



部分双曲系统的中心 Lyapunov 指数的熵谱

献给文兰教授 80 寿辰

张金华

北京航空航天大学数学科学学院, 北京 100191

E-mail: jinhua_zhang@buaa.edu.cn

收稿日期: 2024-11-21; 接受日期: 2025-02-14; 网络出版日期: 2025-02-26

国家重点研发计划 (批准号: 2022YFA1005801) 和国家自然科学基金 (批准号: 12471179) 资助项目

摘要 本文研究一类传递的中心一维部分双曲微分同胚的中心 Lyapunov 指数的熵谱, 证明当强不稳定叶状结构极小时, 负 Lyapunov 指数的水平集的拓扑熵随着 Lyapunov 指数连续变化, 且水平集上的变分原理成立.

关键词 部分双曲 熵 Lyapunov 指数 变分原理

MSC (2020) 主题分类 37D30, 37D35, 37D25, 37A35

1 引言

Brin 和 Pesin^[15] 以及 Pesin 和 Sinai^[36] 提出的部分双曲理论是近些年来微分动力系统领域的研究热点. 部分双曲理论是一致双曲理论的推广, 事实上, 很多持续传递的非双曲系统都具有某种部分双曲性 (参见文献 [7, 22]). Bonatti 等^[8] 证明了在持续传递的中心一维部分双曲微分同胚集合中, 存在 C^1 -开稠子集, 使得其中的每个微分同胚, 其强稳定或者强不稳定叶状结构是极小的. 本文希望对此类部分双曲系统研究其动力学性质.

一致双曲系统的重分形分析的研究已相对成熟, 可参见文献 [2, 35, 37, 38, 42], 更多工作可参见评论文章 [16]. 本文尝试研究持续传递中心一维部分双曲微分同胚的重分形分析, 由于中心丛的出现, 这类系统不具有“可扩性”和“碎轨连接”等性质, 甚至系统沿着中心丛会持续出现零 Lyapunov 指数 (参见文献 [3, 10, 28]). 因此, 本文从中心 Lyapunov 指数出发研究其重分形分析.

首先, 回顾部分双曲性的定义. 设 M 是紧致无边的光滑 Riemann 流形. 称 $f \in \text{Diff}^1(M)$ 是部分双曲的, 如果存在 Df -不变的连续丛分解 $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ 以及常数 $C \geq 1$ 和 $\lambda \in (0, 1)$, 使得对于任意 $x \in M$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$\bullet \|Df^n|_{E^s(x)}\| \leq C \cdot \lambda^n, \|Df^{-n}|_{E^u(x)}\| \leq C \cdot \lambda^n;$$

英文引用格式: Zhang J H. The entropy spectrum of the center Lyapunov exponents for partially hyperbolic systems (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 591–608, doi: 10.1360/SSM-2024-0346

$$\bullet \|Df^n|_{E^s(x)}\| \cdot \|Df^{-n}|_{E^c(f^n(x))}\| \leq C \cdot \lambda^n, \|Df^n|_{E^c(x)}\| \cdot \|Df^{-n}|_{E^u(f^n(x))}\| \leq C \cdot \lambda^n.$$

Gourmelon^[29] 证明了可以选择新的 Riemann 度量使得 $C = 1$, 因此在本文中, 取 $C = 1$. 由 Hirsch 等^[30] 的经典工作知, 强稳定丛 E^s 和强不稳定丛 E^u 都是唯一可积的, 其积成的叶状结构称作强稳定叶状结构和强不稳定叶状结构, 分别记为 $\mathcal{F}^s$ 和 $\mathcal{F}^u$. 但是中心丛 E^c 一般不具备可积性, 即使 $\dim(E^c) = 1$ (参见文献 [9, 41]).

设 $f \in \text{Diff}^1(M)$ 为中心一维部分双曲微分同胚, 分别记 $\mathcal{M}_{\text{inv}}(f)$ 和 $\mathcal{M}_{\text{erg}}(f)$ 为 f 的不变测度和遍历测度构成的集合, 并赋予弱 $*$ - 拓扑. 此时 $\mathcal{M}_{\text{inv}}(f)$ 为紧致度量空间. 设 $\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f)$, 由 Birkhoff 遍历定理可知, 测度 μ 沿着中心丛 E^c 的 Lyapunov 指数为

$$\lambda^c(\mu) = \int \log \|Df|_{E^c}\| d\mu,$$

称其为遍历测度 μ 的中心 Lyapunov 指数. 类似地, 若 $\mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f)$, 则 μ 的 (平均) 中心 Lyapunov 指数定义为

$$\lambda^c(\mu) = \int \log \|Df|_{E^c}\| d\mu.$$

定义

$$\lambda_{\max} = \sup\{\lambda^c(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f)\}$$

和

$$\lambda_{\min} = \inf\{\lambda^c(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f)\}.$$

对于任意 $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, 定义中心 Lyapunov 指数 λ - 水平集为

$$\mathcal{L}(\lambda) = \left\{ x \in M \mid \lim_{|n| \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n|_{E^c(x)}\| = \lambda \right\}.$$

由定义知 $\mathcal{L}(\lambda)$ 是 f - 不变集, 但一般而言 $\mathcal{L}(\lambda)$ 是非紧致集合.

设 $\mathcal{F}$ 为流形 M 上的叶状结构, 称 $\mathcal{F}$ 是极小的, 如果 $\mathcal{F}$ 的每一片叶子在流形 M 中稠密, 即 $\overline{\mathcal{F}(x)} = M$ 对于任意 $x \in M$ 都成立. 下面陈述本文的主要结论.

定理 1.1 设 $f \in \text{Diff}^1(M)$ 是中心一维部分双曲微分同胚. 假设

- (1) f 的强不稳定叶状结构 $\mathcal{F}^u$ 是极小的;
- (2) f 具有中心指数为负的周期轨道, 则

$$\bullet [\lambda_{\min}, \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)} \lambda^c(\mu)] \subset \{\lambda^c(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)\} \subset [\lambda_{\min}, \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)} \lambda^c(\mu)].$$

特别地, $\{\lambda^c(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)\}$ 为区间.

- $\lambda \mapsto h_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda))$ 为区间 $[\lambda_{\min}, \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)} \lambda^c(\mu)]$ 上的上凸连续函数.
- 对于任意 $\lambda \in [\lambda_{\min}, \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)} \lambda^c(\mu)]$, 如下变分原理成立:

$$h_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda)) = \sup\{h_{\mu}(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f), \lambda^c(\mu) = \lambda\}.$$

注 1.1 由 $\mathcal{F}^u$ 的极小性和 f 沿着 $\mathcal{F}^u$ 的一致扩张性知, 我们所研究的系统 f 是拓扑混合的, 即对于任意两个非空开集 U 和 V , 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n \geq N$ 时, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. 故这类系统是传递的, 即对于任意两个非空开集 U 和 V , 存在 $m \in \mathbb{N}$, 使得 $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$.

“Blender” 是由 Bonatti 和 Díaz^[4] 引入的一种研究持续非双曲现象的工具, 而且 “blender” 在非双曲系统中很常见 (参见文献 [5, 6]). 当定理 1.1 中的 f 具有中心稳定的 “blender” 时, 可以构造一系列

中心 Lyapunov 指数为负的周期测度使得其极限测度为遍历测度且中心 Lyapunov 指数为零, 即 f 有非双曲遍历测度 (参见文献 [3, 10]). 此时

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)} \lambda^c(\mu) = 0.$$

但我们不知道函数 $\lambda \mapsto h_{\text{top}}(\mathcal{L})$ 在 0 处是否连续, 主要原因是不清楚非双曲遍历测度能否被中心压缩的双曲基本集在弱 $*$ - 拓扑和熵的意义下逼近. 当系统两个强叶状结构 $\mathcal{F}^s$ 和 $\mathcal{F}^u$ 都极小时, 文献 [18, 21] 证明了上述函数在零 Lyapunov 指数处是连续的, 而且对于某些特殊的一步斜积系统, 零 Lyapunov 指数水平集上的变分原理成立 (参见文献 [19]). 更多基于 Lyapunov 指数研究系统的重分形分析的结果可参见文献 [23, 24, 32, 33, 39].

2 预备知识

本节陈述本文所用到的概念和已知结论, 并对一些所需结果给出证明.

2.1 拓扑熵

本小节主要回顾非紧致集合上拓扑熵的定义, 该定义最早由 Bowen^[13] 受 Hausdorff 维数定义启发利用开覆盖的方式给出, 这里陈述由 Pesin^[35] 利用 Bowen 球给出的等价定义.

设 (X, d) 为紧致度量空间, $f: X \rightarrow X$ 为连续映射. 给定 $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$, 则以 x 为中心的 (n, ε) -Bowen 球定义为

$$B_n(x, \varepsilon) = \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(B(f^i(x), \varepsilon)),$$

其中 $B(\cdot, \varepsilon)$ 表示以 $\cdot$ 为中心、半径为 ε 的开球.

设 $Y \subset X$, 下面给出系统在 Y 上的拓扑熵. 给定 $h \geq 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 记

$$m_{h, \varepsilon}(Y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} e^{-n_i h} \left| Y \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{n_i}(x_i, \varepsilon), n_i \geq N \right. \right\}.$$

由定义可知, 存在唯一的 $h_0 \geq 0$ 使得 $m_{h, \varepsilon}(Y)$ 从 $+\infty$ 跳跃到 0. 令

$$h_{\text{top}, \varepsilon}(Y) = \inf \{h \in \mathbb{R} \mid m_{h, \varepsilon}(Y) = 0\} = \sup \{h \in \mathbb{R} \mid m_{h, \varepsilon}(Y) = \infty\}.$$

于是 f 在集合 Y 上的拓扑熵定义为

$$h_{\text{top}}(Y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_{\text{top}, \varepsilon}(Y).$$

文献 [13, 命题 1] 证明了当 $Y = X$ 时上述拓扑熵的定义与经典拓扑熵的定义^[1] 相等, 于是一般集合的拓扑熵是紧致集拓扑熵的推广. 更进一步地, Bowen^[13] 给出了测度熵与非紧致集合拓扑熵之间的联系.

给定 $x \in X$, 记 $V_f(x)$ 为 $\{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ 在弱 $*$ - 拓扑下的聚点集.

定理 2.1 (参见文献 [13, 定理 2 和 3]) 设 f 是紧致度量空间 (X, d) 上的连续映射.

• 若 μ 为 f - 遍历的, 则

$$h_{\text{top}}(G(\mu)) = h_{\mu}(f),$$

其中 $G(\mu) = \{x \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)} = \mu\}$.

- 给定 $t \geq 0$, 定义集合

$$Q(t) = \{x \in X \mid \exists \mu \in V_f(x), h_\mu(f) \leq t\},$$

则 $h_{\text{top}}(Q(t)) \leq t$.

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 称集合 $S \subset Y$ 为 Y 的 (n, ε) - 分离集, 若对于任意不同两点 $x, y \in S$, 存在 $0 \leq i \leq n-1$ 使得

$$d(f^i(x), f^i(y)) > \varepsilon;$$

称集合 $E \subset Y$ 为 Y 的 (n, ε) - 生成集, 若对于任意点 $x \in Y$, 存在 $y \in E$ 使得

$$d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon, \quad \text{对于任意 } i = 0, \dots, n-1 \text{ 成立.}$$

对于一般的非紧致集 $Y \subset X$, 也可以仿照紧致情形下的方式定义熵. 记 $s_n(Y, \varepsilon)$ 为 Y 的最大 (n, ε) - 分离集的基数, $r_n(Y, \varepsilon)$ 为 Y 的最小 (n, ε) - 生成集的基数. 可以定义 Y 的上、下容度熵 (upper/lower capacity entropy) 分别为

$$\overline{Ch}_{\text{top}}(Y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log s_n(Y, \varepsilon),$$

$$\underline{Ch}_{\text{top}}(Y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log r_n(Y, \varepsilon).$$

如下引理给出了这几种熵之间的关系和基本性质.

引理 2.1 (参见文献 [35, 章节 11]) 设 f 为紧致度量空间 X 上的连续映射, $Y \subset X$, 则

- $\overline{Ch}_{\text{top}}(Y) \geq \underline{Ch}_{\text{top}}(Y) \geq h_{\text{top}}(Y)$;
- 设 $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 为 X 的子集, 则 $\overline{Ch}_{\text{top}}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{Ch}_{\text{top}}(\bigcup_{i=1}^n Y_i)$;
- 当 $Y \subset Z$ 时, $h_{\text{top}}(Z) \geq h_{\text{top}}(Y)$;
- 若 Y 是 f - 不变集, 则 $\overline{Ch}_{\text{top}}(Y) = \underline{Ch}_{\text{top}}(Y)$.

注 2.1 (1) 引理 2.1 的第一条中可以取到严格不等号 (参见文献 [35, 例 11.1 和 11.2]).

(2) 当 Y 是 f - 不变集时, 简记 $\overline{Ch}_{\text{top}}(Y)$ 为 $Ch_{\text{top}}(Y)$.

2.2 拓扑压及其 Legendre-Fenchel 变换

设 f 是紧致度量空间 (X, d) 上的同胚. 设 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, 记

$$S_n \varphi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)).$$

下面给出系统关于连续函数 φ 的拓扑压的定义.

给定 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$, 定义

$$P_n(\varphi, \varepsilon) = \sup \left\{ \sum_{x \in E} e^{S_n \varphi(x)} \mid E \text{ 为 } (n, \varepsilon)\text{- 分离集} \right\}.$$

f 关于 φ 的拓扑压定义为

$$P_{\text{top}}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_n(\varphi, \varepsilon).$$

由变分原理 (参见文献 [43, 定理 9.10 和 推论 9.10.1]) 可知

$$P_{\text{top}}(\varphi) = \sup \left\{ h_{\mu}(f) + \int \varphi d\mu \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f) \right\} = \sup \left\{ h_{\mu}(f) + \int \varphi d\mu \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f) \right\}.$$

上述等式右边的上确界未必能由遍历测度或者不变测度所达到. 若不变测度 $\nu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f)$ 满足

$$P_{\text{top}}(\varphi) = h_{\nu}(f) + \int \varphi d\nu,$$

则称 ν 是 φ 的平衡态.

对于任意 $q \in \mathbb{R}$, 定义压函数

$$\mathcal{P}(q, \varphi) = P_{\text{top}}(q\varphi).$$

在不引起混淆的情形下, 将 $\mathcal{P}(q, \varphi)$ 简记为 $\mathcal{P}(q)$. 由定义知 $\mathcal{P}(0) = h_{\text{top}}(f)$.

由于本文研究紧致无边 Riemann 流形上的 C^1 -微分同胚的性质, 本小节假设 $h_{\text{top}}(f) < +\infty$. 进一步, 我们可以引入限制性的拓扑压. 设 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_{\text{erg}}(f)$, 定义

$$P_{\mathcal{N}}(\varphi) = \sup \left\{ h_{\mu}(f) + \int \varphi d\mu \mid \mu \in \mathcal{N} \right\}.$$

类似地, 考虑压函数

$$\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q, \varphi) = P_{\mathcal{N}}(q\varphi),$$

在不引起混淆的情形下, 将 $\mathcal{P}(q, \varphi)$ 简记为 $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q)$.

对于紧致度量空间上的连续函数 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$, 记

$$\|\varphi\|_{\infty} = \sup_{x \in M} |\varphi(x)|.$$

限制性压函数与拓扑压函数的性质类似, 下面介绍限制性压函数的性质. 关于拓扑压函数的性质可参见文献 [43, 第 9 章].

引理 2.2 设 f 是紧致度量空间 (X, d) 上的同胚, $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_{\text{erg}}(f)$, $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, 则

- $q \mapsto \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q)$ 为 Lipschitz 连续的下凸函数, 且 Lipschitz 常数为 $\|\varphi\|_{\infty}$;
- 设 $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, 则

$$|\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q, \varphi) - \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q', \psi)| \leq |q - q'| \cdot \|\varphi\|_{\infty} + |q'| \|\varphi - \psi\|_{\infty}.$$

证明 对于任意 $q, q' \in \mathbb{R}$ 和 $\alpha \in [0, 1]$, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(\alpha q + (1 - \alpha)q') &= \sup \left\{ \alpha \left(h_{\mu}(f) + q \int \varphi d\mu \right) + (1 - \alpha) \left(h_{\mu}(f) + q' \int \varphi d\mu \right) \mid \mu \in \mathcal{N} \right\} \\ &\leq \alpha \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q) + (1 - \alpha) \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q'). \end{aligned}$$

函数 $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q)$ 的 Lipschitz 连续性由第二条得出. 下面给出第二条的证明.

对于 $q, q' \in \mathbb{R}$, 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $\mu, \mu' \in \mathcal{N}$ 使得

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q, \varphi) &\leq h_{\mu}(f) + q \int \varphi d\mu + \varepsilon, \\ \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q', \psi) &\leq h_{\mu'}(f) + q' \int \psi d\mu' + \varepsilon. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q, \varphi) - \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q', \psi) &\leq h_{\mu}(f) + q \int \varphi d\mu + \varepsilon - h_{\mu}(f) - q' \int \psi d\mu \\
 &\leq |q - q'| \|\varphi\|_{\infty} + |q'| \|\varphi - \psi\|_{\infty} + \varepsilon, \\
 \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q, \varphi) - \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q', \psi) &\geq h_{\mu'}(f) + q \int \varphi d\mu' - h_{\mu'}(f) - q' \int \psi d\mu' - \varepsilon \\
 &\geq -|q - q'| \|\varphi\|_{\infty} - |q'| \|\varphi - \psi\|_{\infty} - \varepsilon,
 \end{aligned}$$

由 ε 的任意性, 引理得证. $\square$

下面介绍压函数 $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q)$ 的 Legendre-Fenchel 变换, 该变换将用于证明水平集上的变分原理和熵的连续性.

定义 2.1 设 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_{\text{erg}}(f)$, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, 定义函数

$$\mathcal{E}_{\mathcal{N}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \quad \lambda \mapsto \inf_{q \in \mathbb{R}} (\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q) - q\lambda)$$

为压函数 $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q)$ 的 Legendre-Fenchel 变换. 记

$$D(\mathcal{E}_{\mathcal{N}}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \inf_{q \in \mathbb{R}} (\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q) - q\lambda) > -\infty \right\}.$$

注 2.2 在需要强调连续函数 φ 时, 将 Legendre-Fenchel 变换记为 $\mathcal{E}_{\mathcal{N}}(\lambda, \varphi)$.

下面证明 $D(\mathcal{E}_{\mathcal{N}})$ 为区间.

引理 2.3 对于 $D(\mathcal{E}_{\mathcal{N}})$, 如下结论成立:

$$\left(\inf_{\mu \in \mathcal{N}} \int \varphi d\mu, \sup_{\mu \in \mathcal{N}} \int \varphi d\mu \right) \subset D(\mathcal{E}_{\mathcal{N}}) \subset \left[\inf_{\mu \in \mathcal{N}} \int \varphi d\mu, \sup_{\mu \in \mathcal{N}} \int \varphi d\mu \right].$$

证明 任取 $\lambda \notin [\inf_{\mu \in \mathcal{N}} \int \varphi d\mu, \sup_{\mu \in \mathcal{N}} \int \varphi d\mu]$, 不妨设 $\lambda > \sup_{\mu \in \mathcal{N}} \int \varphi d\mu$ (另外一种情形证明相似), 则

$$\begin{aligned}
 \inf_{q \in \mathbb{R}} (\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q) - q\lambda) &= \inf_{q \in \mathbb{R}} \sup_{\mu \in \mathcal{N}} h_{\mu}(f) + q \int \varphi d\mu - q\lambda \\
 &\leq \inf_{q \in \mathbb{R}} \sup_{\mu \in \mathcal{N}} h_{\text{top}}(f) + q \int \varphi d\mu - q\lambda \\
 &\leq \inf_{q \geq 0} \sup_{\mu \in \mathcal{N}} h_{\text{top}}(f) + q \left(\int \varphi d\mu - \lambda \right) \\
 &\leq \inf_{q \geq 0} q \left(\sup_{\mu \in \mathcal{N}} \int \varphi d\mu - \lambda \right) + h_{\text{top}}(f) \\
 &= -\infty,
 \end{aligned}$$

于是 $\lambda \notin D(\mathcal{E}_{\mathcal{N}})$.

任取 $\lambda \in (\inf_{\mu \in \mathcal{N}} \int \varphi d\mu, \sup_{\mu \in \mathcal{N}} \int \varphi d\mu)$, 则

$$\begin{aligned}
 \inf_{q \in \mathbb{R}} (\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q) - q\lambda) &= \inf_{q \in \mathbb{R}} \sup_{\mu \in \mathcal{N}} h_{\mu}(f) + q \int \varphi d\mu - q\lambda \\
 &\geq \inf_{q \in \mathbb{R}} \sup_{\mu \in \mathcal{N}} q \int \varphi d\mu - q\lambda.
 \end{aligned}$$

当 $q > 0$ 时, 有

$$\sup_{\mu \in \mathcal{N}} q \int \varphi d\mu - q\lambda \geq q \cdot \left(\sup_{\mu \in \mathcal{N}} \int \varphi d\mu - \lambda \right) \geq 0.$$

当 $q \leq 0$ 时, 有

$$\sup_{\mu \in \mathcal{N}} q \int \varphi d\mu - q\lambda \geq q \cdot \left(\inf_{\mu \in \mathcal{N}} \int \varphi d\mu - \lambda \right) \geq 0.$$

故 $\inf_{q \in \mathbb{R}} (\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q) - q\lambda) > -\infty$, 从而 $\lambda \in D(\mathcal{E}_{\mathcal{N}})$. □

注 2.3 (1) 此后, 我们将 $\mathcal{E}_{\mathcal{N}}$ 只看作 $D(\mathcal{E}_{\mathcal{N}})$ 上的函数.

(2) 由定义知 $\mathcal{E}_{\mathcal{N}} : D(\mathcal{E}_{\mathcal{N}}) \rightarrow \mathbb{R}$ 为上凸函数.

(3) 对于任意 $\lambda \in \text{Int}(D(\mathcal{E}_{\mathcal{N}}))$, 有 $\mathcal{E}_{\mathcal{N}}(\lambda) \geq 0$.

下面探讨 $\mathcal{E}_{\mathcal{N}}$ 与熵的关系.

引理 2.4 若 $\{\mu \in \mathcal{N} \mid \int \varphi d\mu = \lambda\} \neq \emptyset$, 则 $\lambda \in D(\mathcal{E}_{\mathcal{N}})$, 且

$$\mathcal{E}_{\mathcal{N}}(\lambda) \geq \sup \left\{ h_{\mu}(f) \mid \mu \in \mathcal{N}, \int \varphi d\mu = \lambda \right\}.$$

证明 设 $\lambda \in \mathbb{R}$ 满足引理的假设条件, 则

$$\begin{aligned} \inf_{q \in \mathbb{R}} (\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q) - q\lambda) &= \inf_{q \in \mathbb{R}} \sup_{\mu \in \mathcal{N}} \left(h_{\mu}(f) + q \int \varphi d\mu - q\lambda \right) \\ &\geq \inf_{q \in \mathbb{R}} \sup \left\{ h_{\mu}(f) + q \int \varphi d\mu - q\lambda \mid \mu \in \mathcal{N}, \int \varphi d\mu = \lambda \right\} \\ &= \sup \left\{ h_{\mu}(f) \mid \mu \in \mathcal{N}, \int \varphi d\mu = \lambda \right\} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

特别地, $\lambda \in D(\mathcal{E}_{\mathcal{N}})$. □

2.3 双曲基本集

设 $f \in \text{Diff}^1(M)$. 紧致 f -不变集 Λ 称为双曲集, 如果存在 Df -不变分解 $T_{\Lambda}M = E^s \oplus E^u$ 和 $N \in \mathbb{N}$ 使得对于任意 $x \in \Lambda$, 有

$$\|Df^N|_{E^s}\| < \frac{1}{2} \quad \text{且} \quad \|Df^{-N}|_{E^u(x)}\| < \frac{1}{2}.$$

双曲集 Λ 称为双曲基本集, 如果

- Λ 为传递集, 即存在 $x \in \Lambda$, 其正半轨道在 Λ 中稠密.
- 存在 Λ 的开邻域 U 使得

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\overline{U}).$$

由于双曲集是可扩的 (参见文献 [45, 定理 4.14]), 从而测度熵随测度的变化是上半连续的 (参见文献 [12]). 结合变分原理知, 双曲集上的连续函数总是有平衡态.

引理 2.5 设 Λ 为 $f \in \text{Diff}^1(M)$ 的双曲集, $\varphi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, 则

$$\left\{ \mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f|_{\Lambda}) \mid h_{\mu}(f) + \int \varphi d\mu = P_{\text{top}}(\varphi) \right\}$$

为非空紧致的凸集.

Bowen^[14] 证明了双曲基本集上的 Hölder 连续函数的平衡态存在且唯一.

定理 2.2^[14] 设 Λ 为 $f \in \text{Diff}^1(M)$ 的双曲基本集, $\varphi: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ 为 C^α -连续函数 ($\alpha > 0$), 则存在唯一的遍历测度 $\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_\Lambda)$ 使得

$$h_\mu(f) + \int \varphi d\mu = P_{\text{top}}(\varphi).$$

双曲基本集上的重分形分析有如下经典结果:

定理 2.3^[38] 设 $f \in \text{Diff}^1(M)$, Λ 为双曲基本集, $\varphi: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, 则

• 如下等式成立:

$$\left\{ \int \varphi d\mu \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_\Lambda) \right\} = \left[\inf_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f|_\Lambda)} \int \varphi d\mu, \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f|_\Lambda)} \int \varphi d\mu \right];$$

• 对每个 $\lambda \in \left\{ \int \varphi d\mu \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_\Lambda) \right\}$, 有

$$h_{\text{top}}(\mathcal{L}_\varphi(\lambda)) = \sup \left\{ h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f), \int \varphi d\mu = \lambda \right\},$$

其中 $\mathcal{L}_\varphi(\lambda) = \{x \in M \mid \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{S_n \varphi(x)}{n} = \lambda\}$.

下面给出双曲基本集上 $\mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}}$ 与测度熵的关系.

定理 2.4 设 $f \in \text{Diff}^1(M)$, Λ 为双曲基本集, $\varphi: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数. 对于任意 $\lambda \in \text{Int}(D(\mathcal{E}_\mathcal{N}))$, 其中 $\mathcal{N} = \mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_\Lambda)$, 有

$$\mathcal{E}_\mathcal{N}(\lambda) = \sup \left\{ h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f|_\Lambda), \int \varphi d\mu = \lambda \right\} = \sup \left\{ h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_\Lambda), \int \varphi d\mu = \lambda \right\}.$$

证明 由引理 2.3 知

$$\text{Int}(D(\mathcal{E}_\mathcal{N})) = \left(\inf_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_\Lambda)} \int \varphi d\mu, \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_\Lambda)} \int \varphi d\mu \right).$$

由遍历分解定理知

$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_\Lambda)} \int \varphi d\mu = \inf_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f|_\Lambda)} \int \varphi d\mu, \quad \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_\Lambda)} \int \varphi d\mu = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f|_\Lambda)} \int \varphi d\mu.$$

由定理 2.3 知, 对于任意 $\lambda \in \text{Int}(D(\mathcal{E}_\mathcal{N}))$, 有

$$\left\{ \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_\Lambda) \mid \int \varphi d\mu = \lambda \right\} \neq \emptyset.$$

由变分原理知, 对于任意 $q \in \mathbb{R}$, 有

$$\sup \left\{ h_\mu(f) + q \int \varphi d\mu \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f|_\Lambda) \right\} = \mathcal{P}_\mathcal{N}(q).$$

重复引理 2.4 的证明过程, 对于任意 $\lambda \in \text{Int}(D(\mathcal{E}_\mathcal{N}))$, 有

$$\mathcal{E}_\mathcal{N}(\lambda) \geq \sup \left\{ h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f|_\Lambda), \int \varphi d\mu = \lambda \right\} \geq \sup \left\{ h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_\Lambda), \int \varphi d\mu = \lambda \right\}.$$

任给 $\lambda \in \text{Int}(D(\mathcal{E}_{\mathcal{N}}))$, 下面只需要证明

$$\sup \left\{ h_{\mu}(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_{\Lambda}), \int \varphi d\mu = \lambda \right\} \geq \mathcal{E}_{\mathcal{N}}(\lambda). \quad (2.1)$$

设

$$\delta_0 = \frac{1}{4} \min \left\{ \sup_{\mu \in \mathcal{N}} \int \varphi d\mu - \lambda, \lambda - \inf_{\mu \in \mathcal{N}} \int \varphi d\mu \right\}.$$

取 $0 < \varepsilon \ll \delta_0$ 充分小, 使得当 Hölder 连续函数 $\psi: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\|\varphi - \psi\|_{\infty} < \varepsilon$ 时, 必有

$$\inf_{\mu \in \mathcal{N}} \int \psi d\mu + \delta_0 < \lambda < \sup_{\mu \in \mathcal{N}} \int \psi d\mu - \delta_0. \quad (2.2)$$

由引理 2.2 知

$$|\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q) - \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q, \psi)| \leq |q| \|\varphi - \psi\|_{\infty} < |q| \varepsilon, \quad \text{对于任意 } q \in \mathbb{R} \text{ 成立}. \quad (2.3)$$

由定理 2.2 知, 对于任意 $q \in \mathbb{R}$, 存在唯一的遍历测度 $\mu_q \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_{\Lambda})$ 使得

$$h_{\mu_q}(f) + q \int \psi d\mu_q = \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q, \psi).$$

断言 2.1 $q \mapsto \mu_q$ 为连续映射, 即 μ_q 关于 q 连续.

证明 假设 q_n 收敛于 q_0 . 由于不变测度空间在弱 $*$ - 拓扑下是紧致的, 不妨假设 μ_{q_n} 弱 $*$ - 收敛于 ν . 往证 $\nu = \mu_{q_0}$.

由测度熵的上半连续性知

$$h_{\nu}(f) + q_0 \int \psi d\nu \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} h_{\mu_{q_n}}(f) + q_n \int \psi d\mu_{q_n} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q_n, \psi).$$

由引理 2.2 知 $h_{\nu}(f) + q_0 \int \psi d\nu \geq \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q_0, \psi)$. 由变分原理可知 $h_{\nu}(f) + q_0 \int \psi d\nu = \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q_0, \psi)$. 由定理 2.2 知 $\nu = \mu_{q_0}$. $\square$

断言 2.2 存在 $-h_{\text{top}}(f)/\delta_0 < \hat{q} < h_{\text{top}}(f)/\delta_0$ 使得

$$\int \psi d\mu_{\hat{q}} = \lambda.$$

证明 当 $q > 0$ 时, 有

$$h_{\mu_q}(f) + q \int \psi d\mu_q = \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q, \psi) \geq \sup_{\mu \in \mathcal{N}} q \int \psi d\mu = q \sup_{\mu \in \mathcal{N}} \int \psi d\mu.$$

于是当 $q > h_{\text{top}}(f)/\delta_0$ 时有

$$\int \psi d\mu_q > \sup_{\mu \in \mathcal{N}} \int \psi d\mu - \delta_0.$$

同理可证, 当 $q < -h_{\text{top}}(f)/\delta_0$ 时有

$$\int \psi d\mu_q < \inf_{\mu \in \mathcal{N}} \int \psi d\mu + \delta_0.$$

由断言 2.1 和 (2.2) 知, 存在 $-h_{\text{top}}(f)/\delta_0 \leq \hat{q} \leq h_{\text{top}}(f)/\delta_0$ 使得

$$\int \psi d\mu_{\hat{q}} = \lambda.$$

断言 2.2 证毕. $\square$

由断言 2.2 知

$$\begin{aligned}
 \sup \left\{ h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_\Lambda), \int \varphi d\mu = \lambda \right\} &\geq h_{\mu_{\hat{q}}}(f) = \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(\hat{q}, \psi) - \hat{q}\lambda \\
 &\stackrel{(2.3)}{\geq} \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(\hat{q}) - \hat{q}\lambda - |\hat{q}| \cdot \varepsilon \\
 &\geq \mathcal{E}_{\mathcal{N}}(\lambda) - |\hat{q}| \cdot \varepsilon \\
 &\geq \mathcal{E}_{\mathcal{N}}(\lambda) - \varepsilon \cdot \frac{h_{\text{top}}(f)}{\delta_0}.
 \end{aligned}$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, (2.1) 得证. 定理 2.4 证毕. $\square$

2.4 同宿相关

设 $f \in \text{Diff}^1(M)$, 点 p 和 q 为 f 的双曲周期点. 称 p 和 q 是同宿相关的, 如果 $W^s(\mathcal{O}_p)$ 与 $W^u(\mathcal{O}_q)$ 有横截交点, 且 $W^u(\mathcal{O}_p)$ 与 $W^s(\mathcal{O}_q)$ 有横截交点.

由经典的 Birkhoff-Smale 定理知, 对于同宿相关的两个双曲周期点 p 和 q , 存在双曲基本集 Λ 使得 $p, q \in \Lambda$. 上述结论也对同宿相关的双曲基本集成立. 我们有如下经典结论, 其证明可仿照文献 [31, 定理 6.5.5].

定理 2.5 设 $f \in \text{Diff}^1(M)$, Λ 和 Λ' 为 f 的双曲基本集. 若存在 Λ 中的周期点 p 和 Λ' 中的周期点 p' 使得 p 和 p' 同宿相关, 则存在 f 的双曲基本集 $\hat{\Lambda}$ 使得 $\Lambda \cup \Lambda' \subset \hat{\Lambda}$.

2.5 双曲测度的逼近

Katok 和 Mendoza 在文献 [31, 附录 S] 中证明了 $C^{1+\alpha}$ -微分同胚的双曲遍历测度能被双曲基本集在弱 $*$ -拓扑和熵的意义下逼近. 对于 C^1 -微分同胚, 当双曲遍历测度的双曲分解为控制分解时, 类似结论成立 (参见文献 [26, 27]). 为了方便起见, 我们只对中心一维部分双曲微分同胚陈述这方面的结果.

定理 2.6 (参见文献 [26, 27, 31]) 设 $f \in \text{Diff}^1(M)$ 为中心一维部分双曲微分同胚, $\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f)$ 且 $\lambda^c(\mu) < 0$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在中心压缩的双曲基本集 Λ_ε 使得

- $h_{\text{top}}(f|_{\Lambda_\varepsilon}) > h_\mu(f) - \varepsilon$;
- 对于任意测度 $\nu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f|_{\Lambda_\varepsilon})$, 有 $d(\mu, \nu) < \varepsilon$.

2.6 穷举族

本小节介绍由 Díaz 等^[18]引入的穷举族 (exhausting family) 的概念. 我们将在微分同胚的情形陈述这一概念.

定义 2.2 设 $f \in \text{Diff}^1(M)$, $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, 且 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_{\text{erg}}(f)$. 一系列紧致不变集 $\{\mathbb{K}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 称为 $(\varphi, \mathcal{N})$ -穷举族, 如果

- (1) $\mathcal{M}_i := \mathcal{M}_{\text{erg}}(\mathbb{K}_i) \subset \mathcal{N}$;
- (2) $\mathbb{K}_i$ 为双曲基本集;
- (3) 记 $\mathcal{P}_i(q) = \mathcal{P}_{\mathcal{M}_i}(q)$, $\mathcal{E}_i(\lambda) = \inf_{q \in \mathbb{R}} (\mathcal{P}_i(q) - q\lambda)$, 则对每个 $\lambda \in \text{Int}(D(\mathcal{E}_i))$, 有

$$\mathcal{E}_i(\lambda) = \sup \left\{ h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_i, \int \varphi d\mu = \lambda \right\};$$

(4) 对每个 $q \in \mathbb{R}$, 有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{\mathcal{M}_i}(q) = \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q);$$

(5) 如下等式成立:

$$\inf_{\mu \in \mathcal{N}} \int \varphi d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \inf_{\mu \in \mathcal{M}_i} \int \varphi d\mu \quad \text{且} \quad \sup_{\mu \in \mathcal{N}} \int \varphi d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{\mu \in \mathcal{M}_i} \int \varphi d\mu.$$

注 2.4 (1) 由文献 [46, 定理 6.2] 知, 对于任意 $\lambda \in \text{Int}(D(\mathcal{E}_{\mathcal{N}}))$ 有 $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{E}_i(\lambda) = \mathcal{E}_{\mathcal{N}}(\lambda)$.

(2) 在穷举族的定义中, 我们不要求 $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_i = \mathcal{N}$.

(3) 在穷举族的定义中, 第三条可由第二条及定理 2.4 得出. 为了方便使用该定义, 故此保留第三条.

我们将利用穷举族结合双曲基本集上经典的重分形分析的结果证明我们的主要结论.

3 主要结论的证明

本节首先对于我们考虑的系统证明穷举族的存在性, 再利用双曲基本集对水平集作拓扑熵的逼近, 最后利用穷举族和水平集的熵逼近给出定理 1.1 的证明.

3.1 穷举族的存在性

Díaz 等在文献 [18, 命题 6.3] 中对一类持续传递一步斜积型系统证明了穷举族的存在性. 文献 [21] 考虑了两个叶状结构均极小的情形. 对于中心一维部分双曲微分同胚, 若强不稳定叶状结构 $\mathcal{F}^u$ 是极小的, 本小节将对中心指数为负的遍历测度集证明穷举族的存在性.

设 $f \in \text{Diff}^1(M)$ 为中心一维部分双曲微分同胚, 记 $\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)$ 为中心 Lyapunov 指数为负的遍历测度构成的集合. 引入如下记号:

$$\varphi^c(x) = \log \|Df|_{E^c(x)}\|, \quad x \in M.$$

本小节的主要结果如下.

命题 3.1 设 $f \in \text{Diff}^1(M)$ 为中心一维部分双曲微分同胚. 假设

- f 的强不稳定叶状结构 $\mathcal{F}^u$ 是极小的;
- f 具有中心 Lyapunov 指数为负的周期轨道,

则 f 具有 $(\varphi^c, \mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f))$ - 穷举族 $\{\mathbb{K}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, 且 $\mathbb{K}_i \subset \mathbb{K}_{i+1}$ 对于任意 $i \in \mathbb{N}$ 成立.

证明 我们采用归纳法构造一系列递增的中心压缩型的双曲基本集 $\{\mathbb{K}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 满足

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}(f|\mathbb{K}_i)}(q) - \mathcal{P}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)}(q) > -\frac{1}{i}, \quad \text{对于任意 } q \in [-i, i] \text{ 成立.} \quad (3.1)$$

当 $i = 0$ 时, 取 $\mathbb{K}_0$ 为中心指数为负的双曲周期轨道, 上述不等式自然成立.

假设结论对 $j \leq i-1$ 已构造出中心压缩型的双曲基本集 $\{\mathbb{K}_0, \dots, \mathbb{K}_{i-1}\}$ 使得对应的 (3.1) 成立. 取有限个 $q_1, \dots, q_k \in [-i, i]$ 使得 $\{q_1, \dots, q_k\}$ 在集合 $[-i, i]$ 中 $(8i \cdot \|\varphi^c\|_{\infty})^{-1}$ - 稠密.

对于每个 q_j , 取遍历测度 $\mu_j \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)$ 使得

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)}(q_j) < h_{\mu_j}(f) + q_j \int \varphi^c d\mu_j + \frac{1}{4i}. \quad (3.2)$$

由定理 2.6 可知, 存在中心压缩的双曲基本集 Λ_j 使得

- $h_{\mu_j}(f) < h_{\text{top}}(f|_{\Lambda_j}) + \frac{1}{4i}$;
- 对于任意 $\mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f|_{\Lambda_j})$, 有

$$\left| \int \varphi^c d\mu - \int \varphi^c d\mu_j \right| < \frac{1}{4i(|q_j| + 1)}.$$

设 ν_j 为 Λ_j 上的最大熵测度, 即 $h_{\nu_j}(f) = h_{\text{top}}(f|_{\Lambda_j})$. 于是有

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_{\Lambda_j})}(q_j) &\geq h_{\nu_j}(f) + q_j \int \varphi^c d\nu_j \\ &> h_{\mu_j}(f) - \frac{1}{4i} + q_j \int \varphi^c d\mu_j - \frac{1}{4i} \\ &\stackrel{(3.2)}{>} \mathcal{P}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)}(q_j) - \frac{3}{4i}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

由于 $\mathcal{F}^u$ 是极小的且双曲基本集 Λ_j 的不稳定流形为强不稳定流形, 故 $\{\Lambda_j\}_{j=1}^k$ 两两同宿相关. 由定理 2.5 可知, 存在中心压缩的双曲基本集 $\widehat{\mathbb{K}}_i$ 使得

$$\bigcup_{j=1}^k \Lambda_j \subseteq \widehat{\mathbb{K}}_i.$$

从而 $\mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_{\Lambda_j}) \subset \mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_{\widehat{\mathbb{K}}_i})$. 结合 (3.3), 有

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_{\widehat{\mathbb{K}}_i})}(q_j) > \mathcal{P}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)}(q_j) - \frac{3}{4i}, \quad \text{对每个 } q_j \text{ 都成立.}$$

对于任意 $q \in [-i, i]$, 取 q_j 使得 $|q - q_j| < (8i \cdot \|\varphi^c\|_\infty)^{-1}$, 由引理 2.2 知

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_{\widehat{\mathbb{K}}_i})}(q) &\geq \mathcal{P}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_{\widehat{\mathbb{K}}_i})}(q_j) - |q - q_j| \cdot \|\varphi^c\|_\infty \\ &> \mathcal{P}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)}(q_j) - \frac{3}{4i} - |q - q_j| \cdot \|\varphi^c\|_\infty \\ &\geq \mathcal{P}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)}(q) - \frac{3}{4i} - 2|q - q_j| \cdot \|\varphi^c\|_\infty \\ &\geq \mathcal{P}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)}(q) - \frac{1}{i}. \end{aligned}$$

对于中心压缩的双曲基本集 $\mathbb{K}_{i-1}$ 和 $\widehat{\mathbb{K}}_i$, 由 $\mathcal{F}^u$ 的极小性和定理 2.5 可知, 存在中心压缩的双曲基本集 $\mathbb{K}_i$ 使得

$$\mathbb{K}_i \supseteq \mathbb{K}_{i-1} \cup \widehat{\mathbb{K}}_i.$$

注意到

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_{\mathbb{K}_i})}(q) \geq \mathcal{P}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_{\widehat{\mathbb{K}}_i})}(q), \quad \text{对于任意 } q \in \mathbb{R} \text{ 成立.}$$

由构造方式, $\{\mathbb{K}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 满足定义 2.2(1), 2.2(2) 和 2.2(4). 由每个 $\mathbb{K}_i$ 为双曲基本集, 由定理 2.4 得到定义 2.2(3).

由于 $\mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_{\mathbb{K}_i}) \subset \mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_{\mathbb{K}_{i+1}}) \subset \mathcal{N}$, 故

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{\mu \in \mathcal{M}_i} \int \varphi d\mu \leq \sup_{\mu \in \mathcal{N}} \int \varphi d\mu. \quad (3.4)$$

任给 $\varepsilon > 0$, 取 $q_0 > 0$ 充分大使得 $q_0 \cdot \varepsilon > h_{\text{top}}(f)$. 由限制性压函数的定义有

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}_i}(q_0) \leq h_{\text{top}}(f) + q_0 \cdot \sup_{\mu \in \mathcal{M}_i} \int \varphi d\mu, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(q_0) \geq q_0 \cdot \sup_{\mu \in \mathcal{N}} \int \varphi d\mu.$$

结合 q_0 的取法, 令 $i \rightarrow +\infty$, 则有

$$\sup_{\mu \in \mathcal{N}} \int \varphi d\mu < \varepsilon + \lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{\mu \in \mathcal{M}_i} \int \varphi d\mu.$$

由 ε 的任意性和 (3.4) 知 $\sup_{\mu \in \mathcal{N}} \int \varphi d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{\mu \in \mathcal{M}_i} \int \varphi d\mu$.

同理可证

$$\inf_{\mu \in \mathcal{N}} \int \varphi d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \inf_{\mu \in \mathcal{M}_i} \int \varphi d\mu.$$

从而 $\{\mathbb{K}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 满足定义 2.2(5). □

3.2 水平集的马蹄逼近

为证明定理 1.1, 我们需要利用马蹄 (或双曲基本集) 对水平集的拓扑熵作逼近.

命题 3.2 设 $f \in \text{Diff}^1(M)$ 为中心一维部分双曲微分同胚, $\lambda < 0$ 满足 $\mathcal{L}(\lambda) \neq \emptyset$. 假设 f 的强不稳定叶状结构是极小的, 则任给 $\eta > 0$, 存在中心压缩的双曲基本集 Λ_η 使得

- $h_{\text{top}}(f|_{\Lambda_\eta}) > Ch_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda)) - \eta$;
- 对于任意测度 $\nu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f|_{\Lambda_\eta})$, 有 $|\int \log \|Df|_{E^c}\| d\nu - \lambda| < \eta$.

命题 3.2 的证明方式是对 $\mathcal{L}(\lambda)$ 中基数足够大的分离集中的每个点, 利用强不稳定叶状结构的极小性找到具有一定双曲性的周期伪轨 (参见文献 [11, 第 4 章] 和 [47, 第 3 章]), 应用廖 - 甘的跟踪引理 [25] 得到具有分离性质的周期轨道, 然后从这些具有分离性质的周期轨道得到双曲基本集. 这方面的证明已在诸多文献中出现过, 可参见文献 [20, 27, 31, 47]. 这里给出该命题的证明概要.

命题 3.2 的证明概要 取 $\eta \in (0, \lambda/4)$. 任取 $k \in \mathbb{N}$, 记

$$\mathcal{L}_k(\lambda) = \{x \in \mathcal{L}(\lambda) \mid k^{-1} \cdot e^{n(\lambda - \eta/4)} \leq \|Df^n|_{E^c(x)}\| \leq k \cdot e^{n(\lambda + \eta/4)}, \forall n \in \mathbb{N}\},$$

则 $\mathcal{L}_k(\lambda)$ 为关于 k 的递增集合列, 且 $\mathcal{L}(\lambda) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{L}_k(\lambda)$. 由引理 2.1 可知, 存在 $k_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\overline{Ch}_{\text{top}}(\mathcal{L}_{k_0}(\lambda)) \geq Ch_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda)) - \eta/4.$$

由文献 [40, 推论 3.3] (或文献 [44, 引理 3.8]) 可知, 存在 $r_0 = r(k_0, \lambda)$ 使得每个 $x \in \mathcal{L}_{k_0}(\lambda)$ 都有相切于 $E^s \oplus E^c$ 、尺寸为 r_0 的稳定流形 $W_{r_0}^s(x)$.

取 $\delta_0 \in (0, r_0)$ 充分小使得对于任意 $x, y \in M$, 当 $d(x, y) < \delta$ 时, 有

$$|\log \|Df|_{E^c(x)}\| - \log \|Df|_{E^c(y)}\|| < \eta/4.$$

对于任意 $d \ll \delta_0$, 由强不稳定叶状结构 $\mathcal{F}^u$ 的极小性、 f 沿 E^u 的一致扩张性以及 E^u 与 $E^s \oplus E^c$ 的横截性可知, 存在 $m_d \in \mathbb{N}$, 使得对于任意 $x \in M$, $f^{m_d}(\mathcal{F}_{d/2}^u(x))$ 与每个切于 $E^s \oplus E^c$ 且半径为 $d/2$ 的圆盘相交, 其中 $\mathcal{F}_{d/2}^u(x)$ 表示叶片 $\mathcal{F}^u(x)$ 中以 x 为中心、半径为 $d/2$ 的圆盘.

根据上容度熵的定义, 对充分小的 $\varepsilon > 0$, 存在无穷多个 $n \in \mathbb{N}$ 使得集合 $\mathcal{L}_{k_0}(\lambda)$ 的最大基数的 (n, ε) - 分离集 $\mathcal{S}_n$ 满足

$$\#\mathcal{S}_n \geq e^{n(Ch_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda)) - \eta/2)}.$$

对 $d \ll \varepsilon$ 以及每个 $x \in \mathcal{S}_n$, 存在 $\hat{x} \in \mathcal{F}_{\delta_0}^u(x)$ 使得

- $f^i(\hat{x}) \in \mathcal{F}_{d/2}^u(f^i(x))$ 对于任意 $i \leq n$ 成立;
- $f^{n+m_d}(\hat{x}) \in W_{d/2}^s(x)$.

于是得到新的集合 $\widehat{\mathcal{S}}_n = \{\hat{x} \mid x \in \mathcal{S}_n\}$ 为 $(n, \varepsilon - d)$ - 分离集. 注意到我们可以要求 $d \ll \varepsilon, m_d \ll n$ (以下将多次利用这一条件). 故当 n 充分大时, 有

$$k_0^{-1} \cdot e^{i(\lambda - \eta/2)} \leq \|Df^i|_{E^c(\hat{x})}\| \leq k_0 \cdot e^{i(\lambda + \eta/2)}, \quad \text{当 } \hat{x} \in \widehat{\mathcal{S}}_n, \quad i \leq n + m_d \text{ 时}.$$

于是对每个 $\hat{x} \in \widehat{\mathcal{S}}_n$, 应用廖 - 甘的跟踪引理^[25], 得到周期为 $n + m_d$ 的周期点集 $\widehat{P}_n$, 使得

- $\#\widehat{P}_n = \#\mathcal{S}_n \geq e^{n(\text{Ch}_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda)) - \eta/2)} \geq e^{(n+m_d)(\text{Ch}_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda)) - \eta)}$;
- $\widehat{P}_n$ 为 $(n, \varepsilon/2)$ - 分离集;
- $k_0^{-1} \cdot e^{i(\lambda - 3\eta/4)} \leq \|Df^i|_{E^c(\widehat{p})}\| \leq k_0 \cdot e^{i(\lambda + 3\eta/4)}$, 其中 $\widehat{p} \in \widehat{P}_n, i \leq n + m_d$.

对上述周期点集 $\widehat{P}_n$ 应用文献 [47, 定理 4.1] 即可得到所需的双曲基本集. $\square$

3.3 定理 1.1 的证明

由命题 3.1 知微分同胚 f 有 $(\varphi^c, \mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f))$ - 穷举族 $\{\mathbb{K}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. 记 $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_{\text{erg}}(f|_{\mathbb{K}_i})$. 由定理 2.3 知

$$\{\lambda^c(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_i\} = \left[\inf_{\mu \in \mathcal{M}_i} \lambda^c(\mu), \sup_{\mu \in \mathcal{M}_i} \lambda^c(\mu) \right].$$

由定义 2.2(5) 知

$$\left(\inf_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)} \lambda^c(\mu), \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)} \lambda^c(\mu) \right) \subset \{\lambda^c(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)\}.$$

注意到

$$\lambda_{\min} = \inf\{\lambda^c(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f)\} = \inf\{\lambda^c(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f)\} < 0.$$

由遍历分解定理知上述下确界可以在 $\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)$ 中取到. 综上可知

$$\left[\lambda_{\min}, \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)} \lambda^c(\mu) \right) \subset \{\lambda^c(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)\} \subset \left[\lambda_{\min}, \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)} \lambda^c(\mu) \right]. \quad (3.5)$$

定理 1.1 第一条结论得证.

由引理 2.3 知

$$\text{Int}(D(\mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)})) = \left(\lambda_{\min}, \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)} \lambda^c(\mu) \right).$$

断言 3.1 对于任意 $\lambda \in \text{Int}(D(\mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)}))$, 有

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)}(\lambda) = \sup\{h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f), \lambda^c(\mu) = \lambda\}.$$

证明 由 (3.5) 知 $\{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f) \mid \lambda^c(\mu) = \lambda\} \neq \emptyset$. 由引理 2.4 得

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)}(\lambda) \geq \sup\{h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f), \lambda^c(\mu) = \lambda\}.$$

由定义 2.2(3) 和注 2.4 知

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)}(\lambda) &= \lim_{i \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_{\mathcal{M}_i}(\lambda) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \sup\{h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_i, \lambda^c(\mu) = \lambda\} \\ &\leq \sup\{h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f), \lambda^c(\mu) = \lambda\}. \end{aligned}$$

断言 3.1 得证. $\square$

由注 2.3 知 $\mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)}$ 为区间 $D(\mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)})$ 上的上凸函数, 故 $\mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)}$ 在开区间 $\text{Int}(D(\mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)}))$ 上连续, 从而

$$\lambda \in \text{Int}(D(\mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)})) \mapsto \sup\{h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f), \lambda^c(\mu) = \lambda\}$$

为连续的上凸函数.

断言 3.2 对于任意 $\lambda \in \text{Int}(D(\mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)}))$, 有 $\mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)}(\lambda) = h_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda))$.

证明 对于任意 $\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f)$, 若 $\lambda^c(\mu) = \lambda$, 则 $\mu(\mathcal{L}(\lambda)) = 1$. 由定理 2.1 得

$$h_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda)) \geq \sup\{h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f), \lambda^c(\mu) = \lambda\}.$$

由引理 2.1 得 $h_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda)) \leq Ch_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda))$. 取 $\eta > 0$ 充分小使得当 $|\lambda' - \lambda| < \eta$ 时, 有

$$|\mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)}(\lambda') - \mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)}(\lambda)| < \eta.$$

由命题 3.2 可知, 存在中心压缩的双曲基本集 Λ_η 使得

- $h_{\text{top}}(f|_{\Lambda_\eta}) > \overline{Ch}_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda)) - \eta$;
- 对于任意测度 $\nu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f|_{\Lambda_\eta})$, 有 $|\int \log \|Df\|_{E^c} d\nu - \lambda| < \eta$.

设 ν_η 为 Λ_η 的最大熵测度, 则

$$h_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda)) \leq \overline{Ch}_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda)) \leq h_{\nu_\eta}(f) + \eta \leq \mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)}(\lambda^c(\nu_\eta)) + \eta < \mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)}(\lambda) + 2\eta.$$

由 η 的任意性可得 $h_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda)) \leq \mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)}(\lambda)$. □

由断言 3.1 和 3.2 可知, 当 $\lambda \in \text{Int}(D(\mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)})) = (\lambda_{\min}, \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)} \lambda^c(\mu))$ 时, 有

$$h_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda)) = \mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)}(\lambda) = \sup\{h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f), \lambda^c(\mu) = \lambda\}. \quad (3.6)$$

故定理 1.1 结论的第二和三条在开区间 $(\lambda_{\min}, \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^-(f)} \lambda^c(\mu))$ 上得证.

断言 3.3 水平集 $\mathcal{L}(\lambda_{\min})$ 上的变分原理成立, 即

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda_{\min})) &= \sup\{h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f), \lambda^c(\mu) = \lambda_{\min}\} \\ &= \sup\{h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f), \lambda^c(\mu) = \lambda_{\min}\}. \end{aligned}$$

证明 由 $\lambda_{\min}$ 定义可知, 当 $\mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f)$ 且 $\lambda^c(\mu) = \lambda_{\min}$ 时, μ 的每个遍历分支的中心 Lyapunov 指数也等于 $\lambda_{\min}$. 由测度熵的仿射性质可知

$$\sup\{h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f), \lambda^c(\mu) = \lambda_{\min}\} = \sup\{h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f), \lambda^c(\mu) = \lambda_{\min}\}.$$

令

$$t_0 = \sup\{h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f), \lambda^c(\mu) = \lambda_{\min}\},$$

则 $\mathcal{L}(\lambda_{\min}) \subset Q(t_0)$, 其中 $Q(t_0) = \{x \in M \mid \exists \mu \in V_f(x), h_\mu(f) \leq t_0\}$. 由定理 2.1 有

$$h_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda_{\min})) \leq h_{\text{top}}(Q(t_0)) \leq t_0.$$

再次应用定理 2.1 知 $h_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda_{\min})) \geq \sup\{h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f), \lambda^c(\mu) = \lambda_{\min}\}$. 故

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda_{\min})) &= \sup\{h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(f), \lambda^c(\mu) = \lambda_{\min}\} \\ &= \sup\{h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f), \lambda^c(\mu) = \lambda_{\min}\}. \end{aligned}$$

证毕. □

最后, 只需要证明

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{\min}^+} h_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda)) = h_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda_{\min})).$$

由引理 2.4 知 $\lambda_{\min} \in D(\mathcal{E}_{\mathcal{N}})$. 由 $\mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}(f)}$ 为区间 $D(\mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\text{erg}}(f)})$ 上的上凸函数知, 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{\min}^+} h_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda))$ 存在且

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{\min}^+} h_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda)) \geq h_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda_{\min})). \quad (3.7)$$

由 (3.6) 可知, 存在 $\mu_n \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f)$ 满足 $\lambda^c(\mu_n) = \lambda_{\min} + \frac{1}{n}$, 且

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{\min}^+} h_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_{\mu_n}(f).$$

不妨假设 μ_n 弱 $*$ - 收敛于不变测度 μ_{∞} , 则 $\lambda^c(\mu_{\infty}) = \lambda_{\min}$. 由于 f 是中心一维部分双曲微分同胚, 故测度熵为上半连续的 (参见文献 [17, 34]). 再结合断言 3.3 知

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{\min}^+} h_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda)) \leq h_{\mu_{\infty}}(f) \leq h_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda_{\min})).$$

结合 (3.7) 知

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{\min}^+} h_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda)) = h_{\text{top}}(\mathcal{L}(\lambda_{\min})).$$

定理 1.1 证毕.

参考文献

- 1 Adler R L, Konheim A G, McAndrew M H. Topological entropy. *Trans Amer Math Soc*, 1965, 114: 309–319
- 2 Barreira L, Saussol B. Variational principles and mixed multifractal spectra. *Trans Amer Math Soc*, 2001, 353: 3919–3944
- 3 Bochi J, Bonatti C, Díaz L J. Robust criterion for the existence of nonhyperbolic ergodic measures. *Comm Math Phys*, 2016, 344: 751–795
- 4 Bonatti C, Díaz L J. Persistent nonhyperbolic transitive diffeomorphisms. *Ann of Math (2)*, 1996, 143: 357–396
- 5 Bonatti C, Díaz L J. Robust heterodimensional cycles and C^1 -generic dynamics. *J Inst Math Jussieu*, 2008, 7: 469–525
- 6 Bonatti C, Díaz L J. Abundance of C^1 -robust homoclinic tangencies. *Trans Amer Math Soc*, 2012, 364: 5111–5148
- 7 Bonatti C, Díaz L J, Pujals E R. A C^1 -generic dichotomy for diffeomorphisms: Weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources. *Ann of Math (2)*, 2003, 158: 355–418
- 8 Bonatti C, Díaz L J, Ures R. Minimality of strong stable and unstable foliations for partially hyperbolic diffeomorphisms. *J Inst Math Jussieu*, 2002, 1: 513–541
- 9 Bonatti C, Gogolev A, Hammerlindl A, et al. Anomalous partially hyperbolic diffeomorphisms III: Abundance and incoherence. *Geom Topol*, 2020, 24: 1751–1790
- 10 Bonatti C, Zhang J. On the existence of non-hyperbolic ergodic measures as the limit of periodic measures. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2019, 39: 2932–2967
- 11 Bonatti C, Zhang J. Periodic measures and partially hyperbolic homoclinic classes. *Trans Amer Math Soc*, 2019, 372: 755–802
- 12 Bowen R. Entropy-expansive maps. *Trans Amer Math Soc*, 1972, 164: 323–331
- 13 Bowen R. Topological entropy for noncompact sets. *Trans Amer Math Soc*, 1973, 184: 125–136
- 14 Bowen R. *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, 2nd ed. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 470. Berlin: Springer-Verlag, 2008
- 15 Brin M I, Pesin Y B. Partially hyperbolic dynamical systems. *Izv Akad Nauk SSSR Ser Mat*, 1974, 38: 170–212
- 16 Climenhaga V. The thermodynamic approach to multifractal analysis. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2014, 34: 1409–1450
- 17 Díaz L J, Fisher T, Pacifico M J, et al. Entropy-expansiveness for partially hyperbolic diffeomorphisms. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2012, 32: 4195–4207

- 18 Díaz L J, Gelfert K, Rams M. Entropy spectrum of Lyapunov exponents for nonhyperbolic step skew-products and elliptic cocycles. *Comm Math Phys*, 2019, 367: 351–416
- 19 Díaz L J, Gelfert K, Rams M. Variational principle for nonhyperbolic ergodic measures: Skew products and elliptic cocycles. *Comm Math Phys*, 2022, 394: 73–141
- 20 Díaz L J, Gelfert K, Santiago B. Weak $*$ and entropy approximation of nonhyperbolic measures: A geometrical approach. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 2020, 169: 507–545
- 21 Díaz L J, Gelfert K, Zhang J. The amount of nonhyperbolicity for partially hyperbolic diffeomorphisms. *arXiv*: 2405.12051, 2024
- 22 Díaz L J, Pujals E R, Ures R. Partial hyperbolicity and robust transitivity. *Acta Math*, 1999, 183: 1–43
- 23 Feng D J. Lyapunov exponents for products of matrices and multifractal analysis. Part I: Positive matrices. *Israel J Math*, 2003, 138: 353–376
- 24 Feng D J. Lyapunov exponents for products of matrices and multifractal analysis. Part II: General matrices. *Israel J Math*, 2009, 170: 355–394
- 25 Gan S. A generalized shadowing lemma. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2002, 8: 627–632
- 26 Gan S. Horseshoe and entropy for C^1 surface diffeomorphisms. *Nonlinearity*, 2002, 15: 841–848
- 27 Gelfert K. Horseshoes for diffeomorphisms preserving hyperbolic measures. *Math Z*, 2016, 283: 685–701
- 28 Gorodetski A S, Ilyashenko Y S, Kleptsyn V A, et al. Nonremovable zero Lyapunov exponent. *Funct Anal Appl*, 2005, 39: 21–30
- 29 Gourmelon N. Adapted metrics for dominated splittings. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2007, 27: 1839–1849
- 30 Hirsch M W, Pugh C C, Shub M. Invariant Manifolds. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 583. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1977
- 31 Katok A, Hasselblatt B. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*, vol. 54. With a Supplementary Chapter by Katok and Leonardo Mendoza. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1995
- 32 Ledrappier F, Porzio A. On the multifractal analysis of Bernoulli convolutions. I. Large-deviation results. *J Stat Phys*, 1996, 82: 367–395
- 33 Ledrappier F, Porzio A. On the multifractal analysis of Bernoulli convolutions. II. Dimensions. *J Stat Phys*, 1996, 82: 397–420
- 34 Liao G, Viana M, Yang J. The entropy conjecture for diffeomorphisms away from tangencies. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2013, 15: 2043–2060
- 35 Pesin Y B. Dimension Theory in Dynamical Systems. *Chicago Lectures in Mathematics*. Chicago: Univ Chicago Press, 1997
- 36 Pesin Y B, Sinai Y G. Gibbs measures for partially hyperbolic attractors. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1982, 2: 417–438
- 37 Pesin Y B, Weiss H. The multifractal analysis of Gibbs measures: Motivation, mathematical foundation, and examples. *Chaos*, 1997, 7: 89–106
- 38 Pfister C E, Sullivan W G. On the topological entropy of saturated sets. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2007, 27: 929–956
- 39 Pollicott M, Weiss H N. Multifractal analysis of Lyapunov exponent for continued fraction and Manneville-Pomeau transformations and applications to Diophantine approximation. *Comm Math Phys*, 1999, 207: 145–171
- 40 Pujals E R, Sambarino M. Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms. *Ann of Math (2)*, 2000, 151: 961–1023
- 41 Rodriguez Hertz F, Rodriguez Hertz M A, Ures R. A non-dynamically coherent example on T^3 . *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 2016, 33: 1023–1032
- 42 Takens F, Verbitskiy E. On the variational principle for the topological entropy of certain non-compact sets. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2003, 23: 317–348
- 43 Walters P. An Introduction to Ergodic Theory. *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 79. New York-Berlin: Springer-Verlag, 1982
- 44 Wen L. Generic diffeomorphisms away from homoclinic tangencies and heterodimensional cycles. *Bull Braz Math Soc (NS)*, 2004, 35: 419–452
- 45 Wen L. Differentiable Dynamical Systems. *Graduate Studies in Mathematics*, vol. 173. Providence: Amer Math Soc, 2016
- 46 Wijsman R A. Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. II. *Trans Amer Math Soc*, 1966, 123: 32–45
- 47 Yang D, Zhang J. Non-hyperbolic ergodic measures and horseshoes in partially hyperbolic homoclinic classes. *J Inst Math Jussieu*, 2020, 19: 1765–1792

The entropy spectrum of the center Lyapunov exponents for partially hyperbolic systems

Jinhua Zhang

Abstract In this paper, we study the entropy spectrum of the center Lyapunov exponents for a class of transitive partially hyperbolic diffeomorphisms with a one-dimensional center bundle. We show that if the strong unstable foliation is minimal, then the topological entropy of the level sets defined by the negative center Lyapunov exponents varies continuously with respect to the center Lyapunov exponents, and the variational principle holds for such level sets.

Keywords partial hyperbolicity, entropy, Lyapunov exponent, variational principle

MSC(2020) 37D30, 37D35, 37D25, 37A35

doi: 10.1360/SSM-2024-0346