中国科学: 数学 2024 年 第 54 卷 第 12 期: 2041 ~ 2058
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark click for updates

从 RCD(K,N) 空间到 CAT(0) 空间调和映射的边界正则性

献给中山大学建校百年暨中山大学数学学科建设 100 周年

张会春, 朱熹平*

中山大学数学学院, 广州 510275
E-mail: zhanghc3@mail.sysu.edu.cn, stszxp@mail.sysu.edu.cn

收稿日期: 2024-03-07; 接受日期: 2024-05-07; 网络出版日期: 2024-09-19; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12025109 和 12271530) 资助项目

摘要 本文建立了从具有广义 Ricci 曲率有下界度量测度空间到非正曲率 Alexandrov 空间上调和映射的最优边界正则性.

关键词 调和映射 边界正则性 外球条件

MSC (2020) 主题分类 58E20

1 引言

自 Gromov 和 Schoen [22] 的研究起, 奇异度量空间之间的调和映射理论受到了越来越多学者的关注. Korevaar 和 Schoen [34] 及 Jost [28,29,31] 分别独立建立了值域是 Alexandrov 意义下曲率非正的度量空间的 Sobolev 空间和调和映射的一般理论. 随后许多学者开展了这方面的研究 (参见文献 [24,28,34,35,40]). Korevaar 和 Schoen [34] 建立了源空间是光滑流形、目标空间是度量空间的映射的 Sobolev 空间理论. Kuwae 和 Shioya [35] 将 Korevaar-Schoen 理论扩展到源空间是某一类奇异度量空间的情形. 最近, Gigli 和 Tyulenev [20] 将其扩展到源空间是具有广义 Ricci 曲率有下界的度量测度空间 (称为 RCD 空间). 如今, RCD 空间理论得到了广泛的发展 (参见文献 [2–4,7,13,16,37,45,46]). 读者可参考文献 [1,19] (及其参考文献) 了解更多有关该主题的历史.

设 Ω 是某个 RCD(K,N) 空间 $(X,d,\mathfrak{m})$ 中的一个有界区域, 其中 $K\in\mathbb{R}$, $N\in[1,\infty)$, 并设 (Y,d_Y) 是一个完备度量空间. 如果对于某个 $P\in Y$, 函数 $d_Y(P,u(x))$ 属于 $L^2(\Omega)$, 则称映射 $u:\Omega\to Y$ 是一个 $L^2(\Omega,Y)$ 映射.

英文引用格式: Zhang H-C, Zhu X-P. Boundary regularity of harmonic maps from RCD(K,N) spaces to CAT(0) spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 2041–2058, doi: 10.1360/SSM-2024-0057

© 2024《中国科学》杂志社

定义 1.1 假设 $\mathfrak{m}(X\setminus\Omega)>0$. 给定一个映射 $u\in L^2(\Omega,Y)$, 对每个 $r>0$, r 尺度的渐近能量 $E^{\Omega}_{2,r}[u]$ 被定义成 $C_0(\Omega)$ 上的一个泛函

$$E^{\Omega}_{2,r}[u](\phi):=\int_{\Omega}\phi\cdot \mathrm{ks}^2_{2,r}[u,\Omega]d\mathfrak{m},$$

其中

$$\mathrm{ks}_{2,r}[u,\Omega](x):=\begin{cases}\left(\fint_{B_r(x)}\dfrac{d^2_Y(u(x),u(y))}{r^2}d\mathfrak{m}(y)\right)^{1/2}, & \text{若 } B_r(x)\subset\Omega,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}\tag{1.1}$$

这里对于可测子集 $E\subset X$ 上的任何函数 $f:E\to\mathbb{R}$, 采用记号

$$\fint_E f d\mathfrak{m}:=\frac{1}{\mathfrak{m}(E)}\int_E f d\mathfrak{m}.$$

称映射 $u\in L^2(\Omega,Y)$ 属于 $W^{1,2}(\Omega,Y)$, 如果

$$E^{\Omega}_2(u):=\sup_{\phi\in C_0(\Omega),\ 0\leqslant\phi\leqslant 1}\left(\limsup_{r\to 0}E^{\Omega}_{2,r}[u](\phi)\right)<+\infty.$$

考虑如下的 Dirichlet 问题. 给定任意 $w\in W^{1,2}(\Omega,Y)$, 想要找到最小元

$$\min_{u\in W^{1,2}_w(\Omega,Y)}E^{\Omega}_2(u),$$

其中

$$W^{1,2}_w(\Omega,Y):=\{u\in W^{1,2}(\Omega,Y):d_Y(u(x),w(x))\in W^{1,2}_0(\Omega)\}.\tag{1.2}$$

这样的能量最小化映射被称为调和映射.

当目标空间是非正曲率 Alexandrov 空间 (即 CAT(0) 空间) 时, 调和映射的存在性和唯一性在文献 [20, 31, 34] 中被证实. 假设源空间是光滑流形, Korevaar 和 Schoen [34] 得到了这样的调和映射的内部 Lipschitz 连续性. 在度量空间的背景下, 有许多关于调和映射的内部正则性的后续研究 (参见文献 [9–12, 14, 15, 23, 25, 31, 36, 44, 47, 48]). Lin [36] 和 Jost [31] 证明了从曲率有下界的 Alexanrov 空间的一个区域到 CAT(0) 空间的调和映射的内部 Hölder 连续性 1). 他们猜想这样的调和映射应该是内部 Lipschitz 连续的. Zhang 和 Zhu [48] 证实了这个猜想. 最近, Mondino 和 Semola [39] 以及 Gigli [18] 分别独立地证明了从 RCD(K,N) 空间到 CAT(0) 空间的调和映射的内部 Lipschitz 连续性.

定理 1.1 [18, 39] 设 $\Omega\subset X$ 是某个 RCD(K,N) 度量测度空间 $(X,d,\mathfrak{m})$ 的一个有界区域, 其中 $K\in\mathbb{R}$, $N\in[1,\infty)$, $\mathfrak{m}(X\setminus\Omega)>0$. 设 (Y,d_Y) 是一个 CAT(0) 空间. 假设 $u:\Omega\to Y$ 是一个调和映射. 则 u 在 Ω 内部是 Lipschitz 连续的.

然而, 他们的研究并没有涉及边界正则性问题. 回顾光滑流形之间调和映射的边界正则性已经被 Schoen 和 Uhlenbeck [41] 证明.

本文的目标是研究奇异度量空间之间的调和映射的边界正则性. 至今为止, 只有少数针对部分特殊情形的研究结果. 首先是区域 Ω 是光滑的情形. Serbinowski [42] 证明了调和映射 u 在边界附近是 Hölder 连续的, 如果假设它的迹是 Hölder 连续的并且假设 Ω 满足局部外部锥条件. 特别地, 他证明了如下定理.

1) 在文献 [31] 中, 源空间是局部紧的度量空间, 其上具有 Dirichlet 形式和一致的 Poincaré 不等式.

定理 1.2 [42] 设 Ω 是光滑 Riemann 流形上的一个有界区域, 设 (Y,d_Y) 是一个 CAT(0) 空间. 假设 $w\in W^{1,2}(\Omega,Y)$, $u\in W^{1,2}_w(\Omega,Y)$ 是一个调和映射.

(A) 如果 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 的 (即它是可以局部写成 Lipschitz 函数的图) 且 $w\in C^{\alpha}(\overline{\Omega},Y)$, 则对于某个小的 $\beta\in(0,\alpha]$, 有 $u\in C^{\beta}(\overline{\Omega},Y)$.

(B) 如果 $\partial\Omega$ 是 C^1 的且 $w\in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega},Y)$, 则对于每个 $\epsilon>0$, 有 $u\in C^{1-\epsilon}(\overline{\Omega},Y)$.

这里映射 $w\in C^{\alpha}(\overline{\Omega},Y)$ 意味着

$$d_Y(u(x),u(y))\leqslant Ld^{\alpha}(x,y),\quad \forall\, x,y\in\overline{\Omega}$$

对于某常数 $L>0$ 和 $\alpha\in(0,1)$ 成立. 第二种情形是区域 Ω 在曲率有下界的 Alexandrov 空间中. Huang 和 Zhang [25] 证明了当假设 $w\in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega},Y)$ 以及 Ω 满足局部外部球条件时, 调和映射 $u\in W^{1,2}_w(\Omega,Y)$ 在边界附近是 Hölder 连续的 (对于一个小的 Hölder 指标).

本文研究 RCD 空间上调和映射的边界正则性. 首先回顾如下的一些经典条件.

定义 1.2 设 Ω 是度量测度空间 $(X,d,\mathfrak{m})$ 的一个区域. 称它满足外部密度条件, 如果存在两个数 $\lambda\in(0,1)$ 和 $R_0>0$ 使得

$$\mathfrak{m}(B_r(x)\setminus\Omega)\geqslant\lambda\cdot\mathfrak{m}(B_r(x)),\quad \forall\, x\in\partial\Omega,\quad \forall\, r\in(0,R_0). \tag{1.3}$$

称它满足一致外部球条件, 如果存在一个数 $R_0>0$ 使得对每个 $x_0\in\partial\Omega$ 都存在一个球 $B_{R_0}(y_0)$ 满足

$$\Omega\cap B_{R_0}(y_0)=\emptyset\quad 和\quad x_0\in\partial\Omega\cap\partial B_{R_0}(y_0). \tag{1.4}$$

根据体积倍增性质, 如果 Ω 满足一致外部球条件, 则它也满足外部密度条件. 众所周知, 如果 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 的, 则它满足外部密度球条件; 如果 $\partial\Omega$ 是光滑流形上的 C^2 区域, 则它满足一致外部球条件.

本文的主要结论是如下的调和映射的边界正则性.

定理 1.3 设 Ω 和 Y 如上述定理 1.1. 设 $w\in W^{1,2}(\Omega,Y)$ 和 $u\in W^{1,2}_w(\Omega,Y)$ 是一个调和映射.

(1) 如果 $\partial\Omega$ 满足外部密度条件, $w\in C^{\alpha}(\overline{\Omega},Y)$, 则对于某个小的 $\beta\in(0,\alpha)$, 有 $u\in C^{\beta}(\overline{\Omega},Y)$.

(2) 如果 $\partial\Omega$ 满足一致外部球条件, $w\in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega},Y)$, 则对于每个 $\epsilon>0$, 有 $u\in C^{1-\epsilon}(\overline{\Omega},Y)$.

注 1.1 在 $Y=\mathbb{R}$ 的情形下, 即 u 是调和函数时, 定理 1.3(1) 的结论已被 Björn [5] 证明, 其假设更弱, 仅设测度 $\mathfrak{m}$ 是倍增的以及 $(X,d,\mathfrak{m})$ 上成立 L^2-Poincaré 不等式.

注 1.2 定理 1.3(2) 的结论是最优的. 定理 1.3(2) 中的 Hölder 连续性不能被改进为 Lipschitz 连续性. 事实上, 回顾 Euclid 空间上调和函数的一些已知结论 (参见文献 [21,33]). 设 $D\subset\mathbb{R}^n$ 是有界区域, $n\geqslant 2$. 设 $u\in W^{1,2}(D)$ 是 D 上具有边界值 $\phi\in \mathrm{Lip}(\overline{D})$ 的调和函数 (即在 ∂D 上, $u=\phi$).

(1) 如果 ∂D 满足外部密度条件, 则对于某个小的 $\beta>0$, 有 $u\in C^{\beta}(\overline{D})$;

(2) 如果 ∂D 是 C^1 的, 则对于每个 $\epsilon>0$, 有 $u\in C^{1-\epsilon}(\overline{D})$;

(3) 我们不能期待 $u\in \mathrm{Lip}(\overline{D})$, 即使 ∂D 是 C^{∞} 的 (见例 1.1).

例 1.1 考虑上半平面 $\mathbb{R}^2_+=\{(x,t)\mid t\geqslant 0,x\in\mathbb{R}\}$. 设 ϕ 在 $\mathbb{R}$ 上的定义如下:

$$\phi(x)=|x|,\quad 若\ |x|\leqslant 1,$$
$$\phi(x)=(2-|x|)^{+},\ 其他.$$

$\mathbb{R}^2_+$ 上具有边界值 ϕ 的调和函数由 Poisson 积分公式唯一确定, 即

$$u(x,s)=\int_{\mathbb{R}}\frac{s\phi(y)}{|x-y|^2+s^2}dy.$$

通过直接计算, 得出

$$\frac{\partial u(0,s)}{\partial s}=\int_{|y|\leqslant 1}\frac{y^2-s^2}{(y^2+s^2)^2}|y|dy+\int_{2\geqslant|y|\geqslant 1}\frac{y^2-s^2}{(y^2+s^2)^2}(2-|y|)dy=:I_1(s)+I_2(s),$$

其中

$$I_1(s)=\int_{|y|\leqslant 1}\frac{y^2-s^2}{(y^2+s^2)^2}|y|dy=2\int_0^1\frac{y^2-s^2}{(y^2+s^2)^2}ydy=\int_0^1\frac{y^2-s^2}{(y^2+s^2)^2}d(y^2)=O\bigg(\log\Big(\frac{1}{s}\Big)\bigg),\quad s\to 0^+$$

以及

$$|I_2(s)|\leqslant\int_{2\geqslant|y|\geqslant 1}\frac{|y^2-s^2|}{(y^2+s^2)^2}(2-|y|)dy\leqslant 8,\quad\forall\, s\in(0,1).$$

因此, 得出结论

$$|\nabla u(0,s)|\geqslant\left|\frac{\partial u(0,s)}{\partial s}\right|=O\bigg(\log\Big(\frac{1}{s}\Big)\bigg),\quad s\to 0^+.$$

本文余下内容的结构如下. 第 2 节叙述 RCD(K,N) 空间上的一些必要知识. 第 3 节回顾 Sobolev 能量和度量空间之间的调和映射的概念. 第 4 节致力于主要结论—定理 1.3 的证明.

2 预备知识

设 $(X,d,\mathfrak{m})$ 是一个度量测度空间, 即 (X,d) 是一个完备可分的度量空间, 其上赋有一个非负的、在任何球 $B_r(x)\subset X$ 上有限且 $\mathrm{supp}(\mathfrak{m})=X$ 的 Borel 测度. 给定一个开区域 $\Omega\subset X$, 用 $\mathrm{Lip}(\Omega)$ (分别地, $C_0(\Omega)$, $\mathrm{Lip}_0(\Omega)$, $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$) 表示 Ω 上 Lipschitz 连续 (分别地, 连续且紧致支撑, Lipschitz 连续且紧致支撑, 局部 Lipschitz 连续) 函数所构成的空间; 对于任意 $p\in[1,+\infty]$, 用 $L^p(\Omega):=L^p(\Omega,\mathfrak{m})$ 表示 Ω 上 L^p 函数空间. 回顾对于可测子集 $E\subset X$ 上的任意函数 $f:E\to\mathbb{R}$, 采用记号

$$\fint_E f d\mathfrak{m}:=\frac{1}{\mathfrak{m}(E)}\int_E f d\mathfrak{m}.$$

设 $f\in\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(X)$, 定义其逐点 Lipschitz 常数或斜率为

$$\mathrm{Lip}f(x):=\begin{cases}\limsup\limits_{y\to x}\dfrac{|f(y)-f(x)|}{d(x,y)}=\lim\limits_{r\to 0^+}\sup\limits_{y\in B_r(x)}\dfrac{|f(y)-f(x)|}{r}, & \text{若 } x \text{ 不是孤立的,}\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

Cheeger 能量 $\mathrm{Ch}:L^2(X)\to[0,+\infty]$ 为

$$\mathrm{Ch}(f):=\frac{1}{2}\inf\left\{\liminf_{j\to+\infty}\int_X(\mathrm{Lip}f_j)^2d\mathfrak{m}:f_j\in\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(X)\cap L^2(X),f_j\overset{L^2}{\to}f\right\}.$$

对于任意 $f\in W^{1,2}(X)$, 文献 [3,8] 指出存在一个最小弱上梯度 $|\nabla f|$ 使得

$$\mathrm{Ch}(f)=\frac{1}{2}\int_X|\nabla f|^2d\mathfrak{m},$$

且对任意 $f\in \mathrm{Lip}(X)$ 有 $|\nabla f|=\mathrm{Lip}f$ $\mathfrak{m}$-a.e. 在 X 中. Sobolev 空间 $W^{1,2}(X):=\{f\in L^2(X):\mathrm{Ch}(f)<+\infty\}$.

度量测度空间的 Riemann 曲率维数条件有几种等价定义 (参见文献 [2, 4, 7, 13]), 其中一个陈述如下.

定义 2.1 设 $K\in\mathbb{R}$ 和 $N\in(1,+\infty]$, 如果以下条件成立, 则称度量测度空间 $(X,d,\mathfrak{m})$ 是一个 $\mathrm{RCD}(K,N)$ 空间.

(1) Sobolev 空间 $W^{1,2}(X)$ 是一个 Hilbert 空间. 在这种情形下, 已经证明 [17] 对于任意 $f,g\in W^{1,2}(X)$, 极限

$$\langle\nabla f,\nabla g\rangle:=\lim_{\epsilon\to0^+}\frac{|\nabla(f+\epsilon g)|^2-|\nabla f|^2}{2\epsilon}\tag{2.1}$$

存在且属于 $L^1(X)$. 这为任意 $f,g\in W^{1,2}(X)$ 提供了一个标准的 Dirichlet 形式

$$\mathscr{E}(f,g):=\int_X\langle\nabla f,\nabla g\rangle\,d\mathfrak{m}.$$

用 Δ 表示 $\mathscr{E}$ 的无穷小生成元, 用 $\{H_t:=\mathrm{e}^{t\Delta}\}_{t\geqslant0}$ 表示对应的半群 (热流). Δ 的定义域用 $D(\Delta)$ 表示.

(2) 对于任意 $f\in D(\Delta)$ 且 $\Delta f\in W^{1,2}(X)$, 弱 Bochner 不等式成立, 即对于任意 $g\in D(\Delta)\cap L^\infty(X)$ 且 $\Delta g\in L^\infty(X)$ 和 $g\geqslant0$, 有

$$\frac12\int_X|\nabla f|^2\Delta g d\mathfrak{m}\geqslant\int_X\left(\frac{(\Delta f)^2}{N}+\langle\nabla f,\nabla\Delta f\rangle+K|\nabla f|^2\right)g d\mathfrak{m}.\tag{2.2}$$

(3) 存在点 $x_0\in X$ 和常数 $c_1,c_2>0$ 使得对所有 $r>0$, 有 $\mathfrak{m}(B_r(x_0))\leqslant c_1\mathrm{e}^{c_2r^2}$.

(4) 对于任意 $f\in W^{1,2}(X)$ 且 $|\nabla f|\leqslant1$ $\mathfrak{m}$-a.e. 在 X 中, 存在一个表示 $g\in\mathrm{Lip}(X)$, 其 Lipschitz 常数为 1, 使得 $g=f$ $\mathfrak{m}$-a.e. 在 X 中.

设 $(X,d,\mathfrak{m})$ 是一个 $\mathrm{RCD}(K,N)$ 空间, 其中 $K\in\mathbb{R}$ 和 $N\in[1,+\infty)$. 它是测地空间 [2], 即对于任意两点 $x,y\in X$, 存在一条连接它们的曲线 γ 使得 $L(\gamma)=d(x,y)$. 回顾连续曲线 $\gamma:[a,b]\to X$ 的长度被定义为

$$L(\gamma)=\sup_{a=a_0<a_1<\cdots<a_m=b}\sum_{i=0}^{m-1}d(\gamma(a_i),\gamma(a_{i+1})).$$

任何闭球 $\overline{B_R(x)}\subset X$ 满足一个标准假设, 即 $(\overline{B_R(x)},d,\mathfrak{m})$ 满足体积倍增性质且其上成立 L^2-Poincaré 不等式, 倍增常数 C_D 和 Poincaré 常数 C_P 都仅依赖于 N, K 和 R (参见文献 [37, 46]).

$L^2(X)$ 上的半群 $\{H_t\}_{t\geqslant0}$ 确定了一个 X 上的热核 $p_t(x,y)$ (参见文献 [3, 43]) 使得

$$H_tf(x)=\int_Xp_t(x,y)f(y)d\mathfrak{m}(y),\quad\forall\,f\in L^2(X).$$

热核是 Lipschitz 连续的 (参见文献 [26]) 且满足随机完备性, 即对所有 $x\in X$, 有

$$\int_Xp_t(x,y)d\mathfrak{m}(y)=1.\tag{2.3}$$

$p_t(x,y)$ 的一个上界在文献 [27] 中被证明:

$$p_t(x,y)\leqslant\frac{C_{N,K}}{m(B_{\sqrt{t}}(x))}\exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{5t}+C_{N,K}\cdot t\right)$$

对于某个仅依赖于 N 和 K 的常数 $C_{N,K}>0$ 成立. Erbar 等 [13] 证明了 Bakry-Ledoux 估计: 对于每个 $f\in W^{1,2}(X)$ 和每个 $t>0$, 成立

$$|\nabla(H_tf)|^2+\frac{4Kt^2}{N(\mathrm{e}^{2Kt}-1)}|\Delta H_tf|^2\leqslant \mathrm{e}^{-2Kt}H_t(|\nabla f|^2),\quad \mathfrak{m}\text{-a.e. 在 } X \text{ 中}. \tag{2.4}$$

定义 2.2 (局部 Sobolev 空间) 设 $\Omega\subset X$ 是一个开集. 函数 $f\in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 属于 $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 只要对于任意 $\chi\in \mathrm{Lip}_0(\Omega)$ 成立 $f\chi\in W^{1,2}(X)$, 其中 $f\chi$ 被理解成在 Ω 外是 0. 在这种情形下, 函数 $|\nabla f|:\Omega\to[0,\infty]$ 被 $\mathfrak{m}$-a.e. 定义为

$$|\nabla f|:=|\nabla(\chi f)|,\quad \mathfrak{m}\text{-a.e. 在 } \{\chi=1\} \text{ 中}.$$

空间

$$W^{1,2}(\Omega):=\{f\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega):f,|\nabla f|\in L^2(\Omega)\}$$

赋有范数

$$\|f\|_{W^{1,2}(\Omega)}:=(\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+\||\nabla f|\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}.$$

最后, 空间 $W^{1,2}_0(\Omega)$ 被定义为函数 $f\in W^{1,2}(\Omega)\cap C(\Omega)$ 且 $\mathrm{supp}(f)\subset\Omega$ 所构成的空间的 $W^{1,2}(\Omega)$ 闭包.

回顾文献 [16] 中测度值 Laplace 的概念.

定义 2.3 设 $\Omega\subset X$ 是一个开子集. 一个函数 $g\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 被称为属于 $D(\boldsymbol{\Delta},\Omega)$, 如果存在一个 Ω 上的带符号的 Radon 测度 μ 使得对于任意 $\phi\in\mathrm{Lip}_0(\Omega)$ 成立

$$-\int_\Omega\langle\nabla f,\nabla\phi\rangle\,d\mathfrak{m}=\int_\Omega\phi d\mu. \tag{2.5}$$

如果这样的 μ 存在, 则它一定唯一. 此时, 记 $\boldsymbol{\Delta}g=\mu$.

文献 [16] 指出算子 $\boldsymbol{\Delta}$ 是线性的, 满足 Leibniz 法则和链式法则. 一般地, 函数 $f\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 的测度值 Laplace $\boldsymbol{\Delta}f$ 可能不绝对连续于 $\mathfrak{m}$. 记它的 Radon-Nikodym 分解

$$\boldsymbol{\Delta}f=(\boldsymbol{\Delta}f)^{\mathrm{ac}}\cdot\mathfrak{m}+(\boldsymbol{\Delta}f)^{\mathrm{sing}}.$$

当 $\Omega=X$ 时, $\boldsymbol{\Delta}$ 和 Δ 的相容性在文献 [17] 中被证明, 即如果 $f\in W^{1,2}(X)$ 和 $g\in L^2(X)$, 则

$$\boldsymbol{\Delta}f=g\cdot\mathfrak{m}\quad\Leftrightarrow\quad f\in D(\Delta)\quad\text{和}\quad\Delta f=g.$$

设 $f\in D(\boldsymbol{\Delta},\Omega)$ 和 $g\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. 称作为测度 (或在分布意义下) $\boldsymbol{\Delta}f\geqslant g$, 如果对于所有非负的 $\phi\in\mathrm{Lip}_0(\Omega)$, 有 $-\int_\Omega\langle\nabla f,\nabla\phi\rangle\,d\mathfrak{m}\geqslant\int_\Omega g\phi d\mathfrak{m}$. 当 $f\in D(\boldsymbol{\Delta},\Omega)$ 和作为测度 $\boldsymbol{\Delta}f\geqslant 0$ 时, 有 $f^+:=\max\{f,0\}\in D(\boldsymbol{\Delta},\Omega)$ 和作为测度 $\boldsymbol{\Delta}f^+\geqslant 0$. 我们还有如下的最大值原理 (参见文献 [8]). 设 $f\in D(\boldsymbol{\Delta},\Omega)$ 和作为测度 $\boldsymbol{\Delta}f\geqslant 0$. 如果在 $\partial\Omega$ 上, 在 $(f-c)^+\in W^{1,2}_0(\Omega)$ 的意义下, $f\leqslant c$, 则 $f\leqslant c$ $\mathfrak{m}$-a.e. 在 Ω 中. 特别地, 如果 $f\in W^{1,2}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, 在 $\partial\Omega$ 上 $f\leqslant c$, 作为测度 $\boldsymbol{\Delta}f\geqslant 0$, 则在 Ω 上 $f\leqslant c$.

给定函数 $h\in L^2(\Omega)$ 和 $g\in W^{1,2}(\Omega)$, 可以求解 Poisson 方程的 (放宽的) Dirichlet 问题 (参见文献 [8])

$$\begin{cases}\boldsymbol{\Delta}f=h,\\ f-g\in W^{1,2}_0(\Omega).\end{cases}$$

下面的调和函数边界正则性结果已在文献 [5] 中被给出.

引理 2.1 设 Ω 是 $(X,d,\mathfrak{m})$ 的一个有界区域. 假设 Ω 满足外部密度条件. 那么对于每个调和函数 $f\in W^{1,2}(\Omega)$, 使得对于某个 $g\in C^{\alpha}(\overline{\Omega})\cap W^{1,2}(\Omega)$, 有 $f-g\in W_0^{1,2}(\Omega)$, 则在一个零测集上重新定义以后, 对于某个小的 $\beta\in(0,\alpha)$, f 在每个 $x_0\in\partial\Omega$ 上是 C^{β}- 连续的. 此外, 存在常数 $r_0\in(0,R_0)$ 和 $C>0$, 使得对于所有 $r\in(0,r_0)$ 和所有 $x_0\in\partial\Omega$, 有

$$\sup_{x\in B_r(x_0)}|f(x)-f(x_0)|\leqslant Cr^{\beta},$$

其中, R_0 为外部密度条件定义中给定的数, C 仅依赖于 N, K, $\mathrm{diam}(\Omega)$ 和 g 的 Hölder 连续模, 即一个常数 $C_1>0$ 使得对于所有 $x_0,x\in\overline{\Omega}$, 有 $|g(x)-g(x_0)|\leqslant C_1d^{\alpha}(x_0,x)$ (更多细节可参见文献 [5, 方程 (16)]).

下面的 Laplace 比较定理 [16] 的推论将被用来构造闸函数.

引理 2.2 对于每个 $y_0\in X$, 距离函数 $d_{y_0}(x):=d(x,y_0)$ 属于 $D(\mathbf{\Delta},X\setminus\{y_0\})$, 且存在一个常数 $m_{N,K}\geqslant 1$, 使得对所有的 $R\in(0,1)$ 和所有的 $m\geqslant m_{N,K}$, 在分布意义下,

$$\mathbf{\Delta}d_{y_0}^{-m}\geqslant\frac{m^2}{2R^{m+2}}\quad\text{在 } B_R(y_0)\setminus\{y_0\}\text{ 上.}\tag{2.6}$$

证明 由 Laplace 比较定理, 有 $d_{y_0}(x)\in D(\mathbf{\Delta},X\setminus\{y_0\})$; 在分布意义下, 对于某个仅依赖于 N 和 K 的常数 $C_{N,K}$, 有

$$d_{y_0}\cdot\mathbf{\Delta}d_{y_0}\leqslant C_{N,K}\quad\text{在 } B_1(y_0)\setminus\{y_0\}\text{ 上.}$$

注意到 $d_{y_0}^{-m}$ 属于 $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(B_1(y_0)\setminus\{y_0\})$. 由链式法则 [16] 可得在 $B_R(y_0)\setminus\{y_0\}$ 上, 在分布意义下,

$$\begin{aligned}\mathbf{\Delta}d_{y_0}^{-m}&=(-m)d_{y_0}^{-m-2}\cdot(d_{y_0}\cdot\mathbf{\Delta}d_{y_0}-(m+1)|\nabla d_{y_0}|^2)\\&\geqslant -m(C_{N,K}-(m+1))d_{y_0}^{-m-2}\\&=(m^2-mC_{N,K}+m)\frac{1}{d_{y_0}^{m+2}}\\&\geqslant\frac{m^2-mC_{N,K}+m}{R^{m+2}},\end{aligned}$$

其中用了 $d_{y_0}\leqslant R$ 和在 $B_R(y_0)$ 上几乎处处有 $|\nabla d_{y_0}|=1$. 现在只要 $m\geqslant m_{N,K}:=\max\{2C_{N,K},1\}$, 就可以得到想要的估计. □

3 具有度量目标的调和映射的 Sobolev 空间

设 Ω 是某 $\mathrm{RCD}(K,N)$ 空间 $(X,d,\mathfrak{m})$ 上的一个有界开区域, 其中 $K\in\mathbb{R}$ 和 $N\in[1,+\infty)$, $\mathfrak{m}(X\backslash\Omega)>0$. 设 (Y,d_Y) 是一个完备度量空间.

如果一个 Borel 可测映射 $u:\Omega\to Y$ 的值域是可分的, 且对于某个 (因此, 对于所有) $P\in Y$, 有

$$\int_{\Omega}d_Y^2(u(x),P)d\mathfrak{m}(x)<\infty,$$

则称 u 属于空间 $L^2(\Omega,Y)$.

给 $L^2(\Omega,Y)$ 赋上一个距离

$$d_{L^2}^2(u,v):=\int_{\Omega}d_Y^2(u(x),v(x))d\mathfrak{m}(x),\quad\text{对所有 } u,v\in L^2(\Omega,Y).$$

文献 [20,24,29,34,35,40] 介绍了另外几种关于具有度量目标的映射的 Sobolev 能量的概念. 下面回顾文献 [20,34,35] 中的概念.

定义 3.1 给定一个映射 $u\in L^2(\Omega,Y)$, 对每个 $r>0$, r 尺度的渐近能量 $E^{\Omega}_{2,r}[u]$ 被定义成 $C_0(\Omega)$ 上的一个泛函

$$E^{\Omega}_{2,r}[u](\phi):=\int_{\Omega}\phi\cdot \mathrm{ks}^2_{2,r}[u,\Omega]d\mathfrak{m},$$

其中 $\mathrm{ks}_{2,r}[u,\Omega](x)$ 由 (1.1) 给出. 称映射 $u\in L^2(\Omega,Y)$ 属于 $W^{1,2}(\Omega,Y)$, 如果

$$E^{\Omega}_2(u):=\sup_{\phi\in C_0(\Omega),\ 0\leqslant\phi\leqslant 1}\Big(\limsup_{r\to 0}E^{\Omega}_{2,r}[u](\phi)\Big)<+\infty.$$

以下性质已在文献 [20] 中被证明:

(1) 如果 $u\in W^{1,2}(\Omega,Y)$, 则存在一个函数 $e_u:=e_2[u,\Omega]\in L^1(\Omega)$, 被称为能量密度, 使得

$$E^{\Omega}_2(u):=\int_{\Omega}e_u d\mathfrak{m}. \tag{3.1}$$

(2) 如果 $Y=\mathbb{R}$, 则上述空间 $W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R})$ 等价于第 2 节中给出的 Sobolev 空间 $W^{1,2}(\Omega)$.

(3) 如果 $u\in W^{1,2}(\Omega,Y)$ 和 $\phi\in \mathrm{Lip}(Y,Z)$, 则 $\phi\circ u\in W^{1,2}(\Omega,Z)$. 特别地, $d_Y(P,u(x))\in W^{1,2}(\Omega)$ 和几乎处处成立 $|\nabla d_Y(P,u(x))|\leqslant e_u^{1/2}$.

给定任何 $w\in W^{1,2}(\Omega,Y)$, 考虑最小值

$$\min_{u\in W^{1,2}_w(\Omega,Y)}E^{\Omega}_2(u),$$

其中 $W^{1,2}_w(\Omega,Y)$ 在 (1.2) 中给出. 这样的能量最小化映射被称为调和映射.

为了考虑调和映射的存在性, 回顾 Alexandrov 意义下非正曲率的概念.

定义 3.2 [6,12] 称一个完备空间 (Y,d_Y) 为 CAT(0) 空间, 如果它是一个测地空间且以下比较性质成立. 给定任何三角形 $\triangle PQR\subset Y$ 和点 $S\in QR$ 且

$$d_Y(Q,S)=d_Y(R,S)=\frac{1}{2}d_Y(Q,R),$$

对于二维平面 $\mathbb{R}^2$ 中的一个三角形 $\triangle\bar{P}\bar{Q}\bar{R}$ 使得

$$d_Y(P,Q)=|\bar{P}-\bar{Q}|,\quad d_Y(Q,R)=|\bar{Q}-\bar{R}|,\quad d_Y(R,P)=|\bar{R}-\bar{P}|$$

和一点 $\bar{S}\in\bar{Q}\bar{R}$ 且

$$|\bar{Q}-\bar{S}|=|\bar{R}-\bar{S}|=\frac{1}{2}|\bar{Q}-\bar{R}|,$$

有

$$d_Y(P,S)\leqslant|\bar{P}-\bar{S}|.$$

Mondino 和 Semola [39] 及 Gigli [18] 分别独立地得到了以下内部正则性.

定理 3.1 [18,39] 设 Ω 是某 RCD(K,N) 空间 $(X,d,\mathfrak{m})$ 上的一个有界区域, 其中 $K\in\mathbb{R}$ 和 $N\in[1,+\infty)$, $\mathfrak{m}(X\backslash\Omega)>0$. 设 Y 是一个 CAT(0) 空间. 假设 $u:\Omega\to Y$ 是一个调和映射. 则它满足以下两个性质:

(1) u 在 Ω 上是局部 Lipschitz 连续的, 且更多地, 对于任意球 $B_r(z_0)$ 使得 $B_{2r}(z_0)\subset\Omega$, 都有

$$\sup_{x,y\in B_r(z_0),\ x\neq y}\frac{d_Y(u(x),u(y))}{d(x,y)}\leqslant\frac{C_{N,K,\mathrm{diam}(\Omega)}}{r}\inf_{O\in Y}\sqrt{\fint_{B_{2r}(z_0)}d_Y^2(u(\cdot),O)d\mathfrak{m}};\tag{3.2}$$

(2) 对于任意 $P\in Y$, 在分布意义下成立

$$\boldsymbol{\Delta}d_Y(u(x),P)\geqslant 0.\tag{3.3}$$

证明 结论 (1) 在文献 [18,39] 中已经被证明, 估计 (3.2) 参见文献 [18].

为了证明 (2), 固定任意 $\epsilon>0$ 且令

$$f_\epsilon(x):=(d_Y^2(u(x),P)+\epsilon^2)^{1/2}\geqslant\epsilon.$$

则有 $f_\epsilon^2=d_Y^2(u(x),P)+\epsilon^2$,

$$|\nabla f_\epsilon|=\frac{d_Y(u(x),P)}{f_\epsilon}|\nabla d_Y(u(x),P)|\leqslant|\nabla d_Y(u(x),P)|\tag{3.4}$$

在 Ω 上几乎处处成立. 由链式法则 [16], 在分布意义下, 有

$$2f_\epsilon\cdot\boldsymbol{\Delta}f_\epsilon+2|\nabla f_\epsilon|^2=\boldsymbol{\Delta}f_\epsilon^2=\boldsymbol{\Delta}d_Y^2(u(x),P).$$

因此, 结合作为测度 (参见文献 [18,31,39])

$$\boldsymbol{\Delta}d_Y^2(u(x),P)\geqslant 2e_u$$

和 $|\nabla d_Y(P,u(x))|^2\leqslant e_u$, 可得作为测度

$$f_\epsilon\cdot\boldsymbol{\Delta}f_\epsilon\geqslant 0.$$

注意到 $d_Y(u(x),P)\in C(\Omega)$ (参见文献 [18,31,39]). 因此, $f_\epsilon\in C(\Omega)$ 和 $f_\epsilon\geqslant\epsilon$. 因此, $\boldsymbol{\Delta}f_\epsilon\geqslant 0$ 对于任意 $\epsilon>0$ 成立, 即

$$-\int_\Omega\langle\nabla f_\epsilon,\nabla\phi\rangle\,d\mathfrak{m}\geqslant 0,\quad\forall\,\phi\in\mathrm{Lip}_0(\Omega),\quad\phi\geqslant 0.\tag{3.5}$$

根据事实 $f_\epsilon^2=d_Y^2(u(x),P)+\epsilon^2$ 和 (3.4), 可知 $\{f_\epsilon\}_{0<\epsilon<1}$ 在 $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 中是一致有界的 (即对每个 $\Omega'\subset\subset\Omega$, $\{f_\epsilon\}_{0<\epsilon<1}$ 在 $W^{1,2}(\Omega')$ 中有界). 则存在一列数 $\{\epsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\epsilon_j\to 0^+$, 使得 f_{ϵ_j} 在 $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 中弱收敛到 $d_Y(u(x),P)$. 令 (3.5) 中的 $\epsilon_j\to 0^+$, 得到在分布意义下 $\boldsymbol{\Delta}d_Y(u(x),P)\geqslant 0$. □

4 调和映射的边界正则性

本节证明定理 1.3. 设 Ω 是某 $\mathrm{RCD}(K,N)$ 空间 $(X,d,\mathfrak{m})$ 上的一个有界区域, 其中 $K\in\mathbb{R}$ 和 $N\in[1,+\infty)$, $\mathfrak{m}(X\backslash\Omega)>0$. 不失一般性, 总是假设 $K\leqslant 0$.

4.1 调和函数的边界估计

本小节讨论一种特殊情形 $Y=\mathbb{R}$, 即调和函数的情形. 下面给出一个简单的引理.

引理 4.1 设 $f\in L^2(X)$ 是一个 Lipschitz 函数, 且对于某个 $L>0$, 有 $|\nabla f|\leqslant L$. 则存在仅依赖于 N 和 K 的常数 $C_1=C_1(N,K)\geqslant 0$, 使得对几乎所有 $z\in X$ 和所有 $0<t\leqslant 1$, 有

$$|\nabla H_t f|(z)\leqslant C_1 L, \tag{4.1}$$

$$|\Delta H_t f|(z)\leqslant C_1 L t^{-1/2}, \tag{4.2}$$

$$|H_t f(z)-f(z)|\leqslant C_1 L t^{1/2}. \tag{4.3}$$

证明 由 $f\in L^2(X)$ 可知 $H_t f\in D(\Delta)$. 根据 Bakry-Ledoux 估计 (2.4) 和 H_t 的 $L^\infty(X)$- 收缩性, 可得

$$|\nabla H_t f|^2\leqslant \mathrm{e}^{-2K}H_t(|\nabla f|^2)\leqslant \mathrm{e}^{-2K}L^2$$

以及对几乎所有 $z\in X$ 和所有 $0<t\leqslant 1$, 有

$$|\Delta H_t f|^2\leqslant \frac{N(\mathrm{e}^{2Kt}-1)}{4Kt^2}H_t(|\nabla f|^2)\leqslant \frac{N(\mathrm{e}^{2Kt}-1)}{4Kt^2}L^2.$$

利用初等不等式

$$\mathrm{e}^s-1\geqslant s,\quad \forall\, s\in\mathbb{R},$$

令 $s=2Kt$, 可以得到想要的估计 (4.1) 和 (4.2), 注意这里使用了 $K\leqslant 0$. 最后, 由于对几乎所有 $z\in X$ 和所有 $0<t\leqslant 1$,

$$|H_t f(z)-f(z)|\leqslant \int_0^t\left|\frac{\partial H_\tau f(z)}{\partial s}\right|d\tau=\int_0^t|\Delta H_\tau f(z)|d\tau\leqslant CLt^{1/2}$$

成立, 得到 (4.3). 证毕. □

下面考虑调和函数在边界附近的增长.

引理 4.2 设 $\Omega\subset X$ 是一个有界区域且满足常数 R_0 的一致外部球条件. 假设 $f\in C(\overline{\Omega})\cap W^{1,2}(\Omega)$ 是 Ω 上具有边界值 $g\in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$ 的调和函数. 假设 g 有 Lipschitz 常数 L 且对于某个 $z_0\in\overline{\Omega}$, 有 $g(z_0)=0$. 则给定任何 $\epsilon\in(0,1)$, 存在 $R_\epsilon\in(0,\frac{1}{2}\min\{R_0,1\})$ (仅依赖于 ϵ, N, K 和 $\mathrm{diam}(\Omega)$) 使得对所有 $r\in(0,R_\epsilon)$ 和所有 $x_0\in\partial\Omega$, 有

$$M_{x_0}(r)\leqslant \max\{C_2M_{x_0}(2r^{\frac{1}{1+\epsilon}})\cdot r^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}+C_2Lr,\ Lr^{1-\epsilon}\}, \tag{4.4}$$

其中

$$M_{x_0}(r):=\max\Big\{\sup_{x\in B_r(x_0)\cap\Omega}(f(x)-f(x_0)),Lr^{1-\epsilon}\Big\},$$

且常数 $C_2\geqslant 1$ 仅依赖于 N, K 和 $\mathrm{diam}(\Omega)$.

证明 设 $\tilde{g}$ 是 g 在 X 上的 Lipschitz 延拓, $\tilde{g}\in L^2(X)$ 且有同样的 Lipschitz 常数 L. 设 $H_t\tilde{g}$ 是 $H_0\tilde{g}=\tilde{g}$ 的热流. 对于任意 $t\in(0,1)$, 我们求解 Dirichlet 问题

$$\text{在 }\Omega\text{ 上},\quad \boldsymbol{\Delta} f_t=0,\quad \text{且}\quad f_t-H_t\tilde{g}\in W_0^{1,2}(\Omega).$$

由 Ω 满足一致外部球条件, 特别地, 由外部密度条件, 可从引理 2.1 得到 $f, f_t \in C(\overline{\Omega})$. 注意到 $f_t - f$ 在 Ω 上调和, 且具有边界值 $H_t\tilde{g} - g$, 可得对于所有 $t \in (0,1)$, 有

$$|f_t - f||_{\partial\Omega} = |H_t\tilde{g} - \tilde{g}||_{\partial\Omega} \leqslant C_1 L t^{1/2},$$

其中 C_1 由引理 4.1 给出. 由最大值原理可得

$$|f_t - f| \leqslant C_1 L t^{1/2}, \quad \forall\, x \in \Omega, \quad \forall\, t \in (0,1). \tag{4.5}$$

不失一般性, 可以假设 $C_1 \geqslant \max\{1, \mathrm{diam}(\Omega)\}$. 在此处和本证明的后续部分, 用 $C_1, C_2, \ldots$ 表示仅依赖于 N, K 和 $\mathrm{diam}(\Omega)$ 的常数.

令

$$v_t = f_t - H_t\tilde{g} \quad \text{在 } \Omega \text{ 上}, \tag{4.6}$$

则对所有 $t \in (0,1)$, 有 $v_t \in C(\overline{\Omega})$, 且对于任意 $x \in B_{2R}(x_0) \cap \overline{\Omega}$, 有

$$v_t(x) \leqslant f(x) - g(x) + 2C_1 L t^{1/2} \leqslant M_{x_0}(2R) + 2LR + 2C_1 L t^{1/2},$$

其中应用了 $M_{x_0}(2R)$ 的定义, (4.5), (4.3), $g(x_0) = f(x_0)$ 和 g 在 Ω 上是 L-Lipschitz 的. 根据 $M_{x_0}(2R)$ 的定义, 可得只要 $2R \leqslant 1$, 就有 $M_{x_0}(2R) \geqslant L(2R)^{1-\epsilon} \geqslant 2LR$. 因此, 对于任意 $x \in B_{2R}(x_0) \cap \overline{\Omega}$ 和 $t < 1$, 只要 $2R \leqslant 1$, 就有

$$v_t(x) \leqslant 2M_{x_0}(2R) + 2C_1 L t^{1/2}. \tag{4.7}$$

固定某个 $m \geqslant m_{N,K}$ 使得 $\frac{2^m \cdot C_1^2}{m^2} \geqslant 8$ (如 $m = \max\{m_{N,K}, 12\}$ 且注意到 $C_1 \geqslant 1$), 其中 $m_{N,K}$ 由引理 2.2 给出. 令 $\tilde{R}_\epsilon$ 由以下条件决定:

$$\frac{4}{C_1^2 \tilde{R}_\epsilon^{2\epsilon}} = \frac{2^m}{m^2} \quad (\text{这意味着 } 2\tilde{R}_\epsilon \leqslant 1). \tag{4.8}$$

对于任意 $R < \tilde{R}_\epsilon$, 选择 t 使得

$$\frac{4M}{R^2} \cdot \frac{m^2}{2^m} = C_1 L t^{-1/2}, \quad \text{且令 } B = \frac{4MR^m}{2^{m-1}}, \tag{4.9}$$

其中 $M := M_{x_0}(2R)$. 注意到 $\frac{R}{M} \leqslant \frac{R}{L(2R)^{1-\epsilon}} \leqslant \frac{R^\epsilon}{L}$, 有

$$t^{1/2} = \frac{C_1 L M}{4} \cdot \frac{R^2}{M^2} \cdot \frac{2^m}{m^2} \leqslant \frac{M}{C_1 L}\left(\frac{R^{2\epsilon}}{\tilde{R}_\epsilon^{2\epsilon}}\right) \leqslant \frac{M}{C_1 L}. \tag{4.10}$$

我们先验证 $t \leqslant 1$. 事实上, 它由 $C_1 \geqslant \max\{1, \mathrm{diam}(\Omega)\}$ 和 $M = M(2R) \leqslant \max\{\mathrm{osc}_{\overline{\Omega}} f, L\} \leqslant \max\{\mathrm{osc}_{\overline{\Omega}} g, L\} \leqslant L \cdot \max\{\mathrm{diam}(\Omega), 1\}$ (由最大值原理和对于某个 $z_0 \in \overline{\Omega}$, $g(z_0) = 0$) 可得.

由于 Ω 满足一致外部球条件 (且 X 是一个测地空间), 所以对于任意 $R \in (0, R_0/2)$, 存在一点 y_0 使得

$$d(y_0, \partial\Omega) = d(y_0, x_0) = \frac{R}{2}.$$

考虑 $B_R(y_0)$ 上的闸函数

$$h(x) = B\left(\left(\frac{R}{2}\right)^{-m} - d_{y_0}^{-m}(x)\right).$$

由引理 2.2 和 (4.9), 在 $B_R(y_0)$ 上, 有

$$\boldsymbol{\Delta} h \leqslant -B\frac{m^2}{2R^{m+2}} = -\frac{4MR^m}{2^{m-1}}\cdot\frac{m^2}{2R^{m+2}} = -\frac{4M}{R^2}\cdot\frac{m^2}{2^m} = -C_1Lt^{-1/2}.$$

考虑 $\Omega' := \Omega \cap B_R(y_0)$, 则 $\partial\Omega' = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, 其中 $\Gamma_1 = \partial B_R(y_0) \cap \overline{\Omega}$ 和 $\Gamma_2 = \partial\Omega \cap \overline{B_R(y_0)}$. 由 (4.7) 和 (4.10) 可得

$$\begin{aligned} &\text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}, \quad v_t \leqslant 4M \leqslant \frac{2^m-1}{2^{m-1}}\frac{4MR^m}{R^m} = h,\\ &\text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}, \quad v_t = 0 \leqslant h. \end{aligned}$$

由 (4.2), 可得对所有 $t \in (0,1)$, 有

$$\boldsymbol{\Delta} v_t = -\Delta H_t\tilde{g} \geqslant -C_1Lt^{-1/2}, \quad v_t|_{\partial\Omega} = 0.$$

利用最大值原理, 得到在 Ω' 上 $v_t \leqslant h$. 因此, 注意到 $h(x_0) = 0$, 可得对于所有 $x \in B_{R/2}(x_0) \cap \Omega$, 有

$$v_t(x) \leqslant h(x) \leqslant d(x_0,x)\cdot|\nabla h|_{L^\infty(\Omega')} \leqslant d(x_0,x)\cdot\frac{mB}{(R/2)^{m+1}} = 16Mm\frac{d(x,x_0)}{R}. \tag{4.11}$$

现在对于任意 $r < R/2$ 和 $x \in B_r(x_0)$, 有

$$\begin{aligned} f(x) &\leqslant f_t(x) + C_1Lt^{1/2} = v_t(x) + H_t\tilde{g}(x) + C_1Lt^{1/2}\\ &\leqslant 16mM\frac{r}{R} + g(x) + 2C_1Lt^{1/2}\\ &\leqslant 16mM\frac{r}{R} + Lr + g(x_0) + 2\frac{(C_1L)^2R^2}{4M}\cdot\frac{2^m}{m^2}, \end{aligned}$$

其中利用了 (4.5), (4.3), (4.11), (4.6) 和 g 的 Lipschitz 连续性. 因此, 由 $f(x_0) = g(x_0)$ 和 $R/M \leqslant R^\epsilon/L$ 可得

$$M(r) \leqslant 16m\frac{M}{R}r + Lr + C_3LR^{1+\epsilon}$$

或者对于任意 $r < R/2$, 有 $M(r) \leqslant Lr^{1-\epsilon}$, 其中 $C_3 = C_1^2 2^{m-1}/(m^2)$. 现在令 $r = R^{1+\epsilon}$ 以得到想要的结论 (4.4), 其中 $C_2 = \max\{16m, C_3+1\}$. 为了保证 $r < R/2$, 假设 $r < 2^{-1/(\epsilon+\epsilon^2)}$. 常数

$$R_\epsilon := \min\left\{\tilde{R}_\epsilon^{1/(1+\epsilon)}, \left(\frac{R_0}{2}\right)^{1/(1+\epsilon)}, 2^{-1/(\epsilon+\epsilon^2)}\right\},$$

其中 $\tilde{R}_\epsilon$ 由 (4.8) 给出. 证毕. □

本节的主要结果如下.

定理 4.1 设 $\Omega \subset X$ 是一个有界区域且满足常数 R_0 的一致外部球条件. 假设 $f \in W^{1,2}(\Omega)$ 是 Ω 上具有边界值 $g \in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$ 的调和函数. 假设 g 有 Lipschitz 常数 L 且对于某个 $z_0 \in \overline{\Omega}$, 有 $g(z_0) = 0$. 则给定任何 $\epsilon \in (0,1)$, 存在一个数 $R'_\epsilon \in (0, \frac{1}{2}\min\{R_0, 1\})$ (仅依赖于 ϵ, N, K 和 $\mathrm{diam}(\Omega)$) 使得对所有的球 $B_r(x_0)$, 其中 $x_0 \in \partial\Omega$ 和所有 $r \in (0, R'_\epsilon)$, 有

$$\sup_{B_r(x_0)\cap\Omega} |f(x) - f(x_0)| \leqslant C_\epsilon L\cdot r^{1-\epsilon}, \tag{4.12}$$

其中常数 $C_\epsilon > 0$ 仅依赖于 ϵ, N, K 和 $\mathrm{diam}(\Omega)$.

证明 对于某个 $z_0 \in \overline{\Omega}$, 有 $g(z_0) = 0$. 由最大值原理可得

$$\max_{\overline{\Omega}} |f| \leqslant \max_{\overline{\Omega}} |g| \leqslant L \cdot \mathrm{diam}(\Omega).$$

对于每个 $j \in \mathbb{N}$, 令 $\epsilon_j := 2^{-j}$, 定义数列 $\{a_j\}$ 为

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{j+1} = \frac{a_j}{1+\epsilon_j} + \frac{\epsilon_j}{1+\epsilon_j} = \frac{a_j + 2^{-j}}{1+2^{-j}}. \tag{4.13}$$

容易验证

$$a_{j+1} \leqslant 1 - \epsilon_j, \quad a_{j+1} \geqslant a_j, \quad \lim_{j\to\infty} a_j = 1. \tag{4.14}$$

由于 $-f$ 是具有边界值 $-g$ 的调和函数, 通过用 $-f$ 替换 f, 并注意到 $\lim_{j\to\infty} a_j \to 1$, 只需要证明对于每个 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $R_k \in (0, \frac{1}{2}\min\{R_0, 1\})$ 使得对所有 $r \in (0, R_k)$ 和所有 $x_0 \in \partial\Omega$, 有

$$M_{x_0}(r) \leqslant C_4^k L r^{a_k}, \tag{4.15}$$

其中常数 $C_4 := 3C_2(\mathrm{diam}(\Omega) + 1)$, C_2 如同引理 4.2.

令 $\epsilon_1 = 1/2$. 由引理 4.2 和 $\max_{\overline{\Omega}} |f| \leqslant L \cdot \mathrm{diam}(\Omega)$, 可得存在 $R_{\epsilon_1} \in (0, \frac{1}{2}\min\{1, R_0\})$ 使得对所有 $x_0 \in \partial\Omega$ 和 $r \in (0, R_{\epsilon_1})$, $r < 1$, 有

$$M_{x_0}(r) \leqslant \max\{C_2 \cdot (L \cdot \mathrm{diam}(\Omega)) \cdot r^{1/3} + C_2 L r,\ L r^{1/2}\} \leqslant C_4 L \cdot r^{1/3}.$$

现在采用归纳法进行论证. 给定 $j \in \mathbb{N}$, 假设对所有 $x_0 \in \partial\Omega$ 和 $r \in (0, R_{\epsilon_j})$, 有 $M_{x_0}(r) \leqslant C_4^j L \cdot r^{a_j}$. 再次由引理 4.2, 存在 $R_{\epsilon_{j+1}} \in (0, \frac{1}{2}\min\{1, R_0\})$ 使得对所有 $r \in (0, R_{\epsilon_{j+1}})$ 和所有 $x_0 \in \partial\Omega$, 有

$$\begin{aligned} M_{x_0}(r) &\leqslant \max\{C_2 C_4^j L \cdot (2r^{\frac{1}{1+\epsilon_j}})^{a_j} r^{\frac{\epsilon_j}{1+\epsilon_j}} + C_2 L r, L r^{1-\epsilon_j}\} \\ &= \max\{C_2 C_4^j L \cdot 2^{a_j} r^{a_{j+1}} + C_2 L r, L r^{1-\epsilon_j}\} \quad (\text{由 (4.13)}) \\ &\leqslant (2C_2 C_4^j + C_2) L \cdot r^{a_{j+1}} \quad (\text{由 (4.14)}). \end{aligned}$$

注意到 $2C_2 C_4^j + C_2 \leqslant C_4^{j+1}$. 所以 (4.15) 成立. 因此, 本定理的证明完成. □

注 4.1 上述估计表明 $u \in C^{1-\epsilon}(\overline{\Omega})$. 更一般的调和映射的情形见下一小节.

4.2 调和映射的边界正则性

本小节将讨论一般情形, 即 Y 是一个 CAT(0) 空间. 设 $w \in W^{1,2}(\Omega, Y)$ 和 $u \in W_w^{1,2}(\Omega, Y)$ 是一个具有边界值 w 的调和映射.

引理 4.3 假设 $w \in C(\overline{\Omega}, Y)$, 记

$$\mathrm{osc}_{\overline{\Omega}} w := \max_{x,y\in\Omega} d_Y(w(x), w(y)).$$

则存在 $P \in Y$ 使得对所有 $x \in \Omega$, 有 $d_Y(P, u(x)) \leqslant \mathrm{osc}_{\overline{\Omega}} w$.

证明 注意到 $d_Y(u(x),w(x))\in W_0^{1,2}(\Omega)$, 由三角不等式可得, 对于任意 $P\in Y$, 有

$$[d_Y(u(x),P)-d_Y(w(x),P)]^+\in W_0^{1,2}(\Omega).$$

固定任意 $P\in w(\Omega)$, 有 $d_Y(P,w(x))\leqslant \mathrm{osc}_{\overline{\Omega}}w$, 因此

$$[d_Y(u(x),P)-\mathrm{osc}_{\overline{\Omega}}w]^+\in W_0^{1,2}(\Omega).$$

现在由最大值原理和 $d_Y(u(x),P)$ 的次调和性 (参见定理 3.1(2)), 得到

$$d_Y(u(x),P)\leqslant \mathrm{osc}_{\overline{\Omega}}w,\quad \text{a.e. 在 } \Omega \text{ 中}.$$

由定理 3.1(1) 可知 $u\in C(\Omega)$. 因此, 对所有 $x\in\Omega$, 有 $d_Y(u(x),P)\leqslant \mathrm{osc}_{\overline{\Omega}}w$. □

现在将定理 4.1 的边界估计从调和函数推广到调和映射.

定理 4.2 假设 $\Omega\subset X$ 满足常数 R_0 的一致外部球条件, 设 $w\in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega},Y)$. 则对于任意 $\epsilon\in(0,1)$, 对所有 $x_0\in\partial\Omega$ 和 $x\in\Omega$ 且 $d(x,x_0)<R'_\epsilon$, 有

$$d_Y(u(x),w(x_0))\leqslant C_\epsilon L_w d^{1-\epsilon}(x,x_0), \tag{4.16}$$

其中 R'_ϵ 和 C_ϵ 如同定理 4.1, 且

$$L_w:=\sup_{x,y\in\overline{\Omega}}\frac{d_Y(w(x),w(y))}{d(x,y)}.$$

特别地, u 在 x_0 点连续且 $u(x_0)=w(x_0)$.

证明 固定任意点 $x_0\in\partial\Omega$. 求解 Dirichlet 问题:

$$\text{在 } \Omega \text{ 上},\quad \boldsymbol{\Delta} f(x)=0\quad \text{且}\quad f(x)-d_Y(w(x_0),w(x))\in W_0^{1,2}(\Omega).$$

注意到, 由三角不等式, 函数 $g_{x_0}(x):=d_Y(w(x_0),w(x))$ 在 $\overline{\Omega}$ 上 Lipschitz 连续, 其 Lipschitz 常数

$$L_{g_{x_0}}\leqslant L_w\quad \text{且}\quad g_{x_0}(x_0)=0.$$

根据定理 4.1, 得到对于任意球 $B_r(x_0)$, $x_0\in\partial\Omega$ 和 $r\in(0,R'_\epsilon)$, 有

$$\sup_{B_r(x_0)\cap\Omega}|f(x)-f(x_0)|\leqslant C_\epsilon L_w r^{1-\epsilon}. \tag{4.17}$$

由定理 3.1(2) 可知 $d_Y(u(x),w(x_0))-f(x)$ 在 Ω 上是次调和的. 现在考虑它在 $\partial\Omega$ 上的边界值. 由 $d_Y(u(x),w(x))\in W_0^{1,2}(\Omega)$ 和三角不等式, 得到

$$[d_Y(u(x),w(x_0))-d_Y(w(x),w(x_0))]^+\in W_0^{1,2}(\Omega).$$

因此, 由 $[d_Y(u(x),w(x_0))-f(x)]^+\leqslant[d_Y(u(x),w(x_0))-d_Y(w(x),w(x_0))]^++[d_Y(w(x),w(x_0))-f(x)]^+$, 得到

$$[d_Y(u(x),w(x_0))-f(x)]^+\in W_0^{1,2}(\Omega).$$

由最大值原理可得

$$d_Y(u(x),w(x_0))\leqslant f(x),\quad \text{a.e. 在 } \Omega \text{ 中}.$$

注意到 $u \in C(\Omega)$ (由定理 3.1) 和 $f \in C(\Omega)$, 得到

$$d_Y(u(x), w(x_0)) \leqslant f(x), \quad \forall\, x \in \Omega.$$

将上式和 (4.17) 结合起来, 可以得到对于任意球 $B_r(x_0)$, $x_0 \in \partial\Omega$ 和 $r \in (0, R'_\epsilon)$, 有

$$d_Y(u(x), w(x_0)) \leqslant f(x) \leqslant C_\epsilon L_w r^{1-\epsilon}.$$

证毕. □

若边界值 w 在 $\overline{\Omega}$ 上是 Hölder 连续的, 类似定理 4.2 的相同论证可以证明以下结论.

推论 4.1 假设 $\Omega \subset X$ 满足常数 R_0 的外部密度条件, 设对于某个 $\alpha \in (0,1)$, $w \in C^\alpha(\overline{\Omega}, Y)$. 则存在两个常数 $\beta \in (0, \alpha)$ 和 $r_0 \in (0, R_0)$ 使得对所有 $x_0 \in \partial\Omega$ 和 $x \in \Omega$ 且 $d(x, x_0) < r_0$, 有

$$d_Y(u(x), w(x_0)) \leqslant C d^\beta(x, x_0),$$

其中 R_0 是由外部密度条件的定义给出的数, C 仅依赖于 N, K, $\mathrm{diam}(\Omega)$ 和 w 的 Hölder 连续模.

证明 论证和定理 4.2 的证明相同, 只需要将定理 4.1 替换成引理 2.1. 注意到对所有 $x_0 \in \partial\Omega$, w 的 Hölder 连续模控制住了 g_{x_0} 的 Hölder 连续模. □

定理 1.3 的证明 首先证明定理 1.3(2). 由引理 4.3 可得, 对所有 $x \in \Omega$, 有

$$d_Y(u(x), P) \leqslant \mathrm{osc}_{\overline{\Omega}} w := \bar{M}.$$

对于任意两点 $x, y \in \overline{\Omega}$ 且 $d(x, y) := r$, 可以假设

$$r < R'_\epsilon/20 =: R_1,$$

其中 R'_ϵ 如同定理 4.2. 如若不然, 由引理 4.3 可得 $d_Y(u(x), u(y)) \leqslant 2\bar{M}/R_1 \cdot r$.

将论证分成 3 种情形: (i) $d(x, \partial\Omega) > 4R_1$; (ii) $4r < d(x, \partial\Omega) < 5R_1$; (iii) $d(x, \partial\Omega) < 5r$.

(i) $d(x, \partial\Omega) > 4R_1$. 则 $B_{2R_1}(x) \subset \Omega$, 通过对球 $B_{R_1}(x)$ 应用定理 3.1(1), 得 (注意到 $y \in B_{R_1}(x)$)

$$d_Y(u(x), u(y)) \leqslant \frac{C_{N,K,\mathrm{diam}(\Omega)}}{R_1} \bar{M} \cdot d(x, y). \tag{4.18}$$

(ii) $4r < d(x, \partial\Omega) < 5R_1$. 令 $x_0 \in \partial\Omega$ 使得 $d(x, x_0) = d(x, \partial\Omega) =: \bar{d}$, 则 $B_{\bar{d}/2}(x) \subset \Omega$, 通过对球 $B_{\bar{d}/4}(x)$ 应用定理 3.1(1) 和 4.2, 得到

$$\begin{aligned} d_Y(u(x), u(y)) &\leqslant \frac{C_{N,K,\mathrm{diam}(\Omega)}}{\bar{d}/4} \sup_{B_{\bar{d}/2}(x)} d_Y(u(x), u(x_0)) \cdot d(x, y) \\ &\leqslant C_{\epsilon,w} \frac{r^\epsilon}{\bar{d}^\epsilon} \cdot r^{1-\epsilon} \leqslant C_{\epsilon,w} r^{1-\epsilon} \quad (\text{由 } r \leqslant \bar{d}), \end{aligned} \tag{4.19}$$

其中 $C_{\epsilon,w}$ 仅依赖于 ϵ, L_w, N, K 和 $\mathrm{diam}(\Omega)$.

(iii) $d(x, \partial\Omega) < 5r$. 令 x_0 和 y_0 是 $\partial\Omega$ 中的两点, 使得 $d(x, x_0) = d(x, \partial\Omega)$ 和 $d(y, y_0) = d(y, \partial\Omega)$. 对 x_0 和 y_0 两点应用定理 4.2, 可以得到

$$\begin{aligned} d_Y(u(x), u(y)) &\leqslant d_Y(u(x), u(x_0)) + d_Y(u(y), u(y_0)) + d_Y(u(x_0), u(y_0)) \\ &\leqslant C_{\epsilon,w}(d^{1-\epsilon}(x, x_0) + d^{1-\epsilon}(y, y_0)) + L_w d(x_0, y_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leqslant C_{\epsilon,w}(2\cdot(5r)^{1-\epsilon})+L_w(d(x,x_0)+d(x,y)+d(y,y_0))\\&\leqslant 10C_{\epsilon,w}\cdot r^{1-\epsilon}+11L_w\cdot r,\end{aligned}\tag{4.20}$$

其中 $C_{\epsilon,w}$ 仅依赖于 ϵ, L_w, N, K 和 $\mathrm{diam}(\Omega)$.

综合上述 3 种情形 (4.18)–(4.20), 得到对所有 x 和 y 且 $d(x,y)\leqslant R'_\epsilon/20$, 有

$$d_Y(u(x),u(y))\leqslant C\cdot r^{1-\epsilon},\tag{4.21}$$

其中 $C_{\epsilon,w}$ 仅依赖于 ϵ, $\mathrm{osc}_{\overline{\Omega}}w$, L_w, R'_ϵ, N, K 和 $\mathrm{diam}(\Omega)$. 至此完成了定理 1.3(2) 的证明.

定理 1.3(1) 的证明是一样的, 只需要将定理 4.2 替换成推论 4.1. 证毕. □

参考文献

1 Ambrosio L. Calculus, heat flow and curvature-dimension bounds in metric measure spaces. In: Proceedings of the ICM–Rio de Janeiro 2018, vol. I. Plenary Lectures. Hackensack: World Sci, 2018, 301–340

2 Ambrosio L, Gigli N, Savaré G. Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below. Duke Math J, 2014, 163: 1405–1490

3 Ambrosio L, Gigli N, Savaré G. Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below. Invent Math, 2014, 195: 289–391

4 Ambrosio L, Mondino A, Savaré G. On the Bakry-Émery condition, the gradient estimates and the local-to-global property of $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ metric measure spaces. J Geom Anal, 2016, 26: 24–56

5 Björn J. Boundary continuity for quasiminimizers on metric spaces. Illinois J Math, 2002, 46: 383–403

6 Burago D, Burago Y, Ivanov S. A Course in Metric Geometry. Graduate Studies in Mathematics, vol. 33. Providence: Amer Math Soc, 2001

7 Cavalletti F, Milman E. The globalization theorem for the curvature-dimension condition. Invent Math, 2021, 226: 1–137

8 Cheeger J. Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces. Geom Funct Anal, 1999, 9: 428–517

9 Chen J. On energy minimizing mappings between and into singular spaces. Duke Math J, 1995, 79: 77–99

10 Daskalopoulos G, Mese C. Harmonic maps from a simplicial complex and geometric rigidity. J Differential Geom, 2008, 78: 269–293

11 Daskalopoulos G, Mese C. Harmonic maps between singular spaces I. Comm Anal Geom, 2010, 18: 257–337

12 Eells J, Fuglede B. Harmonic Maps Between Riemannian Polyhedra. Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 142. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2001

13 Erbar M, Kuwada K, Sturm K-T. On the equivalence of the entropic curvature-dimension condition and Bochner's inequality on metric measure spaces. Invent Math, 2015, 201: 993–1071

14 Fuglede B. Hölder continuity of harmonic maps from Riemannian polyhedra to spaces of upper bounded curvature. Calc Var Partial Differential Equations, 2003, 16: 375–403

15 Fuglede B. Harmonic maps from Riemannian polyhedra to geodesic spaces with curvature bounded from above. Calc Var Partial Differential Equations, 2007, 31: 99–136

16 Gigli N. The splitting theorem in non-smooth context. arXiv:1302.5555, 2013

17 Gigli N. On the Differential Structure of Metric Measure Spaces and Applications. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 236. Providence: Amer Math Soc, 2015

18 Gigli N. On the regularity of harmonic maps from $RCD(K,N)$ to $CAT(0)$ spaces and related results. Ars Inveniendi Analytica, 2023, doi: 10.15781/sf2c-1y90

19 Gigli N. De Giorgi and Gromov working together. arXiv:2306.14604, 2023

20 Gigli N, Tyulenev A. Korevaar-Schoen's energy on strongly rectifiable spaces. Calc Var Partial Differential Equations, 2021, 60: 235

21 Gilbarg D, Trudinger N-S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Classics in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2001

22 Gromov M, Schoen R. Harmonic maps into singular spaces and p-adic superrigidity for lattices in groups of rank one. Publ Math Inst Hautes Études Sci, 1992, 76: 165–246

23 Guo C-Y. Harmonic mappings between singular metric spaces. Ann Global Anal Geom, 2021, 60: 355–399

24 Heinonen J, Koskela P, Shanmugalingam N, et al. Sobolev classes of Banach space-valued functions and quasiconformal mappings. J Anal Math, 2001, 85: 87–139

25 Huang J C, Zhang H C. Harmonic maps between Alexandrov spaces. J Geom Anal, 2017, 27: 1355–1392

26 Huang J C, Zhang H C. Localized elliptic gradient estimate for solutions of the heat equation on $RCD^*(K,N)$ metric measure spaces. Manuscripta Math, 2021, 161: 303–324

27 Jiang R, Li H Z, Zhang H C. Heat kernel bounds on metric measure spaces and some applications. Potential Anal, 2016, 44: 601–627

28 Jost J. Equilibrium maps between metric spaces. Calc Var Partial Differential Equations, 1994, 2: 173–204

29 Jost J. Convex functionals and generalized harmonic maps into spaces of non positive curvature. Comment Math Helv, 1995, 70: 659–673

30 Jost J. Generalized harmonic maps between metric spaces. In: Geometric Analysis and the Calculus of Variations for Stefan Hildebrandt. Somerville: Int Press, 1996, 143–174

31 Jost J. Generalized Dirichlet forms and harmonic maps. Calc Var Partial Differential Equations, 1997, 5: 1–19

32 Jost J. Nonlinear Dirichlet forms. In: New Directions in Dirichlet Forms. Somerville: Int Press/Amer Math Soc, 1998, 1–47

33 Kenig C-E. Harmonic Analysis Techniques for Second Order Elliptic Boundary Value Problems. Conference Board of the Mathematical Sciences, vol. 83. Providence: Amer Math Soc, 1994

34 Korevaar N J, Schoen R M. Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets. Comm Anal Geom, 1993, 1: 561–659

35 Kuwae K, Shioya T. Sobolev and Dirichlet spaces over maps between metric spaces. J Reine Angew Math, 2003, 555: 39–75

36 Lin F H. Analysis on Singular Spaces. In: Collection of Papers on Geometry, Analysis and Mathematical Physics. River Edge: World Sci Publ, 1997, 114–126

37 Lott J, Villani C. Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport. Ann of Math (2), 2009, 169: 903–991

38 Mese C. Harmonic maps into spaces with an upper curvature bound in the sense of Alexandrov. Math Z, 2002, 242: 633–661

39 Mondino A, Semola D. Lipschitz continuity and Bochner-Eells-Sampson inequality for harmonic maps from $RCD(K,N)$ spaces to $CAT(0)$ spaces. Amer J Math, 2024, in press

40 Ohta S I. Cheeger type Sobolev spaces for metric space targets. Potential Anal, 2004, 20: 149–175

41 Schoen R, Uhlenbeck K. Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic maps. J Differential Geom, 1983, 18: 253–268

42 Serbinowski T. Boundary regularity of harmonic maps to nonpositively curved metric spaces. Comm Anal Geom, 1994, 2: 139–153

43 Sturm K-T. Analysis on local Dirichlet spaces. II. Upper Gaussian estimates for the fundamental solutions of parabolic equations. Osaka J Math, 1995, 32: 275–312

44 Sturm K-T. A semigroup approach to harmonic maps. Potential Anal, 2005, 23: 225–277

45 Sturm K-T. On the geometry of metric measure spaces. Acta Math, 2006, 196: 65–131

46 Sturm K-T. On the geometry of metric measure spaces. II. Acta Math, 2006, 196: 133–177

47 Zhang H C, Zhong X, Zhu X P. Quantitative gradient estimates for harmonic maps into singular spaces. Sci China Math, 2019, 62: 2371–2400

48 Zhang H C, Zhu X P. Lipschitz continuity of harmonic maps between Alexandrov spaces. Invent Math, 2018, 211: 863–934

Boundary regularity of harmonic maps from RCD(K,N) spaces to CAT(0) spaces

Hui-Chun Zhang & Xi-Ping Zhu

Abstract In this paper, we establish an optimal boundary regularity for harmonic maps from metric measure spaces with generalized Ricci lower bounds into non-positively curved metric spaces.

Keywords **harmonic maps, boundary regularity, exterior sphere condition**

MSC(2020) **58E20**

doi: 10.1360/SSM-2024-0057