中国科学: 数学 2027 年 第 57 卷 第 5 期: 1 ∼ 16
SCIENTIA SINICA Mathematica
综 述

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

Ray-Singer 解析挠率与复值解析挠率

苏广想

南开大学陈省身数学研究所, 天津 300071
E-mail: guangxiangsu@nankai.edu.cn

收稿日期: 2025-12-31; 接受日期: 2026-05-14; 网络出版日期: 2026-06-08

摘要 本文综述 Ray-Singer 解析挠率与复值解析的定义、性质以及它们与拓扑挠率之间的关系.

关键词 解析挠率 拓扑挠率 Cheeger-Müller 定理

MSC (2020) 主题分类 19K56, 58J52, 57Q10

1 引言

拓扑挠率由 Reidemeister [28] 和 Franz [18] 于 20 世纪 30 年代在研究棱镜空间时引进. 对于固定的 p, 棱镜空间 $L(p,q)$ 有相同的基本群和同调群, 但是它们却不是同胚的. 拓扑挠率可以用来区分同伦等价但不同胚的棱镜空间. 对于光滑流形, 由流形的光滑剖分, 我们可以定义 Reidemeister-Franz 挠率 (或者称为 Reidemeister 挠率). 由于流形的光滑剖分是等价的, 所以 Reidemeister 挠率不依赖于光滑剖分.

Ray 和 Singer [27] 在 20 世纪 70 年代提出如何用解析的方法描述 Reidemeister 挠率. 设 F 是闭流形 M 上的酉的平坦向量丛, Ray 和 Singer [27] 定义了解析挠率并且证明了其不依赖于 M 的度量的选取. 进一步地, 他们猜测解析挠率等于 M 的 Reidemeister 挠率. 后来这个猜想被 Cheeger [15] 和 Müller [25] 分别独立地证明. Müller [26] 将 Cheeger-Müller 定理推广到了 F 是幺模的平坦向量丛的情形. 同时, Bismut 和 Zhang [4] 用 Witten 形变 [41] 的方法将 Cheeger-Müller 定理推广到了一般平坦向量丛的情形. Bismut 和 Zhang [5] 把文献 [4] 中的结果推广到了等变的情形.

如果流形 M 是带边的, Hassell [19], Lück [22] 和 Vishik [40] 在平坦丛的度量是平坦的以及流形的度量在边界附近具有乘积结构的条件下分别研究了 Ray-Singer 解析挠率和 Cheeger-Müller 定理. Dai 和 Fang [16] 研究了流形度量在边界附近不是乘积结构的情形. Brüning 和 Ma [10] 研究了一般情形的绝对边界条件的 Ray-Singer 解析挠率并得到了其反变公式. Brüning 和 Ma [11] 研究了一般情形的相对边界条件的 Ray-Singer 解析挠率并且得到了 Cheeger-Müller 定理和 Ray-Singer 解析挠率的粘合公式.

另一方面, Turaev [37,38] 将 Reidemeister 挠率的概念推广到了复值的情形. Braverman 和 Kappeler [7,9] 在奇数维流形上定义了精细解析挠率并且证明了其与 Turaev 挠率的比值的模为 1.

英文引用格式: Su G X. The Ray-Singer analytic torsion and complex-valued analytic torsions (in Chinese). Sci Sin Math, 2027, 57: 1–16, doi: 10.1360/SSM-2025-0336

© 2026《中国科学》杂志社

Burghelea 和 Haller [12] 在平坦丛上存在非退化的对称双线性型的条件下定义了复值的解析挠率并且猜想其 Cheeger-Müller 定理成立. Su 和 Zhang [36] 证明了 Burghelea-Haller 猜想. 后来, Burghelea 和 Haller [13] 在差一个符号的情形下也证明了他们的猜想. Su [33] 把文献 [36] 的结果推广到了带边流形. Cappell 和 Miller [14] 也定义了一种复值解析挠率并且用文献 [36] 中的方法证明了 Cheeger-Müller 定理. Vertman [39] 研究了紧的带边流形的精细解析挠率. Huang [20] 研究了紧的带边流形上的 Cappell-Miller 解析挠率. Molina [24] 证明了紧的带边流形上 Burghelea-Haller 解析挠率的反变公式. Su [32–34] 分别研究了紧的带边流形上 Burghelea-Haller 解析挠率和 Cappell-Miller 解析挠率并得到了它们的 Cheeger-Müller 定理.

本文介绍 Turaev 挠率、Ray-Singer 解析挠率与复值解析挠率的定义、性质以及它们之间的关系. 本文余下内容的结构如下. 第 2 节介绍 Turaev 挠率的定义. 第 3 节介绍 Thom-Smale 复形以及一些组合挠率. 第 4 节介绍 Ray-Singer 解析挠率. 第 5 节介绍几种复值解析挠率. 第 6 节介绍 Bismut-Lott 解析挠率形式以及其可能的复值推广.

2 Turaev 挠率

设 E 是一个 k 维的复向量空间, 记

$$\det E = \Lambda^k(E).$$

设 (C_*, ∂) 是一个有限维的链复形

$$(C_*, \partial) : 0 \to C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \to 0,$$

其中 C_i, $0 \leqslant i \leqslant n$ 是有限维的复向量空间.

记

$$H_*(C_*, \partial) = \bigoplus_{i=0}^{n} H_i(C_*, \partial)$$

是 (C_*, ∂) 的同调群.

记

$$\det C_* = \bigotimes_{i=0}^{n} (\det C_i)^{(-1)^i},$$

$$\det H_*(C_*, \partial) = \bigotimes_{i=0}^{n} (\det H_i(C_*, \partial))^{(-1)^i}$$

分别是 C_* 和 $H_*(C_*, \partial)$ 的行列式线. 则有以下典则同构 (参见文献 [1, 21]):

$$\varphi_C : \det C_* \cong \det H_*(C_*, \partial).$$

类似地, 如果 (C^*, ∂) 是一个上链复形, 则也可以定义 $\det C^*$ 和 $\det H^*(C^*, \partial)$. 同样有典则同构

$$\varphi'_C : \det C^* \cong \det H^*(C^*, \partial).$$

如果 $(C^*, \partial, \partial')$ 上有两个算子 ∂ 和 ∂' 满足 $(\partial_q)^2 = 0$, $(\partial'_q)^2 = 0$,

$$0 \to C^0 \xrightarrow{\partial_0} C^1 \xrightarrow{\partial_1} \cdots \xrightarrow{\partial_{n-1}} C^n \to 0, \quad 0 \leftarrow C^0 \xleftarrow{\partial'_0} C^1 \xleftarrow{\partial'_1} \cdots \xleftarrow{\partial'_{n-1}} C^n \leftarrow 0,$$

则有同构

$$\det H_*(C^*,\partial')\xrightarrow{(\varphi_C)^{-1}}\det C^*\xrightarrow{\varphi'_C}\det H^*(C^*,\partial). \tag{2.1}$$

由 (2.1) 定义了一个元 (参见文献 [14])

$$\tau(C^*,\partial,\partial')\in\det H^*(C^*,\partial)\otimes(\det H_*(C^*,\partial'))^{-1}. \tag{2.2}$$

下面介绍 Turaev 挠率 (参见文献 [17]). 设 X 是一个有限的 CW 空间且 $\chi(X)=0$. 设 F 是 X 上的平坦向量丛, 平坦联络记为 ∇^F. 给 X 的所有胞腔一个定向. 对于 X 的一个胞腔 a, 记 $\Gamma(a,F)$ 为 a 上的 F 的平坦截面空间. X 的取值于 F 的 q- 链定义为

$$C_q(X,F)=\bigoplus_{\dim a=q}\Gamma(a,F).$$

则在 $C_*(X,F)$ 上可以按照通常的方法定义边缘算子使其构成一个复形, 记 $H_*(X,F)=H_*(C_*(X,F))$.

设 $\mathfrak{e}$ 是一个 Euler 结构 (参见文献 [17, 第 207 页]). 固定 X 中的一点 x 以及 F_x 的一组基 e_x. 记 $\beta_a:[0,1]\to X$ 是连接 $x=\beta_a(0)$ 和 a 中一个点 $\beta_a(1)$ 的道路. 因为 $\chi(X)=0$, 所以 1- 链 $\sum_a(-1)^{|a|}\beta_a$ 是一个 Euler 链且其边界是 $\sum_a(-1)^{|a|}\beta_a(1)$. 选取道路 $\{\beta_a\}_a$ 使其代表 $\mathfrak{e}$. 我们将 e_x 沿着 β_a 作平行移动, 得到 $F_{\beta_a(1)}$ 的一组基, 从而得到 a 上的平坦截面空间的一组基. 由此得到 $C_q(X,F)$ 的一组基, 并且通过外积得到 $c_q\in\det C_q(X,F)$. 定义

$$\tau_0=\varphi_C(c_0\otimes c_1^{-1}\otimes c_2\otimes\cdots\otimes c_m^{(-1)^m})\in\det H_*(X,F).$$

取 X 的一个同调定向 $\mathfrak{o}$, 即 $\det H_*(X,\mathbb{R})$ 的一个定向. 考虑胞腔链复形 $C_\mathbb{R}=C_*(X,\mathbb{R})$, 则 X 的胞腔的定向以及胞腔的排列顺序决定了 $C_\mathbb{R}$ 的一组基, 进而得到 $c\in\det C_\mathbb{R}$. 如果 $\varphi_{C_\mathbb{R}}(c)\in\det H_*(X,\mathbb{R})$ 定义了 $\mathfrak{o}$, 则 (同调) Turaev 挠率 $\tau(X,\mathfrak{e},\mathfrak{o},F)$ [17] 定义为 τ_0, 如果相反则 $\tau(X,\mathfrak{e},\mathfrak{o},F)$ 定义为 $-\tau_0$. $\tau(X,\mathfrak{e},\mathfrak{o},F)$ 不依赖于 x, e_x 和 β_a 的选取.

对于上述 (X,F), 也可以定义上链复形

$$C^q(X,F)=\bigoplus_{\dim a=q}\Gamma(a,F),\quad \delta_q:C^q(X,F)\to C^{q+1}(X,F).$$

记 F^* 是 F 的对偶丛, 则 $C^q(X,F)$ 和 $C_q(X,F^*)$ 是对偶的. 从而有配对

$$H^q(X,F)\otimes H_q(X,F^*)\to\mathbb{C},$$

进而有配对

$$[\cdot,\cdot]:\det H^*(X,F)\otimes\det H_*(X,F^*)\to\mathbb{C}.$$

给定一个上同调定向 $\mathfrak{o}$, 即 $\det H^*(X,\mathbb{R})$ 的定向. 则其决定了一个同调定向使得配对为 1, 仍然记同调定向为 $\mathfrak{o}$. 则 (上同调) Turaev 挠率 $\rho_{\mathfrak{e},\mathfrak{o}}(\nabla^F)$ [17] 定义为 $\det H^*(X,F)$ 中的元使得

$$[\rho_{\mathfrak{e},\mathfrak{o}}(\nabla^F),\tau(X,\mathfrak{e},\mathfrak{o},F^*)]=1.$$

3 Thom-Smale 复形与组合挠率

本节介绍 Thom-Smale 复形以及一些组合挠率. 关于 Thom-Smale 复形的内容可以参见文献 [4,42].

设 M 是闭的连通的光滑流形, 其维数为 n. 为简单起见, 假设 M 是定向的. 设 (F,∇^F) 是复的平坦向量丛, 平坦联络为 ∇^F. 记 $\mathcal{F}$ 是 F 的平坦截面构成的层, $H^\bullet(M,F)$ 为 $\mathcal{F}$ 的上同调群.

设 (F^*,∇^{F_*}) 是 F 的对偶向量丛, 平坦联络为 ∇^{F_*}.

设 $f:M\to\mathbb{R}$ 是一个 Morse 函数. 取 M 的 Riemann 度量 g^{TM} 使得梯度向量场 $X=\nabla f\in\Gamma(TM)$ 满足 Smale 横截性条件 (参见文献 [30,31]).

记

$$B=\{x\in M;X(x)=0\}.$$

对于 $x\in B$, 记 $W^u(x)$ 和 $W^s(x)$ 分别为 x 处的关于 $-X$ 的不稳定胞腔和稳定胞腔. 分别取 $W^u(x)$ 和 $W^s(x)$ 的定向为 O_x^- 和 O_x^+. 对于 $x,y\in B$ 且 Morse 指标满足

$$\mathrm{ind}(y)=\mathrm{ind}(x)-1,$$

则

$$\Gamma(x,y)=W^u(x)\cap W^s(y)$$

由 $-X$ 的有限条积分曲线构成. 此外, 对于 $\gamma\in\Gamma(x,y)$, 由以上的定向, 可以定义 $n_\gamma(x,y)=\pm1$ (参见文献 [4, (1.28)]).

对于 $x\in B$, 记 $[W^u(x)]$ 为 $W^u(x)$ 生成的复线. 记

$$C_*(W^u,F^*)=\bigoplus_{x\in B}[W^u(x)]\otimes F_x^*,$$

$$C_i(W^u,F^*)=\bigoplus_{x\in B,\mathrm{ind}(x)=i}[W^u(x)]\otimes F_x^*.$$

对于 $x,y\in B$ 且 $\mathrm{ind}(y)=\mathrm{ind}(x)-1$, 如果 $\gamma\in\Gamma(x,y)$, $f^*\in F_x^*$, 记

$$\tau_\gamma(f^*)\in F_y^*$$

是 f 关于 F^* 的平坦联络沿着 γ 的平行移动. 如果 $x\in B$, $f^*\in F_x^*$, 定义

$$\partial(W^u(x)\otimes f^*)=\sum_{y\in B,\mathrm{ind}(y)=\mathrm{ind}(x)-1}\ \sum_{\gamma\in\Gamma(x,y)}n_\gamma(x,y)W^u(y)\otimes\tau_\gamma(f^*).\tag{3.1}$$

则有链复形 $(C_*(W^u,F^*),\partial)$, 其中 $\partial:C_i(W^u,F^*)\to C_{i-1}(W^u,F^*)$.

对于 $x\in B$, 记 $[W^u(x)]^*$ 为 $[W^u(x)]$ 的对偶. 记复形 $(C^*(W^u,F),\partial)$ 为 $(C_*(W^u,F^*),\partial)$ 的对偶. 对于 $0\leqslant i\leqslant n$, 有

$$C^i(W^u,F)=\bigoplus_{x\in B,\mathrm{ind}(x)=i}[W^u(x)]^*\otimes F_x,\tag{3.2}$$

以及典则同构 (参见文献 [4, (1.48)])

$$\det C^\bullet(W^u,F)\cong\det H^\bullet(M,F).\tag{3.3}$$

记 g^F 为 F 上的 Hermite 度量. 对于 $x\in B$, 记 $\|\cdot\|_{\det F_x}$ 为 $\det F_x$ 的度量. 则由 (3.2) 可知, $\|\cdot\|_{\det F_x}$ $(x\in B)$ 诱导了 $\det C^\bullet(W^u,F)$ 上的度量 $\|\cdot\|_{\det C^\bullet(W^u,F)}$.

定义 3.1 (参见文献 [4, 定义 1.9]) 由 $\det C^\bullet(W^u,F)$ 上的度量 $\|\cdot\|_{\det C^\bullet(W^u,F)}$ 通过同构 (3.3) 得到的 $\det H^\bullet(M,F)$ 的度量称为 $\det H^\bullet(M,F)$ 的 Milnor 度量, 记为 $\|\cdot\|^{\mathcal{M},X}_{\det H^\bullet(M,F)}$.

记 $D(W^u)$ 为 W^u 的对偶胞腔, 则有典则同构

$$\Theta: C^i(W^u,F)\cong C^{n-i}(D(W^u),F).$$

记 $\widetilde{\partial}$ 是 $D(W^u)$ 的边缘算子, 则在复形 $C^*(W^u,F)$ 上有两个算子 ∂ 和 $\partial'=\Theta^{-1}\widetilde{\partial}\Theta$. 则通过 (2.2), Cappell 和 Miller[14] 定义了组合挠率

$$\tau^{\mathrm{CM}}_{\mathrm{comb}}(M,F)=\tau_{\mathrm{comb}}(C^*(W^u,F),\partial,\partial')\in \det H^*(M,F\oplus F^*),$$

且 $\tau^{\mathrm{CM}}_{\mathrm{comb}}(M,F)$ 不依赖于胞腔分解. 这里用到了以下同构 (参见文献 [14]):

$$\begin{aligned}
&\det(H^*(C(W^u,F),\partial))\otimes(\det(H_*(C(W^u,F),\partial')))^{-1}\\
&\quad\cong \det(H^*(C(W^u,F),\partial))\otimes(\det(H^{n-*}(C(D(W^u),F),\widetilde{\partial})))^{-1}\\
&\quad\cong \det(H^*(M,F))\otimes\det(H^{n-*}(M,\partial M,F))^{-1}\\
&\quad\cong \det(H^*(M,F))\otimes\det(H^*(M,F^*))^{-1}\\
&\quad\cong \det H^*(M,F\oplus F^*).
\end{aligned}\tag{3.4}$$

假设 F 上存在沿纤维的非退化的对称双线性型 b^F, 则由 b^F 可以定义 $[W^u(x)]^*\otimes F_x$ 上的对称双线性型使得对于 $f,f'\in F_x$, 有

$$\langle W^u(x)^*\otimes f, W^u(x)^*\otimes f'\rangle=\langle f,f'\rangle_{b^{F_x}}.\tag{3.5}$$

对于 $0\leqslant i\leqslant n$, 由 (3.5) 可以得到 $C^i(W^u,F)$ 上的非退化的对称双二次型, 使得 (3.2) 是正交的, 进而得到 $\det C^\bullet(W^u,F)$ 上一个非退化的对称双线性型, 记为 $b_{\det C^\bullet(W^u,F)}$.

定义 3.2 (参见文献 [36, 定义 2.2]) 由 $\det C^\bullet(W^u,F)$ 上的对称双线性型 $b_{\det C^\bullet(W^u,F)}$ 通过同构 (3.3) 得到 $\det H^\bullet(M,F)$ 上的一个对称双线性型, 称为 Milnor 对称双线性挠率, 记为 $b^{\mathcal{M}}_{(M,F,b^F,-X)}$.

注 3.1 在上述定义中, 我们将 $b^{\mathcal{M}}_{(M,F,b^F,-X)}$ 直接看作是 $\det H^\bullet(M,F)$ 上的对称双线性型, 这一点和文献 [36] 有区别. 以下类似的情况, 我们都通过某种典则同构看作是 $\det H^\bullet(M,F)$ 上的元.

假设 $\chi(M)=0$, 设 $\mathfrak{e}\in\mathfrak{Eul}(M,\mathbb{Z})$ 是一个 Euler 结构 (参见文献 [12, 第 2.1 小节]). 取一个基点 $x_0\in M$. 对于任意 $x\in B$, 选取一条道路

$$\sigma_x,\sigma(0)=x_0,\sigma_x(1)=x$$

使得

$$\mathfrak{e}=\left[X,\sum_{x\in B}(-1)^{\mathrm{ind}(x)}\sigma_x\right].$$

取 F_{x_0} 的一个非退化对称双线性型 $b^{F_{x_0}}$. 对于 $x\in B$, 由 $b^{F_{x_0}}$ 沿着 σ_x 作平行移动可以得到 F_x 上的非退化双线性型 b^{F_x}. 类似地, 可以得到 $\det H^*(M,F)$ 上的非退化对称双线性型, 其不依赖于 X, x_0, $b^{F_{x_0}}$ 和 σ_x 的选取, 称为 Burghelea-Haller 组合挠率, 记为 $\tau^{\mathrm{comb}}_{F,\mathfrak{e}}$ [12].

记

$$\theta(F,b^F)=\mathrm{Tr}[(b^F)^{-1}\nabla^F b^F]\tag{3.6}$$

为 Kamber-Tondeur 1- 形式. 则 $\theta(F,b^F)$ 是 M 上的闭的 1- 形式, 且其同调类只依赖于 b^F 的同伦类. 记

$$c=\sum_{x\in B}(-1)^{\mathrm{ind}(x)}\sigma_x,$$

则有 (参见文献 [12, (46)])

$$\tau^{\mathrm{comb}}_{F,\mathfrak{e}}=b^{\mathcal{M}}_{(M,F,b^F,-X)}\cdot\exp\left(-\int_c\theta(F,b^F)\right). \tag{3.7}$$

4 Ray-Singer 解析挠率

设 M 是一个 n 维闭的定向 Riemann 流形, Riemann 度量记为 g^{TM}. 设 F 是 M 上的平坦向量丛, 平坦联络记为 ∇^F, 度量记为 g^F. 记 $\langle\cdot\rangle_F$ 和 $\langle\cdot\rangle_{\Lambda(T^*M)\otimes F}$ 分别为 F 和 $\Lambda(T^*M)\otimes F$ 上的内积.

记 $\Omega^*(M,F)=\bigoplus_{i=0}^n\Omega^i(M,F)$ 是 $\Lambda(T^*M)\otimes F=\bigoplus_{i=0}^n(\Lambda^i(T^*M)\otimes F)$ 的光滑截面. 记 d^F 为 ∇^F 诱导的 $\Omega(M,F)$ 上的算子, 则 $(d^F)^2=0$. 由 g^{TM} 和 g^F 可以定义 $\Omega(M,F)$ 上的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$. 记 d^{F_*} 是 d^F 对于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的形式伴随算子. 对于 $0\leqslant i\leqslant n$, 记

$$\Omega^i_{\{0\}}(M,F)=\{f\in\Omega^i(M,F),d^Ff=0,d^{F_*}f=0\},$$
$$\Omega^*_{\{0\}}(M,F)=\bigoplus_{i=0}^n\Omega^i_{\{0\}}(M,F).$$

则 $\Omega^i_{\{0\}}(M,F)$ 作为 $\Omega^i(M,F)$ 的子空间有 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 诱导的度量. 由 Hodge 理论可知 $H^i(M,F)$ 和 $\Omega^i_{\{0\}}(M,F)$, $0\leqslant i\leqslant n$, 是典则同构的. 从而由 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 得到 $H^\bullet(M,F)$ 上的度量 $g^{H^\bullet(M,F)}$, 进而得到 $\det H^\bullet(M,F)$ 上的度量 $|\cdot|^{RS}_{\det H^\bullet(M,F)}$, 称为 L_2 度量.

记

$$D=d^F+d^{F_*}.$$

记 $\Omega^*_{\{0\}}(M,F)^\perp$ 为 $\Omega^*_{\{0\}}(M,F)$ 在 $\Omega^*(M,F)$ 中对于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的正交补. 记 P 和 $P^\perp$ 分别为 $\Omega^*(M,F)$ 到 $\Omega^*_{\{0\}}(M,F)$ 和 $\Omega^*_{\{0\}}(M,F)^\perp$ 的正交投影. 则 Hodge Laplace 算子 D^2 作用在 $\Omega^*_{\{0\}}(M,F)^\perp$ 上是可逆的, 逆算子记为 $(D^2)^{-1}$.

如果 $\alpha\in\Omega^k(M,F)$, 定义算子 N 为

$$N\alpha=k\alpha.$$

定义 4.1 (参见文献 [4, 定义 2.1]) 对于 $s\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s)>n/2$, 记

$$\theta(s)=-\mathrm{Tr}_s[N(D^2)^{-s}P^\perp],$$

其中 $\mathrm{Tr}_s[\cdot]=\mathrm{Tr}[(-1)^N\cdot]$. 由文献 [29] 知, $\theta(s)$ 可以延拓为 $s\in\mathbb{C}$ 上的亚纯函数并且在 $s=0$ 处是全纯的. Ray-Singer 解析挠率定义为

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial s}(0)\right\}.$$

定义 4.2 (参见文献 [4, 定义 2.2]) $\det H^\bullet(M,F)$ 上的 Ray-Singer 度量 $\|\cdot\|^{\mathrm{RS}}_{\det H^\bullet(M,F)}$ 定义为

$$\|\cdot\|^{\mathrm{RS}}_{\det H^\bullet(M,F)}=|\cdot|^{\mathrm{RS}}_{\det H^\bullet(M,F)}\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial s}(0)\right\}.$$

记 ∇^{TM} 是对于 g^{TM} 的 Levi-Civita 联络, R^{TM} 是其曲率. 则 Euler 形式定义为

$$e(TM,\nabla^{TM})=\mathrm{Pf}\left[\frac{R^{TM}}{2\pi}\right],$$

其中 Pf 是 Pfaffian 算子 (参见文献 [42, (3.19)]).

类似 (3.6), 定义 $\theta(F,g^F)\in\Omega^1(M)$.

记 g'^{TM} 是 M 上的另一个度量, ∇'^{TM} 是其 Levi-Civita 联络. 记 $\widetilde{e}(TM,\nabla^{TM},\nabla'^{TM})$ 是 Chern-Simons 类 (参见文献 [42, 命题 3.6]), 使得

$$d\widetilde{e}(TM,\nabla^{TM},\nabla'^{TM})=e(TM,\nabla'^{TM})-e(TM,\nabla^{TM}).$$

记 g'^F 是 F 上的另一个度量, $\|\cdot\|'_{\det F}$ 是由 g'^F 诱导的 $\det F$ 上的度量. 记 $\|\cdot\|'^{RS}_{\det H^\bullet(M,F)}$ 是由 (g'^{TM},g'^F) 定义的 $\det H^\bullet(M,F)$ 上的 Ray-Singer 度量. 则有以下反变公式.

定理 4.1 (参见文献 [4, 定理 4.7]) 以下等式成立:

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}\left(\frac{\|\cdot\|'^{\mathrm{RS}}_{\det H^\bullet(M,F)}}{\|\cdot\|^{\mathrm{RS}}_{\det H^\bullet(M,F)}}\right)^2=&\int_M\mathrm{Log}\left(\frac{\|\cdot\|'^2_{\det F}}{\|\cdot\|^2_{\det F}}\right)e(TM,\nabla^{TM})\\&-\int_M\theta(F,g'^F)\widetilde{e}(TM,\nabla^{TM},\nabla'^{TM}).\end{aligned}\tag{4.1}$$

给定一个 Morse 函数 f, 且取定一个 Riemann 度量 g^{TM} 使得 $X:=\nabla f$ 满足 Smale 横截性条件. 记 $\psi(TM,\nabla^{TM})$ 是在文献 [2,23] 中构造的 TM 上的 $(n-1)$- 流, 其限制在 $TM\setminus\{0\}$ 上诱导了球丛上的光滑形式. Bismut 和 Zhang 证明了以下 Cheeger-Müller 定理.

定理 4.2 (参见文献 [4, 定理 7.1]) 以下等式成立:

$$\mathrm{Log}\left(\frac{\|\cdot\|^{RS}_{\det H^\bullet(M,F)}}{\|\cdot\|^{\mathcal{M},X}_{\det H^\bullet(M,F)}}\right)^2=-\int_M\theta(F,g^F)X^*\psi(TM,\nabla^{TM}).\tag{4.2}$$

5 复值解析挠率

5.1 Burghelea-Haller 解析挠率

本小节介绍 Burghelea-Haller 解析挠率 (参见文献 [12]). 设 M 是 n 维连通的闭的光滑 Riemann 流形, Riemann 度量记为 g^{TM}. 为简单起见, 假设 M 是定向的. 设 F 是 M 上的平坦向量丛, 记平坦联络为 ∇^F. 假设 F 上存在沿着纤维的非退化的对称双线性型 b^F.

对于 $0\leqslant i\leqslant n$, 记

$$\Omega^i(M,F)=\Gamma(\Lambda^i(T^*M)\otimes F),\quad \Omega^*(M,F)=\bigoplus_{i=0}^n\Omega^i(M,F).$$

记 $d^F:\Omega^i(M,F)\to\Omega^{i+1}(M,F)$ 为由 ∇^F 诱导的外微分算子. 由 g^{TM} 和 b^F 得到 $\Omega^*(M,F)$ 上一个对称双线性形式: 如果 $u=\alpha f$, $v=\beta g\in\Omega^*(M,F)$ 使得 $\alpha,\beta\in\Omega^*(M)$, $f,g\in\Gamma(F)$, 则

$$\langle u,v\rangle_b=\int_M(\alpha\wedge*\beta)b^F(f,g),\tag{5.1}$$

其中 $*$ 是 Hodge 星号算子 (参见文献 [42]).

考虑 de Rham 复形

$$(\Omega^*(M,F),d^F):0\to\Omega^0(M,F)\xrightarrow{d^F}\Omega^1(M,F)\to\cdots\xrightarrow{d^F}\Omega^n(M,F)\to 0. \tag{5.2}$$

记

$$d_b^{F_*}:\Omega^i(M,F)\to\Omega^{i-1}(M,F)$$

为 d^F 对于 (5.1) 的形式伴随算子, 即对于

$$u,v\in\Omega^*(M,F),$$

有

$$\langle d^Fu,v\rangle_b=\langle u,d_b^{F_*}v\rangle_b.$$

记

$$D_b=d^F+d_b^{F_*},\quad D_b^2=(d^F+d_b^{F_*})^2=d_b^{F_*}d^F+d^Fd_b^{F_*}. \tag{5.3}$$

则 Laplace 算子 D_b^2 保持 $\Omega^*(M,F)$ 的 $\mathbb{Z}$- 分次.

如果 λ 是 D_b^2 的谱, 记 $\Omega^*_{\{\lambda\}}(M,F)$ 为相应的 (广义) 特征空间, 即存在 $N_\lambda\in\mathbb{N}$ 使得

$$(D_b^2-\lambda)^{N_\lambda}|_{\Omega^*_{\{\lambda\}}(M,F)}=0.$$

命题 5.1 (参见文献 [12, 命题 4.1]) 算子 D_b^2 有以下性质.

(i) D_b^2 的谱是离散的. 对于任意的 $\theta>0$, D_b^2 的谱只有有限个在角 $\{z\in\mathbb{C}\mid -\theta<\arg(z)<\theta\}$ 之外.

(ii) 如果 λ 是 D_b^2 的谱, 则 $\Omega^*_{\{\lambda\}}(M,F)$ 是有限维的并且只包含光滑的微分形式. 我们有以下 D_b^2 不变的并且关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_b$ 正交的分解

$$\Omega^*(M,F)=\Omega^*_{\{\lambda\}}(M,F)\oplus\Omega^*_{\{\lambda\}}(M,F)^\perp. \tag{5.4}$$

$D_b^2-\lambda$ 在 $\Omega^*_{\{\lambda\}}(M,F)^\perp$ 的限制是可逆的.

(iii) 分解 (5.4) 关于 d^F 和 $d_b^{F_*}$ 是不变的.

(iv) 对于 $\lambda\neq\mu$, 特征空间 $\Omega^*_{\{\lambda\}}(M,F)$ 和 $\Omega^*_{\{\mu\}}(M,F)$ 关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_b$ 是正交的.

对于 $a\geqslant 0$, 记

$$\Omega^*_{[0,a]}(M,F)=\bigoplus_{0\leqslant|\lambda|\leqslant a}\Omega^*_{\{\lambda\}}(M,F).$$

记 $\Omega^*_{[0,a]}(M,F)^\perp$ 为 $\Omega^*_{[0,a]}(M,F)$ 关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_b$ 的正交补空间. 则 $(\Omega^*_{[0,a]}(M,F),d^F)$ 构成一个有限维的复形, 其上同调群等于 $(\Omega^*(M,F),d^F)$ 的上同调群. 此外, 对称双线性型 $\langle\cdot,\cdot\rangle_b$ 诱导了 $\Omega^i_{[0,a]}(M,F)$, $0\leqslant i\leqslant n$, 上的对称双线性型. 从而得到了 $\det H^*(\Omega^*_{[0,a]}(M,F),d^F)=\det H^*(\Omega^*(M,F),d^F)$ 上的对称双线性挠率 $b_{\det H^*(\Omega^*_{[0,a]}(M,F),d^F)}$.

对于 $0\leqslant i\leqslant n$, 记 $D^2_{b,i}$ 为 D_b^2 在 $\Omega^i(M,F)$ 上的限制. 则以下正则 zeta 行列式是良好定义的 (参见文献 [12]):

$$\det{}'(D^2_{b,(a,+\infty),i})=\exp\left(-\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0}\mathrm{Tr}[(D^2_{b,i}|_{\Omega^*_{[0,a]}(M,F)^\perp})^{-s}]\right).$$

定义 5.1 (参见文献 [36, 定义 2.3]) 对称双线性型

$$b_{\det H^*(\Omega^*_{[0,a]}(M,F),d^F)}\prod_{i=0}^{n}(\det'(D^2_{b,(a,+\infty),i}))^{(-1)^i i}$$

通过典则同构可以看作是 $\det H^*(M,F)$ 上的对称双线性型, 称为 $\det H^*(M,F)$ 的 Ray-Singer 对称双线性挠率, 记为 $b^{\mathrm{RS}}_{(M,F,g^{TM},b^F)}$.

记 g'^{TM} 为 M 上的另一个度量, ∇'^{TM} 是相应的 Levi-Civita 联络. 记 b'^F 是 F 上的另一个非退化的对称双线性型. Burghelea 和 Haller 证明了以下反变公式.

定理 5.1 (参见文献 [12, 定理 4.2]) 假设 b^F 和 b'^F 在 F 的非退化的对称双线性型中是同伦的, 则以下等式成立:

$$\begin{aligned}\frac{b^{\mathrm{RS}}_{(M,F,g'^{TM},b'^F)}}{b^{\mathrm{RS}}_{(M,F,g^{TM},b^F)}}&=\exp\left(\int_M\log(\det((b^F)^{-1}b'^F))e(TM,\nabla^{TM})\right)\\&\quad\times\exp\left(-\int_M\theta(F,b'^F)\widetilde{e}(TM,\nabla^{TM},\nabla'^{TM})\right).\end{aligned}\tag{5.5}$$

对于 Ray-Singer 对称双线性挠率 $b^{\mathrm{RS}}_{(M,F,g^{TM},b^F)}$ 和 Milnor 对称双线性挠率 $b^{\mathcal{M}}_{(M,F,b^F,-X)}$, 有以下 Cheeger-Müller 定理.

定理 5.2 (参见文献 [36, 定理 3.1]) 以下等式在 $\mathbb{C}$ 中成立:

$$\frac{b^{\mathrm{RS}}_{(M,F,g^{TM},b^F)}}{b^{\mathcal{M}}_{(M,F,b^F,-X)}}=\exp\left(-\int_M\theta(F,b^F)X^*\psi(TM,\nabla^{TM})\right).\tag{5.6}$$

假设 $\chi(M)=0$, $\alpha\in\Omega^{n-1}(M,\mathbb{C})$ 使得 $d\alpha=e(TM,\nabla^{TM})$, 则 Burghelea-Haller 对称双线性挠率定义为

$$\tau^{\mathrm{an}}_{F,g^{TM},b^F,\alpha}=b^{\mathrm{RS}}_{(M,F,g^{TM},b^F)}\cdot\exp\left(\int_M\theta(F,b^F)\wedge\alpha\right).\tag{5.7}$$

上述取定的 α 与度量 g^{TM} 定义了一个余 Euler 结构 $\mathfrak{e}^*=[g^{TM},\alpha]\in\mathfrak{Eul}^*(M,\mathbb{C})$, 则 $\tau^{\mathrm{an}}_{F,g^{TM},b^F,\alpha}$ 只依赖余 Euler 结构 $\mathfrak{e}^*$, 不依赖代表元 (g^{TM},α) 的选取. 记 $\tau^{\mathrm{an}}_{F,g^{TM},b^F,\alpha}$ 为 $\tau^{\mathrm{an}}_{F,\mathfrak{e}^*,b^F}$.

设 $\mathfrak{e}$ 是一个 Euler 结构, 取 $\mathfrak{e}$ 的对偶的余 Euler 结构 $P(\mathfrak{e})=[g^{TM},\alpha]$, 则有 (参见文献 [12])

$$\int_{M\setminus B}\theta(F,b^F)\wedge(X^*\psi(TM,\nabla^{TM})-\alpha)=\int_c\theta(F,b^F).\tag{5.8}$$

则由 (3.7)、定理 5.2、(5.7) 和 (5.8), 可得 (参见文献 [36, 定理 10.1])

$$\tau^{\mathrm{an}}_{F,P(\mathfrak{e}),b^F}=\tau^{\mathrm{comb}}_{F,\mathfrak{e}}.\tag{5.9}$$

设 g^F 是 F 上的 Hermite 度量, 则用 g^F 代替 b^F, 我们构造 Ray-Singer 解析挠率作为 $\det H^*(M,F)$ 上的内积, 记为 $b^{\mathrm{RS}}_{(M,F,g^{TM},g^F)}$.

命题 5.2 (参见文献 [36, 命题 10.1]) 假设 M 是奇数维的, 则以下等式成立:

$$\left|\frac{b^{\mathrm{RS}}_{(M,F,g^{TM},b^F)}}{b^{\mathrm{RS}}_{(M,F,g^{TM},g^F)}}\right|=1.\tag{5.10}$$

5.2 Braverman-Kappeler 精细解析挠率

本小节介绍 Braverman-Kappeler 精细解析挠率 (参见文献 [7]). 设 M 是奇数维闭的定向光滑流形, 维数为 $d=2r-1$. 设 F 是 M 上的复的平坦向量丛, 平坦联络记为 ∇^F. 记 $d^F:\Omega^*(M,F)\to\Omega^{*+1}(M,F)$. 记 g^{TM} 为 Riemann 度量, 定义手性算子 Γ 为

$$\Gamma\omega:=\mathrm{i}^r(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}*\omega.$$

定义奇的符号算子为

$$\mathcal{B}=\Gamma d^F+d^F\Gamma:\Omega^*(M,F)\to\Omega^*(M,F).$$

记

$$\Omega^{\mathrm{even}}(M,F):=\bigoplus_{p=0}^{r-1}\Omega^{2p}(M,F),\quad \Omega^{\mathrm{odd}}(M,F):=\bigoplus_{p=1}^{r}\Omega^{2p-1}(M,F),$$
$$\mathcal{B}_{\mathrm{even}}=\mathcal{B}|_{\Omega^{\mathrm{even}}(M,F)},\quad \mathcal{B}_{\mathrm{odd}}=\mathcal{B}|_{\Omega^{\mathrm{odd}}(M,F)}.$$

对于 $k=0,\dots,d$, 算子 $\mathcal{B}^2$ 保持 $\Omega^*(M,F)$ 的 $\mathbb{Z}$- 分次. 假设 $\mathcal{I}$ 是区间 $[0,\lambda]$, $(\lambda,\mu]$ 或者 $(\lambda,+\infty)$ 的一种. 记 $\Pi_{\mathcal{B}^2,\mathcal{I}}$ 是 $\mathcal{B}^2$ 对于区间 $\mathcal{I}$ 的谱投影算子. 记

$$\Omega^*_{\mathcal{I}}(M,F):=\Pi_{\mathcal{B}^2,\mathcal{I}}(\Omega^*(M,F))\subset\Omega^*(M,F).$$

对于 $k=0,\dots,d$, 记

$$\Omega^k_{+,\mathcal{I}}(M,F):=\mathrm{Ker}(d^F\Gamma)\cap\Omega^k_{\mathcal{I}}(M,F),$$
$$\Omega^k_{-,\mathcal{I}}(M,F):=\mathrm{Ker}(\Gamma d^F)\cap\Omega^k_{\mathcal{I}}(M,F),$$
$$\Omega^{\mathrm{even}}_{\pm,\mathcal{I}}(M,F)=\bigoplus_{p=0}^{r-1}\Omega^{2p}_{\pm,\mathcal{I}}(M,F).$$

记 $\mathcal{B}^{\mathcal{I}}_{\mathrm{even}}$ 是 $\mathcal{B}$ 在 $\Omega^{\mathrm{even}}_{\mathcal{I}}$ 上的限制, 则

$$\mathcal{B}^{\mathcal{I}}_{\mathrm{even}}:\Omega^{\mathrm{even}}_{\pm,\mathcal{I}}(M,F)\to\Omega^{\mathrm{even}}_{\pm,\mathcal{I}}(M,F).$$

因为 d^F 和 $\mathcal{B}$ 是交换的, 所以 $\Omega^*_{\mathcal{I}}(M,F)$ 是 $\Omega^*(M,F)$ 的子复形. 我们有

$$\Omega^*(M,F)=\Omega^*_{[0,\lambda]}(M,F)\oplus\Omega^*_{(\lambda,\infty)}(M,F).$$

记 $\Gamma_{\mathcal{I}}$ 为 Γ 在 $\Omega^*_{\mathcal{I}}(M,F)$ 上的限制. 则对于有限维复形 $(\Omega^*_{[0,\lambda]}(M,F),d^F)$, 由文献 [7, 定义 4.3], 有挠率

$$\rho_{\Gamma_{[0,\lambda]}}=\rho_{\Gamma_{[0,\lambda]}}(d^F,g^{TM})\in\det H^*_{[0,\lambda]}(M,F).$$

由 $H^*_{[0,\lambda]}(M,F)$ 和 $H^*(M,F)$ 的典则同构, 我们将 $\rho_{\Gamma_{[0,\lambda]}}$ 看作是 $\det H^*(M,F)$ 中的元.

设 $\theta\in(-\pi,0)$ 是算子 $\mathcal{B}_{\mathrm{even}}$ 的 Agmon 角, 由文献 [7, 命题 7.8] 知

$$\rho(d^F,g^{TM}):=\mathrm{Det}_{\mathrm{gr},\theta}(\mathcal{B}^{(\lambda,\infty)}_{\mathrm{even}})\cdot\rho_{\Gamma_{[0,\lambda]}}\in\det H^*(M,F)$$

不依赖于 θ 和 λ 的选取.

为了给出精细解析挠率的定义, 我们简单介绍非自伴算子的 η- 不变量的定义.

定义 5.2 (参见文献 [7, 定义 6.16]) 设 E 是 M 上的 Hermite 向量丛, $D: C^\infty(M,E)\to C^\infty(M,E)$ 是 m 阶椭圆微分算子, $m\geqslant 1$ 且 D 的主特征是自伴的. 设 θ 是 D 的 Agmon 角. 记 $\Pi_>$ 和 $\Pi_<$ 分别是到 D 的所有实部大于零与实部小于零的广义特征空间的投影. 定义 D 的 η- 函数为

$$\eta_\theta(s,D)=\zeta_\theta(s,\Pi_>,D)-\zeta_\theta(s,\Pi_<,-D).$$

关于 $\zeta_\theta(s,\Pi_>,D)$ 和 $\zeta_\theta(s,\Pi_<,D)$ 的定义参见文献 [7, (6-5)].

$\eta_\theta(s,D)$ 可以亚纯延拓到整个复平面 $\mathbb{C}$, 并且在 0 点是正则的. $\eta_\theta(0,D)$ 不依赖于 Agmon 角 θ 的选取, 记为 $\eta(0,D)$.

记 $m_+(D)$ 和 $m_-(D)$ 分别是 D 在正的虚半轴和负的虚半轴上的特征值个数 (记重数). 记 $m_0(D)$ 为 0 作为 D 的特征值的重数.

定义 5.3 (参见文献 [7, 定义 6.17]) D 的 η- 不变量定义为

$$\eta(D)=\frac{1}{2}(\eta(0,D)+m_+(D)-m_-(D)+m_0(D)).$$

记 $\mathcal{B}_{\mathrm{trivial}}=\mathcal{B}_{\mathrm{trivial}}(g^{TM}):\Omega^{\mathrm{even}}(M)\to\Omega^{\mathrm{even}}(M)$ 是相应于度量 g^{TM} 的奇的符号算子的偶的部分. 记

$$\eta_{\mathrm{trivial}}(g^{TM})=\frac{1}{2}\eta(0,\mathcal{B}_{\mathrm{trivial}}(g^{TM})).$$

定义 5.4 (参见文献 [7, 定义 9.8]) 精细解析挠率定义为

$$\rho_{\mathrm{an}}=\rho_{\mathrm{an}}(d^F):=\rho(d^F,g^{TM})\cdot\exp\left(\mathrm{i}\pi(\mathrm{rank}F)\eta_{\mathrm{trivial}}(g^{TM})\right).$$

精细解析挠率与 Ray-Singer 解析挠率有以下关系.

定理 5.3 (参见文献 [7, 定理 11.3]) 记 $\|\cdot\|^{\mathrm{RS}}_{\det H^*(M,F)}$ 是 $\det H^*(M,F)$ 的 Ray-Singer 度量, 则

$$\|\rho_{\mathrm{an}}\|^{\mathrm{RS}}_{\det H^*(M,F)}=\exp(\pi\mathrm{Im}(\eta(d^F,g^{TM}))),$$

其中

$$\eta(d^F,g^{TM})=\eta(\mathcal{B}_{\mathrm{even}}(d^F,g^{TM})).$$

精细解析挠率与 Ray-Singer 对称双线性挠率有以下关系.

定理 5.4 (参见文献 [6, 定理 1.2]) 设 M 是奇数维闭的定向 Riemann 流形. 设 F 是 M 上的复的平坦向量丛, 平坦联络记为 ∇^F. 假设 F 上有非退化的对称双线性型 b^F, 则有以下等式:

$$b^{\mathrm{RS}}_{(M,F,g^{TM},b^F)}(\rho_{\mathrm{an}})=\pm\exp(-2\pi\mathrm{i}(\eta(d^F,g^{TM})-(\mathrm{rank}F)\eta_{\mathrm{trivial}}(g^{TM}))).\tag{5.11}$$

5.3 Cappell-Miller 解析挠率

本小节介绍 Cappell-Miller 解析挠率 (参见文献 [14]). 设 M 是 n 维光滑的闭的定向 Riemann 流形, Riemann 度量记为 g^{TM}. 设 F 是 M 上复的平坦向量丛, 平坦联络为 ∇^F. 则有 de Rham 复形 $(\Omega^\bullet(M,F),d^F)$. Cappell 和 Miller[14] 定义了算子

$$d^{F,*}_{\flat}=(-1)^{np+n+1}(*\otimes\mathrm{Id}_F)d^F(*\otimes\mathrm{Id}_F):\Omega^p(M,F)\to\Omega^{p-1}(M,F).$$

由定义可知 $(d^{F,*}_{\flat})^2=0$.

Cappell 和 Miller 考虑如下 Laplace 算子:

$$\Delta_\flat^F = (d^F + d_\flat^{F,*})^2 = d^F d_\flat^{F,*} + d_\flat^{F,*} d^F.$$

$\Delta_\flat^F$ 是非自伴算子, 其主特征与 D^2 的主特征一样.

取 $K > 0$, 使其不是 $\Delta_\flat^F$ 的广义特征值的实部. 记 $S(p,K)$ 是 $\Delta_\flat^F$ 作用在 $\Omega^p(M,F)$ 上的所有实部大于 K 的广义特征值 (含重数) 的集合. 则 zeta 函数

$$\zeta_{p,F,K,g^{TM}}(s) = \sum_{\lambda_j \in S(p,K)} \frac{1}{\lambda_j^s}$$

对于 $\mathrm{Re}(s) > \frac{n}{2}$ 是有定义的. 由 Seeley 的方法可知, $\zeta_{p,F,K,g^{TM}}(s)$ 可以亚纯延拓到整个复平面且在 $s=0$ 是全纯的, 从而 $\zeta'_{p,F,K,g^{TM}}(0)$ 是有定义的. 类似 Ray-Singer 解析挠率, Cappell 和 Miller[14] 定义

$$\text{Ray-Singer}(F,K,g^{TM}) = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{n}(-1)^q q \zeta'(q,F,K,g^{TM})(0)\right).$$

记 $V(p,F,K,g^{TM})$ 是 $\Omega^p(M,F)$ 中 $\Delta_\flat^F$ 的实部小于 K 的广义特征值对应的广义特征向量构成的空间. 由于

$$\Delta_\flat^F d^F = d^F \Delta_\flat^F, \quad (* \otimes \mathrm{Id}_F)\Delta_\flat^F = \Delta_\flat^F (* \otimes \mathrm{Id}_F),$$

则复形

$$C^*(F,K,g^{TM}) := \bigoplus_{p=0}^{n} V(p,F,K,g^{TM})$$

有两个算子 d^F 和 $d_\flat^{F_*}$, 即有复形

$$(C^*(F,K,g^{TM}), d^F, d_\flat^{F_*}).$$

则由 (2.2) 有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{torsion}(C^*(F,K,g^{TM}), d^F, d_\flat^{F_*}) \\
&\quad \in \det H^*(C^*(F,K,g^{TM}), d^F) \otimes (\det H_*(C^*(F,K,g^{TM}), d_\flat^{F_*}))^{-1} \\
&\quad \cong \det H^*(M,F) \otimes (\det H^*(M,F))^{(-1)^{n+1}}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

定理 5.5 (参见文献 [14, 定理 8.3]) 定义

$$\tau_{\mathrm{an}}^{\mathrm{CM}}(M,F) := \mathrm{torsion}(C^*(F,K,g^{TM}), d^F, d_\flat^{F_*}) \cdot \text{Ray-Singer}(F,K,g^{TM})^2.$$

则 $\tau_{\mathrm{an}}^{\mathrm{CM}}(M,F)$ 不依赖于 $K > 0$ 以及度量 g^{TM} 的选取.

当流形 M 定向且维数 n 为奇数时, 由上同调群的 Poincaré 对偶可以得到如下同构:

$$\det H^*(M,F) \otimes (\det H^*(M,F))^{(-1)^{n+1}} \cong (\det H^*(M,F))^2 \cong \det H^*(M, F \oplus F^*). \tag{5.13}$$

利用文献 [4,36] 中的方法, Cappell 和 Miller 证明了以下 Cheeger-Müller 定理.

定理 5.6 (参见文献 [14, 定理 10.1]) 设 M 是一个奇数维闭的定向 Riemann 流形, 则

$$\tau_{\mathrm{an}}^{\mathrm{CM}}(M,F) = \tau_{\mathrm{comb}}^{\mathrm{CM}}(M,F) \in \det H^*(M, F \oplus F^*). \tag{5.14}$$

由文献 [8, 命题 4.2] 和 [8, 定理 5.1], 有

$$\tau_{\mathrm{an}}^{\mathrm{CM}}(M,F)=\exp(2\pi\mathrm{i}(\eta(d^F,g^{TM})-(\mathrm{rank}F)\eta_{\mathrm{trivial}}(g^{TM})))\rho_{\mathrm{an}}\otimes\rho_{\mathrm{an}}. \tag{5.15}$$

注 5.1 由 (5.9), (5.14) 和 (5.15) 可以看出 Burghelea-Haller 解析挠率、Braverman-Kappeler 精细解析挠率和 Cappell-Miller 解析挠率在某种程度上都给出了 Turaev 挠率的平方的解析解释, 但是如何给出 Turaev 挠率的解析解释仍然是一个公开的问题.

6 解析挠率形式

设 M 是光滑的定向闭流形, 设 F 是 M 上的复的平坦向量丛, 其平坦联络记为 ∇^F. 记 g^F 为 F 上的 Hermite 度量. 记

$$\omega(\nabla^F,g^F)=(g^F)^{-1}\nabla^F g^F, \tag{6.1}$$

则 $\omega(\nabla^F,g^F)$ 是取值在 $\mathrm{End}(F)$ 上的 1 次微分形式. 定义 $\varphi:\Lambda^\bullet(T^*M)\to\Lambda^\bullet(T^*M)$ 为

$$\varphi\alpha=(2\pi\mathrm{i})^{-\deg\alpha/2}\alpha. \tag{6.2}$$

设 h 是一个奇的全纯函数, 记

$$h(\nabla^F,g^F)=(2\pi\mathrm{i})^{1/2}\varphi\mathrm{Tr}[h(\omega(\nabla^F,g^F)/2)]. \tag{6.3}$$

则由文献 [3] 可知, $h(\nabla^F,g^F)$ 是闭形式且其同调类 $h(\nabla^F)$ 不依赖于 F 上 Hermite 度量 g^F 的选取.

设 $X\to M\xrightarrow{\pi}S$ 是一个光滑纤维丛, 纤维 $X_s=\pi^{-1}(s)$ 是闭的连通的. 为了简单起见, 假设 X 是定向的. 设 F 是 M 上的一个复的平坦丛, ∇^F 是平坦联络. 记 $H^*(X,F|_X)$ 是 S 上的复的平坦丛, 其 $s\in S$ 处的纤维同构于 $H^*(X_s,F|_{X_s})$. 记 $\nabla^{H^*(X,F|_X)}$ 是 $H^*(X,F|_X)$ 上的 Gauss-Manin 联络. 记 TX 是垂直切丛, $e(TX)\in H^{\dim X}(M)$ 是 TX 的 Euler 类.

定理 6.1 (参见文献 [3, 定理 3.17]) 以下等式在 $H^{\mathrm{odd}}(S,\mathbb{R})$ 中成立:

$$h(\nabla^{H^*(X,F|_X)})=\int_X e(TX)h(\nabla^F). \tag{6.4}$$

为了在微分形式的水平上建立等式 (6.4), Bismut 和 Lott [3] 定义了解析挠率形式. 记 T^HM 是纤维丛的水平分布, 即 T^HM 是 TM 的一个子丛, 使得

$$TM=T^HM\oplus TX.$$

假设纤维丛 M 上有垂直的 Riemann 度量 g^{TX}, F 上有 Hermite 度量 g^F. 记 $*$ 是由 g^{TX} 定义的 Hodge 星号算子. 记 W 是 S 上无穷维 $\mathbb{Z}$- 分次的向量丛, 其在 $s\in S$ 上的纤维是 $C^\infty(X_s,(\Lambda(T^*X)\otimes F)|_{X_s})$. 则 W 上有 Hermite 度量 h^W 使得对于 $u,u'\in C^\infty(B,W)$ 和 $s\in B$, 有

$$(\langle u,u'\rangle_{h^W})(s)=\int_{X_s}\langle u(s)\wedge *u'(s)\rangle_{g^F}. \tag{6.5}$$

记 d^M 是 $\Omega^*(M,F)$ 上的外微分算子, $(d^M)^*$ 是 d^M 相对于 (6.5) 的伴随算子. 记 N 是 W 上的数字算子, 即 N 作用在 $C^\infty(M,\Lambda^k(T^*X)\otimes F)$ 上为乘以 k. 记

$$f(a)=a\exp(a^2).$$

对于 $t>0$, Bismut 和 Lott [3] 定义

$$C'_t = t^{N/2} d^M t^{-N/2},$$
$$C''_t = t^{-N/2} (d^M)^* t^{N/2},$$
$$C_t = \frac{1}{2}(C''_t + C'_t),$$
$$D_t = \frac{1}{2}(C''_t - C'_t)$$

以及

$$f(C'_t, h^W) = (2\mathrm{i}\pi)^{1/2} \varphi \mathrm{Tr}_s[f(D_t)], \quad f^\wedge(C'_t, h^W) = \varphi \mathrm{Tr}_s\left[\frac{N}{2} f'(D_t)\right].$$

记

$$\chi'(X,F) = \sum_{j=0}^{\dim(X)} (-1)^j j \mathrm{rk}(H^j(X, F|_X)).$$

定义 6.1 (参见文献 [3, 定义 3.22]) 解析挠率形式 $\mathcal{T}(T^H M, g^{TX}, g^F) \in \Omega(S)$ 定义为

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}(T^H M, g^{TX}, g^F)\\ &= -\int_0^{+\infty} \left[f^\wedge(C'_t, h^W) - \frac{\chi'(X,F)}{2} f'(0) - \left(\frac{\dim X \mathrm{rk}(F)\chi(Z)}{4} - \frac{\chi'(X,F)}{2} \right) f'\left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{t}}{2}\right) \right].\end{aligned} \tag{6.6}$$

由文献 [3, 定理 3.29] 可知, $\mathcal{T}(T^H M, g^{TX}, g^F)$ 的 0 次部分就是 Ray-Singer 解析挠率.

一个自然的问题是, 如何定义复值的解析挠率形式. 假设 F 上存在非退化的对称双线性型 b^F, 类似地可以在 W 上定义非退化的对称双线性型

$$(\langle u, u' \rangle_{b^W})(s) = \int_{X_s} \langle u(s) \wedge * u'(s) \rangle_{b^F}.$$

这种情况的问题在于 $\Omega^*_{\{0\}}(X, F|_X)$ 一般不是 S 上的丛, 所以不能直接按照 Bismut 和 Lott 的方法定义复值的解析挠率形式.

假设 M 上存在沿纤维的 Morse 函数 $\mathcal{F}: M \to \mathbb{R}$, 并且相对于 g^{TX} 梯度向量场 $Y = -\nabla \mathcal{F}$ 满足 Smale 横截性条件. 对于 $T \in \mathbb{R}$, 定义 $b^F_T = \mathrm{e}^{-2T\mathcal{F}} b^F$. 则 b^F_T 是 F 上的非退化的对称双线性型. 由 g^{TX} 和 b^F_T 可以定义 W 上的非退化双线性型 b^W_T. 对于充分大的 $T>0$, $\Omega^*_{T,[0,1]}(X, F|_X)$ (参见文献 [35, 定义 2.5]) 是 S 上的丛, Su [35] 将 Bismut-Lott 指标定理推广到了复值的情形. 对于复值解析挠率形式, 这也是一种可能的方法. 通过文献 [3, 定理 3.24] 可以看出这样定义的复值解析挠率形式依赖于所取的充分大的 T. 另一种可能的方法是按照 Cappell 和 Miller 的方法定义复值解析挠率形式, 则由文献 [3, 定理 3.24] 可以看出其可能不依赖于所取的充分大的 T.

致谢 作者衷心感谢审稿人提出的宝贵建议.

参考文献

1 Bismut J M, Gillet H, Soulé C. Analytic torsion and holomorphic determinant bundles I. Bott-Chern forms and analytic torsion. Comm Math Phys, 1988, 115: 49–78

2 Bismut J M, Gillet H, Soulé C. Complex immersions and Arakelov geometry. In: The Grothendieck Festschrift, vol. I. Progress in Mathematics. Boston: Birkhäuser, 1990, 249–331

3 Bismut J M, Lott J. Flat vector bundles, direct images and higher real analytic torsion. J Amer Math Soc, 1995, 8: 291–363
4 Bismut J M, Zhang W P. An extension of a theorem of Cheeger and Müller. Astérisque, 1992, 205: 1–248
5 Bismut J M, Zhang W P. Milnor and Ray-Singer metrics on the equivariant determinant of a flat vector bundle. Geom Funct Anal, 1994, 4: 136–212
6 Braverman M, Kappeler T. Comparison of the refined analytic and the Burghelea-Haller torsions. Ann Inst Fourier (Grenoble), 2007, 57: 2361–2387
7 Braverman M, Kappeler T. Refined analytic torsion as an element of the determinant line. Geom Topol, 2007, 11: 139–213
8 Braverman M, Kappeler T. A canonical quadratic form on the determinant line of a flat vector bundle. Int Math Res Not IMRN, 2008, 2008: rnn030
9 Braverman M, Kappeler T. Refined analytic torsion. J Differential Geom, 2008, 78:193–267
10 Brüning J, Ma X N. An anomaly formula for Ray-Singer metrics on manifolds with boundary. Geom Funct Anal, 2006, 16: 767–837
11 Brüning J, Ma X N. On the gluing formula for the analytic torsion. Math Z, 2013, 273: 1085–1117
12 Burghelea D, Haller S. Complex-valued Ray-Singer torsion. J Funct Anal, 2007, 248: 27–78
13 Burghelea D, Haller S. Complex valued Ray-Singer torsion II. Math Nachr, 2010, 283: 1372–1402
14 Cappell S E, Miller E Y. Complex-valued analytic torsion for flat bundles and for holomorphic bundles with $(1,1)$ connections. Comm Pure Appl Math, 2010, 63: 133–202
15 Cheeger J. Analytic torsion and the heat equation. Ann of Math (2), 1979, 109: 259–322
16 Dai X Z, Fang H. Analytic torsion and R-torsion for manifolds with boundary. Asian J Math, 2000, 4: 695–714
17 Farber M, Turaev V. Poincaré-Reidemeister metric, Euler structures, and torsion. J Reine Angew Math, 2000, 520: 195–225
18 Franz W. Über die Torsion einer Überdeckung. J Reine Angew Math, 1935, 173: 245–254
19 Hassell A. Analytic surgery and analytic torsion. Comm Anal Geom, 1998, 6: 255–289
20 Huang R T. Cappell-Miller analytic torsion for manifolds with boundary. Proc Amer Math Soc, 2010, 138: 3733–3747
21 Knudsen F, Mumford D. The projectivity of the moduli space of stable curves. I: Preliminaries on "det" and "Div". Math Scand, 1976, 39: 19–55
22 Lück W. Analytic and topological torsion for manifolds with boundary and symmetry. J Differential Geom, 1993, 37: 263–322
23 Mathai V, Quillen D. Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms. Topology, 1986, 25: 85–110
24 Molina O M. Anomaly formulas for the complex-valued analytic torsion on compact bordisms. Differential Geom Appl, 2013, 31: 416–436
25 Müller W. Analytic torsion and R-torsion of Riemannian manifolds. Adv Math, 1978, 28: 233–305
26 Müller W. Analytic torsion and R-torsion for unimodular representations. J Amer Math Soc, 1993, 6: 721–753
27 Ray D B, Singer I M. R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds. Adv Math, 1971, 7: 145–210
28 Reidemeister K. Homotopieringe und Linsenräume. Abh Math Semin Univ Hambg, 1935, 11: 102–109
29 Seeley R T. Complex powers of an elliptic operator. Proc Sympos Pure Appl Math, 1967, 10: 288–307
30 Smale S. On gradient dynamical systems. Ann of Math (2), 1961, 74: 199–206
31 Smale S. Differentiable dynamical systems. Bull Amer Math Soc (NS), 1967, 73: 747–817
32 Su G X. Burghelea-Haller analytic torsion for manifolds with boundary. Proc Amer Math Soc, 2009, 137: 4295–4306
33 Su G X. A Cheeger-Müller theorem for symmetric bilinear torsions on manifolds with boundary. Sci China Math, 2015, 58: 423–446
34 Su G X. A Cheeger-Müller theorem for Cappell-Miller torsions on manifolds with boundary. Manuscripta Math, 2016, 149, 369–388
35 Su G X. Complex valued Bismut-Lott index theorem. Acta Math Sin (Engl Ser), 2020, 36: 1221–1231
36 Su G X, Zhang W P. A Cheeger-Müller theorem for symmetric bilinear torsions. Chin Ann Math Ser B, 2008, 29: 385–424
37 Turaev V G. Reidemeister torsion in knot theory. Uspekhi Mat Nauk, 1986, 41: 97–147
38 Turaev V G. Euler structures, nonsingular vector fields, and torsions of Reidemeister type. Math USSR Izv, 1990, 34: 627–662
39 Vertman B. Refined analytic torsion on manifolds with boundary. Geom Topol, 2009, 13: 1989–2027
40 Vishik S M. Generalized Ray-Singer conjecture I: A manifold with a smooth boundary. Comm Math Phys, 1995, 167: 1–102
41 Witten E. Supersymmetry and Morse theory. J Differential Geom, 1982, 17: 661–692

42 Zhang W P. Lectures on Chern-Weil theory and Witten Deformations. Nankai Tracts in Mathematics, vol. 4. Singapore: World Sci Publ, 2001

The Ray-Singer analytic torsion and complex-valued analytic torsions

Guangxiang Su

Abstract We survey the Ray-Singer analytic torsion, complex-valued analytic torsions, their properties and the relations between them and the topological torsion.

Keywords **analytic torsion, topological torsion, Cheeger-Müller theorem**

MSC(2020) **19K56, 58J52, 57Q10**

doi: 10.1360/SSM-2025-0336