbb{Z}$ 使得 $\lim_{i \rightarrow \infty} R_i = \infty$, $\lim_{i \rightarrow \infty} C_i = 1$ 并且

$$\frac{1}{R_i} \sum_{j=0}^{R_i-1} \mathbf{1}_{A_1}(m_1^{(i)} + j) \cdots \mathbf{1}_{A_k}(m_k^{(i)} + j) \geq \frac{d^*(A_1) \cdots d^*(A_k)}{C_i}. \quad (3.10)$$

不是一般性, 假设在弱 $*$ 拓扑下,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{R_i} \sum_{j=0}^{R_i-1} T^j \delta_{(\sigma^{m_1^{(i)}} \mathbf{1}_{A_1}, \dots, \sigma^{m_k^{(i)}} \mathbf{1}_{A_k})} = \mu \in \mathcal{M}(X, T). \quad (3.11)$$

根据 (3.10), 有

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{R_i} \sum_{j=0}^{R_i-1} T^j \delta_{(\sigma^{m_1^{(i)}} \mathbf{1}_{A_1}, \dots, \sigma^{m_k^{(i)}} \mathbf{1}_{A_k})} ([1] \times \cdots \times [1]) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{R_i} \sum_{j=0}^{R_i-1} \delta_{\sigma^{m_1^{(i)}+j} \mathbf{1}_{A_1}} ([1]) \cdots \delta_{\sigma^{m_k^{(i)}+j} \mathbf{1}_{A_k}} ([1]) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{R_i} \sum_{j=0}^{R_i-1} \mathbf{1}_{A_1}(m_1^{(i)} + j) \cdots \mathbf{1}_{A_k}(m_k^{(i)} + j) \\ &\geq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{d^*(A_1) \cdots d^*(A_k)}{C_i} = d^*(A_1) \cdots d^*(A_k) \\ &> 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

假设对于 $t \in \mathbb{N}$ 和 $n_1, n_2, \dots, n_t \in \mathbb{Z}$, 有 $\mu(T^{-n_1} B \cap T^{-n_2} B \cap \cdots \cap T^{-n_t} B) > 0$. 注意到

$$\begin{aligned} &\mu(T^{-n_1} B \cap T^{-n_2} B \cap \cdots \cap T^{-n_t} B) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{R_i} \sum_{j=0}^{R_i-1} T^j \delta_{(\sigma^{m_1^{(i)}} \mathbf{1}_{A_1}, \dots, \sigma^{m_k^{(i)}} \mathbf{1}_{A_k})} \left(\bigcap_{l=1}^t \sigma^{-n_l} [1] \times \cdots \times \bigcap_{l=1}^t \sigma^{-n_l} [1] \right) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{R_i} \sum_{j=0}^{R_i-1} \delta_{\sigma^{m_1^{(i)}+j} \mathbf{1}_{A_1}} \left(\bigcap_{l=1}^t \sigma^{-n_l} [1] \right) \cdots \delta_{\sigma^{m_k^{(i)}+j} \mathbf{1}_{A_k}} \left(\bigcap_{l=1}^t \sigma^{-n_l} [1] \right) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{R_i} \sum_{j=0}^{R_i-1} \mathbf{1}_{\bigcap_{l=1}^t (A_1 - n_l)}(m_1^{(i)} + j) \cdots \mathbf{1}_{\bigcap_{l=1}^t (A_k - n_l)}(m_k^{(i)} + j). \end{aligned} \quad (3.13)$$

因为 $\mu(T^{-n_1} B \cap T^{-n_2} B \cap \cdots \cap T^{-n_t} B) > 0$, 所以存在 $i \in \mathbb{N}$ 使得

$$\mathbf{1}_{\bigcap_{l=1}^t (A_1 - n_l)}(m_1^{(i)} + j) \cdots \mathbf{1}_{\bigcap_{l=1}^t (A_k - n_l)}(m_k^{(i)} + j) > 0,$$

特别地,

$$(A_j - n_1) \cap (A_j - n_2) \cap \cdots \cap (A_j - n_t) \neq \emptyset, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

证毕. □

4 与 Furstenberg-Glasner 定理相关的一些结果

本节介绍一些与 Furstenberg-Glasner 定理相关的结果. 在此过程中, 本节给出 Furstenberg-Glasner 定理的高维版本和密度版本等.

4.1 相关定理的陈述

本小节陈述主要结果, 并在后续部分给出证明.

van der Waerden 定理断言, 如果 $S \subseteq \mathbb{Z}$ 是分段相对稠密的, 则对于所有的 $k \in \mathbb{N}$, 集合 $\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m, m+n, \dots, m+(k-1)n \in S, n \neq 0\}$ 不是空的. Furstenberg 和 Glasner^[17] 得到了更为精细的结论.

定理 4.1^[17] 设 $k \in \mathbb{N}$ 且 S 是 $\mathbb{Z}$ 的分段相对稠密子集, 则

$$\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m, m+n, \dots, m+(k-1)n \in S\}$$

为 $\mathbb{Z}^2$ 的分段相对稠密子集.

Furstenberg 和 Glasner 的证明方法运用了 Stone-Čech 紧化理论. Beiglböck^[1] 给出了这一结果的一个组合证明. Bergelson 和 Hindman^[6] 则将 Furstenberg-Glasner 的结果推广到一般半群上. 文献 [6, 问题 4.7] 提出了一个如下问题:

问题 4.1 设 $k \in \mathbb{N}$ 且 p_i 是满足 $p_i(0) = 0$ 的整值多项式, $1 \leq i \leq k$. 问: 当 S 在 $\mathbb{Z}$ 中是分段相对稠密子集时, 集合 $\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m+p_1(n), m+p_2(n), \dots, m+p_k(n) \in S\}$ 是否在 $\mathbb{Z}^2$ 中也是分段相对稠密的?

最近, 文献 [28] 对这个问题给出了肯定的回答.

定理 4.2^[28] 设 $S \subseteq \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, 且 $\mathcal{A} = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ 为满足 $p_i(0) = 0$, $1 \leq i \leq k$ 的整值多项式. 如果 S 为分段相对稠密的, 则

$$N_{\mathcal{A}}(S) = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m+p_1(n), m+p_2(n), \dots, m+p_k(n) \in S\}$$

也是 $\mathbb{Z}^2$ 中分段相对稠密子集.

自然的问题是, 能否将定理 4.1 和 4.2 中的“分段相对稠密性”替换为“正上 Banach 密度”? 文献 [17, 第 198 页] 提到: “On the other hand if ‘big’ is replaced by ‘positive upper density’ then the parallel result is valid and follows without much difficulty from the ergodic theoretic formulation of Szemerédi’s theorem. But although Szemerédi’s theorem implies the existence of arithmetic progressions in big sets, it doesn’t guarantee the existence of a big set of these.”

由于在文献中找不到密度版本结果的证明, 所以我们在定理 4.3 中提供了一个完整的正上 Banach 密度版本的证明, 即我们将证明如下定理:

定理 4.3 设 $C \subseteq \mathbb{Z}$ 且 $k \in \mathbb{N}$, 令 $\mathcal{A} = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ 是满足条件 $p_i(0) = 0$ (对所有 $1 \leq i \leq k$) 的整值多项式集合. 如果 C 在 $\mathbb{Z}$ 中具有正上 Banach 密度, 则

$$N_{\mathcal{A}}(C) = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m+p_1(n), m+p_2(n), \dots, m+p_k(n) \in C\}$$

在 $\mathbb{Z}^2$ 中也具有正上 Banach 密度.

易见一个分段相对稠密子集具有正上 Banach 密度, 而一般具有正上 Banach 密度子集不一定是分段相对稠密的. 因此, 定理 4.2 和 4.3 之间没有直接的推论关系.

虽然不能仅用遍历论来证明定理 4.2, 但遍历论的证明确实适用于一些特殊的分段相对稠密子集, 如下面的定理所示:

定理 4.4 设 $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ 是两个子集, 且 $d^*(A)d^*(B) > 0$, $k \in \mathbb{N}$. 设 $\mathcal{A} = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ 是一组满足 $p_i(0) = 0$, $1 \leq i \leq k$ 的整值多项式, 则

$$N_{\mathcal{A}}(A-B) = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m+p_1(n), m+p_2(n), \dots, m+p_k(n) \in A-B\}$$

在 $\mathbb{Z}^2$ 中是分段相对稠密的.

注 4.1 在定理 4.4 中设 $k = 1$ 且 $\mathcal{A} = \{n\}$, 则可以得出 $\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m + n \in A - B\}$ 在 $\mathbb{Z}^2$ 中是分段相对稠密的. 这意味着 $A - B$ 在 $\mathbb{Z}$ 中是分段相对稠密的, 于是再次得到了 Jin 定理 (定理 3.1).

结合定理 4.4 和 3.3, 得到以下推论:

推论 4.1 设 $k \in \mathbb{N}$ 且 $\mathcal{A} = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ 是满足 $p_i(0) = 0, 1 \leq i \leq k$ 的整数多项式集合. 如果 $P \subseteq \mathbb{Z}$ 是一个分段 Bohr 子集, 则

$$\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m + p_1(n), m + p_2(n), \dots, m + p_k(n) \in P\}$$

是 $\mathbb{Z}^2$ 中的分段相对稠密集.

定理 4.2 是用拓扑动力系统方法证明的: 我们利用“饱和定理”对多项式进行处理, 并且发展了一些新的方法来进行研究. 我们认为, 仅使用遍历方法, 定理 4.4 可能是我们所能期待的最佳结果.

Gallai 在文献 [16, 第 46 页] 中得到了如下 van der Waerden 定理的高维版本.

定理 4.5 对于 $\mathbb{Z}^k$ 的任何有限剖分, 必存在剖分元包含任意有限子集的仿射像²⁾.

我们也将证明如下 Furstenberg-Glasner 定理的高维版本:

定理 4.6 设 $k \in \mathbb{N}$ 且 $S \subseteq \mathbb{Z}^k$ 是一个分段相对稠密子集, 则对于 $\mathbb{Z}^k$ 的任意有限子集 F , 有

$$\{(\mathbf{m}, n) \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z} : \mathbf{m} + nF \subseteq S\} = \{(\mathbf{m}, n) \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z} : \mathbf{m} + n\mathbf{v} \in S, \forall \mathbf{v} \in F\}$$

在 $\mathbb{Z}^{k+1}$ 中是一个分段相对稠密子集.

定理 4.3, 4.4 和 4.6 的证明将在下面各小节中给出.

4.2 Furstenberg-Glasner 密度版本

本小节给出定理 4.3 的证明. 首先需要做一些准备工作. 以下引理容易验证.

引理 4.1 设 $A, B \subseteq \mathbb{Z}^k$, 其中 $k \in \mathbb{N}$. 如果存在 $\mathbb{Z}$ 的序列 $\{N_i^{(j)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ 和 $\{M_i^{(j)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ 使得 $N_i^{(j)} - M_i^{(j)} \rightarrow \infty, i \rightarrow \infty, 1 \leq j \leq k$, 并且满足 $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|B \cap \prod_{j=1}^k [M_i^{(j)}, N_i^{(j)} - 1]|}{\prod_{j=1}^k (N_i^{(j)} - M_i^{(j)})} > 0$, 以及对于任意 $i \in \mathbb{N}$, 存在某个 $\mathbf{n}_i \in \mathbb{Z}^k$ 使得

$$\mathbf{n}_i + \left(B \cap \prod_{j=1}^k [M_i^{(j)}, N_i^{(j)} - 1] \right) \subseteq A,$$

则 $d^*(A) > 0$.

以下定理是在文献 [25] 中对多项式附加了一些条件下被证明的, 这些条件在文献 [33] 中被去掉.

定理 4.7 (多重多项式遍历定理) 设 $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ 是一个保测系统, $k, d \in \mathbb{N}$. 设 $p_1, p_2, \dots, p_k : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}$ 是多项式, 则对于 $\mathbb{Z}^d$ 中的任意 Følner 序列 $\{\Phi_N\}_{N=1}^\infty$ 和任意 $f_1, f_2, \dots, f_k \in L^\infty(X)$,

$$\frac{1}{|\Phi_N|} \sum_{\mathbf{n} \in \Phi_N} T^{p_1(\mathbf{n})} f_1 \dots T^{p_k(\mathbf{n})} f_d$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时在 $L^2(X, \mu)$ 中收敛.

如下是另一个所需的定理:

2) $\mathbb{Z}^k$ 有限子集 F 的仿射像是指形如 $\mathbf{m} + nF = \{\mathbf{m} + n\mathbf{f} : \mathbf{f} \in F\}$ 的集合, 其中 $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^k, n \neq 0$.

定理 4.8 (多重多项式回复定理) 设 $(X, \mathcal{X}, \mu)$ 是一个概率空间. 设 $T_1, \dots, T_k$ 是 X 上的交换保测变换. 设 $p_1, p_2, \dots, p_k$ 是满足 $p_1(0) = \dots = p_k(0) = 0$ 的整值多项式. 设 $A \in \mathcal{X}$ 且 $\mu(A) > 0$. 则

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-M} \sum_{n=M}^{N-1} \mu(T_1^{-p_1(n)} A \cap T_2^{-p_2(n)} A \cap \dots \cap T_k^{-p_k(n)} A) > 0.$$

注 4.2 定理 4.8 最初在文献 [7, 定理 A₀] 中给出, 并且是针对常规 Cesàro 平均给出的:

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(T_1^{-p_1(n)} A \cap T_2^{-p_2(n)} A \cap \dots \cap T_d^{-p_d(n)} A) > 0.$$

但它也适用于上述的一致 Cesàro 平均 (参见文献 [8, 定理 6.13]).

下面给出定理 4.3 的证明.

定理 4.3 的证明 由于 $d^*(C) > 0$, 所以存在一个区间序列 $\{J_N\}_{N=1}^\infty$ 使得 $\lim_{N \rightarrow \infty} |J_N| = \infty$ 并且

$$d^*(C) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|C \cap J_N|}{|J_N|} > 0.$$

设 $(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ 是全符号转移系统. 设 $\xi = \mathbf{1}_C \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, $X = \overline{\mathcal{O}}(\xi, \sigma)$ 且 $A = X \cap [1] = \{x \in X : x(0) = 1\}$. 于是

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|J_N|} \sum_{n \in J_N} \mathbf{1}_A(\sigma^n \xi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|J_N|} \sum_{n \in J_N} \mathbf{1}_C(n) = d^*(C).$$

设 μ 为 $\{\frac{1}{|J_N|} \sum_{n \in J_N} \delta_{\sigma^n \xi}\}_{N=1}^\infty$ 在 $\mathcal{M}(X)$ 中的弱 * 极限点. 不失一般性, 设 $\frac{1}{|J_N|} \sum_{n \in J_N} \delta_{\sigma^n \xi} \rightarrow \mu$, $N \rightarrow \infty$, 则 $(X, \mathcal{B}(X), \mu, \sigma)$ 是一个保测系统且

$$\mu(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|J_N|} \sum_{n \in J_N} \mathbf{1}_A(\sigma^n \xi) = d^*(C) > 0.$$

设 $\{I_N\}_{N=1}^\infty$ 是一个使得 $\lim_{N \rightarrow \infty} |I_N| = \infty$ 的区间序列. 根据定理 4.7, 可得

$$\frac{1}{|I_N||J_N|} \sum_{(m,n) \in I_N \times J_N} \mathbf{1}_A(\sigma^{m+p_1(n)} x) \dots \mathbf{1}_A(\sigma^{m+p_k(n)} x)$$

在 $L^2(X, \mu)$ 中当 $N \rightarrow \infty$ 时收敛. 由于模意义下收敛的函数序列必存在子列为几乎处处逐点收敛的, 所以可以假设 (或取子序列)

$$\frac{1}{|I_N||J_N|} \sum_{(m,n) \in I_N \times J_N} \mathbf{1}_A(\sigma^{m+p_1(n)} x) \dots \mathbf{1}_A(\sigma^{m+p_k(n)} x)$$

对于 μ - 几乎所有的 $x \in X$ 收敛. 根据 Lebesgue 控制收敛定理, 有

$$\begin{aligned} & \int_X \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|I_N||J_N|} \sum_{(m,n) \in I_N \times J_N} \mathbf{1}_A(\sigma^{m+p_1(n)} x) \dots \mathbf{1}_A(\sigma^{m+p_k(n)} x) d\mu \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|I_N||J_N|} \sum_{(m,n) \in I_N \times J_N} \int_X \mathbf{1}_A(\sigma^{m+p_1(n)} x) \dots \mathbf{1}_A(\sigma^{m+p_k(n)} x) d\mu \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|I_N||J_N|} \sum_{(m,n) \in I_N \times J_N} \mu(\sigma^{-(m+p_1(n))} A \cap \dots \cap \sigma^{-(m+p_k(n))} A) \end{aligned}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|J_N|} \sum_{n \in J_N} \mu(\sigma^{-p_1(n)} A \cap \dots \cap \sigma^{-p_k(n)} A).$$

根据定理 4.8, 可得

$$\begin{aligned} & \int_X \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|I_N||J_N|} \sum_{(m,n) \in I_N \times J_N} \mathbf{1}_A(\sigma^{m+p_1(n)} x) \dots \mathbf{1}_A(\sigma^{m+p_k(n)} x) d\mu \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|J_N|} \sum_{n \in J_N} \mu(\sigma^{-p_1(n)} A \cap \dots \cap \sigma^{-p_k(n)} A) \\ &> 0. \end{aligned}$$

于是存在点 $x_0 \in X$ 使得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|I_N||J_N|} \sum_{(m,n) \in I_N \times J_N} \mathbf{1}_A(\sigma^{m+p_1(n)} x_0) \dots \mathbf{1}_A(\sigma^{m+p_k(n)} x_0) > 0.$$

设 $x_0 = \mathbf{1}_B \in X \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ 且令 $\tilde{B} = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m + p_j(n) \in B, 1 \leq j \leq k\}$, 则

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{B} \cap (I_N \times J_N)|}{|I_N \times J_N|} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|I_N||J_N|} \sum_{(m,n) \in I_N \times J_N} \mathbf{1}_A(\sigma^{m+p_1(n)} x_0) \dots \mathbf{1}_A(\sigma^{m+p_k(n)} x_0) > 0.$$

因为 $x_0 = \mathbf{1}_B \in \overline{\mathcal{O}}(\xi, \sigma)$, 于是对于充分大的 $N \in \mathbb{N}$, 有

$$\frac{|\tilde{B} \cap (I_N \times J_N)|}{|I_N \times J_N|} = \frac{1}{|I_N||J_N|} \sum_{(m,n) \in I_N \times J_N} \mathbf{1}_A(\sigma^{m+p_1(n)} x_0) \dots \mathbf{1}_A(\sigma^{m+p_k(n)} x_0) > 0.$$

取 $t_N \in \mathbb{Z}$ 使得 $\sigma^{t_N} \xi$ 与 $x_0 = \mathbf{1}_B$ 充分接近且满足

$$\mathbf{1}_A(\sigma^{m+p_j(n)} x_0) = \mathbf{1}_A(\sigma^{t_N+m+p_j(n)} \xi), \quad \forall (m, n) \in I_N \times J_N, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

于是, 对于 $\mathbf{n}_N = (t_N, 0) \in \mathbb{Z}^2$, 有 $\mathbf{n}_N + \tilde{B} \cap (I_N \times J_N) \subseteq N_{\mathcal{A}}(C)$. 根据引理 4.1, 可得 $d^*(N_{\mathcal{A}}(C)) > 0$. 证毕. $\square$

通过类似的论证, 可以得到以下一般的结果:

定理 4.9 设 $l \in \mathbb{N}$, $S \subseteq \mathbb{Z}^l$ 是一个具有正上 Banach 密度的子集, 设 $p_1, \dots, p_k$ 是具有 $p_1(0) = \dots = p_k(0) = 0$ 的整值多项式, 则对于任意 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{Z}^l$,

$$\{(\mathbf{m}, n) \in \mathbb{Z}^l \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{l+1} : \mathbf{m} + p_i(n)\mathbf{v}_i \in S, 1 \leq i \leq k\} \quad (4.1)$$

在 $\mathbb{Z}^{l+1}$ 中具有正上 Banach 密度.

一个更一般的结果如下:

定理 4.10 设 $l \in \mathbb{N}$, $S \subseteq \mathbb{Z}^l$ 是一个具有正上 Banach 密度的子集, 设 $p_{1,1}, \dots, p_{1,t}, p_{2,1}, \dots, p_{2,t}, \dots, p_{k,1}, \dots, p_{k,t}$ 是满足 $p_{i,j}(0) = 0, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq t$ 的整值多项式. 则对于任意 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{Z}^l$,

$$\left\{(\mathbf{m}, n) \in \mathbb{Z}^l \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{l+1} : \mathbf{m} + \sum_{j=1}^t p_{i,j}(n)\mathbf{v}_j \in S, 1 \leq i \leq k\right\} \quad (4.2)$$

在 $\mathbb{Z}^{l+1}$ 中具有正上 Banach 密度.

注 4.3 在定理 4.9 和 4.10 中, 正上 Banach 密度可否换为分段相对稠密仍是一个未解决的问题. 后面将对于线性多项式给出一个肯定的答案.

4.3 分段 Bohr 子集

本小节证明定理 4.4. 对于 $p \in \beta\mathbb{Z}$ 和 $A \subseteq \mathbb{Z}$, 定义 $A - p = \{k \in \mathbb{Z} : A - k \in p\}$.

引理 4.2 (参见文献 [2, 引理 2]) 设 $A, B \subseteq \mathbb{Z}$, 则存在一个 $\mathbb{Z}$ 上的超滤子 p , 使得

$$d^*((A - p) \cap B) \geq d^*(A)d^*(B).$$

我们需要以下定理, 特别是其推论.

定理 4.11 (参见文献 [8, 定理 0.9, 第 64 页]) 假设有一个概率空间 $(X, \mathcal{X}, \mu)$ 上的 r 个交换的保测变换 $T_1, T_2, \dots, T_r$. 假设 $k, t \in \mathbb{N}$, 并且 $p_{i,j}(x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{Q}[x_1, \dots, x_k]$ 满足 $p_{i,j}(\mathbb{Z}^k) \subseteq \mathbb{Z}$ 且 $p_{i,j}(0, \dots, 0) = 0$, 其中 $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq t$. 那么对于每一个满足 $\mu(A) > 0$ 的 $A \in \mathcal{X}$,

$$R_A = \left\{ (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k : \mu \left(\bigcap_{j=1}^t \left(\prod_{i=1}^r T_i^{p_{i,j}(n_1, \dots, n_k)} \right)^{-1} A \right) > 0 \right\}$$

是 $\mathbb{Z}^k$ 中的一个 IP^* -集合.

根据 Furstenberg 对应原理 (定理 2.2) 和定理 4.11, 有以下推论:

推论 4.2 设 $C \subseteq \mathbb{Z}$ 且 $d^*(C) > 0$, $k \in \mathbb{N}$, 并且设 $\mathcal{A} = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ 是满足 $p_i(0) = 0, 1 \leq i \leq k$ 的整值多项式集合, 则

$$E_{\mathcal{A}}(C) = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : C \cap (C - (m + p_1(n))) \cap \dots \cap (C - (m + p_k(n))) \neq \emptyset\}$$

是 $\mathbb{Z}^2$ 中的 IP^* 集. 特别地, $E_{\mathcal{A}}(C)$ 在 $\mathbb{Z}^2$ 中是相对稠密的.

定理 4.4 的证明 设 $p \in \beta\mathbb{Z}$ 是引理 4.2 中的一个超滤子, 使得

$$d^*((A - p) \cap B) \geq d^*(A)d^*(B) > 0.$$

设 $C = (A - p) \cap B$. 根据推论 4.2, 可得

$$E_{\mathcal{A}}(C) = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : C \cap (C - (m + p_1(n))) \cap \dots \cap (C - (m + p_k(n))) \neq \emptyset\}$$

在 $\mathbb{Z}^2$ 中是相对稠密的. 现在证明对于任何足够大的 $M \in \mathbb{N}$, 存在 $t_M \in \mathbb{Z}^2$ 使得

$$t_M + F_M \subseteq N_{\mathcal{A}}(A - B), \quad (4.3)$$

其中 $F_M = ([-M, M] \times [-M, M]) \cap E_{\mathcal{A}}(C)$. 一旦得到 (4.3), 由于 $E_{\mathcal{A}}(C)$ 是相对稠密的, 则 $N_{\mathcal{A}}(A - B)$ 就是分段相对稠密的.

现在证明 (4.3). 对于给定的 $M \in \mathbb{N}$ 和 $(m, n) \in F_M$, 由于

$$C \cap (C - (m + p_1(n))) \cap (C - (m + p_2(n))) \cap \dots \cap (C - (m + p_k(n))) \neq \emptyset,$$

所以存在 $c_{(m,n)} \in C$ 使得

$$c_{(m,n)} + (m + p_1(n)), c_{(m,n)} + (m + p_2(n)), \dots, c_{(m,n)} + (m + p_k(n)) \in C,$$

于是一旦 $(m, n) \in F_M$, 就有

$$m + p_1(n), m + p_2(n), \dots, m + p_k(n) \in C - C.$$

因为 $C = (A - p) \cap B$ 以及 p 是超滤子, 所以对于 $(m, n) \in F_M$, 有

$$m + p_1(n), m + p_2(n), \dots, m + p_k(n) \in (A - p) - B,$$

即

$$A - B - (m + p_j(n)) \in p, \quad \forall (m, n) \in F_M, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

因为 p 是滤子, 所以

$$\bigcap_{(m,n) \in F_M} \bigcap_{j=1}^k (A - B - (m + p_j(n))) \in p.$$

设

$$t_M \in \bigcap_{(m,n) \in F_M} \bigcap_{j=1}^k (A - B - (m + p_j(n))),$$

则

$$t_M + (m + p_j(n)) \in A - B, \quad \forall (m, n) \in F_M, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, k\},$$

即

$$(t_M + m, n) \in N_{\mathcal{A}}(A - B), \quad \forall (m, n) \in F_M.$$

设 $\mathbf{t}_M = (t_M, 0)$. 于是得到 (4.3). 证毕. $\square$

4.4 Furstenberg-Glasner 定理的高维版本

本小节给出定理 4.6 的一个动力系统证明. 首先作一些准备. 设 (X, T) 是一个拓扑动力系统, $d \in \mathbb{N}$. 定义

$$\sigma_d = T \times \dots \times T \text{ (} d \text{ 次)}$$

和

$$\tau_d = T \times T^2 \times \dots \times T^d.$$

对于任意的 $x \in X$, 设 $N_d(X, x) = \overline{\mathcal{O}((x, \dots, x), \langle \tau_d, \sigma_d \rangle)}$, 即 $x^{\otimes d} = (x, \dots, x)$ (d 次) 在群 $\langle \tau_d, \sigma_d \rangle$ 作用下的轨道闭包. 如果 (X, T) 是极小系统, 则所有 $N_d(X, x)$ 都吻合, 记作 $N_d(X)$. Glasner^[18] 证明了, 如果 (X, T) 是极小系统, 则 $(N_d(X, T), \langle \tau_d, \sigma_d \rangle)$ 也是极小系统. 现在将单个同胚映射推广到多个可交换的同胚映射.

设 X 为一个紧致度量空间, $d \in \mathbb{N}$. 设 $T_1, T_2, \dots, T_d : X \rightarrow X$ 为同胚映射, 且对于所有 $i, j \in \{1, \dots, d\}$, 有 $T_i T_j = T_j T_i$, 即由 $\langle T_1, \dots, T_d \rangle$ 生成的群是交换群. 对于 $1 \leq i \leq d$, 设

$$T_i^{\otimes d} = \underbrace{T_i \times \dots \times T_i}_{d \text{ 次}}, \quad (4.4)$$

$$T_{\Delta}^{\otimes d} = T_1 \times T_2 \times \dots \times T_d. \quad (4.5)$$

记 $\mathcal{T}_d$ 为由 $\{T_i^{\otimes d}\}_{i=1}^d$ 生成的群, $\mathcal{S}_d$ 为由 $\mathcal{T}_d$ 和 $T_{\Delta}^{\otimes d}$ 生成的群, 即 $\mathcal{T}_d = \langle T_1^{\otimes d}, \dots, T_d^{\otimes d} \rangle$ 和 $\mathcal{S}_d = \langle \mathcal{T}_d, T_{\Delta}^{\otimes d} \rangle$. 则 $\mathcal{T}_d$ 和 $\mathcal{S}_d$ 是交换群. 对于任意的 $x \in X$, 设

$$N_d(X, x) = \overline{\mathcal{O}(x^{\otimes d}, \mathcal{S}_d)}$$

为 $x^{\otimes d} = (x, \dots, x)$ (d 次) 在群 $\mathcal{S}_d$ 作用下的轨道闭包. 如果 $(X, \langle T_1, \dots, T_d \rangle)$ 是极小的, 则对于所有点 x_0 , 所有 $N_d(X, x_0)$ 重合, 记为 $N_d(X)$. 类似于文献 [19, 定理 1.55] 的证明, 可以证明以下结果:

定理 4.12 设 $(X, \langle T_1, \dots, T_d \rangle)$ 为一个极小系统, 则 $(N_d(X), \mathcal{S}_d)$ 是一个极小系统.

定理 4.6 的证明 设 $F = \{v_1, \dots, v_d\} \subseteq \mathbb{Z}^k$ 以及 $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^k}$. Σ_2 在乘积拓扑下是一个紧致度量空间. 定义 $T_i: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ 为

$$(T_i \omega)(n) = \omega(n + v_i), \quad \forall n \in \mathbb{Z}^k, \quad 1 \leq i \leq d.$$

对于 $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$, 令 $T_n = T_1^{n_1} \cdots T_d^{n_d}$, 则 $(\Sigma_2, (T_n)_{n \in \mathbb{Z}^d})$ 为 $\mathbb{Z}^d$ -动力系统. 设 $W = \overline{\mathcal{O}(\mathbf{1}_S, (T_n)_{n \in \mathbb{Z}^d})}$, 则 $(W, (T_n)_{n \in \mathbb{Z}^d})$ 也为 $\mathbb{Z}^d$ -动力系统. 设 $(X, (T_n)_{n \in \mathbb{Z}^d})$ 为 W 的一个极小子系统. 设 $(N_d(X), \mathcal{S}_d)$ 为如定理 4.12 得到的极小系统.

对于 $m = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{Z}^d$, 设 $T_m^{\otimes d} = (T_1^{\otimes d})^{m_1} \cdots (T_d^{\otimes d})^{m_d}$, 则

$$\mathcal{T}_d = \langle T_1^{\otimes d}, \dots, T_d^{\otimes d} \rangle = (T^{\otimes d} m)_{m \in \mathbb{Z}^d}.$$

设 $U = X \cap [1] = \{\omega \in X : \omega_0 = 1\}$. 由于 S 是分段相对稠密的, 所以可以设 U 是 X 的一个非平凡开子集. 设 $x \in U$ 且 $U^d = U \times \cdots \times U$ (d 次). 根据定理 4.12, 可得 $x^{\otimes d}$ 是一个 $\mathcal{S}_d$ -极小点. 则

$$A = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z} : T_m^{\otimes d} (T_\Delta^{\otimes d})^n (x^{\otimes d}) \in U^d\}$$

是 $\mathbb{Z}^{d+1}$ 的一个相对稠密子集. 设 $\phi: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^k$ 定义为

$$\phi(m) = \phi((m_1, m_2, \dots, m_d)) = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots + m_d v_d.$$

设 $M \in \mathbb{N}$, 则对于每个 $(m, n) \in A \cap [-M, M]^{d+1} \subseteq \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}$, 有

$$\begin{aligned} T_m^{\otimes d} (T_\Delta^{\otimes d})^n x^{\otimes d} &= (T_1^{\otimes d})^{m_1} \cdots (T_d^{\otimes d})^{m_d} (T_\Delta^{\otimes d})^n x^{\otimes d} \\ &= (T_1^{m_1} T_2^{m_2} \cdots T_d^{m_d} T_1^n x, T_1^{m_1} T_2^{m_2} \cdots T_d^{m_d} T_2^n x, \dots, T_1^{m_1} T_2^{m_2} \cdots T_d^{m_d} T_d^n x) \in U^d. \end{aligned}$$

这意味着对于每个 $(m, n) \in A \cap [-M, M]^{d+1}$, 有

$$x(\phi(m) + n v_1) = x(\phi(m) + n v_2) = \cdots = x(\phi(m) + n v_d) = 1.$$

由于 $x \in X \subseteq W = \overline{\mathcal{O}(\mathbf{1}_S, (T_n)_{n \in \mathbb{Z}^d})}$, 所以存在某个 $a \in \mathbb{Z}^d$ 使得 $T_a \mathbf{1}_S$ 足够接近 x 以满足

$$T_a \mathbf{1}_S(\phi(m) + n v_1) = T_a \mathbf{1}_S(\phi(m) + n v_2) = \cdots = T_a \mathbf{1}_S(\phi(m) + n v_d) = 1,$$

即 $\phi(a) + \phi(m) + n v_1, \phi(a) + \phi(m) + n v_2, \dots, \phi(a) + \phi(m) + n v_d \in S, \forall (m, n) \in A \cap [-M, M]^{d+1}$. 由于 M 是任意的, 所以

$$B = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^{d+1} : \phi(m) + n F \subseteq S\}$$

是 $\mathbb{Z}^{d+1}$ 中的分段相对稠密集. 由于 ϕ 是一个线性变换, 所以

$$C = \{(m, n) \in \phi(\mathbb{Z}^d) \times \mathbb{Z} : m + n F \subseteq S\}$$

是 $\phi(\mathbb{Z}^d) \times \mathbb{Z}$ 中的分段相对稠密集. 注意 $\phi(\mathbb{Z}^d) = \text{span}(F)$.

我们有两种情形. 第一种情形是 $\text{span}(F) = \mathbb{Z}^k$. 在这种情形下, 已经知道 $C = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z} : m + n F \subseteq S\}$ 是 $\mathbb{Z}^{k+1}$ 中的分段相对稠密集. 第二种情形是 $\text{span}(F) \neq \mathbb{Z}^k$. 在这种情形下, 可以找到某

个 $\mathbb{Z}^k$ 的有限子集 F' 使得 $F \subseteq F'$ 且 $\text{span}(F') = \mathbb{Z}^k$. 根据第一种情形, $\{(\mathbf{m}, n) \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z} : \mathbf{m} + nF' \subseteq S\}$ 是 $\mathbb{Z}^{k+1}$ 中的分段相对稠密集. 由于

$$\{(\mathbf{m}, n) \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z} : \mathbf{m} + nF' \subseteq S\} \subseteq \{(\mathbf{m}, n) \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z} : \mathbf{m} + nF \subseteq S\},$$

所以后者也是 $\mathbb{Z}^{k+1}$ 中的分段相对稠密集. 证毕. $\square$

在定理 4.6 中设 $k = 1$ 且 $F = \{0, 1, \dots, l-1\} \subseteq \mathbb{Z}$, 则 $\mathbf{m} + nF = \{m, m+n, \dots, m+(l-1)n\}$, 即 Furstenberg-Glasner 定理 (定理 4.1).

定理 4.2 是 Furstenberg-Glasner 定理 (定理 4.1) 到多项式的推广, 但其更高维版本仍未得到.

问题 4.2 假设 $k, d \in \mathbb{N}$, $S \subset \mathbb{Z}^k$ 是分段相对稠密的, 且 $p_{i,j}$ 是满足 $p_{i,j}(0) = 0$ 的整值多项式, $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq k$. 考虑集合

$$\begin{aligned} \{(m_1, \dots, m_k, n) \in \mathbb{Z}^{k+1} : (m_1 + p_{1,1}(n), \dots, m_k + p_{1,k}(n)) \in S, \\ \dots, (m_1 + p_{d,1}(n), \dots, m_k + p_{d,k}(n)) \in S\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

问: 集合 (4.6) 是否在 $\mathbb{Z}^{k+1}$ 中是分段相对稠密的?

5 Erdős 和集问题

由 Ramsey 定理^[35] 可知, 如果用有限种颜色对 $\mathbb{N}$ 进行着色, 则存在一个无限子集 B 使得

$$B \oplus B = \{b_1 + b_2 : b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2\}$$

是单色的. Erdős 根据此结论提出了如下几个猜想作为这个结果的上密度版本:

猜想 5.1^[13] 对于任意具有正上密度的 $A \subseteq \mathbb{N}$, 存在无限子集 B 和 C 属于 $\mathbb{N}$, 使得

$$B + C = \{b + c : b \in B, c \in C\} \subseteq A.$$

猜想 5.2^[10–12] 对于任意具有正上密度的 $A \subseteq \mathbb{N}$, 存在 $\mathbb{N}$ 的一个无限子集 B 和 $t \in \mathbb{N}$, 使得

$$B \oplus B = \{b + c : b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2\} \subseteq A - t.$$

本节介绍这些猜想的进展, 更多细节可参见文献 [30].

5.1 正上密度子集中的和集

猜想 5.1 由 Moreira 等^[34] 解决, 他们的证明使用了组合分析、非标准分析以及一个遍历结构结果等方法. 随后, Host^[23] 给出了一个简洁的遍历论证明.

在 $\mathbb{N}$ 中, 一个 Følner 序列是指, 一个有限子集序列 $\Phi = \{\Phi_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, 并且它满足

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|(\Phi_N + m) \Delta \Phi_N|}{|\Phi_N|} = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

给定一个 Følner 序列 Φ 和一个子集 $A \subseteq \mathbb{N}$, A 相对于 Φ 的上密度是指

$$\bar{d}_\Phi(A) = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{|A \cap \Phi_N|}{|\Phi_N|}.$$

下面的定理是猜想 5.1 更强的版本. Moreira 等^[34] 将他们的结果从 $\mathbb{N}$ 推广到一个可数群. 注意, 在 $\mathbb{N}$ 中, 如果对于某个 Følner 序列 Φ 有 $\bar{d}_\Phi(A) > 0$, 则子集 A 具有正的上 Banach 密度.

定理 5.1 ^[34] 对于每一个满足 $\bar{d}_\Phi(A) > 0$ 的 $A \subseteq \mathbb{N}$, 其中 Φ 为 Følner 序列, 可以找到无限子集 $B, C \subseteq A$ 使得 $B + C \subseteq A$.

最近, Kra 等 ^[32] 对这一结果进行了推广, 将其扩展到有限项的情形.

定理 5.2 (参见文献 [32, 定理 1.1]) 如果 $A \subseteq \mathbb{N}$ 具有正上 Banach 密度, 则对于每一个 $k \in \mathbb{N}$, 都存在无限集合 $B_1, \dots, B_k \subseteq \mathbb{N}$, 使得 $B_1 + \dots + B_k \subseteq A$.

他们提出了以下问题:

问题 5.1 (参见文献 [32, 问题 8.1]) 如果 $A \subseteq \mathbb{N}$ 具有正上 Banach 密度, 是否存在无限集合 $B_1, B_2, \dots$, 使得对于每一个 $k \in \mathbb{N}$, 有 $B_1 + \dots + B_k \subseteq A$?

观察到, 对于 $\mathbb{N}$ 的分段相对稠密子集, 上述问题有一个肯定的答案.

定理 5.3 设 $A \subset \mathbb{N}$ 是一个分段相对稠密子集, 则存在无限集合 $B_1, B_2, \dots$, 使得对于每一个 $k \in \mathbb{N}$, 有

$$B_1 + B_2 + \dots + B_k \subset A.$$

证明 由于 $A \subset \mathbb{N}$ 是分段相对稠密的, 所以存在某个 $L \in \mathbb{N}$, 使得 $\bigcup_{i=1}^L (A - i)$ 是厚的. 注意任何厚集都是一个 IP 集合. 根据 Hindman 定理, 存在某个 $r \in \{1, 2, \dots, L\}$, 使得 $A - r$ 是一个 IP 集合. 设 $p_1 < p_2 < \dots$ 使得

$$FS(\{p_j\}_{j=1}^\infty) \subset A - r.$$

设 $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^\infty J_i$ 是 $\mathbb{N}$ 的任意划分, 使得每个元素 J_i 是无限的. 设

$$B_i = \{p_j\}_{j \in J_i}, \quad i \geq 2,$$

$$B_1 = \{p_j + r\}_{j \in J_1}.$$

显然, 对于每一个 $k \in \mathbb{N}$, 有 $B_1 + B_2 + \dots + B_k \subset A$. 证毕. $\square$

基于文献 [32] 中发展的新动力系统方法, Kra 等证明了以下定理, 该定理对猜想 5.2 给出了肯定的回答.

定理 5.4 ^[31] 对于任何具有正上 Banach 密度的 $A \subseteq \mathbb{N}$, 以下结论成立:

(i) 存在一个无限集合 $B \subseteq A$ 和一个平移 $t \in \mathbb{N}$ 使得

$$B \oplus B \subseteq A - t;$$

(ii) 存在一个无限集合 $B \subseteq \mathbb{N}$ 和一个平移 $t \in \mathbb{N}$ 使得

$$B \cup (B \oplus B) \subseteq A - t.$$

他们还提出了一个关于定理 5.4 有限个集合版本的自然猜想.

猜想 5.3 (参见文献 [31, 猜测 1.5]) 对于任意具有正上 Banach 密度的 $A \subseteq \mathbb{N}$ 和 $k \in \mathbb{N}$, 存在一个无限集合 $B \subseteq A$ 和一个平移 $t \in \mathbb{N}$ 使得

$$A - t \supseteq \left\{ \sum_{n \in F} n : F \subseteq B, 0 < |F| \leq k \right\}.$$

注 5.1 根据定理 5.3 的证明, 我们得知这个猜想对分段相对稠密也成立, 即如果 $A \subset \mathbb{N}$ 是一个分段相对稠密, 则存在一个无限集合 $B \subseteq A$ 和一个平移 $t \in \mathbb{N}$ 使得 $A - t \supseteq FS(B)$, 特别地,

$$A - t \supseteq \left\{ \sum_{n \in F} n : F \subseteq B, 0 < |F| \leq k \right\}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

为了看到这一点, 我们使用定理 5.3 的证明中前面部分的论证. 由于 $A \subset \mathbb{N}$ 是分段相对稠密, 所以存在某个 $L \in \mathbb{N}$ 使得 $\bigcup_{i=1}^L (A - i)$ 为厚集. 注意到任何厚集都是一个 IP 集. 根据 Hindman 定理, 存在某个 $t \in 1, 2, \dots, L$ 使得 $A - t$ 是一个 IP 集. 设 $p_1 < p_2 < \dots$ 使得

$$FS(\{p_j\}_{j=1}^\infty) \subset A - t,$$

则 $B = \{p_j\}_{j=1}^\infty$ 就是我们所需要的.

5.2 素数集合的和集问题

全体素数集合 $\mathbb{P}$ 具有零密度. 然而, Green 和 Tao^[21] 证明了素数具有与 Szemerédi 定理的类似结果, 表明 $\mathbb{P}$ 包含任意有限长的等差数列. 很自然地, 人们会问 Erdős 和集猜想是否对素数成立 (参见文献 [20]、[34, 问题 6.4] 或 [30, 猜测 4.1]).

猜想 5.4 是否存在无限集合 $B, C \subseteq \mathbb{N}$ 使得 $B + C \subseteq \mathbb{P}$?

对于一个 (有限或无限) 集合 $H \subseteq \mathbb{Z}_+$, 如果对于每一个素数 $p \in \mathbb{P}$ 都存在 $i = i(p) \in \mathbb{N}$ 使得 H 中没有元素与 i 模 p 同余, 则称 H 为可接受的 (admissible).

猜想 5.5 (Dickson-Hardy-Littlewood 猜想) 如果 $H \subseteq \mathbb{Z}_+$ 是有限且可接受的, 则存在无限多个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $n + H \subseteq \mathbb{P}$.

注意, 如果 H 为二元组 $\{0, 2\}$, 则此猜想即为著名的孪生素数猜想. Granville^[20] 在承认 Dickson-Hardy-Littlewood 猜想成立的条件下证明了猜想 5.4. 最近, Tao 和 Ziegler 给出了进一步的结果.

定理 5.5^[36] 假设 Dickson-Hardy-Littlewood 猜想成立, 则存在一个无限素数子集 B 使得

$$B \oplus B \subseteq \mathbb{P} - 1.$$

Tao 和 Ziegler 还运用 Maynard 筛法给出了一个无条件的结果, 即不需要承认 Dickson-Hardy-Littlewood 猜想成立的结果.

定理 5.6^[36] 存在集合 $B = \{b_1 < b_2 < \dots\}$, $C = \{c_1 < c_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ 使得

$$\{b_i + c_j : 1 \leq i < j\} \subseteq \mathbb{P}.$$

基于上述结论, Kra 等提出了以下猜想:

猜想 5.6 (参见文献 [30, 猜测 4.3]) 对于任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在一个无限集合 $B \subseteq \mathbb{N}$ 使得

$$\mathbb{P} - 1 \supseteq \left\{ \sum_{n \in F} n : F \subseteq B, 0 < |F| \leq k \right\}.$$

致谢 感谢李健对于初稿提出的诸多建议.

参考文献

- 1 Beiglböck M. Arithmetic progressions in abundance by combinatorial tools. Proc Amer Math Soc, 2009, 137: 3981–3983
- 2 Beiglböck M. An ultrafilter approach to Jin’s theorem. Israel J Math, 2011, 185: 369–374
- 3 Beiglböck M, Bergelson V, Fish A. Sumset phenomenon in countable amenable groups. Adv Math, 2010, 223: 416–432
- 4 Bergelson V. Ergodic Ramsey theory—an update. In: Ergodic Theory of $\mathbb{Z}^d$ Actions. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 228. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1996, 1–61

- 5 Bergelson V, Furstenberg H, Weiss B. Piecewise-Bohr sets of integers and combinatorial number theory. In: Topics in Discrete Mathematics. Algorithms and Combinatorics, vol. 26. Berlin: Springer, 2006, 13–37
- 6 Bergelson V, Hindman N. Partition regular structures contained in large sets are abundant. J Combin Theory Ser A, 2001, 93: 18–36
- 7 Bergelson V, Leibman A. Polynomial extensions of van der Waerden's and Szemerédi's theorems. J Amer Math Soc, 1996, 9: 725–753
- 8 Bergelson V, McCutcheon R. An Ergodic IP polynomial Szemerédi Theorem. Memoirs of the American Mathematical Society, no. 395. Providence: Amer Math Soc, 2000
- 9 Conant G. Stable functions and Følner's theorem. Proc Amer Math Soc, 2025, 153: 3529–3539
- 10 Erdős P. Problems and results in combinatorial number theory. In: Journées Arithmétiques de Bordeaux. Astérisque, no. 24–25. Paris: Soc Math France, 1975, 295–310
- 11 Erdős P. Problems and results on combinatorial number theory. III. In: Number Theory Day. Lecture Notes in Mathematics, vol. 626. Berlin-New York: Springer, 1977, 43–72
- 12 Erdős P. A survey of problems in combinatorial number theory. Ann Discrete Math, 1980, 6: 89–115
- 13 Erdős P, Graham R. Old and New Problems and Results in Combinatorial Number Theory. Monographie de l'Enseignement Mathématique, no. 28. Genève: Enseignement Mathématique, Université de Genève, 1980
- 14 Følner E. Generalization of a theorem of Bogoliouboff to topological groups. With an appendix on Banach mean values in nonabelian groups. Math Scand, 1954, 2: 5–18
- 15 Furstenberg H. Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions. J Anal Math, 1977, 31: 204–256
- 16 Furstenberg H. Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory. M. B. Porter Lectures. Princeton: Princeton Univ Press, 1981
- 17 Furstenberg H, Glasner E. Subset dynamics and van der Waerden's theorem. Contemp Math, 1998, 215: 197–203
- 18 Glasner E. Topological ergodic decompositions and applications to products of powers of a minimal transformation. J Anal Math, 1994, 64: 241–262
- 19 Glasner E. Ergodic Theory via Joinings. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 101. Providence: Amer Math Soc, 2003
- 20 Granville A. A note on sums of primes. Canad Math Bull, 1990, 33: 452–454
- 21 Green B, Tao T. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. Ann of Math (2), 2008, 167: 481–547
- 22 Hindman N, Strauss D. Algebra in the Stone-Čech Compactification. Theory and Applications. De Gruyter Expositions in Mathematics, vol. 27. Berlin: Walter de Gruyter, 1998
- 23 Host B. A short proof of a conjecture of Erdős proved by Moreira, Richter and Robertson. Discrete Anal, 2019, <https://doi.org/10.19086/da.11129>
- 24 Host B, Kra B. Nonconventional ergodic averages and nilmanifolds. Ann of Math (2), 2005, 161: 397–488
- 25 Host B, Kra B. Convergence of polynomial ergodic averages. Israel J Math, 2005, 149: 1–19
- 26 Host B, Kra B. Nilpotent Structures in Ergodic Theory. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 236. Providence: Amer Math Soc, 2018
- 27 Huang W, Shao S, Ye X. Nil Bohr-Sets and Almost Automorphy of Higher Order. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 241. Providence: Amer Math Soc, 2016
- 28 Huang W, Shao S, Ye X. Topological dynamical systems induced by polynomials and combinatorial consequences. Adv Math, 2025, 479: 110440
- 29 Jin R. The sumset phenomenon. Proc Amer Math Soc, 2002, 130: 855–861
- 30 Kra B, Moreira J, Richter F, et al. Problems on infinite sumset configurations in the integers and beyond. Bull Amer Math Soc (NS), 2025, 62: 537–574
- 31 Kra B, Moreira J, Richter F, et al. A proof of Erdős's $B + B + t$ conjecture. Comm Amer Math Soc, 2024, 4: 480–494
- 32 Kra B, Moreira J, Richter F, et al. Infinite sumsets in sets with positive density. J Amer Math Soc, 2024, 37: 637–682
- 33 Leibman A. Convergence of multiple ergodic averages along polynomials of several variables. Israel J Math, 2005, 146: 303–315
- 34 Moreira J, Richter F, Robertson D. A proof of a sumset conjecture of Erdős. Ann of Math (2), 2019, 89: 605–652
- 35 Ramsey F. On a problem of formal logic. Proc Lond Math Soc (3), 1929, 30: 264–286
- 36 Tao T, Ziegler T. Infinite partial sumsets in the primes. J Anal Math, 2023, 151: 375–389

Combinatorial properties of some big sets

Xiangdong Ye, Wen Huang & Song Shao

Abstract In this paper, we review certain combinatorial properties of some big sets, namely, sets with positive upper Banach density and piecewise syndeticity. In the process to do so, we give a proof of the upper density polynomial version of Furstenberg-Glasner's theorem, and using ergodic tools, we show that $N_{\mathcal{A}}(C)$ is piecewise syndetic in $\mathbb{Z}^2$ if $C = A - B$, where $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ are two subsets of $\mathbb{Z}$ with positive upper Banach density. Moreover, we provide a simpler dynamical proof of Jin's theorem, i.e., the above mentioned $C = A - B$ is piecewise syndetic, and give an affirmative answer to a question by Kra et al. when the set involved is piecewise syndetic.

Keywords ergodic Ramsey theory, piecewise syndetic, upper Banach density

MSC(2020) 37A05, 37A30

doi: 10.1360/SSM-2024-0377