中国科学: 数学 2023 年 第 53 卷 第 12 期: 1561 ∼ 1568
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

L^p- 空间中的正多线性可和算子

献给刘培德教授 80 华诞

卜庆营[1*], 刘锐[2], 申杰[2]

1. Department of Mathematics, The University of Mississippi, Oxford, MS 38677, USA;
2. 南开大学数学科学学院, 天津 300071
E-mail: qbu@olemiss.edu, ruiliu@nankai.edu.cn, 1710064@mail.nankai.edu.cn

收稿日期: 2023-01-13; 接受日期: 2023-04-30; 网络出版日期: 2023-05-25; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12071230, 11971348 和 11671214) 和南开大学百名青年学科带头人计划 (批准号: ZB22000105, 63223027, 91923104, 91823003 和 63174012) 资助项目

摘要 本文证明, 当 $1 \leqslant q \leqslant 2$ 时 L^q- 空间上的正多线性 2- 可和算子都是正多线性 1- 可和的. 若 $1 < p, q < \infty$ 满足 $1/p + 1/q = 1$, 则 L^q- 空间上的正多线性 p- 可和算子都是正多线性 1- 可和的; 进一步地, 若像空间有 Radon-Nikodym 性质, 则 L^q- 空间上的多线性算子是正多线性 p- 可和的当且仅当其能表示为 L^p- 空间上的函数.

关键词 L^p- 空间 多重线性算子 正 p- 可和算子

MSC (2020) 主题分类 46G25, 47H60

1 引言

对于从 Banach 格映射到 Banach 空间的正 p- 可和 (线性) 算子, Schaefer [13] 考虑了当 $p = 1$ 时的特殊情形 (被称为锥绝对可和); Blasco [2–5] 介绍并研究了更一般的情形. Labuschagne [8] 研究了正 p- 可和算子与张量积之间的关系. Achour 和 Belacel [1] 引入并研究了强正 (q, p)- 可和算子. 同时文献 [10–12, 14] 也研究了正 p- 可和算子.

近期, Bu 和 Labuschagne [6] 引入并研究了 Banach 格到 Banach 空间的正多线性 p- 可和算子. 本文讨论 L^q- 空间上的正多线性 p- 可和算子, 并证明了如果 $1 \leqslant p_1, \ldots, p_n \leqslant 2$, 则对于任意 Banach 空间 X, 从 $L^{p_1}(\mu_1) \times \cdots \times L^{p_n}(\mu_n)$ 映射到 X 的所有正 n 线性 2- 可和算子都是正多线性 1- 可和的; 并且如果 $1 < p, q < \infty$ 满足 $1/p + 1/q = 1$, 则对于任意 Banach 空间 X, 从 $L^q(\mu_1) \times \cdots \times L^q(\mu_n)$ 映射到 X 的所有正 n 线性 p- 可和算子都是正多线性 1- 可和的. 此外, 如果 Banach 空间 X 还具有 Radon-Nikodym 性质, 则 n 重线性算子 $T : L^q(\mu_1) \times \cdots \times L^q(\mu_n) \to X$ 是正多线性 p- 可和的, 当且仅

英文引用格式: Bu Q Y, Liu R, Shen J. Positive multiple summing multilinear operators on L^p-spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 1561–1568, doi: 10.1360/SSM-2023-0010

© 2023《中国科学》杂志社

当它可由 $L^p(\mu_1\times\cdots\times\mu_n,X)$ 中的函数 g 表示 (详细定义将在后面给出). 这些结论都是 Blasco [3] 研究 $L^q(\mu)$ 到 X 的正 p- 可和线性算子结果的推广.

设 X 是一个 Banach 空间, 记 X^* 为其对偶空间, B_X 为其闭单位球. 设 E 为一个 Banach 格, 记 E^+ 为其正锥. 在本文中, X 表示一个 Banach 空间而 $E,E_1,\ldots,E_n,F_1,\ldots,F_n$ 表示 Banach 格. 设 $1\leqslant p<\infty$ 并且 $(x_i)_1^m\subseteq E$, 定义

$$\|(x_i)_1^m\|_{w_p(E)}:=\sup\left\{\left(\sum_{i=1}^m|x^*(x_i)|^p\right)^{1/p}:x^*\in B_{E^*}\right\}. \tag{1.1}$$

若 $1<p,q<\infty$ 且满足 $1/p+1/q=1$, 定义

$$\|(x_i)_1^m\|_{w_p(E)}=\sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^m a_ix_i\right\|_E:(a_i)_1^m\in B_{\ell_q}\right\}. \tag{1.2}$$

特别地, 若 $(x_i)_1^m\subseteq E^+$, 则可以得到

$$\|(x_i)_1^m\|_{w_1(E)}=\left\|\sum_{i=1}^m x_i\right\|_E. \tag{1.3}$$

这里给出一些常用定义, 若存在常数 $K>0$, 使得对于任意有限序列 $(x_i^j)_{i=1}^{m_j}\subseteq E_j^+$ $(1\leqslant j\leqslant n)$, 都有

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{m_1,\ldots,m_n}\|T(x_{i_1}^1,\ldots,x_{i_n}^n)\|^p\right)^{1/p}\leqslant K\cdot\prod_{j=1}^n\|(x_i^j)_{i=1}^{m_j}\|_{w_p(E_j)}, \tag{1.4}$$

则称 n 重线性算子 $T:E_1\times\cdots\times E_n\to X$ 为正多线性 p- 可和. 此时, 若 T 是正多线性 p- 可和的, 则定义 T 的正多线性 p- 可和范数为

$$\Lambda_p(T)=\inf\{K:K\text{ 满足不等式 (1.4)}\}. \tag{1.5}$$

则正 n 线性 p- 可和算子全体 $\Lambda_p^{\mathrm{mult}}(E_1,\ldots,E_n;X)$ 赋予 Λ_p 范数构成一个 Banach 空间 (参见文献 [6]).

2 主要结论及证明

文献 [6] 提及了一个包含性质.

命题 2.1 [6] 设 $1\leqslant p<\infty$, 则

$$\Lambda_1^{\mathrm{mult}}(E_1,\ldots,E_n;X)\subseteq\Lambda_p^{\mathrm{mult}}(E_1,\ldots,E_n;X).$$

为了得到反向的包含性质, 需要用到下面的正可和算子的 Piestch 控制定理 (参见文献 [14] 或 [1]).

命题 2.2 [14] 设 $1\leqslant p<\infty$ 且 T 为从 E 到 X 的连续线性算子. 则 T 为正 p- 可和的当且仅当存在 $B_{E^*}^+$ 上的关于弱 $*$ 拓扑的概率测度 μ 以及正的常数 K, 使得

$$\|T(x)\|\leqslant K\left(\int_{B_{E^*}^+}(x^*(x))^p\,d\mu(x^*)\right)^{1/p} \tag{2.1}$$

对于任意 $x\in E^+$ 均成立. 进一步地, 此时还满足

$$\Lambda_p(T)=\inf\{K:K\text{ 满足不等式 (2.1)}\}.$$

Matos [9] 给出了多个多线性可和算子的乘法性质. 由上述正可和算子的 Piestch 控制定理, 并利用 Matos 对文献 [9, 定理 2.16] 的证明, 得到正多线性可和算子的下列乘法性质.

命题 2.3 (乘法性质) 设 $1<p,q,r<\infty$ 满足 $1/r=1/p+1/q$. 若 $S\in\Lambda_p^{\mathrm{mult}}(F_1,\dots,F_n;X)$ 且对于任意 $j=1,\dots,n$, 都有 $T_j\in\Lambda_q(E_j;F_j)^+$, 则 $S\circ(T_1,\dots,T_n)\in\Lambda_r^{\mathrm{mult}}(E_1,\dots,E_n;X)$, 并且

$$\Lambda_r(S\circ(T_1,\dots,T_n))\leqslant\Lambda_p(S)\cdot\prod_{j=1}^n\Lambda_q(T_j). \tag{2.2}$$

为了证明下列反向包含性质, 这里回顾一些关于 c_0 的基本性质:

(i) 若 $(e_i)_1^\infty$ 是 c_0 的单位坐标基, 则对于任意 $m\in\mathbb{N}$ 都有 $\|(e_i)_1^m\|_{w_1(c_0)}=1$;

(ii) 若 $(x_i)_1^m\subseteq X$, 则线性算子 $T:c_0\to X$, 其中

$$T((a_i)_1^\infty)=\sum_{i=1}^m a_ix_i,\quad\forall\,(a_i)_1^\infty\in c_0,$$

满足 $\|T\|=\|(x_i)_1^m\|_{w_1(X)}$.

定理 2.1 若 Banach 格 $E_1,\dots,E_n$ 具有 2 余型, 则对于任意的 Banach 空间 X, 都有

$$\Lambda_2^{\mathrm{mult}}(E_1,\dots,E_n;X)\subseteq\Lambda_1^{\mathrm{mult}}(E_1,\dots,E_n;X),$$

并且

$$\Lambda_1(\cdot)\leqslant\Lambda_2(\cdot)\cdot B_4^{2n}\cdot\prod_{j=1}^n C_2(E_j)^2, \tag{2.3}$$

其中, B_4 为 Khinchin 不等式中的常数, 且对于任意 $j=1,\dots,n$, $C_2(E_j)$ 是 E_j 的 2 余型的常数.

证明 取 $S\in\Lambda_2^{\mathrm{mult}}(E_1,\dots,E_n;X)$ 以及 $(x_i^j)_{i=1}^{m_j}\subseteq E_j^+$, 其中 $1\leqslant j\leqslant n$. 定义正线性算子 $T_j:c_0\to E_j$ 如下:

$$T_j((a_i)_{i=1}^\infty)=\sum_{i=1}^{m_j}a_ix_i^j,\quad\forall\,(a_i)_{i=1}^\infty\in c_0.$$

由文献 [7, 定理 11.14] 可得 T_j 是 2- 可和的, 从而 T_j 是正 2- 可和的并且

$$\Lambda_2(T_j)\leqslant\pi_2(T_j)\leqslant B_4^2\cdot C_2(E_j)^2\cdot\|T_j\|=B_4^2\cdot C_2(E_j)^2\cdot\|(x_i^j)_{i=1}^{m_j}\|_{w_1(E_j)}.$$

由命题 2.3 可得 $S\circ(T_1,\dots,T_n)\in\Lambda_1^{\mathrm{mult}}(c_0,\dots,c_0;X)$ 并且

$$\Lambda_1(S\circ(T_1,\dots,T_n))\leqslant\Lambda_2(S)\cdot\prod_{j=1}^n\Lambda_2(T_j).$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{m_1,\dots,m_n}\|S(x_{i_1}^1,\dots,x_{i_n}^n)\|&=\sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{m_1,\dots,m_n}\|S(T_1(e_{i_1}),\dots,T_n(e_{i_n}))\|\\&\leqslant\Lambda_1(S\circ(T_1,\dots,T_n))\cdot\prod_{j=1}^n\|(e_i)_{i=1}^{m_j}\|_{w_1(c_0)}\end{aligned}$$

$$\leqslant \Lambda_2(S)\cdot\prod_{j=1}^{n}\Lambda_2(T_j)$$
$$\leqslant \Lambda_2(S)\cdot\prod_{j=1}^{n}B_4^2\cdot C_2(E_j)^2\cdot\|(x_i^j)_{i=1}^{m_j}\|_{w_1(E_j)}.$$

因此, $S\in\Lambda_1^{\mathrm{mult}}(E_1,\ldots,E_n;X)$ 并且

$$\Lambda_1(S)\leqslant\Lambda_2(S)\cdot B_4^{2n}\cdot\prod_{j=1}^{n}C_2(E_j)^2.$$

证毕. □

对于任意 $j=1,\ldots,n$, 假设 $(\Omega_j,\mathcal{A}_j,\mu_j)$ 是一个有限测度空间. $L^p(\mu_1\times\cdots\times\mu_n,X)$ 表示所有满足

$$\|f\|_p=\left(\int_{\Omega_1\times\cdots\times\Omega_n}\|f(t_1,\ldots,t_n)\|^p\,d\mu_1\times\cdots\times\mu_n\right)^{1/p}<\infty \tag{2.4}$$

的 $\Omega_1\times\cdots\times\Omega_n$ 上的可测函数 f 全体. 简记 $L^p(\mu_1\times\cdots\times\mu_n,\mathbb{R})$ 为 $L^p(\mu_1\times\cdots\times\mu_n)$. 注意到, 对于任意 $1\leqslant p\leqslant 2$, L^p- 空间具有 2 余型. 由命题 2.1 和定理 2.1, 得到以下推论.

推论 2.1 若 $1\leqslant p_1,\ldots,p_n\leqslant 2$, 则对于任意 Banach 空间 X, 都有

$$\Lambda_2^{\mathrm{mult}}(L^{p_1}(\mu_1),\ldots,L^{p_n}(\mu_n);X)=\Lambda_1^{\mathrm{mult}}(L^{p_1}(\mu_1),\ldots,L^{p_n}(\mu_n);X).$$

为了证明下一个定理, 注意到在一个有限测度空间 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 中, 若 $(A_i)_1^m$ 为不交的可测集族, 则由 (1.2) 可得, 对于任意 $1<p,q<\infty$, 若 $1/p+1/q=1$, 则

$$\|(\mu(A_i)^{-1/q}\chi_{A_i})_{i=1}^m\|_{w_p(L^q(\mu))}=1. \tag{2.5}$$

定理 2.2 若 $1<p,q<\infty$ 满足 $1/p+1/q=1$, 则对于任意 Banach 空间 X, 都有

$$\Lambda_p^{\mathrm{mult}}(L^q(\mu_1),\ldots,L^q(\mu_n);X)=\Lambda_1^{\mathrm{mult}}(L^q(\mu_1),\ldots,L^q(\mu_n);X).$$

证明 这里只证明 $n=2$ 的情形, 其余情形同理可得. 取 $T\in\Lambda_p^{\mathrm{mult}}(L^q(\mu_1),L^q(\mu_2);X)$. 定义算子 $G:\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2\to X$ 如下:

$$G(A,B)=T(\chi_A,\chi_B),\quad\forall\,A\in\mathcal{A}_1,\quad\forall\,B\in\mathcal{A}_2. \tag{2.6}$$

于是 G 关于每个变量可数可加. 对于 A 的任意分划 $(A_i)_1^m$ 及 B 的任意分划 $(B_j)_1^k$, 由 Hölder 不等式和 (2.5), 可得

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{m,k}\|G(A_i,B_j)\|&=\sum_{i,j=1}^{m,k}\|T(\chi_{A_i},\chi_{B_j})\|\\&=\sum_{i,j=1}^{m,k}\mu_1(A_i)^{1/q}\mu_2(B_j)^{1/q}\cdot\|T(\mu_1(A_i)^{-1/q}\chi_{A_i},\mu_2(B_j)^{-1/q}\chi_{B_j})\|\\&\leqslant\left(\sum_{i,j=1}^{m,k}\mu_1(A_i)\mu_2(B_j)\right)^{1/q}\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{m,k}\|T(\mu_1(A_i)^{-1/q}\chi_{A_i},\mu_2(B_j)^{-1/q}\chi_{B_j})\|^p\right)^{1/p}\end{aligned}$$

$$\leqslant \mu_1(A)^{1/q}\mu_2(B)^{1/q}\cdot\Lambda_p(T)\cdot\|(\mu_1(A_i)^{-1/q}\chi_{A_i})_{i=1}^m\|_{w_p}\cdot\|(\mu_2(B_j)^{-1/q}\chi_{B_j})_{j=1}^k\|_{w_p}$$
$$=\Lambda_p(T)\cdot\mu_1(A)^{1/q}\mu_2(B)^{1/q}.$$

所以

$$|G|(A,B)\leqslant\Lambda_p(T)\cdot\mu_1(A)^{1/q}\mu_2(B)^{1/q},$$

从而 $|G|$ 关于乘积测度 $\mu_1\times\mu_2$ 绝对连续. 由 Radon-Nikodym 定理知, 存在正函数 $g\in L^1(\mu_1\times\mu_2)$ 使得

$$|G|(A,B)=\int_{A\times B}g(s,t)\,d\mu_1\times\mu_2,\quad\forall\,A\in\mathcal{A}_1,\quad\forall\,B\in\mathcal{A}_2.\tag{2.7}$$

接下来证明 $g\in L^p(\mu_1\times\mu_2)$, 实际上,

$$\|g\|_p=\sup\Big\{\int_{\Omega_1\times\Omega_2}f(s,t)g(s,t)\,d\mu_1\times\mu_2:f=\sum_{i,j=1}^{m,k}\alpha_{ij}\chi_{A_i\times B_j},f>0,\|f\|_q\leqslant1\Big\}$$
$$=\sup\Big\{\sum_{i,j=1}^{m,k}\alpha_{ij}\cdot|G|(A_i,B_j):\alpha_{ij}>0,\sum_{i,j=1}^{m,k}\alpha_{ij}^q\mu_1(A_i)\mu_2(B_j)\leqslant1\Big\}.$$

固定 $\alpha_{ij}>0$ 和 $A_i\in\mathcal{A}_1$ $(i=1,\dots,m)$ 以及 $B_j\in\mathcal{A}_2$ $(j=1,\dots,k)$, 使得

$$\sum_{i,j=1}^{m,k}\alpha_{ij}^q\mu_1(A_i)\mu_2(B_j)\leqslant1.$$

对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 A_i 的分划 $(A_{i,s})_{s=1}^{m_i}$ 以及 B_j 的分划 $(B_{j,t})_{t=1}^{k_j}$ 使得

$$|G|(A_i,B_j)\leqslant\sum_{s,t=1}^{m_i,k_j}\|G(A_{i,s},B_{j,t})\|+\frac{\varepsilon}{mk\alpha_{ij}}.$$

因此

$$\sum_{i,j=1}^{m,k}\alpha_{ij}\cdot|G|(A_i,B_j)\leqslant\sum_{i,j=1}^{m,k}\sum_{s,t=1}^{m_i,k_j}\alpha_{ij}\cdot\|G(A_{i,s},B_{j,t})\|+\varepsilon.\tag{2.8}$$

对于固定的 i 和 j, 令 $\beta_{ijst}=\alpha_{ij}$, 其中 $s=1,\dots,m_i$, $t=1,\dots,k_j$. 于是

$$\sum_{i,j=1}^{m,k}\sum_{s,t=1}^{m_i,k_j}\beta_{ijst}^q\mu_1(A_{i,s})\mu_2(B_{j,t})=\sum_{i,j=1}^{m,k}\alpha_{ij}^q\mu_1(A_i)\mu_2(B_j)\leqslant1.$$

由上述式子, 可以将不等式 (2.8) 简写为

$$\sum_{i,j=1}^{m,k}\alpha_{ij}\cdot|G|(A_i,B_j)\leqslant\sum_{s,t=1}^{u,v}\beta_{st}\cdot\|G(A'_s,B'_t)\|+\varepsilon,\tag{2.9}$$

其中 $\beta_{st}>0$ 满足

$$\sum_{s,t=1}^{u,v}\beta_{st}^q\mu_1(A'_s)\mu_2(B'_t)\leqslant1.$$

令 $\gamma_{st}=\beta_{st}\mu_1(A'_s)^{1/q}\mu_2(B'_t)^{1/q}$. 于是

$$\sum_{s,t=1}^{u,v}\gamma_{st}^q\leqslant 1.$$

由 (2.5)、(2.6) 和 Hölder 不等式可知, 不等式 (2.9) 化为

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{m,k}\alpha_{ij}\cdot|G|(A_i,B_j)&\leqslant\sum_{s,t=1}^{u,v}\gamma_{st}\cdot\|T(\mu_1(A'_s)^{-1/q}\chi_{A'_s},\mu_2(B'_t)^{-1/q}\chi_{B'_t})\|+\varepsilon\\&\leqslant\Big(\sum_{s,t=1}^{u,v}\|T(\mu_1(A'_s)^{-1/q}\chi_{A'_s},\mu_2(B'_t)^{-1/q}\chi_{B'_t})\|^p\Big)^{1/p}+\varepsilon\\&\leqslant\Lambda_p(T)\cdot\|(\mu_1(A'_s)^{-1/q}\chi_{A'_s})_1^u\|_{w_p}\cdot\|(\mu_2(B'_t)^{-1/q}\chi_{B'_t})_1^v\|_{w_p}+\varepsilon\\&=\Lambda_p(T)+\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明 $g\in L^p(\mu_1\times\mu_2)$ 且 $\|g\|_p\leqslant\Lambda_p(T)$.

接下来证明 $T\in\Lambda_1^{\rm mult}(L^q(\mu_1),L^q(\mu_2);X)$. 首先由 (2.6) 和 (2.7), 有

$$\|T(\chi_A,\chi_B)\|=\|G(A,B)\|\leqslant|G|(A,B)=\int_{A\times B}g(s,t)\,d\mu_1\times\mu_2.$$

注意到, $L^q(\mu_1)^+$ 和 $L^q(\mu_2)^+$ 上的正简单函数分别稠密于 $L^q(\mu_1)^+$ 和 $L^q(\mu_2)^+$. 于是, 对于任意 $f\in L^q(\mu_1)^+$ 和任意 $h\in L^q(\mu_2)^+$, 都有

$$\|T(f,h)\|\leqslant\int_{\Omega_1\times\Omega_2}f(s)h(t)g(s,t)\,d\mu_1\times\mu_2.$$

取 $(f_i)_1^m\subseteq L^q(\mu_1)^+$ 和 $(h_j)_1^k\subseteq L^q(\mu_2)^+$. 由 (1.3) 及 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{m,k}\|T(f_i,h_j)\|&\leqslant\sum_{i,j=1}^{m,k}\int_{\Omega_1\times\Omega_2}f_i(s)h_j(t)g(s,t)\,d\mu_1\times\mu_2\\&=\int_{\Omega_1\times\Omega_2}\Big(\sum_{i=1}^m f_i(s)\Big)\cdot\Big(\sum_{j=1}^k h_j(t)\Big)\cdot g(s,t)\,d\mu_1\times\mu_2\\&\leqslant\|g\|_p\cdot\Big\|\sum_{i=1}^m f_i\Big\|_q\cdot\Big\|\sum_{j=1}^k h_j\Big\|_q\\&=\|g\|_p\cdot\|(f_i)_1^m\|_{w_1(L^q(\mu_1))}\cdot\|(h_j)_1^k\|_{w_1(L^q(\mu_2))}.\end{aligned}$$

因此, $T\in\Lambda_1^{\rm mult}(L^q(\mu_1),L^q(\mu_2);X)$ 且 $\Lambda_1(T)\leqslant\|g\|_p\leqslant\Lambda_p(T)$. □

定理 2.3 设 $1<p,q<\infty$ 满足 $1/p+1/q=1$, 则对于任意 Banach 空间 X, 都有

$$L^p(\mu_1\times\cdots\times\mu_n,X)\subseteq\Lambda_p^{\rm mult}(L^q(\mu_1),\ldots,L^q(\mu_n);X).$$

进一步地, 若 X 有 Radon-Nikodym 性质, 则

$$L^p(\mu_1\times\cdots\times\mu_n,X)=\Lambda_p^{\rm mult}(L^q(\mu_1),\ldots,L^q(\mu_n);X).$$

证明 这里只证明 $n=2$ 的情形, 其余情形同理可得. 取 $g\in L^p(\mu_1\times\mu_2,X)$, 定义 $T: L^q(\mu_1)\times L^q(\mu_2)\to X$ 如下:

$$T(f,h)=\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(s)h(t)g(s,t)\,d\mu_1\times\mu_2,\quad \forall\, f\in L^q(\mu_1),\quad \forall\, h\in L^q(\mu_2).$$

由定理 2.2 的证明的最后部分可得 $T\in\Lambda_1(L^q(\mu_1),L^q(\mu_2),X)$, 于是 $T\in\Lambda_p(L^q(\mu_1),L^q(\mu_2),X)$.

若 X 有 Radon-Nikodym 性质, 则取 $T\in\Lambda_p(L^q(\mu_1),L^q(\mu_2),X)$. 定义 $G:\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2\to X$ 如下:

$$G(A,B)=T(\chi_A,\chi_B),\quad \forall\, A\in\mathcal{A}_1,\quad \forall\, B\in\mathcal{A}_2.$$

定理 2.2 的证明的第一部分中已经得到 G 有界变差且关于 $\mu_1\times\mu_2$ 绝对连续. X 的 Radon-Nikodym 性质说明存在 $g\in L^1(\mu_1\times\mu_2,X)$ 使得

$$G(A,B)=\int_{A\times B} g(s,t)\,d\mu_1\times\mu_2,\quad \forall\, A\in\mathcal{A}_1,\quad \forall\, B\in\mathcal{A}_2.$$

于是,

$$|G|(A,B)=\int_{A\times B}\|g(s,t)\|\,d\mu_1\times\mu_2,\quad \forall\, A\in\mathcal{A}_1,\quad \forall\, B\in\mathcal{A}_2.$$

在定理 2.2 的证明的第二部分中, 我们证明了 $g\in L^p(\mu_1\times\mu_2,X)$ 并且 $\|g\|_p\leqslant\Lambda_p(T)$. 同时由 $L^q(\mu_1)$ 以及 $L^q(\mu_2)$ 简单函数的稠密性可得 T 可由 g 表示. □

致谢 对审稿人以及同行专家表达衷心的感谢.

参考文献

1 Achour D, Belacel A. Domination and factorization theorems for positive strongly p-summing operators. Positivity, 2014, 18: 785–804
2 Blasco O. A class of operators from a Banach lattice into a Banach space. Collect Math, 1986, 37: 13–22
3 Blasco O. Positive p-summing operators on L_p-spaces. Proc Amer Math Soc, 1987, 100: 275–281
4 Blasco O. Boundary values of vector-valued harmonic functions considered as operators. Studia Math, 1987, 86: 19–33
5 Blasco O. Positive p-summing operators, vector measures and tensor products. Proc Edinb Math Soc (2), 1988, 31: 179–184
6 Bu Q, Labuschagne C C A. Positive multiple summing and concave multilinear operators on Banach lattices. Mediterr J Math, 2015, 12: 77–87
7 Diestel J, Jarchow H, Tonge A, et al. Absolutely Summing Operator. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
8 Labuschagne C C A. Preduals and nuclear operators associated with bounded, p-convex, p-concave and positive p-summing operators. Canad J Math, 2007, 59: 614–637
9 Matos M C. Fully absolutelly summing and Hilbert-Schmidt multilinear operators. Collect Math, 2003, 54: 111–136
10 Popa D. On the positive absolutely summing operators on the space $L_p(\mu,X)$. Collect Math, 1997, 48: 315–319
11 Popa D. Positive absolutely summing operators on Köthe spaces. Positivity, 2001, 5: 383–386
12 Romero-Moreno M C. Concave and positive summing norms for operators on L^p. Arch Math (Basel), 2000, 75: 438–449
13 Schaefer H H. Banach Lattices and Positive Operators. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1974
14 Zhukova O I. On modifications of the classes of p-nuclear, p-summing, and p-integral operators. Sib Math J, 1998, 39: 894–907

Positive multiple summing multilinear operators on L^p-spaces

Qingying Bu, Rui Liu & Jie Shen

Abstract We show that if $1 \leqslant q \leqslant 2$ then all positive multiple 2-summing multilinear operators on L^q-spaces are positive multiple 1-summing. We also show that if $1 < p, q < \infty$ with $1/p + 1/q = 1$ then all positive multiple p-summing multilinear operators on L^q-spaces are positive multiple 1-summing. Moreover, if the range space has the Radon-Nikodym property then a multilinear operator on L^q-spaces is positive multiple p-summing if and only if it is representable by a function in an L^p-space.

Keywords **L^p-space, multilinear operator, positive p-summing operator**

MSC(2020) **46G25, 47H60**

doi: 10.1360/SSM-2023-0010