



弱双曲轨道的稳定流形刻画及其应用

献给文兰教授 80 寿辰

文晓^{1,2,3*}, 甘少波⁴

1. 北京航空航天大学人工智能学院, 北京 100191;

2. 北京航空航天大学数学科学学院, 北京 100191;

3. 北京中关村实验室, 北京 100193;

4. 北京大学数学科学学院, 北京 100871

E-mail: wenxiao@buaa.edu.cn, gansb@pku.edu.cn

收稿日期: 2024-12-31; 接受日期: 2025-03-10; 网络出版日期: 2025-06-25; * 通信作者

国家重点研发计划 (批准号: 2022YFA1005801) 资助项目

摘要 稳定流形是微分动力系统研究中的重要概念. 对微分同胚 f , 其双曲集的稳定流形有如下刻画: 存在正常数 $\varepsilon > 0$, 使得若 x 是双曲集中一点, 则集合 $\{y : d(f^n x, f^n y) \leq \varepsilon, \forall n \geq 0\}$ 包含于 x 点的稳定流形. 本文将这一结论推广到如下结论: 若不变集 Λ 上有控制分解 $T_\Lambda M = E \oplus F$, 则对正整数 m 和 $\eta > 0$, 存在正常数 ε , 使得当不变集中一点 x 满足

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^m|_{E(f^{im}(x))}\| < \log \eta, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^{-m}|_{F(f^{(i+1)m}(x))}\| < \log \eta$$

时, 也有集合 $\{y : d(f^n x, f^n y) \leq \varepsilon, \forall n \geq 0\}$ 包含于 x 点的稳定流形. 除证明这一定理外, 本文还给出其在具有局部星号性质的不变集中的应用.

关键词 稳定流形 伪轨跟踪性 控制分解

MSC (2020) 主题分类 37D05, 37D10, 37D30

1 引言

稳定流形是微分动力系统的重要研究对象, 对相空间中的一点, 其稳定流形指的是, 在迭代下在时间趋于正无穷时相应时刻与该点对应时刻的状态的距离趋于 0 的所有点构成的集合. 双曲系统的稳定流形和不稳定流形有良好的性质, 相应的结论在动力系统的结构稳定性及分支理论、遍历理论等领域中发挥着重要作用.

英文引用格式: Wen X, Gan S B. Characterization of stable manifolds of orbits with weak hyperbolicity and its application (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 571–590, doi: 10.1360/SSM-2024-0396

具体地, 设 M 是一个紧致无边 Riemann 流形, $f: M \rightarrow M$ 是一个微分同胚, 再设 Λ 是 f 的一个不变集. 如果在 Λ 的切丛 $T_\Lambda M$ 上存在分解 $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$, 使得 E^s 和 E^u 关于 Df 为不变子丛, 且存在 $C \geq 1, \lambda \in (0, 1)$, 使得对任意的 $x \in \Lambda$ 及正整数 $n \geq 1$, 总有

$$\|Df^n|_{E^s(x)}\| \leq C\lambda^n, \quad \|Df^{-n}|_{E^u(x)}\| \leq C\lambda^n$$

成立, 则称 Λ 为 f 的一个双曲集. 若一点 p 满足, 存在正整数 $n \geq 1$, 使得 $f^n(p) = p$, 则称 p 为 f 的一个周期点. 对周期点 p , 记其最小正周期为 $\pi(p)$. 若周期点 p 满足 $\text{Orb}(p) = \{f^n p : n \in \mathbb{Z}\}$ 为 f 的一个双曲集, 则称 p 为双曲周期点. 对 $x \in M$, 其关于微分同胚 f 的稳定流形和不稳定流形分别为

$$W^s(x, f) = \left\{ y \in M : \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \right\},$$

$$W^u(x, f) = \left\{ y \in M : \lim_{n \rightarrow -\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \right\}.$$

对双曲集 Λ , 存在 $\varepsilon > 0$, 使得对任意的 $x \in \Lambda$ 总有

$$\{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon, \forall n \geq 0\} \subset W^s(x, f),$$

$$\{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon, \forall n \leq 0\} \subset W^u(x, f)$$

成立, 且上述集合分别是 M 中在 x 点以 $E^s(x)$ 和 $E^u(x)$ 为切空间的嵌入子流形 (参见文献 [5]).

本文将上述结论推广到具有控制分解这种弱双曲性的集合中. 控制分解是双曲分解这一概念的一个重要推广, 在稳定性猜测的证明中由廖山涛^[2]和 Mañé^[4]提出. 设 Λ 是 f 的一个不变集, 如果在 Λ 的切丛 $T_\Lambda M$ 上存在分解 $T_\Lambda M = E \oplus F$, 使得 E 和 F 都是 Df 的不变子丛, 且存在 $C \geq 1, \lambda \in (0, 1)$ 使得

$$\|Df^n|_{E(x)}\| \cdot \|Df^{-n}|_{F(f^n x)}\| \leq C\lambda^n$$

对所有的 $x \in \Lambda$ 和正整数 $n \geq 1$ 成立, 则称 $E \oplus F$ 为 Λ 上的一个控制分解. 易见, 若 $T_\Lambda M = E \oplus F$ 关于 f 为控制分解, 则对任意的 $m \in \mathbb{Z}$, $T_\Lambda M = E \oplus F$ 关于 f^m 也为控制分解.

本文将证明如下的定理, 该定理对具控制分解的集合中具有某种“最终双曲性”的轨道的稳定流形给出一种刻画.

定理 1.1 设 Λ 是微分同胚 f 的不变集, 其上有控制分解 $T_\Lambda M = E \oplus F$, 则任取正整数 m 及 $\eta \in (0, 1)$, 都存在 $\varepsilon > 0$ 满足以下性质: 对任意的 $x \in M$, 如果有

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^m|_{E(f^{im}(x))}\| < \log \eta, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^{-m}|_{F(f^{(i+1)m}(x))}\| < \log \eta,$$

则有

$$\{y \in M : d(f^n x, f^n y) \leq \varepsilon, \forall n \geq 0\} \subset W^s(x, f);$$

对称地, 如果有

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=-n}^{-1} \log \|Df^m|_{E(f^{im}(x))}\| < \log \eta, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=-n}^{-1} \log \|Df^{-m}|_{F(f^{(i+1)m}(x))}\| < \log \eta,$$

则有

$$\{y \in M : d(f^n x, f^n y) \leq \varepsilon, \forall n \leq 0\} \subset W^u(x, f).$$

在研究稳定性猜测的证明中, 廖山涛^[2] 和 Mañé^[4] 提出了“星号”性质: 小扰动破坏不了周期轨道的双曲性, 并证明了当系统在某个不变集具有局部的星号性质时, 周期轨道具有某种一致的双曲性. 针对这种具有一致双曲性的周期轨道, 可以证明其轨道上的点满足定理 1.1 中对 x 所要求的“最终双曲性”, 在此基础上由定理 1.1 可以得到如下关于这些双曲周期轨道的稳定流形的刻画.

推论 1.1 设 f 是紧致无边流形 M 上的微分同胚, 则给定正整数 m 及 $\eta \in (0, 1)$, 都存在 $\varepsilon > 0$, 使得对任意的双曲周期点 p , 若其满足: 对任意的 $j \in \mathbb{Z}$, 都有

$$\|Df^m|_{E^s(f^{mj}p)}\| \cdot \|Df^m|_{E^u(f^{(j+1)m}p)}\| \leq \eta^2,$$

并且

$$\prod_{i=0}^{\pi(p)-1} \|Df^m|_{E^s(f^{im}x)}\| \leq \eta^{\pi(p)}, \quad \prod_{i=0}^{\pi(p)-1} \|Df^{-m}|_{E^u(f^{-im}x)}\| \leq \eta^{\pi(p)},$$

则有

$$\{y \in M : d(f^n p, f^n y) \leq \varepsilon, \forall n \geq 0\} \subset W^s(p, f),$$

$$\{y \in M : d(f^n p, f^n y) \leq \varepsilon, \forall n \leq 0\} \subset W^u(p, f).$$

本文还将展示定理 1.1 的应用前景, 例如, 我们可以由此证明当同宿类中的双曲周期点具有一致双曲性且同宿类具有伪轨跟踪性时, 同宿类必须是双曲的 (具体见第 3 节的命题 3.1).

2 定理 1.1 的证明

本节给出定理 1.1 和推论 1.1 的证明. 为证明定理 1.1, 需先回顾关于双曲集或双曲列的稳定流形的刻画的相应证明中熟知的一个结论. 设 E_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) 为一列 d - 维 Euclid 空间, $A_i : E_i \rightarrow E_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) 为一列线性同构, 若存在 $\eta > 0$, 且在每个 E_i 上都存在分解 $E_i = E_i^s \oplus E_i^u$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) 使得

$$A_i(E_i^s) = E_{i+1}^s, \quad A_i(E_i^u) = E_{i+1}^u,$$

且

$$\|A_i|_{E_i^s}\| \leq \eta, \quad \|A_i^{-1}|_{E_{i+1}^u}\| \leq \eta$$

对所有的 $i \geq 0$ 成立, 则称 $\{A_i : i \geq 0\}$ 为一个 η - 双曲列.

引理 2.1 给定常数 $K \geq 1$, $\eta \in (0, 1)$, 则存在常数 $C \geq 1$, $\delta_0 > 0$ 满足下面的条件: 对任意满足

$$\max\{\|A_i\|, \|A_i^{-1}\|\} \leq K, \quad \forall i \geq 0$$

的 η - 双曲列 $\{A_i\}$, 以及 $0 < \delta \leq \delta_0$, 如果 Lipschitz 映射列 $\phi_i : E_i \rightarrow E_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) 满足 $\phi_i(0) = 0$ 以及 $\text{Lip}\phi_i < \delta$ ($\forall i \geq 0$) 的条件, 则对任意满足

$$v_{i+1} = (A_i + \phi_i)v_i, \quad \forall i \geq 0$$

的序列 $\{v_i \in E_i : i \geq 0\}$, 必有 $\lim_{i \rightarrow \infty} \|v_i\| = 0$ 或 $\lim_{i \rightarrow \infty} \|v_i\| = +\infty$ 之一成立. 且当 $\lim_{i \rightarrow \infty} \|v_i\| = 0$ 时总有 $\|v_i\| \leq 2(\eta + C\delta)^i \|v_0\|$ 对任意的 $i \geq 0$ 成立.

证明 取常数 $\alpha = \frac{1-\eta}{2K}$. 对分解 $E_i = E_i^s \oplus E_i^u$, 记

$$\angle(E_i^s, E_i^u) = \inf\{\|u - v\| : u \in E_i^s, v \in E_i^u, \text{ 且有 } \|u\| = 1 \text{ 或 } \|v\| = 1 \text{ 之一成立}\}.$$

给定任意 $u \in E_i^s$ 和 $v \in E_i^u$, 设 u 为单位向量, 则当 $\|v\| \leq \sqrt{\eta}$ 时, 有

$$\|u - v\| \geq 1 - \sqrt{\eta} = \frac{1-\eta}{1+\sqrt{\eta}} \geq \frac{1-\eta}{2} \geq \alpha.$$

若 $u \in E_i^s$ 为单位向量, $v \in E_i^u$ 满足 $\|v\| > \sqrt{\eta}$, 则有

$$K\|u - v\| \geq \|A_i(u - v)\| \geq \|A_i v\| - \|A_i u\| \geq \sqrt{\eta^{-1}} - \eta \geq 1 - \eta,$$

进而也有

$$\|u - v\| \geq \frac{1-\eta}{K} \geq \alpha.$$

这证明对任意的 $u \in E_i^s$ 和 $v \in E_i^u$, 当 $\|u\| = 1$ 时必有 $\|u - v\| \geq \alpha$ 成立, 类似可以证明, 当 $u \in E_i^s$, $v \in E_i^u$ 且 v 为单位向量时也必有 $\|u - v\| \geq \alpha$. 这证明了对所有的 $i \geq 0$ 都有 $\angle(E_i^s, E_i^u) \geq \alpha$ 成立.

对 $u \in E_i^s$ 和 $v \in E_i^u$, 可对 $u + v$ 取如下的盒型范数:

$$\|u + v\|_b = \max\{\|u\|, \|v\|\},$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示通常的 Euclid 范数. 对任意 $u \in E_i^s, v \in E_i^u$, 若 $\|u + v\|_b = \|u\| \neq 0$, 则

$$\frac{\|u + v\|}{\|u + v\|_b} = \left\| \frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|u\|} \right\| \geq \angle(E_i^s, E_i^u) \geq \alpha;$$

类似地, 当 $\|u + v\|_b = \|v\| \neq 0$ 时也有

$$\frac{\|u + v\|}{\|u + v\|_b} = \left\| \frac{u}{\|v\|} + \frac{v}{\|v\|} \right\| \geq \angle(E_i^s, E_i^u) \geq \alpha,$$

这证明了总有

$$\|u + v\|_b \leq \alpha^{-1}\|u + v\|$$

成立. 另外, 由定义不难发现

$$\|u + v\| \leq 2\|u + v\|_b$$

也总成立. 这证明了在 E_i 上如上给出的盒型范数 $\|\cdot\|_b$ 和原 Euclid 范数 $\|\cdot\|$ 之间的等价性, 且相应的常数可取得与 i 无关.

下面证明 $C = 2\alpha^{-1}$ 和 $\delta_0 = 4^{-1}(1 - \eta)\alpha$ 符合引理的要求. 设 $\{\phi_i : E_i \rightarrow E_{i+1}\}_{i \geq 0}$ 为满足

$$\phi_i(0) = 0, \quad \text{Lip}\phi_i < \delta, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

的 Lipschitz 映射, 其中 $0 < \delta \leq \delta_0$. 序列 $\{v_i \in E_i : i \geq 0\}$ 满足 $v_{i+1} = (A_i + \phi_i)v_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). 设 $v_i = v_i^s + v_i^u$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), 其中 $v_i^s \in E_i^s, v_i^u \in E_i^u$. 不妨设 $v_i \neq 0$ 对所有的 $i \geq 0$ 成立.

假设存在 $i_0 \geq 0$, 使得 $\|v_{i_0}^u\| \geq \|v_{i_0}^s\|$ 成立. 设 $\phi_i(v_i) = \phi_i(v_i)^s + \phi_i(v_i)^u$, 其中 $\phi_i(v_i)^s \in E_{i+1}^s$, $\phi_i(v_i)^u \in E_{i+1}^u$, 则

$$\|v_{i_0+1}^u\| \geq \|A_{i_0}(v_{i_0}^u)\| - \|\phi_{i_0}(v_{i_0})^u\| \geq \eta^{-1}\|v_{i_0}^u\| - \|\phi_{i_0}(v_{i_0})\|_b \geq \eta^{-1}\|v_{i_0}^u\| - \alpha^{-1}\|\phi_{i_0}(v_{i_0})\|$$

$$\geq \eta^{-1} \|v_{i_0}^u\| - \alpha^{-1} \delta \|v_{i_0}\| \geq \left(\eta^{-1} - \frac{1-\eta}{2} \right) \|v_{i_0}^u\| = \frac{2-\eta+\eta^2}{2\eta} \|v_{i_0}^u\| > \frac{1+\eta}{2\eta} \|v_{i_0}^u\| > \|v_{i_0}^u\|,$$

且有

$$\begin{aligned} \|v_{i_0+1}^s\| &\leq \|A_{i_0}(v_{i_0}^s)\| + \|\phi_{i_0}(v_{i_0})^s\| \leq \eta \|v_{i_0}^s\| + \|\phi_{i_0}(v_{i_0})\|_b \leq \eta \|v_{i_0}^u\| + \alpha^{-1} \|\phi_{i_0}(v_{i_0})\| \\ &\leq \eta \|v_{i_0}^u\| + \alpha^{-1} \delta \|v_{i_0}\| \leq \left(\eta + \frac{1-\eta}{2} \right) \|v_{i_0}^u\| = \frac{1+\eta}{2} \|v_{i_0}^u\| < \|v_{i_0}^u\| < \|v_{i_0+1}^u\|. \end{aligned}$$

这证明了

$$\|v_{i_0+1}^u\| \geq \|v_{i_0+1}^s\|, \quad \|v_{i_0+1}^u\| \geq \frac{1+\eta}{2\eta} \|v_{i_0}^u\|$$

成立. 类似地, 由数学归纳法不难证明当 $i \geq i_0$ 时, 总有

$$\|v_i^u\| \geq \|v_i^s\|, \quad \|v_i^u\| \geq \left(\frac{1+\eta}{2\eta} \right)^{i-i_0} \|v_{i_0}^u\|$$

成立. 由此不难得到 $\lim_{i \rightarrow \infty} \|v_i\|_b = +\infty$ 成立, 再注意到 $\|v_i\| \geq \alpha^{-1} \|v_i\|_b$, 因此有 $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|v_i\| = +\infty$ 成立. 这证明了当存在 $i_0 \geq 0$ 使得 $\|v_{i_0}^u\| \geq \|v_{i_0}^s\|$ 时, 必有 $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|v_i\| = +\infty$.

下面假设对所有 $i \geq 0$, 都有 $\|v_i^u\| < \|v_i^s\|$ 成立, 则对任意的 $i \geq 0$, 都有

$$\begin{aligned} \|v_{i+1}^s\| &\leq \|A_i v_i^s\| + \|\phi_i(v_i)^s\| \leq \eta \|v_i^s\| + \|\phi_i(v_i)\|_b \leq \eta \|v_i^s\| + \alpha^{-1} \|\phi_i(v_i)\| \\ &\leq \eta \|v_i^s\| + \alpha^{-1} \delta \|v_i\| \leq (\eta + 2\alpha^{-1} \delta) \|v_i^s\|. \end{aligned}$$

由此可得, 对任意的 $i \geq 0$, 总有

$$\|v_i^s\| \leq (\eta + 2\alpha^{-1} \delta)^i \|v_0^s\| = (\eta + 2\alpha^{-1} \delta)^i \|v_0\|.$$

注意到 $\eta + 2\alpha^{-1} \delta \leq \eta + 2\alpha^{-1} \delta_0 = 2^{-1}(1+\eta) < 1$, 因此总有

$$\|v_i\| \leq \|v_i^s\| + \|v_i^u\| \leq 2\|v_i^s\| \leq 2(\eta + 2\alpha^{-1} \delta)^i \|v_0\| \leq 2 \left(\frac{1+\eta}{2} \right)^i \|v_0\|.$$

由此易见 $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|v_i\| = 0$. 引理证毕. $\square$

下面回顾在准双曲轨弧的跟踪定理证明中用到的一个技术性引理, 运用该引理, 我们能沿准双曲轨弧作某种 (不一定等价的) 切空间上的范数变换, 进而使得相应的切映射列在这种新的范数下形成一个双曲列. 给定 $\eta \in (0, 1)$, 如果二元数组 $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ (其中 a_i 和 b_i 均为正数) 满足

- (1) $\prod_{j=1}^k a_j \leq \eta^k$;
- (2) $\prod_{j=k}^n b_j \geq \eta^{k-n-1}$;
- (3) $\frac{a_k}{b_k} \leq \eta^2$

对 $k = 1, 2, \dots, n$ 均成立, 则称其是 η -准双曲的. 对 η -准双曲的二元数组, 有如下引理成立 (参见文献 [1, 3, 9]). 为了论文的完整性, 这里也给出该引理的证明. 注意, 这里采取一种构造性的证明, 其思想来源于 Pesin 理论中的 Lyapunov 范数, 与文献 [1, 3, 9] 中的证明方法有所区别.

引理 2.2 给定 $\eta \in (0, 1)$. 对任意给定的 η -准双曲二元数组 $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$, 都存在一组正数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 使得

$$\frac{a_i}{c_i} \leq \eta, \quad \frac{b_i}{c_i} \geq \eta^{-1}, \quad \forall 1 \leq i \leq n,$$

且有 $\prod_{i=1}^n c_i = 1$ 以及 $\prod_{i=1}^k c_i \leq 1$ 对所有的 $1 \leq k \leq n-1$ 成立.

证明 记 $A_0 = B_0 = 1$, $A_i = a_1 a_2 \cdots a_i$, $B_i = b_1 b_2 \cdots b_i$ ($1 \leq i \leq n$). 由条件有 $A_i \leq \eta^i$ 和 $B_n/B_{n-i} \geq \eta^{-i}$ 对任意的 $0 \leq i \leq n$ 成立. 令

$$h_i^s = \max \left\{ \eta^{-j} \frac{A_{j+i}}{A_i} : 0 \leq j \leq n-i \right\}, \quad h_i^u = \max \left\{ \eta^{-j} \frac{B_{i-j}}{B_i} : 0 \leq j \leq i \right\}.$$

不难验证 $h_i^s \geq 1$ 和 $h_i^u \geq 1$ 对所有的 $0 \leq i \leq n$ 均成立. 再令 $h_i = \max\{h_i^s, h_i^u\}$, 则易见对任意的 $0 \leq i \leq n$ 有 $h_i \geq 1$, 且由 $h_0^s = 1 = h_0^u$ 和 $h_n^s = 1 = h_n^u$ 可得 $h_0 = h_n = 1$. 下面证明 $c_i = h_i^{-1} h_{i-1}$ 满足引理的条件. 首先不难验证 $\prod_{i=1}^n c_i = h_n^{-1} h_0 = 1$, 且对任意的 $1 \leq k \leq n-1$ 有 $\prod_{i=1}^k c_i = h_k^{-1} \leq 1$. 为证明结论, 只需要再证明对所有的 $1 \leq i \leq n$, 有 $a_i c_i^{-1} \leq \eta$, $b_i c_i^{-1} \geq \eta^{-1}$.

取定 $1 \leq i \leq n$, 下面证明 $a_i c_i^{-1} \leq \eta$. 不难发现 $a_i c_i^{-1} \leq \eta$ 等价于 $a_i h_i \leq \eta h_{i-1}$. 我们分 $h_i = h_i^s$ 和 $h_i = h_i^u$ 两种情形来进行讨论. 若 $h_i = h_i^s$, 则

$$\begin{aligned} a_i h_i &= a_i h_i^s = \max \left\{ \eta^{-j} \frac{A_{j+i}}{A_i} a_i : 0 \leq j \leq n-i \right\} = \max \left\{ \eta^{-j} \frac{A_{j+i}}{A_{i-1}} : 0 \leq j \leq n-i \right\} \\ &= \eta \max \left\{ \eta^{-(j+1)} \frac{A_{j+i}}{A_{i-1}} : 0 \leq j \leq n-i \right\} = \eta \max \left\{ \eta^{-j} \frac{A_{j+i-1}}{A_{i-1}} : 1 \leq j \leq n-(i-1) \right\} \\ &\leq \eta h_{i-1}^s \leq \eta h_{i-1}. \end{aligned}$$

假设 $h_i = h_i^u$, 则

$$a_i h_i = a_i h_i^u = \max \left\{ \eta^{-j} \frac{B_{i-j}}{B_i} a_i : 0 \leq j \leq i \right\} = \max \left\{ a_i, \max \left\{ \eta^{-j} \frac{B_{i-j}}{B_i} a_i : 1 \leq j \leq i \right\} \right\}.$$

注意由 h_{i-1}^s 的选取可得 $a_i \leq \eta h_{i-1}^s \leq \eta h_i$. 再注意由 $a_i \leq \eta^2 b_i$ 可得

$$\begin{aligned} \max \left\{ \eta^{-j} \frac{B_{i-j}}{B_i} a_i : 1 \leq j \leq i \right\} &\leq \max \left\{ \eta^{-j} \frac{B_{i-j}}{B_i} b_i \eta^2 : 1 \leq j \leq i \right\} \\ &= \eta \max \left\{ \eta^{-j} \frac{B_{i-1-j}}{B_{i-1}} : 0 \leq j \leq i-1 \right\} = \eta h_{i-1}^u \\ &\leq \eta h_{i-1}. \end{aligned}$$

综上即可得此时也有 $a_i h_i = \max\{a_i, \max\{\eta^{-j} \frac{B_{i-j}}{B_i} a_i : 1 \leq j \leq i\}\} \leq \eta h_{i-1}$ 成立.

下面证明 $b_i c_i^{-1} \geq \eta^{-1}$ ($1 \leq i \leq n$) 成立. 不难发现 $b_i c_i^{-1} \geq \eta^{-1}$ 等价于 $\eta h_i \geq b_i^{-1} h_{i-1}$. 同样地, 分 $h_{i-1} = h_{i-1}^s$ 和 $h_{i-1} = h_{i-1}^u$ 这两种情形来进行证明. 当 $h_{i-1} = h_{i-1}^s$ 时, 有

$$b_i^{-1} h_{i-1} = b_i^{-1} h_{i-1}^s = \max \left\{ b_i^{-1}, \max \left\{ \eta^{-j} \frac{A_{j+i-1}}{A_{i-1}} b_i^{-1} : 1 \leq j \leq n-i+1 \right\} \right\}.$$

注意由 h_i^u 的选取可得 $b_i^{-1} \eta^{-1} \leq h_i^u$, 因此有 $b_i^{-1} \leq \eta h_i^u \leq \eta h_i$. 再注意 $b_i^{-1} \leq \eta^2 a_i^{-1}$, 因此有

$$\begin{aligned} \max \left\{ \eta^{-j} \frac{A_{j+i-1}}{A_{i-1}} b_i^{-1} : 1 \leq j \leq n-i+1 \right\} &\leq \max \left\{ \eta^{-j} \frac{A_{j+i-1}}{A_{i-1}} \eta^2 a_i^{-1} : 1 \leq j \leq n-i+1 \right\} \\ &= \eta \max \left\{ \eta^{-(j-1)} \frac{A_{j+i-1}}{A_i} : 1 \leq j \leq n-i+1 \right\} = \eta h_i^s \\ &\leq \eta h_i. \end{aligned}$$

综上可得 $b_i^{-1} h_{i-1} \leq \eta h_i$.

下面假设 $h_{i-1} = h_{i-1}^u$, 则

$$\begin{aligned} b_i^{-1} h_{i-1} &= b_i^{-1} h_{i-1}^u = \max \left\{ \eta^{-j} \frac{B_{i-1-j}}{B_{i-1}} b_i^{-1} : 0 \leq j \leq i-1 \right\} \\ &= \max \left\{ \eta^{-j} \frac{B_{i-1-j}}{B_i} : 0 \leq j \leq i-1 \right\} \\ &= \eta \max \left\{ \eta^{-(j+1)} \frac{B_{i-(j+1)}}{B_i} : 0 \leq j \leq i-1 \right\} \\ &\leq \eta h_i^u \leq \eta h_i. \end{aligned}$$

至此引理证毕. $\square$

下面的命题可以认为是定理 1.1 的一种特殊情形.

命题 2.1 设 f 是紧致无边流形 M 上的一个微分同胚. 对任意给定的正整数 m 及 $0 < \eta < 1$, 均存在常数 $\varepsilon > 0$ 满足以下性质: 若一点 $x \in M$ 满足在 $\text{Orb}(x)$ 上存在 Df 不变分解 $T_{\text{Orb}(x)}M = E \oplus F$, 使得对所有的 $i \geq 0$, 有

$$\|Df^m|_{E(f^{im}(x))}\| \cdot \|Df^{-m}|_{F(f^{(i+1)m}(x))}\| \leq \eta^2,$$

并且存在一列 $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots$, 使得对任意的 $i \geq 1$ 和任意的 $1 \leq k \leq n_{i+1} - n_i$, 有

$$\prod_{j=n_i}^{n_i+k-1} \|Df^m|_{E(f^{jm}(x))}\| \leq \eta^k, \quad \prod_{j=n_{i+1}-k}^{n_{i+1}-1} \|Df^{-m}|_{F(f^{(j+1)m}(x))}\| \leq \eta^k,$$

则有

$$\{y \in M : d(f^n(y), f^n(x)) \leq \varepsilon, \forall n \geq 0\} \subset W^s(x, f).$$

证明 设 $g = f^m$, 再令 $K = \max\{\max_{x \in M} \|D_x g\|, \max_{x \in M} \|D_x g^{-1}\|\}$. 由引理 2.1 可知, 存在 $\delta > 0$ (仅与 K 和 η 有关), 使得对 η -双曲列 $\{A_i : E_i \rightarrow E_{i+1}\}_{i=0}^\infty$, 若还有 $\max\{\|A_i\|, \|A_i^{-1}\|\} \leq K^2$ ($\forall i \geq 0$), 则对任意满足 $\text{Lip} \phi_i < \delta$ ($i \geq 0$) 的 Lipschitz 映射列 $\{\phi_i : E_i \rightarrow E_{i+1}\}_{i=0}^\infty$, 以及满足 $(A_i + \phi_i)v_i = v_{i+1}$ ($\forall i \geq 0$) 的序列 $\{v_i \in E_i\}_{i=0}^\infty$, 必有 $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|v_i\| = 0$ 或 $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|v_i\| = +\infty$ 之一成立. 进一步由流形 M 的紧性可取 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意的 $x \in M$, 当 $v \in T_x M$ 满足 $\|v\| \leq \varepsilon_0$ 时, 总有

$$\|D_v(\exp_{g(x)}^{-1} \circ g \circ \exp_x) - D_x g\| < \frac{\delta}{5K}$$

成立.

设 $x \in M$ 为取定一点, 其满足命题中的条件, 则对任意的 $j \geq 1$, 数组

$$\{(\|Dg|_{E(g^i(x))}\|, \|Dg^{-1}|_{F(g^{i+1}(x))}\|^{-1})\}_{i=n_j}^{n_{j+1}-1}$$

为 η -准双曲数组. 由引理 2.2, 可取正数 $c_{n_j}, c_{n_j+1}, \dots, c_{n_{j+1}-1}$ 满足如下条件:

$$\prod_{i=n_j}^{n_{j+1}-1} c_i = 1, \quad \prod_{i=n_j}^{k-1} c_i \leq 1, \quad \forall n_j + 1 \leq k \leq n_{j+1} - 1,$$

且有

$$c_i^{-1} \|Dg|_{E(g^i(x))}\| \leq \eta, \quad c_i \|Dg^{-1}|_{F(g^{i+1}(x))}\| \leq \eta \quad (*)$$

对所有的 $n_j \leq i \leq n_{j+1} - 1$ 成立. 取 $E_i = T_{g^{n_1+i}(x)}M$, $E_i^s = E(g^{n_1+i}(x))$, $E_i^u = F(g^{n_1+i}(x))$, 再令

$$A_i = c_{n_1+i}^{-1} \cdot Dg|_{E_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

由 (*) 不难验证 $\{A_i : E_i \rightarrow E_{i+1}\}_{i=0}^\infty$ 为一个 η -双曲列. 再注意到

$$c_i^{-1} \|Dg|_{E(g^i(x))}\| \leq \eta < 1, \quad c_i \|Dg^{-1}|_{F(g^{i+1}(x))}\| \leq \eta < 1,$$

由此可得 $K^{-1} \leq c_i \leq K$ 对所有的 $i \geq n_1$ 成立. 从而有 $\|A_i\| \leq K^2$ 和 $\|A_i^{-1}\| \leq K^2$ 对任意的 $i \geq 0$ 成立. 记 $h_0 = 1$, $h_i = c_{n_1} c_{n_1+1} \cdots c_{n_1+i-1}$ ($i \geq 1$), 则 $h_i \leq 1$ 对所有的 $i \geq 0$ 成立, 并且 $h_{n_j-n_1} = 1$ 对所有 $j \geq 1$ 成立.

再取冲击函数 $\beta : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 使得 $\beta|_{[0, 1/3]} \equiv 1$, $\beta|_{[2/3, +\infty)} \equiv 0$, 并有 $|\beta'(t)| \leq 4$ 对任意的 $t \in [0, +\infty)$ 成立. 对 $v \in E_i$, 令

$$\phi_{i, \varepsilon_0}(v) = \beta\left(\frac{\|v\|}{\varepsilon_0}\right) [\exp_{g^{n_1+i+1}(x)}^{-1} \circ g \circ \exp_{g^{n_1+i}(x)}(v) - Dg(v)].$$

由 ε_0 的选取, 不难验证 $\|D_v \phi_{i, \varepsilon_0}\| < \frac{\delta}{K}$ 对任意的 $v \in E_i$ 均成立, 且当 $\|v\| \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$ 时有

$$\phi_{i, \varepsilon_0}(v) + Dg(v) = \exp_{g^{n_1+i+1}(x)}^{-1} \circ g \circ \exp_{g^{n_1+i}(x)}(v).$$

再定义 $\phi_i : E_i \rightarrow E_{i+1}$ 如下:

$$\phi_i(v) = h_{i+1}^{-1} \phi_{i, \varepsilon_0}(h_i v), \quad \forall v \in E_i.$$

不难验证, 对任意的 $v \in E_i$, 有

$$\|D_v \phi_i\| = c_{n_1+i}^{-1} \|D_{h_i v} \phi_{i, \varepsilon_0}\| \leq K \|D_{h_i v} \phi_{i, \varepsilon_0}\| < \delta,$$

并且 $\phi_i(0) = 0$ 成立.

设存在一点 y 满足, 对所有的 $i \geq 0$, 均有 $d(g^i(x), g^i(y)) \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$, 则可令

$$v_i = h_i^{-1} \cdot \exp_{g^{n_1+i}(x)}^{-1}(g^{n_1+i}(y)), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

对任意的 $i \geq 0$, 有

$$(A_i + \phi_i)v_i = c_{n_1+i}^{-1} \cdot Dg(v_i) + h_{i+1}^{-1} \phi_{i, \varepsilon_0}(h_i v_i) = h_{i+1}^{-1} Dg(h_i v_i) + h_{i+1}^{-1} \phi_{i, \varepsilon_0}(h_i v_i) = v_{i+1}.$$

注意到对任意的 $j \geq 1$, 有

$$\|v_{n_j-n_1}\| = \|h_{n_j-n_1}^{-1} \cdot \exp_{g^{n_j}(x)}^{-1}(g^{n_j}(y))\| = \|\exp_{g^{n_j}(x)}^{-1}(g^{n_j}(y))\| \leq \frac{\varepsilon_0}{3}.$$

从而有 $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|v_i\| \neq +\infty$. 由引理 2.1 必有 $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|v_i\| = 0$. 注意到所有 $h_i \leq 1$ ($i \geq 1$), 从而有

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} d(g^i(x), g^i(y)) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \|\exp_{g^i(x)}(g^i(y))\| = \lim_{i \rightarrow +\infty} h_{i-n_1} \|v_{i-n_1}\| = 0.$$

如果 $y \in M$ 满足 $d(f^i(x), f^i(y)) \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$ 对任意的 $i \geq 0$ 成立, 则 $d(g^i(x), g^i(y)) \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$ 对所有 $i \geq 0$ 成立, 由前面得到的 $d(g^i(x), g^i(y)) \rightarrow 0$ ($i \rightarrow +\infty$) 不难得到 $d(f^i(x), f^i(y)) \rightarrow 0$ ($i \rightarrow +\infty$). 由此可见, 取 $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{3}$ 时即有

$$\{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon, \forall n \geq 0\} \subset W^s(x, f)$$

成立. 命题证毕. □

在命题中将 f 换为 f^{-1} , 不难得到可取 $\varepsilon > 0$ 使其还满足如下的性质: 若一点 $x \in M$ 满足在 $\text{Orb}(x)$ 上存在 Df 不变分解 $T_{\text{Orb}(x)}M = E \oplus F$, 使得对所有的 $i < 0$, 有

$$\|Df^m|_{E(f^{im}(x))}\| \cdot \|Df^{-m}|_{F(f^{(i+1)m}(x))}\| \leq \eta^2,$$

并且存在一列 $0 \geq n_1 > n_2 > \cdots > n_i > \cdots$, 使得对任意的 $i \geq 1$ 和任意的 $1 \leq k \leq n_i - n_{i+1}$, 有

$$\prod_{j=n_{i+1}}^{n_{i+1}+k-1} \|Df^m|_{E(f^{jm}(x))}\| \leq \eta^k, \quad \prod_{j=n_i-k}^{n_i-1} \|Df^{-m}|_{F(f^{(j+1)m}(x))}\| \leq \eta^k,$$

则有

$$\{y \in M : d(f^n(y), f^n(x)) \leq \varepsilon, \forall n \leq 0\} \subset W^u(x, f).$$

下面的引理说明, 可取一个只与 Λ 有关的正整数 l , 使得若一点 $x \in \Lambda$ 满足定理 1.1 所述的相应条件, 则 x 关于 $f^{m'}$ ($m' = lm$) 将满足命题 2.1 的条件. 其证明的思想与 Pliss 引理等通常用来寻找双曲时刻的方法并无太大区别, 为了论述的完整性, 这里仍然给出证明.

引理 2.3 给定正整数 m 及 $0 < \eta < 1$. 设 Λ 是微分同胚 f 的不变集, 其上有控制分解 $T_\Lambda M = E \oplus F$, 则存在正整数 $m' = lm$ 使得对任意的 $x \in \Lambda$, 有

$$\|Df^{m'}|_{E(x)}\| \cdot \|Df^{-m'}|_{F(f^{m'}(x))}\| \leq \eta^2,$$

并且当 $x \in \Lambda$ 满足

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^m|_{E(f^{im}(x))}\| < \log \eta, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^{-m}|_{F(f^{(i+1)m}(x))}\| < \log \eta$$

时, 必存在一列 $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots$, 使得对任意的 $i \geq 1$ 和任意的 $1 \leq k \leq n_{i+1} - n_i$, 有

$$\prod_{j=n_i}^{n_i+k-1} \|Df^{m'}|_{E(f^{jm'}(x))}\| \leq \eta^k, \quad \prod_{j=n_{i+1}-k}^{n_{i+1}-1} \|Df^{-m'}|_{F(f^{(j+1)m'}(x))}\| \leq \eta^k.$$

证明 由于 $T_\Lambda M = E \oplus F$ 为控制分解, 所以存在 $C \geq 1, \lambda \in (0, 1)$ 使得

$$\|Df^n|_{E(x)}\| \cdot \|Df^{-n}|_{F(f^n(x))}\| \leq C\lambda^n$$

对所有 $x \in \Lambda$ 和 $n \geq 0$ 成立. 取正整数 l 充分大即可使得 $C\lambda^{m'} \leq \eta^2$ ($m' = lm$), 此时

$$\|Df^{m'}|_{E(x)}\| \cdot \|Df^{-m'}|_{F(f^{m'}(x))}\| \leq \eta^2$$

对任意的 $x \in \Lambda$ 成立.

再假设有一点 $x \in \Lambda$ 满足

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^m|_{E(f^{im}(x))}\| < \log \eta, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^{-m}|_{F(f^{(i+1)m}(x))}\| < \log \eta.$$

可取 $0 < \eta' < \eta$, 使得

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^m|_{E(f^{im}(x))}\| \leq \log \eta', \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^{-m}|_{F(f^{(i+1)m}(x))}\| \leq \log \eta'.$$

令 $K = \max\{\max_{x \in M} \|D_x f^m\|, \max_{x \in M} \|D_x f^{-m}\|\}$.

对任意的正整数 n , 有

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^{m'}|_{E_{f^{im'}(x)}}\| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{nl-1} \|Df^m|_{E_{f^{im}(x)}}\|.$$

这说明

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^{m'}|_{E_{f^{im'}(x)}}\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{nl-1} \|Df^m|_{E_{f^{im}(x)}}\| \leq l \log \eta' < l \log \eta.$$

断言 2.1 存在 $i_1 \geq 0$, 使得对任意的 $k \geq 1$, 有

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{m'}|_{E_{(f^{(i+i_1)m'}(x))}}\| \leq \eta^{lk}.$$

证明 假设断言 2.1 不成立, 则对任意的 $i \geq 0$, 存在 $k_i \geq 1$, 使得

$$\prod_{j=0}^{k_i-1} \|Df^{m'}|_{E_{(f^{(i+j)m'}(x))}}\| > \eta^{lk_i}.$$

令 $K_0 = k_0$, $K_i = K_{i-1} + k_{K_{i-1}}$, $i \geq 1$, 则有 $K_i \rightarrow +\infty$, 并有

$$\prod_{i=0}^{K_i-1} \|Df^{m'}|_{E_{(f^{im'}(x))}}\| > \eta^{lK_i}.$$

这说明

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^{m'}|_{E_{(f^{im'}(x))}}\| \geq l \log \eta > l \log \eta'.$$

矛盾. 断言 2.1 证毕. □

由断言 2.1 即得, 当 $x \in \Lambda$ 满足

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^m|_{E_{(f^{im}(x))}}\| < \log \eta$$

时, 必存在 $i_1 \geq 0$, 使得

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{m'}|_{E_{(f^{(i+i_1)m'}(x))}}\| \leq \eta^{lk}$$

对任意的正整数 k 成立. 此时将 $f^{(i_1+1)m'}(x)$ 取为 x , 注意到

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^m|_{E_{(f^{im}(f^{(i_1+1)m'}(x))}}\| = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^m|_{E_{(f^{im}(x))}}\| < \log \eta,$$

使用断言 2.1 所得结论, 可找到 $i_2 > i_1$, 使得

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{m'}|_{E_{(f^{(i+i_2)m'}(x))}}\| \leq \eta^{lk}$$

对所有正整数 k 成立. 依次下去, 可以找到一列 $0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j < \cdots$, 使得对所有的 i_j , 都有

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{m'}|_{E(f^{(i+i_j)m'}(x))}\| \leq \eta^{lk} \leq \eta^k$$

对所有正整数 k 成立.

不妨设 $\{i_j : j = 1, 2, \dots\}$ 是所有满足

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{m'}|_{E(f^{(i+i_j)m'}(x))}\| \leq \eta^k$$

对所有正整数 k 成立的 $i_j > 0$ 组成的正整数列.

另外, 由条件

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^{-m}|_{F(f^{(i+1)m}(x))}\| \leq \log \eta',$$

总可取自然数子列 $\{n'_j\}$, 使得

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{n'_j} \sum_{i=0}^{n'_j-1} \log \|Df^{-m}|_{F(f^{(i+1)m}(x))}\| = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^{-m}|_{F(f^{(i+1)m}(x))}\| \leq \log \eta'$$

取正整数 s 使得 $sl < n'_j \leq (s+1)l$, 当 j 充分大时总有

$$\frac{1}{n'_j} \sum_{i=0}^{n'_j-1} \log \|Df^{-m}|_{F(f^{(i+1)m}(x))}\| \leq \log \left(\frac{\eta' + \eta}{2} \right),$$

进一步有

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^s \|Df^{-m'}|_{F(f^{(s+1-i)m'}(x))}\| &\leq \prod_{i=1}^{(s+1)l} \|Df^{-m}|_{F(f^{im}(x))}\| \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n'_j} \|Df^{-m}|_{F(f^{im}(x))}\| \right) \left(\prod_{i=n'_j+1}^{(s+1)l} \|Df^{-m}|_{F(f^{im}(x))}\| \right) \\ &\leq K^{(s+1)l-n'_j} \left(\frac{\eta' + \eta}{2} \right)^{n'_j} \leq K^l \left(\frac{\eta' + \eta}{2} \right)^{-l} \left(\frac{\eta' + \eta}{2} \right)^{(s+1)l} \\ &< \eta^{(s+1)l}. \end{aligned}$$

由此可知, 当 j 充分大时, 若 $sl < n'_j \leq (s+1)l$, 则总有

$$\frac{1}{s+1} \sum_{i=0}^s \log \|Df^{-m'}|_{F(f^{(i+1)m'}(x))}\| < l \log \eta.$$

断言 2.2 存在正整数 s_1 , 使得对任意的 $1 \leq k \leq s_1$, 有

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{-m'}|_{F(f^{(-i+s_1)m'}(x))}\| \leq \eta^{lk}.$$

证明 由前面的推导可得, 存在正整数 s 使得

$$\frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} \log \|Df^{-m'}|_{F(f^{(i+1)m'}(x))}\| < l \log \eta.$$

令 $S(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \log \|Df^{-m'}|_{F(f^{(i+1)m'}(x))}\| - kl \log \eta$, $k = 1, 2, \dots, s$, 则 $S(0) = 0$, $S(s) < 0$. 取 $s_1 \in [0, s]$, 使得

$$S(s_1) = \min\{S(k) : k = 1, 2, \dots, s\}.$$

注意到 $S(s) < 0$, 因此有 $s_1 > 0$. 对任意的 $1 \leq k \leq s_1$, 有 $S(s_1 - k) \geq S(s_1)$, 即有

$$\sum_{i=s_1-k+1}^{s_1} \log \|Df^{-m'}|_{F(f^{im'}(x))}\| \leq kl \log \eta.$$

从而

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{-m'}|_{F(f^{(-i+s_1)m'}(x))}\| \leq \eta^{lk}.$$

断言 2.2 证毕. □

由断言 2.2 即得, 当 $x \in \Lambda$ 满足条件

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^{-m}|_{F(f^{(i+1)m}(x))}\| < \log \eta$$

时, 必存在 $s_1 > 0$, 使得

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{-m'}|_{F(f^{(-i+s_1)m'}(x))}\| \leq \eta^{lk}$$

对任意的正整数 $1 \leq k \leq s_1$ 成立. 此时将 $f^{s_1 m'}(x)$ 取为 x , 使用断言 2.2 所得结论, 可取到 $s_2 > s_1$, 使得

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{-m'}|_{F(f^{(-i+s_2)m'}(x))}\| \leq \eta^{lk}$$

对所有正整数 $1 \leq k \leq s_2 - s_1$ 成立. 不难由 s_1 和 s_2 的性质进一步得到

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{-m'}|_{F(f^{(-i+s_2)m'}(x))}\| \leq \eta^{lk}$$

对所有的正整数 $1 \leq k \leq s_2$ 都成立. 依次下去, 可以找到一系列正整数 $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_j < \dots$, 使得对所有的 s_j , 都有

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{-m'}|_{F(f^{(-i+s_j)m'}(x))}\| \leq \eta^{lk} \leq \eta^k$$

对所有正整数 $1 \leq k \leq s_j$ 成立.

不妨设 $\{s_j : j = 1, 2, \dots\}$ 是所有满足

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{-m'}|_{F(f^{(-i+s_j)m'}(x))}\| \leq \eta^k$$

对所有正整数 $1 \leq k \leq s_j$ 成立的 $s_j > 0$ 组成的正整数列.

断言 2.3 $\{i_j : j = 1, 2, \dots\} \cap \{s_j : j = 1, 2, \dots\} \neq \emptyset$.

证明 使用反证法. 假设 $\{i_j\} \cap \{s_j\} = \emptyset$, 则一定存在 $s_{j_1} < i_{j_2}$, 使得 $(s_{j_1}, i_{j_2}) \cap \{i_j\} = \emptyset$, $(s_{j_1}, i_{j_2}) \cap \{s_j\} = \emptyset$. 由 $i_{j_2} - 1 \notin \{i_j\}$ 可得 $\|Df^{m'}|_{E(f^{(i_{j_2}-1)m'}(x))}\| > \eta$, 注意

$$\|Df^{m'}|_{E(f^{(i_{j_2}-1)m'}(x))}\| \cdot \|Df^{-m'}|_{F(f^{i_{j_2}m'}(x))}\| \leq \eta^2,$$

因此有 $\|Df^{-m'}|_{F(f^{i_{j_2}m'}(x))}\| < \eta$. 若 $i_{j_2} - 1 = s_{j_1}$, 则对任意的 $1 \leq k \leq s_{j_1}$, 有

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{-m'}|_{F(f^{(-i+s_{j_1})m'}(x))}\| \leq \eta^k,$$

即有

$$\|Df^{-m'}|_{F(f^{i_{j_2}m'}(x))}\| \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{-m'}|_{F(f^{(-i+s_{j_1})m'}(x))}\| \leq \eta^{k+1}.$$

从而对任意的 $1 \leq k \leq i_{j_2}$, 有

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{-m'}|_{F(f^{(-i+i_{j_2})m'}(x))}\| \leq \eta^k,$$

与 $i_{j_2} \notin \{s_j\}$ 矛盾. 因此 $i_{j_2} - 1 > s_{j_1}$, 从而有 $i_{j_1} - 2 \notin \{i_j\}$. 若

$$\|Df^{m'}|_{E(f^{(i_{j_2}-2)m'}(x))}\| \cdot \|Df^{m'}|_{E(f^{(i_{j_2}-1)m'}(x))}\| \leq \eta^2,$$

则由前面已证的 $\|Df^{m'}|_{E(f^{(i_{j_2}-1)m'}(x))}\| > \eta$ 可得 $\|Df^{m'}|_{E(f^{(i_{j_2}-2)m'}(x))}\| < \eta$. 由此不难验证对所有的 $k \geq 1$, 都有

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{m'}|_{E(f^{(i+i_{j_2}-2)m'}(x))}\| \leq \eta^k.$$

这说明 $i_{j_2} - 2 \in \{i_j\}$ 与 $i_{j_1} - 2 \notin \{i_j\}$ 矛盾. 因此有 $\|Df^{m'}|_{E(f^{(i_{j_2}-2)m'}(x))}\| \cdot \|Df^{m'}|_{E(f^{(i_{j_2}-1)m'}(x))}\| > \eta^2$. 再注意到

$$\begin{aligned} & \|Df^{m'}|_{E(f^{(i_{j_2}-1)m'}(x))}\| \cdot \|Df^{-m'}|_{F(f^{i_{j_2}m'}(x))}\| \leq \eta^2, \\ & \|Df^{m'}|_{E(f^{(i_{j_2}-2)m'}(x))}\| \cdot \|Df^{-m'}|_{F(f^{(i_{j_2}-1)m'}(x))}\| \leq \eta^2, \end{aligned}$$

因此有

$$\|Df^{-m'}|_{F(f^{(i_{j_2}-1)m'}(x))}\| \cdot \|Df^{-m'}|_{F(f^{i_{j_2}m'}(x))}\| < \eta^2.$$

注意到前面已证得

$$\|Df^{-m'}|_{F(f^{i_{j_2}m'}(x))}\| < \eta,$$

由此不难验证, 若 $i_{j_2} - 2 = s_{j_1}$, 则 $i_{j_2} \in \{s_j\}$, 与假设矛盾. 类似的过程可以一直继续下去, 可以依次得到

$$\begin{aligned} & \|Df^{-m'}|_{F(f^{i_{j_2}m'}(x))}\| < \eta, \\ & \|Df^{-m'}|_{F(f^{(i_{j_2}-1)m'}(x))}\| \cdot \|Df^{-m'}|_{F(f^{i_{j_2}m'}(x))}\| < \eta^2, \\ & \|Df^{-m'}|_{F(f^{(i_{j_2}-2)m'}(x))}\| \cdot \|Df^{-m'}|_{F(f^{(i_{j_2}-1)m'}(x))}\| \cdot \|Df^{-m'}|_{F(f^{i_{j_2}m'}(x))}\| < \eta^3, \dots \end{aligned}$$

这样总得到 $i_{j_2} \in \{s_j\}$, 从而产生矛盾. 断言 2.3 证毕. $\square$

由断言 2.3 立即得到, 当点 $x \in \Lambda$ 满足

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^m|_{E(f^{im}(x))}\| < \log \eta, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^{-m}|_{F(f^{(i+1)m}(x))}\| < \log \eta$$

时, 必存在正整数 $n_1 (\in \{i_j\} \cap \{s_j\})$, 使得当 $k \geq 1$ 时有

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{m'}|_{E(f^{(i+n_1)m'}(x))}\| \leq \eta^k,$$

当 $1 \leq k \leq n_1$ 时有

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{-m'}|_{F(f^{(-i+n_1)m'}(x))}\| \leq \eta^k.$$

用 $f^{n_1 m'}(x)$ 替换 x , 注意定理陈述中对 x 满足的条件对 $f^{n_1 m'}(x)$ 也成立, 再使用断言 2.3 所得结论可得, 存在 $n_2 > n_1$, 使得当 $k \geq 1$ 时有

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{m'}|_{E(f^{(i+n_2)m'}(x))}\| \leq \eta^k,$$

当 $1 \leq k \leq n_2 - n_1$ 有

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{-m'}|_{F(f^{(-i+n_2)m'}(x))}\| \leq \eta^k.$$

依次下去即可得一系列无穷正整数列 $n_1 < n_2 < \dots$, 使得对任意的 $j \geq 1$,

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{m'}|_{E(f^{(i+n_j)m'}(x))}\| \leq \eta^k, \quad \prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{-m'}|_{F(f^{(-i+n_{j+1})m'}(x))}\| \leq \eta^k$$

对所有的 $1 \leq k \leq n_{j+1} - n_j$ 成立. 引理证毕. $\square$

定理 1.1 的证明 设 Λ 是微分同胚 f 的不变集, 其上有控制分解 $T_\Lambda M = E \oplus F$. $m \in \mathbb{N}$ 和 $\eta \in (0, 1)$ 是定理陈述中取定的常数. 由引理 2.3, 这时总可以取正整数 l , 使得

$$\|Df^{lm}|_{E_x}\| \cdot \|Df^{-lm}|_{F_{f^l m x}}\| < \eta^2$$

对所有的 $x \in \Lambda$ 成立. 取 $m' = lm$, 则由命题 2.1 可知, 存在常数 $\varepsilon > 0$, 使得对 $x \in \Lambda$, 若存在一系列 $0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots$, 使得对任意的 $i \geq 1$ 和任意的 $1 \leq j \leq n_{i+1} - n_i$, 有

$$\prod_{j=n_i}^{n_i+k-1} \|Df^{m'}|_{E(f^{jm'}(x))}\| \leq \eta^k, \quad \prod_{j=n_{i+1}-k}^{n_{i+1}-1} \|Df^{-m'}|_{F(f^{(j+1)m'}(x))}\| \leq \eta^k,$$

则有

$$\{y \in M : d(f^n(y), f^n(x)) \leq \varepsilon, \forall n \geq 0\} \subset W^s(x, f).$$

若存在一点 $x \in \Lambda$ 满足

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^m|_{E(f^{im}(x))}\| < \log \eta, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^{-m}|_{F(f^{(i+1)m}(x))}\| < \log \eta,$$

则由引理 2.3 可知, 此时必存在一列 $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots$, 使得对任意的 $i \geq 1$ 和任意的 $1 \leq k \leq n_{i+1} - n_i$, 有

$$\prod_{j=n_i}^{n_i+k-1} \|Df^{m'}|_{E(f^{jm'}(x))}\| \leq \eta^k, \quad \prod_{j=n_{i+1}-k}^{n_{i+1}-1} \|Df^{-m'}|_{F(f^{(j+1)m'}(x))}\| \leq \eta^k.$$

由 ε 的选取即可得

$$\{y \in M : d(f^n(y), f^n(x)) \leq \varepsilon, \forall n \geq 0\} \subset W^s(x, f).$$

对称地, 对 f^{-1} 作类似讨论不难验证, 可令所取的 $\varepsilon > 0$ 满足: 若 $x \in \Lambda$ 满足

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=-n}^{-1} \log \|Df^m|_{E(f^{im}(x))}\| < \eta, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=-n}^{-1} \log \|Df^{-m}|_{F(f^{(i+1)m}(x))}\| < \eta,$$

则有

$$\{y \in M : d(f^n x, f^n y) \leq \varepsilon, \forall n \leq 0\} \subset W^u(x, f).$$

定理 1.1 证毕. □

推论 1.1 的证明 记 Λ 为所有满足对任意的 $j \in \mathbb{Z}$ 都有

$$\|Df^m|_{E^s(f^{mj}(p))}\| \cdot \|Df^m|_{E^u(f^{(j+1)m}(p))}\| \leq \eta^2$$

成立的双曲周期点 p 构成的集合, 则易见 Λ 为 f 的不变集, 且其上有控制分解 $T_p M = E^s(p) \oplus E^u(p)$, $p \in \Lambda$ (其中 $E^s(p)$ 和 $E^u(p)$ 分别为 p 的稳定子空间和不稳定子空间). 取 ε 为定理 1.1 中对应 Λ, m 和 $\frac{1+\eta}{2}$ 所取的正数. 再设双曲周期点 $p \in \Lambda$ 满足

$$\prod_{i=0}^{\pi(p)-1} \|Df^m|_{E^s(f^{im}(p))}\| \leq \eta^{\pi(p)}, \quad \prod_{i=0}^{\pi(p)-1} \|Df^{-m}|_{E^u(f^{-im}(p))}\| \leq \eta^{\pi(p)},$$

则不难验证

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^m|_{E(f^{im}(p))}\| &\leq \log \eta < \log \frac{1+\eta}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^{-m}|_{F(f^{(i+1)m}(p))}\| &\leq \log \eta < \log \frac{1+\eta}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=-n}^{-1} \log \|Df^m|_{E(f^{im}(p))}\| &\leq \log \eta < \log \frac{1+\eta}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=-n}^{-1} \log \|Df^{-m}|_{F(f^{(i+1)m}(p))}\| &\leq \log \eta < \log \frac{1+\eta}{2}. \end{aligned}$$

由定理 1.1 可得

$$\begin{aligned} \{y \in M : d(f^n(y), f^n(p)) \leq \varepsilon, \forall n \geq 0\} &\subset W^s(p, f), \\ \{y \in M : d(f^n(y), f^n(p)) \leq \varepsilon, \forall n \leq 0\} &\subset W^u(p, f). \end{aligned}$$

推论证毕. □

注意到定理 1.1 的条件中不仅考虑了 E 子丛的压缩程度, 也考虑了 F 子丛的扩张程度, 如果 E 子丛的压缩程度有某种“中心”的性质 (压缩性比较弱但又不太弱), 则此时由控制分解的性质仍然可以得到 F 子丛扩张性程度不低, 由此观察可得如下的结论成立.

推论 2.1 设 f 是紧致无边流形 M 上的一个微分同胚. 对任意给定的正整数 m 及 $0 < \eta < \eta' < 1$, 均存在 $\varepsilon > 0$ 满足以下性质: 若一点 $x \in M$ 满足在 $\text{Orb}(x)$ 上存在 Df 不变分解 $T_{\text{Orb}(x)}M = E \oplus F$, 使得对所有的 $i \geq 0$, 有

$$\|Df^m|_{E(f^{im}(x))}\| \cdot \|Df^{-m}|_{F(f^{(i+1)m}(x))}\| \leq \eta^2$$

且有

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^m|_{E(f^{im}(x))}\| \in (\log \eta, \log \eta'),$$

则有

$$\{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon\} \subset W^s(x, f).$$

证明 设 $x \in M$ 满足推论中陈述的条件, 则由条件可得

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^{-m}|_{F(f^{(i+1)m}(x))}\| < 2 \log \eta - \log \eta' < \log \eta'.$$

由引理 2.3 可得, 存在 $n_1 < n_2 < \dots$, 使得对任意的 $i = 1, 2, \dots$ 和 $k = 1, \dots, n_{i+1} - n_i$, 均有

$$\prod_{j=n_i}^{n_i+k-1} \|Df^m|_{E(f^{jm}(x))}\| \leq (\eta')^k, \quad \prod_{j=n_{i+1}-k}^{n_{i+1}-1} \|Df^{-m}|_{F(f^{(j+1)m}(x))}\| \leq (\eta')^k.$$

在此基础上由命题 2.1 即可得结论成立. $\square$

3 定理 1.1 的应用

本节给出定理 1.1 的一个应用. 首先回顾几个微分动力系统中的概念. 设 p 是微分同胚 f 的一个双曲周期点, 若双曲周期点 q 满足 $W^s(\text{Orb}(p), f)$ 和 $W^u(\text{Orb}(q), f)$ 横截相交非空, 且 $W^u(\text{Orb}(p), f)$ 和 $W^s(\text{Orb}(q), f)$ 横截相交非空, 则称双曲周期点 q 与双曲周期点 p 同宿相联, 记为 $p \sim q$. 由 λ -引理不难证明同宿相联为等价关系. 记 $H(p, f) = \overline{\{q \in M : q \sim p\}}$, 则 $H(p, f)$ 为 f 的一个紧不变集, 称其为 p (关于 f) 的同宿类. 给定 $\delta > 0$, 对 M 中的一个点列 $\{x_i\}_{i=a}^b$, 若 $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$, $a \leq i < b$, 则称 $\{x_i\}_{i=a}^b$ 为一个 δ -伪轨. 给定集合 Λ , 若任取 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得对任意 Λ 中的 δ -伪轨 $\{x_i\}_{i=a}^b$, 均存在 $x \in M$, 使得 $d(f^i x, x_i) < \varepsilon$ ($a \leq i \leq b$) 成立, 则称 Λ 具有伪轨跟踪性质.

下面使用推论 1.1 来证明如下的命题. 该命题在证明具有持续可跟踪性质链分支的双曲性或证明具有结构稳定性的同宿类的双曲性中均扮演重要角色 (参见文献 [6, 定理 4.1] 或 [7, 命题 7]).

命题 3.1 设 p 是 f 的一个双曲周期轨道, 其同宿类 $H(p, f)$ 上具有伪轨跟踪性质. 若存在正整数 m 和正数 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $H(p, f)$ 中与 p 同宿相联的周期点 q 满足如下的性质:

(P1) 分解 $T_q M = E^s(q) \oplus E^u(q)$ 满足

$$\|Df^m|_{E^s(q)}\| \cdot \|Df^{-m}|_{E^u(f^m(q))}\| < \eta^2;$$

(P2) 存在 N , 使得只要 $\pi(q) > N$, 就有

$$\prod_{i=0}^{\pi(q)-1} \|Df^m|_{E^s(f^{mi}(q))}\| < \eta^{\pi(q)}, \quad \prod_{i=0}^{\pi(q)-1} \|Df^{-m}|_{E^u(f^{-mi}(q))}\| < \eta^{\pi(q)},$$

则 $H(p, f)$ 是 f 的一个双曲集.

为给出命题 3.1 的证明, 在此先回顾一些已有的结论. 设 Λ 是 f 的一个紧不变集, 若 Df -不变子丛 $E \subset T_\Lambda M$ 满足: 存在 $C \geq 1, \lambda \in (0, 1)$, 使得对任意的 $x \in \Lambda, n \geq 1$ 都有 $\|Df^n|_{E(x)}\| \leq C\lambda^n$ 成立, 则称 E 关于 f 是压缩的. 若子丛 $F \subset T_\Lambda M$ 关于 f^{-1} 是压缩的, 则称其关于 f 是扩张的.

对满足命题 3.1 中条件的同宿类, 注意到与 p 同宿相联的周期点在 $H(p, f)$ 中稠密, 则对任意的 $x \in H(p, f)$, 可以取一列 $q_n \sim p, n \in \mathbb{N}$, 使得 $q_n \rightarrow x$. 再通过取子列可以使得 $E^s(q_n) \rightarrow E(x), E^u(q_n) \rightarrow F(x)$, 则这样得到分解 $T_x M = E(x) \oplus F(x)$, 且该分解满足

$$\|Df^m|_{E(x)}\| \cdot \|Df^m|_{F(f^m(x))}\| \leq \eta^2.$$

由控制分解的唯一性不难得到分解 $T_x M = E(x) \oplus F(x)$ 是唯一确定的. 由此得到 $H(p, f)$ 上的 Df -不变分解 $T_{H(p, f)} M = E \oplus F$. 为证明 $H(p, f)$ 是双曲集, 只需要证明 E 是压缩的, F 是扩张的. 当假设中的 E 不压缩时, 有如下的引理成立 (参见文献 [8, 推论 3.5]).

引理 3.1 [8] 设同宿类 $H(p, f)$ 满足命题 3.1 中的条件, 且 E 不是压缩的, 则对任意常数 $\eta < \eta' < \eta'' < 1$ 及任意 $H(p, f)$ 的邻域 V , 存在一个指数为 $\dim(E)$ 的双曲周期点 q 使得它的轨道 $\text{Orb}(q)$ 整个包含在 V 中, 并且导算子 Df^m 沿着 $\text{Orb}(q)$ 满足

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^m|_{E^s(f^{im}(q))}\| \leq (\eta'')^k, \quad \prod_{i=k-1}^{\pi(q)-1} \|Df^m|_{E^s(f^{im}(q))}\| \geq (\eta')^{\pi(q)-k+1}$$

对任意 $k = 1, 2, \dots, \pi(q)$ 成立. 更进一步地, 可以取 q 使得 $\pi(q) > N$.

命题 3.1 的证明 如前所述, 在命题 3.1 的条件下, 存在 $H(p, f)$ 上的一个控制分解 $T_{H(p, f)} M = E \oplus F$, 使得对所有 $q \sim p$, 有 $E(q) = E^s(q), F(q) = E^u(q)$. 为证明 $H(p, f)$ 为双曲集, 只需要证明 E 是压缩的, F 是扩张的. 下面假设 E 不是压缩的, 则由引理 3.1, 取定常数 $\eta < \eta' < \eta'' < 1$, 对任意 $H(p, f)$ 的邻域 V , 都存在双曲周期点 q 使得 $\text{Orb}(q) \subset V, \pi(q) > N$, 且有

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^m|_{E^s(f^{im}(q))}\| \leq (\eta'')^k, \quad \prod_{i=k-1}^{\pi(q)-1} \|Df^m|_{E^s(f^{im}(q))}\| \geq (\eta')^{\pi(q)-k+1}$$

对任意 $k = 1, 2, \dots, \pi(q)$ 成立. 下面证明当 V 取得足够小时必有 $q \sim p$.

注意到 p 为双曲周期点, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得

$$\{x \in M : d(f^n(x), f^n(p)) \leq \varepsilon_0, \forall n \geq 0\} \subset W^s(p, f).$$

再取 $\varepsilon_1 > 0$ 充分小, 使得 $H(p, f)$ 上的控制分解可以延拓到 $H(p, f)$ 的 ε_1 邻域 $U_0 = \bigcup_{x \in H(p, f)} B(x, \varepsilon_1)$ 内的极大不变集 $\Lambda_{U_0} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U_0)$ 上. 为简便计, 不妨仍然记 $T_{\Lambda_{U_0}} M = E \oplus F$ 为 Λ_{U_0} 上的控制分解. 注意到对任意的 $x \in H(p, f)$, 有

$$\|Df^m|_{E(x)}\| \cdot \|Df^{-m}|_{F(f^m(x))}\| \leq \eta^2,$$

通过取 $\varepsilon_1 > 0$ 充分小, 使得对任意的 $x \in \Lambda_{U_0}$, 有

$$\|Df^m|_{E(x)}\| \cdot \|Df^{-m}|_{F(f^m(x))}\| \leq (\eta'')^2.$$

由推论 1.1 可知, 此时可取 $\varepsilon_2 > 0$ 使得对任意的双曲周期点 q , 若其满足对任意的 $j \in \mathbb{Z}$, 都有

$$\|Df^m|_{E^s(f^{mj}(q))}\| \cdot \|Df^m|_{E^u(f^{(j+1)m}(q))}\| \leq (\eta'')^2,$$

并且

$$\prod_{i=0}^{\pi(q)-1} \|Df^m|_{E^s(f^{im}(q))}\| \leq (\eta'')^{\pi(q)}, \quad \prod_{i=0}^{\pi(q)-1} \|Df^{-m}|_{E^u(f^{-im}(q))}\| \leq (\eta'')^{\pi(q)},$$

则有

$$\begin{aligned} \{x \in M : d(f^n(q), f^n(x)) \leq \varepsilon_2, \forall n \geq 0\} &\subset W^s(q, f), \\ \{x \in M : d(f^n(q), f^n(x)) \leq \varepsilon_2, \forall n \leq 0\} &\subset W^u(q, f). \end{aligned}$$

再由 $H(p, f)$ 具有伪轨跟踪性质, 可取 $0 < \delta < 2^{-1} \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, 使得对任意的 δ -伪轨 $\{x_i\}_{i=a}^b$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$), 均存在跟踪点 $x \in M$ 使得

$$d(x_i, f^i(x)) < \frac{\min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}}{2}$$

对任意的 $a \leq i \leq b$ 成立. 再取 $0 < \delta' < \frac{\delta}{2}$, 使得当 $d(x, y) < \delta'$ 时总有 $d(f(x), f(y)) < \frac{\delta}{2}$. 令

$$V = B(H(p, f), \delta') = \bigcup_{x \in H(p, f)} B(x, \delta').$$

设 q 是通过引理 3.1 所取的双曲周期点, 它满足 $\text{Orb}(q) \subset V$, $\pi(q) > N$, 且

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^m|_{E^s(f^{im}(q))}\| \leq (\eta'')^k, \quad \prod_{i=k-1}^{\pi(q)-1} \|Df^m|_{E^s(f^{im}(q))}\| \geq (\eta')^{\pi(q)-k+1}$$

对任意 $k = 1, 2, \dots, \pi(q)$ 成立. 注意这两个不等式分别蕴涵了

$$\prod_{i=0}^{\pi(q)-1} \|Df^m|_{E^s(f^{im}(q))}\| \leq (\eta'')^{\pi(q)}, \quad \prod_{i=0}^{\pi(q)-1} \|Df^{-m}|_{E^u(f^{-im}(q))}\| \leq \left(\frac{\eta^2}{\eta'}\right)^{\pi(q)} \leq (\eta'')^{\pi(q)}.$$

由此再根据 ε_2 的选取可得

$$\begin{aligned} \{x \in M : d(f^n(x), f^n(q)) \leq \varepsilon_2, \forall n \geq 0\} &\subset W^s(q, f), \\ \{x \in M : d(f^n(x), f^n(q)) \leq \varepsilon_2, \forall n \leq 0\} &\subset W^u(q, f). \end{aligned}$$

下面构造一个无穷长的伪轨 $\{x_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$. 由 $\text{Orb}(q) \subset V$, 对任意 $0 \leq j \leq \pi(q) - 1$, 总存在 $z_j \in H(p, f)$, 使得

$$d(f^j(q), z_j) < \delta' < \frac{\delta}{2}, \quad j = 0, 1, \dots, \pi(q) - 1.$$

再记 $z_{\pi(q)} = z_0$, 不难发现, 对任意的 $j = 0, 1, \dots, \pi(q) - 1$, 总有

$$d(f(z_j), z_{j+1}) \leq d(f^{j+1}(q), z_{j+1}) + d(f(z_j), f(f^j(q))) < \delta' + \frac{\delta}{2} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

因此 $\{z_j\}_{j=0}^{\pi(q)}$ 是一个 δ -伪轨. 对任意的 $j \leq 0$, 设 $k\pi(q) < j \leq (k+1)\pi(q)$, 其中 $k \leq 0$ 为整数, 令 $x_j = z_{j-k\pi(q)}$, 则对任意的 $j \leq 0$, 有 $d(f(x_{j-1}), x_j) \leq \delta$, 且有 $d(x_j, f^j(q)) \leq \delta'$. 再注意到 $H(p, f)$ 是链传递的, 总存在 δ -伪轨 $\{x_0\}_{i=0}^{n_0}$, 使得 $x_0 = x_0$, $x_{n_0} = p$. 对任意的 $j \geq 0$, 令 $x_{n_0+j} = f^j(p)$. 这从而得到了一个双向无穷的 δ -伪轨 $\{x_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$. 由 δ 的选取, 存在跟踪点 $x \in M$, 使得 $d(f^i(x), x_i) < 2^{-1} \max\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ 对所有的 $i \in \mathbb{Z}$ 成立. 对任意的 $j \geq 0$, 有

$$d(f^{n_0+j}(x), f^j(p)) < 2^{-1} \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\} < \varepsilon_0.$$

由 ε_0 的选取可得 $f^{n_0}(x) \in W^s(p, f)$, 即 $x \in W^s(f^{-n_0}(p), f)$. 对任意的 $j \leq 0$, 有

$$d(f^j(x), f^j(q)) \leq d(f^j(x), x_j) + d(x_j, f^j(q)) < \frac{\min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}}{2} + \delta' < \varepsilon_2.$$

由 ε_2 的选取可得 $x \in W^u(q, f)$, 即有 $x \in W^u(q, f) \cap W^s(f^{-n_0}(p), f)$.

注意到 $\text{Orb}(x) \subset U_0$, 因此沿 x 的轨道有控制分解 $E \oplus F$. 当非零向量 $u \notin E(x)$ 时, 单位向量 $\frac{Df^n u}{\|Df^n u\|}$ 在 $n \rightarrow +\infty$ 时会倒向 F 方向. 注意到 $E(f^j(p)) = E^s(f^j(p))$ 对任意的整数 j 成立, 当非零向量 $u \in T_x W^s(f^{-n_0}(p), f)$ 时必有 $\frac{Df^n u}{\|Df^n u\|} \in T_{f^n(x)} W^s(f^{n-n_0}(p), f)$, 而当 $n \rightarrow +\infty$ 时有

$$T_{f^n(x)} W^s(f^{n-n_0}(p), f) \rightarrow E^s(f^{n-n_0}(p)).$$

这时 $\frac{Df^n u}{\|Df^n u\|}$ 在 $n \rightarrow +\infty$ 时不能倒向 F 方向, 因此必有 $u \in E(x)$, 这证明了 $T_x W^s(p, f) \subset E(x)$. 又注意到 $\dim T_x W^s(p, f) = \dim E(x)$, 因此有 $T_x W^s(p, f) = E(x)$. 类似可证明 $T_x W^u(q, f) = F(x)$. 因此 x 是 $W^u(q, f)$ 和 $W^s(f^{-n_0}(p), f)$ 的横截交点.

类似地, 还可以构造 δ -伪轨 $\{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ 如下: 当 $j \geq 0$ 时, $y_j = z_{j-[j/\pi(q)]\pi(q)}$; 再取 $\{y_j\}_{j=m_0}^0$ 使得 $y_{m_0} = p$, $y_0 = z_0$; 对 $j \leq m_0$, 取 $y_j = f^{j-m_0}(p)$. 由 δ 的选取可知, 存在一点 $y \in M$, 使得

$$d(f^i(y), y_i) < 2^{-1} \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$$

对所有的 $i \in \mathbb{Z}$ 成立. 类似不难证明 y 是 $W^s(q, f)$ 和 $W^u(f^{m_0}p, f)$ 的一个横截交点. 这样得到 $W^s(\text{Org}(p), f)$ 和 $W^u(\text{Orb}(q), f)$ 横截相交非空, $W^u(\text{Org}(p), f)$ 和 $W^s(\text{Orb}(q), f)$ 横截相交非空, 从而有 $q \sim p$. 注意到选取的 q 满足

$$\prod_{i=0}^{\pi(q)-1} \|Df^m|_{E^s(f^{im}(q))}\| \geq (\eta')^{\pi(q)} > \eta^{\pi(q)},$$

与条件 (P2) 矛盾. 这证明了 E 是压缩的. 对称地, F 是扩张的. 命题 3.1 证毕. $\square$

参考文献

- 1 Gan S. A generalized shadowing lemma. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2002, 8: 627–632
- 2 Liao S. A basic property of a certain class of differential systems (in Chinese). *Acta Math Sinica (Chin Ser)*, 1979, 22: 316–343 [廖山涛. 某类常微系统的一个基本性质. *数学学报*, 1979, 22: 316–343]
- 3 Liao S. An existence theorem for periodic orbits. *Acta Sci Natur Univ Pekinensis*, 1979, 1: 1–20
- 4 Mañé R. An ergodic closing lemma. *Annals of Math (2)*, 1982, 116: 503–540
- 5 Wen L. *Differentiable Dynamical Systems*, 2nd ed (in Chinese). Beijing: Higher Ed Press, 2024 [文兰. 微分动力系统 (第二版). 北京: 高等教育出版社, 2024]

- 6 Wen X. Stably shadowable chain components and robustly expansive homoclinic classes (in Chinese). PhD Thesis. Beijing: Peking University, 2008 [文晓. 持续可跟踪链分支与持续可扩同宿类. 博士学位论文. 北京: 北京大学, 2008]
- 7 Wen X. Structurally stable homoclinic classes. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2016, 36: 1693–1707
- 8 Wen X, Gan S, Wen L. C^1 -stably shadowable chain components are hyperbolic. *J Differential Equations*, 2009, 246: 340–357
- 9 Zhang Y. Another proof for a combinatorial lemma of Liao (in Chinese). *Acta Sci Natur Univ Pekinensis*, 2002, 38: 8–10 [张勇. 廖山涛一个组合引理的又一证明. 北京大学学报 (自然科学版), 2002, 38: 8–10]

Characterization of stable manifolds of orbits with weak hyperbolicity and its application

Xiao Wen & Shaobo Gan

Abstract The stable manifold plays an important role in the study of differentiable dynamics. For a diffeomorphism f , the stable manifolds of a hyperbolic set have the following property: there exists a positive constant $\varepsilon > 0$ such that for any x in the hyperbolic set, the set $\{y : d(f^n x, f^n y) \leq \varepsilon, \forall n \geq 0\}$ is contained in the stable manifold of x . This paper extends this result to the following conclusion: if an invariant set Λ admits a dominated splitting $T_\Lambda M = E \oplus F$, then for any positive integer m and constant $\eta > 0$, there exists $\varepsilon > 0$ such that when a point $x \in \Lambda$ satisfies

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^m|_{E(f^{im}(x))}\| < \log \eta, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^{-m}|_{F(f^{(i+1)m}(x))}\| < \log \eta,$$

then the set $\{y : d(f^n x, f^n y) \leq \varepsilon, \forall n \geq 0\}$ is contained in the stable manifold of x . In addition to proving this theorem, this paper also presents its application on invariant sets with local star properties.

Keywords stable manifold, pseudo-orbit tracing property, dominated splitting

MSC(2020) 37D05, 37D10, 37D30

doi: 10.1360/SSM-2024-0396