



半平面上复合算子的 Hilbert-Schmidt 双差

郭鑫¹, 陈荆松¹, 王茂发^{2*}

1. 中南财经政法大学统计与数学学院, 武汉 430073;

2. 武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072

E-mail: xguo.math@zuel.edu.cn, kingson_chen@163.com, mfwang.math@whu.edu.cn

收稿日期: 2023-12-26; 接受日期: 2024-05-20; 网络出版日期: 2024-11-22; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12101467 和 12171373) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 2722024BQ067) 资助项目

摘要 本文克服半平面区域的无界性, 完全刻画半平面加权 Bergman 空间上复合算子双差的 Hilbert-Schmidt 性, 并举例说明半平面上复合算子的退化双差存在 Hilbert-Schmidt 性消失现象.

关键词 Bergman 空间 复合算子 Hilbert-Schmidt 差

MSC (2020) 主题分类 47B33, 30H20

1 引言

函数空间上的算子理论作为现代数学的重要组成部分, 它与泛函分析、调和分析、量子力学和复动力系统学科密切相关. 特别地, 复合算子由于可模型化函数论和算子理论中许多深层次的问题而受到广泛研究 (参见文献 [7, 16, 19]). 设 G 是复平面 $\mathbb{C}$ 中的区域, $H(G)$ 表示 G 上解析函数的全体, $S(G)$ 表示 G 上解析自映射的全体. 设 $\varphi \in S(G)$, 则由符号 φ 诱导的复合算子 C_φ 定义为

$$(C_\varphi f)(z) = f(\varphi(z)), \quad f \in H(G), \quad z \in G.$$

设 Π^+ 为复平面 $\mathbb{C}$ 中的半平面, 即 $\Pi^+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, 其中 $\operatorname{Im} z$ 表示复数 z 的虚部. 与单位圆 $\mathbf{D}$ 的情形相比较, 半平面是无界区域, 且扩充半平面的边界包括无穷远点, 因此半平面解析函数空间上的复合算子理论更为复杂.

为了方便读者, 这里首先给出半平面上加权 Bergman 空间的定义. 设 $\alpha > -1$, $0 < p < \infty$. 令 $dA_\alpha(z) := c_\alpha (\operatorname{Im} z)^\alpha dA(z)$, 其中 $c_\alpha = \frac{2^\alpha(\alpha+1)}{\pi}$, $dA(z)$ 为 Π^+ 上的面积测度. 半平面上的加权 Lebesgue 空间 $L^p(dA_\alpha, \Pi^+)$ 由满足条件

$$\|f\|_{L^p(dA_\alpha, \Pi^+)} := \left\{ \int_{\Pi^+} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

英文引用格式: Guo X, Chen J S, Wang M F. Hilbert-Schmidt double differences of composition operators over the half plane (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 2017–2034, doi: 10.1360/SSM-2023-0340

的可测函数 f 的全体构成. 当 $0 < p < \infty$ 时, 半平面上的加权 Bergman 空间定义为 $A_\alpha^p(\Pi^+) = L^p(dA_\alpha, \Pi^+) \cap H(\Pi^+)$. 当 $\alpha = 0$ 时, 为了方便, 记 $A^p(\Pi^+) := A_0^p(\Pi^+)$. 本节所涉及的概念与记号, 其意义详见下节.

尽管半平面上的 Bergman 空间 $A_\alpha^p(\Pi^+)$ 与单位圆上的 Bergman 空间 $A_\alpha^p(\mathbf{D})$ 等距同构, 但由于积分区域的不同, 复合算子在空间 $A_\alpha^p(\Pi^+)$ 和 $A_\alpha^p(\mathbf{D})$ 上的性质存在着本质差异. 众所周知, 由 Littlewood 从属原理, 定义在单位圆 $\mathbf{D}$ 上的 Hardy 空间与 Bergman 空间上的复合算子总是有界的. 然而空间 $A_\alpha^p(\Pi^+)$ 不是 Möbius 不变的, 因此在空间 $A_\alpha^p(\Pi^+)$ 上并不是所有的复合算子都有界. Elliott 和 Wynn^[8] 证明了在空间 $A_\alpha^p(\Pi^+)$ 上没有非平凡的紧复合算子, 这与单位圆 $\mathbf{D}$ 上单个紧的复合算子理论^[12] 形成了鲜明的对比. Shapiro 和 Sundberg^[17] 在研究 Hardy 空间上复合算子集合的拓扑结构时提出如下猜想: 两个复合算子 C_φ 和 C_ψ 处在同一个连通分支当且仅当它们的差 $C_\varphi - C_\psi$ 为紧算子. 该猜想使得国内外专家学者对解析函数空间上复合算子的差分研究产生了浓厚的研究兴趣 (参见文献 [1, 5, 6, 9, 11, 13, 15]). 与半平面上单个复合算子不同的是, Choe 等^[3] 运用联合 Carleson 测度完全刻画了 $A_\alpha^p(\Pi^+)$ 上复合算子差分的有界性和紧性, 并举例说明在空间 $A_\alpha^p(\Pi^+)$ 上复合算子的差分存在紧性消失现象, 即存在大量非紧复合算子其差分是紧算子. 随后, Pang 和 Wang^[14] 运用 Khinchine 不等式以及原子分解的技巧完全刻画了 $C_\varphi - C_\psi : A_\alpha^p(\Pi^+) \rightarrow A_\beta^q(\Pi^+)$ 的紧性, 推广并深化了文献 [3] 的相关结果. 进一步地, 为了探究复合算子双差

$$T := (C_{\varphi_1} - C_{\varphi_2}) - (C_{\varphi_3} - C_{\varphi_4})$$

的紧性消失现象, Choe 等^[5, 6] 完全刻画了圆盘 $A_\alpha^p(\mathbf{D})$ 上复合算子双差 T 的紧性, 并揭示了如下意想不到的刚性现象. 设退化的双差复合算子为

$$L := (C_{\varphi_1} - C_{\varphi_2}) - (C_{\varphi_3} - C_{\varphi_1}),$$

则

$$L \text{ 在 } A_\alpha^p(\mathbf{D}) \text{ 上为紧算子当且仅当 } C_{\varphi_1} - C_{\varphi_2} \text{ 和 } C_{\varphi_3} - C_{\varphi_1} \text{ 都为紧算子,} \quad (1.1)$$

即圆盘 $A_\alpha^p(\mathbf{D})$ 上复合算子的退化双差不存在紧性消失现象. 然而, Choe 等^[4] 克服了半平面区域的无界性, 研究了半平面上由分式线性符号诱导的复合算子双差的紧性, 并构造了如下例子说明半平面上复合算子的退化双差存在紧性消失现象, 与上述圆盘的刚性现象 (1.1) 形成鲜明的对比.

例 1.1 设 $\alpha > -1$, $\frac{\alpha+2}{2} < p \leq \alpha + 2$ 且

$$\varphi_1(z) = i - \frac{2}{z+1}, \quad \varphi_2(z) = i - \frac{1}{z}, \quad \varphi_3(z) = i - \frac{3}{z}.$$

则算子 L 在 $A_\alpha^p(\Pi^+)$ 上为紧算子, 但 $C_{\varphi_1} - C_{\varphi_2}$ 和 $C_{\varphi_3} - C_{\varphi_1}$ 在 $A_\alpha^p(\Pi^+)$ 上都不是紧算子.

最近, Wang 和 Pang^[18] 运用 Carleson 测度和角导数的工具, 完全刻画了 $A_\alpha^p(\Pi^+)$ 上一般符号诱导的复合算子双差 T 的紧性, 并指出当 $C_{\varphi_1}, C_{\varphi_2}, C_{\varphi_3}$ 在 $A_\alpha^p(\Pi^+)$ 上都有界时, 退化双差的刚性结果成立:

$$L \text{ 在 } A_\alpha^p(\Pi^+) \text{ 上为紧算子当且仅当 } C_{\varphi_1} - C_{\varphi_2} \text{ 和 } C_{\varphi_3} - C_{\varphi_1} \text{ 为紧算子;} \quad (1.2)$$

但例 1.1 表明 (1.2) 成立时每个复合算子的有界性假设不能去掉.

沿着复合算子紧差的探究主线, Choe 等^[3] 最近得到了半平面上再生核函数差的范数估计:

$$\|K_z - K_w\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \approx \rho(z, w)(\|K_z\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} + \|K_w\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}), \quad z, w \in \Pi^+, \quad (1.3)$$

进而完全刻画了半平面上复合算子差分的 Hilbert-Schmidt 性. 最近, 文献 [10] 通过差分的序有界性研究了半平面上加权复合算子差分的 Hilbert-Schmidt 性, 推广并优化了文献 [3] 中的相关结果. 然而半平面上复合算子双差的 Hilbert-Schmidt 性尚未研究. 鉴于此, 本文致力于刻画半平面上复合算子双差的 Hilbert-Schmidt 性.

设 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in \mathcal{S}(\Pi^+)$. 令

$$\begin{aligned}\rho_{ij} &:= \rho(\varphi_i, \varphi_j), \\ M_{ij} &:= \rho_{ij}(\|K_{\varphi_i}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} + \|K_{\varphi_j}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}), \quad i, j = 1, 2, 3, 4.\end{aligned}$$

由文献 [2, 命题 3.1] 可得 $A_\alpha^2(\Pi^+)$ 上复合算子双差 T 关于再生核函数的 Hilbert-Schmidt 范数表达式:

$$\|T\|_{HS(A_\alpha^2(\Pi^+))}^2 = \int_{\Pi^+} \|K\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}^2 dA_\alpha, \quad (1.4)$$

其中 $K := K_{\varphi_1} - K_{\varphi_2} - K_{\varphi_3} + K_{\varphi_4}$. 记

$$R_1 := M_{12} + M_{34}, \quad R_2 := M_{13} + M_{24}. \quad (1.5)$$

易知

$$\|K\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \leq \|K_{\varphi_1} - K_{\varphi_2}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} + \|K_{\varphi_3} - K_{\varphi_4}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}$$

且

$$\|K\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \leq \|K_{\varphi_1} - K_{\varphi_3}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} + \|K_{\varphi_2} - K_{\varphi_4}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)},$$

则由 (1.3) 和 (1.4) 可得

$$\min\{R_1, R_2\} \in L^2(dA_\alpha, \Pi^+) \Rightarrow T \text{ 是 } A_\alpha^2(\Pi^+) \text{ 上的 Hilbert-Schmidt 算子}. \quad (1.6)$$

自然地, 关于半平面上复合算子双差的 Hilbert-Schmidt 性, 我们有如下猜测:

$$\min\{R_1, R_2\} \in L^2(dA_\alpha, \Pi^+) \Leftrightarrow T \text{ 是 } A_\alpha^2(\Pi^+) \text{ 上的 Hilbert-Schmidt 算子}. \quad (1.7)$$

然而下面构造的例子否定了上述猜测 (1.7).

例 1.2 设 $\frac{1}{2} < \delta \leq 1$ 且 $\varphi_1(z) = 2\pi i + \log(z + ei)$,

$$\varphi_2(z) = \varphi_1(z) + \frac{\pi}{(z + ei)^\delta [\log(z + ei)]^{\frac{1}{2}}}, \quad \varphi_3(z) = \varphi_1(z) - \frac{\pi}{(z + ei)^\delta [\log(z + ei)]^{\frac{1}{2}}}.$$

则在空间 $A^2(\Pi^+)$ 上 L 为 Hilbert-Schmidt 算子, 但是 $C_{\varphi_1} - C_{\varphi_2}$ 和 $C_{\varphi_3} - C_{\varphi_1}$ 不是 Hilbert-Schmidt 算子.

幸运的是, 受上述猜测 (1.7) 的启发, 令

$$\begin{aligned}\Omega_s &:= \left\{ z \in \Pi^+ : \max_{1 \leq i < j \leq 4} \rho_{ij}(z) < s \right\}, \quad 0 < s < 1, \\ R_3 &:= \left(\frac{|\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4|}{\operatorname{Im} \varphi_1} + \rho_{12}\rho_{13} \right) \sum_{j=1}^4 \|K_{\varphi_j}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)},\end{aligned}$$

从而得到半平面上复合算子 Hilbert-Schmidt 双差的完全刻画.

定理 1.1 设 $\alpha > -1$, $0 < s < 1$, $\varphi_j \in \mathcal{S}(\Pi^+)$, $j = 1, 2, 3, 4$, 则双差复合算子 T 为 $A_\alpha^2(\Pi^+)$ 上的 Hilbert-Schmidt 算子当且仅当

$$\int_{\Pi^+ \setminus \Omega_s} (\min\{R_1, R_2\})^2 dA_\alpha + \int_{\Omega_s} R_3^2 dA_\alpha < \infty. \quad (1.8)$$

此外,

$$\|T\|_{HS(A_\alpha^2(\Pi^+))}^2 \approx \int_{\Pi^+ \setminus \Omega_s} (\min\{R_1, R_2\})^2 dA_\alpha + \int_{\Omega_s} R_3^2 dA_\alpha. \quad (1.9)$$

基于定理 1.1, 令

$$\sigma_{ij} := \sigma(\varphi_i, \varphi_j), \quad R_4 := (|\sigma_{12} + \sigma_{13}| + \rho_{12}^2 + \rho_{13}^2) \sum_{j=1}^3 \|K_{\varphi_j}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

我们得到如下关于退化双差复合算子的 Hilbert-Schmidt 性刻画.

定理 1.2 设 $\alpha > -1$, $\varphi_j \in \mathcal{S}(\Pi^+)$, $j = 1, 2, 3$, 则退化的双差复合算子 L 为 $A_\alpha^2(\Pi^+)$ 上的 Hilbert-Schmidt 算子当且仅当

$$\int_{\Pi^+} R_4^2 dA_\alpha < \infty. \quad (1.10)$$

此外,

$$\|T\|_{HS(A_\alpha^2(\Pi^+))}^2 \approx \int_{\Pi^+} R_4^2 dA_\alpha.$$

作为定理 1.2 的应用, 例 1.2 表明半平面上复合算子的退化双差存在 Hilbert-Schmidt 性消失现象.

本文字母 C 总是代表一个常数, 不过每一次出现时可能代表不同的值. 记号 $A \lesssim B$ 表示存在一个常数 $C > 0$, 使得 $A \leq CB$, $A \approx B$ 表示 $A \lesssim B$ 并且 $B \lesssim A$.

2 预备知识

对于 $a, b \in \Pi^+$, a 和 b 之间的伪双曲度量定义为 $\rho(a, b) = |\sigma(a, b)|$, 其中 $\sigma(a, b) = \frac{a-b}{a-\bar{b}}$. 通过计算易验证

$$1 - \rho^2(a, b) = \frac{4(\operatorname{Im} a)(\operatorname{Im} b)}{|a - \bar{b}|^2}, \quad \forall a, b \in \Pi^+,$$

进而可得

$$\frac{\sqrt{2}\operatorname{Im} a}{\sqrt{1 - \rho(a, b)}} \leq |a - \bar{b}|, \quad \operatorname{Im} b \geq \operatorname{Im} a. \quad (2.1)$$

对于 $a, b \in \Pi^+$, 以下不等式成立 (参见文献 [3]):

$$\frac{\rho(a, b)}{1 + \rho(a, b)} \leq \frac{|a - b|}{2\operatorname{Im} a} \leq \frac{\rho(a, b)}{1 - \rho(a, b)}, \quad (2.2)$$

$$\frac{1 - \rho(a, b)}{1 + \rho(a, b)} \leq \frac{\operatorname{Im} a}{\operatorname{Im} b} \leq \frac{1 + \rho(a, b)}{1 - \rho(a, b)}, \quad (2.3)$$

$$1 - \rho(a, b) \leq \frac{2\operatorname{Im} a}{|a - \bar{b}|} \leq 1 + \rho(a, b). \quad (2.4)$$

设 $0 < p < \infty$, $f \in H(\Pi^+)$, 由次调和性可得

$$|f(z)| \lesssim \frac{\|f\|_{A_\alpha^p(\Pi^+)}}{(\operatorname{Im} z)^{\frac{\alpha+2}{p}}}, \quad z \in \Pi^+. \quad (2.5)$$

由 (2.5) 可知 $A_\alpha^2(\Pi^+)$ 上的计值泛函是有界线性泛函, 因此对于任意 $z \in \Pi^+$, 存在唯一的再生核函数其表达式为

$$K_z(w) := \left(\frac{i}{w - \bar{z}} \right)^{\alpha+2}, \quad w \in \Pi^+. \quad (2.6)$$

因此,

$$\|K_z\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}^2 = K_z(z) = \frac{1}{(2\operatorname{Im} z)^{\alpha+2}}, \quad z \in \Pi^+. \quad (2.7)$$

对于给定的正整数 $N \geq 2$, $a \in \Pi^+$, 记

$$a_N := \operatorname{Re} a + iN\operatorname{Im} a,$$

则有

$$|a_N - \bar{a}| = (N+1)\operatorname{Im} a. \quad (2.8)$$

通过初等计算可得关于核函数估计的如下引理.

引理 2.1 设 $\alpha > -1$, $N \geq 2$, $0 < \epsilon < \delta < 1$ 且 $a, z, w \in \Pi^+$.

(a) 若 $N(1-\epsilon) \geq 10$, $\rho(a, z) \leq \epsilon$, 则存在常数 $c_\alpha > 0$ 使得

$$\frac{1}{c_\alpha} \cdot \frac{\rho(a, z)}{N} \leq \left| 1 - \frac{K_z(a_N)}{K_a(a_N)} \right| \leq c_\alpha \cdot \frac{\rho(a, z)}{N(1-\epsilon)}.$$

此外, 若 $N(1-\epsilon) \geq 2c_\alpha$, 则有

$$\left| 1 + \frac{K_z(a_N)}{K_a(a_N)} \right| \geq \frac{3}{2}.$$

(b) 若 $\operatorname{Im} z \geq \operatorname{Im} a$ 且

$$\frac{N\sqrt{1-\rho(a, z)}}{\rho(a, z)} \leq \frac{1}{8}, \quad (2.9)$$

则存在常数 $c_\alpha > 0$ 使得

$$\left| \frac{K_z(a_N)}{K_a(a_N)} \right| \leq c_\alpha \left(\frac{N\sqrt{1-\rho(a, z)}}{\rho(a, z)} \right)^{\alpha+2}.$$

(c) 若 $\operatorname{Im} w \geq \operatorname{Im} a$, $\rho(z, w) \leq \epsilon$, $\rho(a, w) \geq \delta$, $M \geq 5$ 且

$$\frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Im} a} \leq M \leq \left(\frac{1-\epsilon}{\sqrt{1-\delta}} \right)^{1/2}, \quad (2.10)$$

则存在常数 $c_\alpha > 0$ 使得

$$\left| 1 - \frac{K_w(a_N)}{K_z(a_N)} \right| \leq c_\alpha \rho(z, w) \left(\frac{\sqrt{1-\delta}}{1-\epsilon} \right)^{1/2}.$$

3 关键定理的证明

本节致力于证明与主要结果相关的两个重要定理, 分别是定理 3.1 和 3.3.

定理 3.1 设 $\alpha > -1$ 且 $0 < s < 1$. 若 $z_j \in \Pi^+$ 满足 $\rho(z_1, z_j) \leq s, j = 1, 2, 3, 4$, 则

$$\frac{\|K_{z_1} - K_{z_2} - K_{z_3} + K_{z_4}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}}{\sum_{j=1}^4 \|K_{z_j}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}} \approx \frac{|z_1 - z_2 - z_3 + z_4|}{\operatorname{Im} z_1} + \rho(z_1, z_2)\rho(z_1, z_3).$$

证明 设 $z_j \in \Pi^+$ 满足 $\rho(z_1, z_j) \leq s, j = 1, 2, 3, 4$. 记

$$f := K_{z_1} - K_{z_2} - K_{z_3} + K_{z_4} = \sum_{j=1}^4 c_j K_{z_j},$$

则有

$$f(z) = K_{z_1}(z) \sum_{j=1}^4 \frac{c_j}{(1 - f_j(z))^{\alpha+2}}, \quad (3.1)$$

其中

$$f_j(z) := \frac{\bar{z}_j - \bar{z}_1}{z - \bar{z}_1}, \quad z \in \Pi^+.$$

记 $b_k := \operatorname{Re} z_1 + iN^k \operatorname{Im} z_1, k = 1, 2$, 则有 $\operatorname{Im} b_k = N^k(\operatorname{Im} z_1) \approx |b_k - \bar{z}_1|$. 故由 (2.3) 和 (2.5) 分别可得 $\|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \approx \sum_{j=1}^4 \|K_{z_j}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}$ 以及

$$\frac{\|f\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}}{\|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}} \gtrsim [(\operatorname{Im} b_k)(\operatorname{Im} z_1)]^{\alpha/2+1} |f(b_k)| \gtrsim \frac{|f(b_k)|}{|K_{z_1}(b_k)|},$$

从而有

$$\|f\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \left(\sum_{j=1}^4 \|K_{z_j}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \right)^{-1} \gtrsim \sum_{k=1}^2 \frac{|f(b_k)|}{|K_{z_1}(b_k)|}. \quad (3.2)$$

注意到

$$f_j(b_1) = \frac{\bar{z}_j - \bar{z}_1}{b_1 - \bar{z}_1} = \frac{\bar{z}_j - \bar{z}_1}{i(N+1)\operatorname{Im} z_1},$$

则由 (2.4) 可得

$$|f_j(b_1)| \approx \frac{\rho(z_1, z_j)}{N}, \quad (3.3)$$

且

$$\frac{f_j(b_2)}{f_j(b_1)} = \frac{N+1}{N^2+1} < 1. \quad (3.4)$$

设 $r \in (0, \frac{1}{4}]$, 由 (3.3) 可选取 $N = N(s)$ 足够大使得 $|f_j(b_k)| < r$. 令 $p_1 := \alpha+2$ 且 $p_2 := (\alpha+2)(\alpha+3)/2$. 应用 (3.1), 则存在常数 $C > 0$ 使得

$$\left| \frac{f(b_k)}{K_{z_1}(b_k)} \right| = \left| \sum_{j=1}^4 \frac{c_j}{(1 - f_j(b_k))^{\alpha+2}} \right|$$

$$\geq \left| \sum_{t=1}^2 p_t \sum_{j=2}^4 c_j [f_j(b_k)]^t \right| - Cr \left(\left| \sum_{j=2}^4 c_j f_j(b_k) \right| + |f_2(b_k) f_3(b_k)| \right).$$

此外, 有

$$\sum_{k=1}^2 \left| \sum_{t=1}^2 p_t \sum_{j=2}^4 c_j [f_j(b_k)]^t \right| \approx \left| \sum_{j=2}^4 c_j f_j(b_1) \right| + |f_2(b_1) f_3(b_1)|.$$

同时, 由 (3.4) 可知 $|f_2(b_k) f_3(b_k)| \leq |f_2(b_1) f_3(b_1)|$ 以及

$$\left| \sum_{j=2}^4 c_j f_j(b_k) \right| = \frac{|z_1 - z_2 - z_3 + z_4|}{\operatorname{Im} z_1} \cdot \frac{1}{N^k + 1} \leq \left| \sum_{j=2}^4 c_j f_j(b_1) \right|, \quad k = 1, 2. \quad (3.5)$$

因此可得

$$\sum_{k=1}^2 \left| \frac{f(b_k)}{K_{z_1}(b_k)} \right| \geq C_1(1 - C_2 r) \left(\left| \sum_{j=2}^4 c_j f_j(b_1) \right| + |f_2(b_1) f_3(b_1)| \right). \quad (3.6)$$

由 (3.5) 可得

$$\left| \sum_{j=2}^4 c_j f_j(b_1) \right| \approx \frac{|z_1 - z_2 - z_3 + z_4|}{\operatorname{Im} z_1}. \quad (3.7)$$

在 (3.6) 中选取 $r \leq \frac{1}{2C_2}$, 从而由 (3.2), (3.3) 和 (3.7) 可得

$$\frac{\|K_{z_1} - K_{z_2} - K_{z_3} + K_{z_4}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}}{\sum_{j=1}^4 \|K_{z_j}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}} \gtrsim \frac{|z_1 - z_2 - z_3 + z_4|}{\operatorname{Im} z_1} + \rho(z_1, z_2)\rho(z_1, z_3).$$

接下来, 为了得到

$$\frac{\|K_{z_1} - K_{z_2} - K_{z_3} + K_{z_4}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}}{\sum_{j=1}^4 \|K_{z_j}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}} \lesssim \frac{|z_1 - z_2 - z_3 + z_4|}{\operatorname{Im} z_1} + \rho(z_1, z_2)\rho(z_1, z_3), \quad (3.8)$$

令 $\tau := \frac{(1-s)^2}{8}$ 以及 $\eta := \frac{\tau^2}{1+\tau}$. 不妨假设

$$\min_{1 \leq j \leq 4} \operatorname{Im} z_j = \operatorname{Im} z_1 \quad \text{且} \quad \rho(z_1, z_2) \leq \rho(z_1, z_3).$$

考虑以下情形:

- (i) $\rho(z_1, z_2) \geq \eta$;
- (ii) $\tau\rho(z_1, z_2) \geq \rho(z_3, z_4)$ 或者 $\tau\rho(z_3, z_4) \geq \rho(z_1, z_2)$;
- (iii) $\tau\rho(z_1, z_2) \leq \rho(z_3, z_4) \leq \frac{1}{\tau}\rho(z_1, z_2)$ 且 $\rho(z_1, z_2) \leq \eta \leq \rho(z_1, z_3)$;
- (iv) $\tau\rho(z_1, z_2) \leq \rho(z_3, z_4) \leq \frac{1}{\tau}\rho(z_1, z_2)$ 且 $\rho(z_1, z_3) \leq \eta$.

为了方便, 记

$$G := K_{z_1} - K_{z_2} - K_{z_3} + K_{z_4}. \quad (3.9)$$

在情形 (i) 中, 有 $\rho(z_1, z_2)\rho(z_1, z_3) \geq \eta^2$, 则

$$\|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \leq \frac{\rho(z_1, z_2)\rho(z_1, z_3)}{\eta^2} \sum_{j=1}^4 \|K_{z_j}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)},$$

进而可得 (3.8). 在情形 (ii) 中, 首先假设 $\tau\rho(z_1, z_2) \geq \rho(z_3, z_4)$, 则有

$$\frac{|z_1 - z_2 - z_3 + z_4|}{\operatorname{Im} z_1} \geq \frac{|z_1 - z_2|}{\operatorname{Im} z_1} - \frac{|z_3 - z_4|}{\operatorname{Im} z_3} \cdot \frac{\operatorname{Im} z_3}{\operatorname{Im} z_1} = \frac{\rho(z_1, z_2)}{2}.$$

因此,

$$\begin{aligned} \|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} &\leq \|K_{z_1} - K_{z_2}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} + \|K_{z_3} - K_{z_4}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \\ &\lesssim (1 + \tau)\rho(z_1, z_2) \sum_{j=1}^4 \|K_{z_j}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \\ &\leq 2(1 + \tau) \frac{|z_1 - z_2 - z_3 + z_4|}{\operatorname{Im} z_1} \sum_{j=1}^4 \|K_{z_j}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}. \end{aligned}$$

从而 (3.8) 成立. 同理, 当 $\tau\rho(z_3, z_4) \geq \rho(z_1, z_2)$ 时也可得 (3.8). 在情形 (iii) 中, 有

$$\rho(z_1, z_2) + \rho(z_3, z_4) \leq \left(1 + \frac{1}{\tau}\right)\rho(z_1, z_2) \leq \frac{1}{\eta} \left(1 + \frac{1}{\tau}\right)\rho(z_1, z_2)\rho(z_1, z_3),$$

从而

$$\begin{aligned} \|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} &\leq \|K_{z_1} - K_{z_2}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} + \|K_{z_3} - K_{z_4}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \\ &\lesssim [\rho(z_1, z_2) + \rho(z_3, z_4)] \sum_{j=1}^4 \|K_{z_j}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \\ &\leq \frac{1}{\eta} \left(1 + \frac{1}{\tau}\right)\rho(z_1, z_2)\rho(z_1, z_3) \sum_{j=1}^4 \|K_{z_j}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}. \end{aligned}$$

因此可得 (3.8). 在情形 (iv) 中, 有 $\rho(z_1, z_4) \leq \rho(z_1, z_3) + \rho(z_3, z_4) \leq \eta + \frac{\eta}{\tau} = \tau$, 且

$$|f_j(z)| \leq \frac{2}{1-s}\rho(z_1, z_j) \leq \frac{2\tau}{1-s} \leq \frac{1}{4},$$

则

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z)}{K_{z_1}(z)} \right| &= \left| \sum_{j=1}^4 \frac{c_j}{(1 - f_j(z))^{\alpha+2}} \right| \\ &\lesssim \sum_{t=1}^2 \left| \sum_{j=2}^4 c_j [f_j(z)]^t \right| + \left(\left| \sum_{j=2}^4 c_j f_j(z) \right| + |f_2(z)f_3(z)| \right) \\ &\lesssim \left| \sum_{j=2}^4 c_j f_j(z) \right| + |f_2(z)f_3(z)|. \end{aligned}$$

此外, $f_j(z) = \frac{b_1 - \bar{z}_1}{z - \bar{z}_1} f_j(b_1)$ 且 $|\frac{b_1 - \bar{z}_1}{z - \bar{z}_1}| \leq N + 1$. 则有

$$\left| \frac{f(z)}{K_{z_1}(z)} \right| \lesssim \left| \sum_{j=2}^4 c_j f_j(b_1) \right| + |f_2(b_1)f_3(b_1)|, \quad z \in \Pi^+.$$

最后, 结合 (3.3) 和 (3.7) 可得 (3.8). 定理证毕. □

特别地, 当 $z_1 = z_4$ 时, 基于定理 3.1 可得如下定理.

定理 3.2 设 $\alpha > -1$ 且 $0 < s < 1$. 记

$$A_1 := \frac{|2z_1 - z_2 - z_3|}{\operatorname{Im} z_1}, \quad A_2 := |\sigma(z_1, z_2) + \sigma(z_1, z_3)|,$$

且

$$B := \rho(z_1, z_2) + \rho(z_1, z_3).$$

令 $A = A_1$ 或 $A = A_2$. 当 $z_j \in \Pi^+$ 满足 $\rho(z_1, z_j) \leq s, j = 1, 2, 3$, 则

$$\|2K_{z_1} - K_{z_2} - K_{z_3}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \approx (A + B^2) \sum_{j=1}^3 \|K_{z_j}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}.$$

证明 设 $z_j \in \Pi^+$ 满足 $\rho(z_1, z_j) \leq s, j = 1, 2, 3$. 因为

$$\frac{2z_1 - z_2 - z_3}{\operatorname{Im} z_1} - 2i[\sigma(z_1, z_2) + \sigma(z_1, z_3)] = \sum_{j=2}^3 \sigma(z_1, z_j) \frac{\overline{z_1} - \overline{z_j}}{\operatorname{Im} z_1},$$

故由 (2.2) 可得

$$|A_1 - 2A_2| \leq \sum_{j=2}^3 \frac{\rho^2(z_1, z_j)}{1-s} \leq \frac{B^2}{1-s},$$

从而

$$A_1 + B^2 \approx A_2 + B^2. \quad (3.10)$$

此外,

$$\rho(z_1, z_2) \approx \frac{|z_1 - z_2|}{\operatorname{Im} z_1} \leq A_1 + \frac{|z_1 - z_3|}{\operatorname{Im} z_1} \lesssim A_1 + \rho(z_1, z_3);$$

由对称性, 互换 z_2 和 z_3 上述估计依然成立. 因此有

$$\rho(z_1, z_2)\rho(z_1, z_3) \lesssim A_1 + \rho^2(z_1, z_3) \leq A_1 + B^2$$

且

$$B^2 \lesssim \rho^2(z_1, z_2) + \rho^2(z_1, z_3) \lesssim A_1 + \rho(z_1, z_2)\rho(z_1, z_3).$$

从而可得

$$A_1 + \rho(z_1, z_2)\rho(z_1, z_3) \approx A_1 + B^2.$$

结合 (3.10) 和定理 3.1, 该定理得证. $\square$

接下来证明本节重要的定理 3.3. 为此, 设 $\alpha > -1, z_j \in \Pi^+, j = 1, 2, 3, 4$. 为了方便, 记

$$Q_1 := \|K_{z_1} - K_{z_2}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} + \|K_{z_3} - K_{z_4}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)},$$

$$Q_2 := \|K_{z_1} - K_{z_3}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} + \|K_{z_2} - K_{z_4}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}.$$

G 仍如 (3.9) 中所定义. 自然地, 有

$$\|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \leq \min\{Q_1, Q_2\}. \quad (3.11)$$

设 $c_\alpha > 0$ 是引理 2.1 中所确定的常数, 选取 β_1 和 $N_1 \geq 2$ 使得

$$\left(\sqrt{\frac{1-\beta_1}{2}}\right)^{\alpha+2} < \frac{1}{8}, \quad (3.12)$$

$$N_1(1-\beta_1) \geq \max\{10, 4c_\alpha\}. \quad (3.13)$$

然后选取 β_2 满足以下性质:

$$\frac{\sqrt{1-\beta_2}}{\beta_2} \leq \frac{1}{N_1^7}, \quad (3.14)$$

$$\max\{N_1^{2(\alpha+4)}, N_1^{12}\} \leq \frac{1-\beta_1}{\sqrt{1-\beta_2}}, \quad (3.15)$$

$$c_\alpha \left(\frac{N_1\sqrt{1-\beta_2}}{\beta_2}\right)^{\alpha+2} \leq \frac{1}{4N_1}. \quad (3.16)$$

接下来的引理 3.1–3.4 将对证明定理 3.3 起着关键的作用.

引理 3.1 令 $\alpha > -1$. 若 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \Pi^+$ 满足

(i) $\operatorname{Im} z_j \geq \operatorname{Im} z_1, j = 2, 3, 4$;

(ii) $\beta_1 \leq \rho(z_1, z_j), j = 2, 3, 4$,

则有 $\|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \approx Q_1 \approx Q_2 \approx \|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}.$

证明 由 (i) 和 (ii) 以及 (2.1) 可得

$$\frac{|G(z_1)|}{\|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}^2} = \frac{|G(z_1)|}{K_{z_1}(z_1)} \geq 1 - \sum_{j=2}^4 \left(\sqrt{\frac{1-\beta_1}{2}}\right)^{\alpha+2} > \frac{1}{2}.$$

因此, 由 (2.5) 可知

$$\|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \gtrsim \frac{|G(z_1)|}{\|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}} \geq \frac{1}{2} \|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}.$$

由 (i) 和 (2.7) 可得

$$\|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \leq Q_j \leq 4\|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}, \quad j = 1, 2. \quad (3.17)$$

从而引理得证. □

引理 3.2 令 $\alpha > -1$. 若 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \Pi^+$ 满足

(i) $\operatorname{Im} z_j \geq \operatorname{Im} z_1, j = 2, 3, 4$;

(ii) $\rho(z_1, z_4) \leq \beta_1$;

(iii) 下面条件其中一个成立:

(iii-a) $\beta_2 \leq \rho(z_1, z_2) \leq \rho(z_1, z_3)$,

(iii-b) $\rho(z_1, z_2) \leq \beta_1$ 且 $\beta_2 \leq \rho(z_1, z_3)$,

则 $\|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \approx Q_1 \approx Q_2 \approx \|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}.$

证明 为了方便, 记

$$b := (z_1)_{N_1} = \operatorname{Re} z_1 + iN_1 \operatorname{Im} z_1. \quad (3.18)$$

类似于引理 3.1 的证明, 我们只需要证明

$$\|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \gtrsim \|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}. \quad (3.19)$$

首先由 (2.5) 和 (2.8) 可得

$$\|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \gtrsim \frac{(\operatorname{Im} b)^{1+\alpha/2}}{|b - \overline{z_1}|^{\alpha+2}} \cdot \frac{|G(b)|}{|K_{z_1}(b)|} \geq \frac{\|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2}}{(2N_1)^{\frac{\alpha+2}{2}}} \cdot \frac{|G(b)|}{|K_{z_1}(b)|}. \quad (3.20)$$

此外, 利用 (3.13) 和引理 2.1(a) 可得

$$\begin{aligned} \frac{|G(b)|}{|K_{z_1}(b)|} &\geq \left| 1 + \frac{K_{z_4}(b)}{K_{z_1}(b)} \right| - \left| \frac{K_{z_2}(b)}{K_{z_1}(b)} + \frac{K_{z_3}(b)}{K_{z_1}(b)} \right| \\ &\geq \frac{3}{2} - \left| \frac{K_{z_2}(b)}{K_{z_1}(b)} + \frac{K_{z_3}(b)}{K_{z_1}(b)} \right|. \end{aligned} \quad (3.21)$$

为了进一步估计 (3.21), 首先考虑情形 (iii-a). 由 (3.14) 可得

$$\frac{\sqrt{1-\rho(z_1, z_j)}}{\rho(z_1, z_j)} \leq \frac{\sqrt{1-\beta_2}}{\beta_2} \leq \frac{1}{N_1^7}, \quad j = 2, 3. \quad (3.22)$$

因此, 应用引理 2.1(b) 和 (3.16), 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{K_{z_2}(b)}{K_{z_1}(b)} + \frac{K_{z_3}(b)}{K_{z_1}(b)} \right| &\leq \left| \frac{K_{z_2}(b)}{K_{z_1}(b)} \right| + \left| \frac{K_{z_3}(b)}{K_{z_1}(b)} \right| \\ &\leq c_\alpha \sum_{j=2}^3 \left(\frac{N_1 \sqrt{1-\rho(z_1, z_j)}}{\rho(z_1, z_j)} \right)^{2+\alpha} \\ &\leq 2c_\alpha \left(\frac{N_1 \sqrt{1-\beta_2}}{\beta_2} \right)^{2+\alpha} \\ &\leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

由 (3.20) 和 (3.21) 可知

$$\|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \geq \frac{5}{4} \frac{\|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}}{(2N_1)^{\frac{\alpha+2}{2}}},$$

从而在条件 (iii-a) 下可得 (3.19). 对于情形 (iii-b), 结合引理 2.1(a), (3.13), (3.20) 和 (3.21), 类似可得 (3.19), 从而引理得证. $\square$

引理 3.3 令 $\alpha > -1$. 若 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \Pi^+$ 满足

(i) $\operatorname{Im} z_j \geq \operatorname{Im} z_1, j = 2, 3, 4$;

(ii) $\rho(z_1, z_2) \leq \beta_1$;

(iii) $\beta_2 \leq \rho(z_1, z_j), j = 3, 4$,

则 $\|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \approx \min\{Q_1, Q_2\}$.

证明 类似于引理 3.1 的证明, 我们只需要证明

$$\|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \gtrsim \min\{Q_1, Q_2\}. \quad (3.23)$$

若

$$\frac{\|K_{z_1} - K_{z_2}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}}{\|K_{z_3} - K_{z_4}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}} \leq \frac{1}{2} \quad \text{或} \quad \frac{\|K_{z_1} - K_{z_2}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}}{\|K_{z_3} - K_{z_4}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}} \geq 2,$$

则

$$\frac{Q_1}{3} \leq \|K_{z_1} - K_{z_2}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} - \|K_{z_3} - K_{z_4}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \leq \|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \leq Q_2,$$

从而 (3.23) 成立.

若

$$\frac{1}{2} < \frac{\|K_{z_1} - K_{z_2}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}}{\|K_{z_3} - K_{z_4}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}} < 2, \quad (3.24)$$

由对称性, 不妨假设

$$\operatorname{Im} z_4 \geq \operatorname{Im} z_3. \quad (3.25)$$

为了方便, 记 $M := \max\{N_1^{\alpha+4}, N_1^6\}$, 并考虑以下情形:

- (a) $\rho(z_3, z_4) \leq \beta_1$, 且 $\frac{\operatorname{Im} z_3}{\operatorname{Im} z_1} \leq M$;
- (b) $\rho(z_3, z_4) \leq \beta_1$, 且 $\frac{\operatorname{Im} z_3}{\operatorname{Im} z_1} > M$;
- (c) $\rho(z_3, z_4) > \beta_1$.

情形 (a) 由于

$$|K_{z_4}(b)| = K_{z_4}(z_4) \left(\frac{2\operatorname{Im} z_4}{|z_4 - \bar{b}|} \right)^{2+\alpha} \leq 2^{\alpha+2} \|K_{z_4}\|_{A_\alpha^2}^2$$

且 $M^2 \leq \frac{1-\beta_1}{\sqrt{1-\beta_2}}$, 由引理 2.1(c) 可得

$$\begin{aligned} |K_{z_3}(b) - K_{z_4}(b)| &= \left| 1 - \frac{K_{z_3}(b)}{K_{z_4}(b)} \right| |K_{z_4}(b)| \\ &\lesssim \rho(z_3, z_4) \left(\frac{\sqrt{1-\beta_2}}{1-\beta_1} \right)^{1/2} \|K_{z_4}\|_{A_\alpha^2}^2 \\ &\leq \frac{\rho(z_3, z_4)}{M} \|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \|K_{z_4}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}. \end{aligned}$$

同时, 由 (2.8) 可得 $|K_{z_1}(b)| \geq \frac{\|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2}^2}{(N_1)^{\alpha+2}}$. 进一步地, 根据 (3.13) 和引理 2.1(a) 可得

$$|K_{z_1}(b) - K_{z_2}(b)| = |K_{z_1}(b)| \left| 1 - \frac{K_{z_2}(b)}{K_{z_1}(b)} \right| \gtrsim \frac{\rho(z_1, z_2)}{N_1^{\alpha+3}} \|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2}^2.$$

则有

$$\begin{aligned} |G(b)| &\geq |K_{z_1}(b) - K_{z_2}(b)| - |K_{z_3}(b) - K_{z_4}(b)| \\ &\gtrsim \frac{\|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}}{N_1^{\alpha+3}} \left[\rho(z_1, z_2) \|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} - \frac{C}{N_1} \rho(z_3, z_4) \|K_{z_4}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

此外, 由引理 3.3(i) 和 (1.3) 可知 $\rho(z_1, z_2)\|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \approx \|K_{z_1} - K_{z_2}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}$. 类似地, 由 (3.25) 和 (2.3) 可得 $\rho(z_3, z_4)\|K_{z_4}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \approx \|K_{z_3} - K_{z_4}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}$. 将上述估计代入 (3.26), 由 (2.5) 可得

$$\begin{aligned} \|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} &\gtrsim (\operatorname{Im} z_1)^{\alpha/2+1} |G(b)| \\ &\geq \frac{C_1}{N_1^{\alpha+3}} \left(\|K_{z_1} - K_{z_2}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} - \frac{C_2}{N_1} \|K_{z_3} - K_{z_4}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \right) \\ &\geq \frac{C_1}{N_1^{\alpha+3}} \left(1 - \frac{2C_2}{N_1} \right) \|K_{z_1} - K_{z_2}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}. \end{aligned}$$

因此, 选取 N_1 满足 $N_1 \geq 4C_2$, 进而由 (3.24) 可知

$$Q_2 \geq \|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \geq \frac{C_1}{2N_1^{\alpha+3}} \|K_{z_1} - K_{z_2}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \geq \frac{C_1}{6N_1^{\alpha+3}} Q_1.$$

至此, 得到 (3.23).

情形 (b) 由文献 [3, 引理 7.2] 可得

$$\begin{aligned} |K_{z_3}(b) - K_{z_4}(b)| &= \frac{1}{|b - \bar{z}_3|^{\alpha+2}} \left| 1 - \left(\frac{b - \bar{z}_3}{b - \bar{z}_4} \right)^{\alpha+2} \right| \\ &\lesssim \frac{\rho(z_3, z_4)}{(\operatorname{Im} z_3)^{\alpha+2}}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

此外, 由 (2.7) 和情形 (b) 以及 $\alpha > -1$ 可得

$$\frac{1}{(\operatorname{Im} z_3)^{\alpha+2}} = \left(\frac{\operatorname{Im} z_1}{\operatorname{Im} z_3} \right)^{\alpha/2+1} \|K_1\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \|K_3\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \leq \frac{\|K_1\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \|K_3\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}}{N_1^{\alpha+4}}.$$

将上式代入 (3.27), 则有

$$|K_{z_3}(b) - K_{z_4}(b)| \lesssim \frac{\rho(z_3, z_4) \|K_1\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \|K_3\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}}{N_1^{\alpha+4}}.$$

因此

$$\begin{aligned} |G(b)| &\geq |K_{z_1}(b) - K_{z_2}(b)| - |K_{z_3}(b) - K_{z_4}(b)| \\ &\gtrsim \frac{\|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}}{N_1^{\alpha+3}} \left[\rho(z_1, z_2) \|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2} - \frac{C}{N_1} \rho(z_3, z_4) \|K_3\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \right]. \end{aligned}$$

类比情形 (a) 中的证明可得

$$\|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \geq \frac{C_3}{N_1^{\alpha+3}} \left(1 - \frac{C_4}{N_1} \right) \|K_{z_1} - K_{z_2}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}.$$

故选取 N_1 满足 $N_1 \geq 2C_4$, 从而有

$$Q_2 \geq \|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \geq \frac{C_3}{6N_1^{\alpha+3}} Q_1.$$

至此, 得到 (3.23).

情形 (c) 取 $j_0 \in \{3, 4\}$ 使得

$$\max \{|K_{z_3}(b)|, |K_{z_4}(b)|\} = |K_{z_{j_0}}(b)|,$$

则有

$$(\operatorname{Im} b)^{\alpha/2+1} |K_{z_{j_0}}(b)| \leq \frac{C}{N_1^{\alpha+4}} \|K_{z_3}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}. \quad (3.28)$$

我们分以下两种情形证明 (3.28):

$$(c1): \frac{\operatorname{Im} b}{\operatorname{Im} z_{j_0}} \leq \frac{1}{N_1^6} \quad \text{和} \quad (c2): \frac{\operatorname{Im} z_{j_0}}{\operatorname{Im} b} \leq N_1^6.$$

在情形 (c1) 中, 考虑到 $\operatorname{Im} z_4 \geq \operatorname{Im} z_3$, 有

$$\begin{aligned} (\operatorname{Im} b)^{\alpha/2+1} |K_{z_{j_0}}(b)| &\leq \left(\frac{\operatorname{Im} b}{\operatorname{Im} z_{j_0}} \right)^{\alpha/2+1} \frac{1}{(\operatorname{Im} z_{j_0})^{\alpha/2+1}} \\ &\lesssim \frac{1}{N_1^{3(\alpha+2)}} \|K_{z_3}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}. \end{aligned}$$

由 $\alpha > -1$, (3.28) 得证. 在情形 (c2) 中, 由 (iii) 和 (3.14) 可得

$$\frac{N_1 \sqrt{1 - \rho(z_1, z_{j_0})}}{\rho(z_1, z_{j_0})} \leq \frac{N_1 \sqrt{1 - \beta_2}}{\beta_2} \leq \frac{1}{N_1^6}.$$

通过引理 2.1(b) 可得

$$|K_{z_{j_0}}(b)| \lesssim \frac{|K_{z_1}(b)|}{N_1^{6(\alpha+2)}} \leq \frac{1}{N_1^{6(\alpha+2)}} \left(\frac{1}{\operatorname{Im} b} \right)^{\alpha+2}.$$

从而

$$(\operatorname{Im} b)^{\alpha/2+1} |K_{z_{j_0}}(b)| \leq \frac{1}{N_1^{6(\alpha+2)}} \left(\frac{\operatorname{Im} z_{j_0}}{\operatorname{Im} b} \right)^{\alpha/2+1} \frac{1}{(\operatorname{Im} z_{j_0})^{\alpha/2+1}} \lesssim \frac{\|K_{z_3}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}}{N_1^{3(\alpha+2)}},$$

进而 (3.28) 成立.

接下来, 由 (2.5) 和 (3.28) 可得

$$\begin{aligned} \|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} &\gtrsim (\operatorname{Im} b)^{\alpha/2+1} |G(b)| \\ &\geq (\operatorname{Im} z_1)^{\alpha/2+1} |K_{z_1}(b) - K_{z_2}(b)| - 2(\operatorname{Im} b)^{\alpha/2+1} |K_{j_0}(b)| \\ &\gtrsim \frac{1}{N_1^{\alpha+3}} \left[\rho(z_1, z_2) \|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2} - C \frac{\|K_{z_3}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}}{N_1} \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

再由 (1.3) 和 (2.3) 可得

$$\rho(z_1, z_2) \|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \approx \|K_{z_1} - K_{z_2}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \approx \|K_{z_3} - K_{z_4}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \approx \|K_{z_3}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)},$$

从而有

$$\rho(z_1, z_2) \|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \approx Q_1 \approx \|K_{z_3}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}.$$

因此, 结合 (3.29), 有

$$\|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \geq \frac{C_5}{N_1^{\alpha+3}} \left(1 - \frac{C_6}{N_1} \right) Q_1.$$

故选取 N_1 使得 $N_1 \geq 2C_6$, 从而

$$Q_2 \geq \|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \geq \frac{C_5}{2N_1^{\alpha+3}} Q_1.$$

至此, 得到 (3.23). 引理得证. $\square$

引理 3.4 令 $\alpha > -1$. 若 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \Pi^+$ 满足

(i) $\operatorname{Im} z_j \geq \operatorname{Im} z_1, j = 2, 3, 4$;

(ii) $\rho(z_1, z_2) \leq \beta_1$;

(iii) $\rho(z_1, z_3) \leq \beta_1$ 且 $\beta_2 \leq \rho(z_1, z_4)$,

则 $\|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \approx Q_1 \approx Q_2 \approx \|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}.$

证明 由 (3.13) 和引理 2.1(a), 可得

$$\left| 1 - \frac{K_{z_j}(b)}{K_{z_1}(b)} \right| \leq \frac{c_\alpha}{N_1(1-\beta_1)}, \quad j = 2, 3.$$

同时, 由 (3.14), (3.16) 和引理 2.1(b), 有

$$\left| \frac{K_{z_4}(b)}{K_{z_1}(b)} \right| \leq \frac{1}{4N_1}.$$

因此,

$$\begin{aligned} |G(b)| &\geq |K_{z_1}(b)| \left(\left| 1 - \frac{K_{z_2}(b)}{K_{z_1}(b)} - \frac{K_{z_3}(b)}{K_{z_1}(b)} \right| - \frac{|K_{z_4}(b)|}{|K_{z_1}(b)|} \right) \\ &\geq |K_{z_1}(b)| \left(1 - \left| 1 - \frac{K_{z_2}(b)}{K_{z_1}(b)} \right| - \left| 1 - \frac{K_{z_3}(b)}{K_{z_1}(b)} \right| - \frac{|K_{z_4}(b)|}{|K_{z_1}(b)|} \right) \\ &\geq \frac{\|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2}^2}{(N_1+1)^{\alpha+2}} \left[1 - \frac{2c_\alpha}{N_1(1-\beta_1)} - \frac{1}{4N_1} \right]. \end{aligned}$$

从而, 选取 N_1 使得

$$\frac{2c_\alpha}{N_1(1-\beta_1)} + \frac{1}{4N_1} \leq \frac{1}{2}, \quad (3.30)$$

由 (2.5) 可得

$$\|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \gtrsim (\operatorname{Im} b)^{1+\alpha/2} |G(b)| \geq \frac{\|K_{z_1}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}}{2(N_1+1)^{\alpha+2}}.$$

结合 (3.17), 该引理即证. $\square$

一旦满足 (3.12) 的 $\beta_1 \in (0, 1)$ 确定, 我们将选取 $N_1 \geq 2$ 和 $\beta_2 \in (\beta_1, 1)$ 使其满足 (3.13)–(3.16). 注意到 $\beta_1 < \beta_2 < 1$, 可以用 β_2 代替 β_1 从而找到 $N_2 \geq N_1$ 和 $\beta_3 \in (\beta_2, 1)$ 使得上述引理 3.1–3.4 对 (β_2, N_2, β_3) 成立. 重复该过程, 可找到 (β_3, N_3, β_4) 且

$$2 \tanh^{-1} \beta_3 \leq \tanh^{-1} \beta_4, \quad (3.31)$$

从而得到如下重要定理.

定理 3.3 令 $\alpha > -1$. 若 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \Pi^+$ 满足

$$\beta_4 \leq \max_{1 \leq i < j \leq 4} \rho(z_i, z_j), \quad (3.32)$$

则

$$\min\{Q_1, Q_2\} \approx \|G\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}. \quad (3.33)$$

证明 不失一般性, 假设

$$\min_{2 \leq j \leq 4} \operatorname{Im} z_j \geq \operatorname{Im} z_1 \quad \text{且} \quad \rho(z_1, z_2) \leq \rho(z_1, z_3).$$

由上述引理 3.1–3.4 可得 (3.33) 在以下 4 种情形都成立:

- (a) $\min_{2 \leq j \leq 4} \rho(z_1, z_j) \geq \beta_1$;
- (b) $\rho(z_1, z_4) \leq \beta_1$, $\rho(z_1, z_2) \notin [\beta_1, \beta_2]$ 且 $\beta_2 \leq \rho(z_1, z_3)$;
- (c) $\rho(z_1, z_2) \leq \beta_1$ 且 $\beta_2 \leq \min_{j=3,4} \rho(z_1, z_j)$;
- (d) $\max_{j=2,3} \rho(z_1, z_j) \leq \beta_1$ 且 $\beta_2 \leq \rho(z_1, z_4)$.

由 (3.31) 和 (3.32) 可得

$$\beta_3 \leq \max_{2 \leq j \leq 4} \rho(z_1, z_j).$$

除了上面所述的 4 种情形之外, 还应考虑余下 3 种情形:

- (b1) $\rho(z_1, z_4) \leq \beta_1 \leq \rho(z_1, z_2) \leq \beta_2$, $\beta_3 \leq \rho(z_1, z_3)$;
- (c1) $\rho(z_1, z_2) \leq \beta_1 \leq \rho(z_1, z_4) \leq \beta_2$, $\beta_3 \leq \rho(z_1, z_3)$;
- (c2) $\rho(z_1, z_2) \leq \beta_1 \leq \rho(z_1, z_3) \leq \beta_2$, $\beta_3 \leq \rho(z_1, z_4)$.

注意到, 用 (β_2, β_3) 代替 (β_1, β_2) , 则情形 (b1) 和 (c1) 可转化为情形 (b). 类似地, 情形 (c2) 可转化为情形 (d). 定理证毕. $\square$

4 主要结果的证明

定理 1.1 的证明 令 $s \in (\beta_4, 1)$, 由 (1.4) 可得

$$\|T\|_{HS(A_\alpha^2(\Pi^+))}^2 = \int_{\Pi^+ \setminus \Omega_s} \|K\|_{A_\alpha^2}^2 dA_\alpha + \int_{\Omega_s} \|K\|_{A_\alpha^2}^2 dA_\alpha,$$

其中 $K := K_{\varphi_1} - K_{\varphi_2} - K_{\varphi_3} + K_{\varphi_4}$. 一方面, 在 $\Pi^+ \setminus \Omega_s$ 上, 由定理 3.3 和 (1.3) 可得

$$\|K\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \approx \min\{R_1, R_2\};$$

另一方面, 在 Ω_s 上, 由定理 3.1 可得

$$\|K\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \approx R_3.$$

因此定理得证. $\square$

定理 1.2 的证明 令 $\varphi_1 = \varphi_4$, 则有 $R_1 = R_2 =: R$. 注意到

$$R = (\rho_{12} + \rho_{13})\|K_{\varphi_1}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} + \rho_{12}\|K_{\varphi_2}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} + \rho_{13}\|K_{\varphi_3}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}. \quad (4.1)$$

记

$$R_4 := (|\sigma_{12} + \sigma_{13}| + \rho_{12}^2 + \rho_{13}^2) \sum_{j=1}^3 \|K_{\varphi_j}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}.$$

在 Ω_s 上, 由定理 3.2 可得 $R_4 \approx R_3$. 因此, 只需要证明在 $\Pi^+ \setminus \Omega_s$ 上有

$$R_4 \approx \sum_{j=1}^3 \|K_{\varphi_j}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)} \approx R. \quad (4.2)$$

因为在 $\Pi^+ \setminus \Omega_s$ 上有

$$\rho_{12} + \rho_{13} \geq \max\{\rho_{12}, \rho_{13}\} \geq \frac{s}{2}, \quad (4.3)$$

故可得 $R_4 \approx \sum_{j=1}^3 \|K_{\varphi_j}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}$. 对于 $z \in \Pi^+ \setminus \Omega_s$, 不妨假设 $\rho_{12}(z) \leq \rho_{13}(z)$, 从而有 $\rho_{13}(z) \geq \frac{s}{2}$. 若 $\rho_{12}(z) \geq \frac{s}{2}$, 则由 (4.1) 可得

$$R(z) \approx \sum_{j=1}^3 \|K_{\varphi_j(z)}\|_{A_\alpha^2(\Pi^+)}. \quad (4.4)$$

若 $\rho_{12}(z) < \frac{s}{2}$, 则由 (4.1), (2.3) 和 (2.7) 可得 (4.4) 依然成立. 从而 (4.2) 成立, 定理得证. $\square$

注 4.1 由文献 [3, 例 7.8] 可知 $C_{\varphi_1} - C_{\varphi_2}$ 和 $C_{\varphi_3} - C_{\varphi_1}$ 在 $A^2(\Pi^+)$ 上是 Hilbert-Schmidt 算子当且仅当 $\delta > 1$. 应用定理 1.2 以及 (1.2), 经计算可得算子 L 在 $A^2(\Pi^+)$ 上为 Hilbert-Schmidt 算子当且仅当 $\delta > \frac{1}{2}$. 因为 $\frac{1}{2} < \delta \leq 1$, 故例 1.2 证毕.

参考文献

- 1 Choe B R, Choi K, Koo H, et al. Difference of weighted composition operators. J Funct Anal, 2020, 278: 108401
- 2 Choe B R, Hosokawa T, Koo H. Hilbert-Schmidt differences of composition operators on the Bergman space. Math Z, 2011, 269: 751–775
- 3 Choe B R, Koo H, Smith W. Difference of composition operators over the half-plane. Trans Amer Math Soc, 2017, 369: 3173–3205
- 4 Choe B R, Koo H, Smith W. Linear fractional composition operators over the half-plane. Integral Equations Operator Theory, 2018, 90: 27
- 5 Choe B R, Koo H, Wang M. Compact double differences of composition operators on the Bergman spaces. J Funct Anal, 2017, 272: 2273–2307
- 6 Choe B R, Koo H, Wang M. Compact linear combination of composition operators on Bergman spaces. J Funct Anal, 2020, 278: 108393
- 7 Cowen C, MacCluer B. Composition Operators on Spaces of Analytic Functions. Boca Raton: CRC Press, 1995
- 8 Elliott S J, Wynn A. Composition operators on weighted Bergman spaces of a half-plane. Proc Edinb Math Soc (2), 2011, 54: 373–379
- 9 Guo X, Wang M F. Compact linear combinations of composition operators over the unit ball. J Operator Theory, 2022, 88: 59–82
- 10 Guo X, Wang M F. Difference of composition operators on function spaces over the half-plane (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 1685–1696 [郭鑫, 王茂发. 半平面函数空间上复合算子的差分. 中国科学: 数学, 2023, 53: 1685–1696]
- 11 Koo H, Wang M. Cancellation properties of composition operators on Bergman spaces. J Math Anal Appl, 2015, 432: 1174–1182
- 12 MacCluer B D, Shapiro J H. Angular derivatives and compact composition operators on the Hardy and Bergman spaces. Canad J Math, 1986, 38: 878–906

- 13 Moorhouse J. Compact differences of composition operators. *J Funct Anal*, 2005, 219: 70–92
- 14 Pang C, Wang M. Difference of composition operators over the half-plane. *Sci China Math*, 2020, 63: 2299–2320
- 15 Saukko E. An application of atomic decomposition in Bergman spaces to the study of differences of composition operators. *J Funct Anal*, 2012, 262: 3872–3890
- 16 Shapiro J. *Composition Operators and Classical Function Theory*. New York: Springer-Verlag, 1993
- 17 Shapiro J, Sundberg C. Isolation amongst the composition operators. *Pacific J Math*, 1990, 145: 117–152
- 18 Wang M, Pang C. Compact double differences of composition operators over the half-plane. *Complex Anal Oper Theory*, 2018, 12: 261–292
- 19 Zhu K. *Operator Theory in Function Spaces*, 2nd ed. Providence: Amer Math Soc, 2007

Hilbert-Schmidt double differences of composition operators over the half plane

Xin Guo, Jingsong Chen & Maofa Wang

Abstract In this paper, we obtain a complete characterization for the Hilbert-Schmidt double difference of composition operators on the weighted Bergman spaces over the half plane. Furthermore, we construct an example to show that there exists the cancelation phenomenon for the Hilbert-Schmidtness of the degenerate double difference of composition operators over the half plane.

Keywords Bergman space, composition operator, Hilbert-Schmidt difference

MSC(2020) 47B33, 30H20

doi: 10.1360/SSM-2023-0340