



非一致双曲系统的周期逼近性质

献给文兰教授 80 寿辰

梁超^{1*}, 刘耿², 孙文祥^{3,4}

1. 中央财经大学统计与数学学院, 北京 100081;

2. 中国船舶集团有限公司系统工程研究院, 北京 100036;

3. 河北师范大学数学科学学院, 石家庄 050024;

4. 北京大学数学科学学院, 北京 100871

E-mail: chaol@cufe.edu.cn, smszy@pku.edu.cn, sunwx@math.pku.edu.cn

收稿日期: 2024-12-30; 接受日期: 2025-03-10; 网络出版日期: 2025-05-20; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12271538, 12071328, 11871487, 12090010, 12093157012 和 11831001) 和中央高校基本科研业务费专项资金资助项目

摘要 本文对非一致双曲系统的周期逼近性质作一个综述, 包括状态点被周期点逼近、不变测度被周期测度 (支撑在周期轨道上的原子测度) 逼近、不变测度的 Lyapunov 指数被周期测度的 Lyapunov 指数逼近、不变测度的无关数和格数被周期测度的无关数和格数逼近、不变测度的 Oseledec 分解的不变丛被周期测度的 Oseledec 分解的不变丛逼近等.

关键词 非一致双曲系统 Lyapunov 指数 周期测度 Oseledec 不变分解 无关数

MSC (2020) 主题分类 37D25, 37C27, 37C50

1 引言: 非一致双曲系统中的基本概念与性质

一致双曲系统的不变丛具有一致的扩张性或者压缩性, 简称为双曲性. 而非一致双曲系统的不变丛的双曲性是随点变化的, 用全测集上 Lyapunov 指数均非零来刻画. Lyapunov 指数衡量的是向量长度随时间演化的平均变化率.

设 M 为紧致光滑 Riemann 流形. 设 $f: M \rightarrow M$ 是 C^1 微分同胚. 用 TM 表示切丛, 用 $Df: TM \rightarrow TM$ 表示 f 的切映射.

定义 1.1 对 $x \in M$, $v \in T_x M$, $v \neq 0$, 如果

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|D_x f^n(v)\|$$

存在, 则称该极限值为向量 v 的 Lyapunov 指数.

英文引用格式: Liang C, Liu G, Sun W X. Periodic approximation of non-uniformly hyperbolic systems (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 677–686, doi: 10.1360/SSM-2024-0393

这里定义的 Lyapunov 指数以极限存在作为前提条件. 当极限不存在时, 称 Lyapunov 指数不存在. 类似地, 可定义向量在迭代过程 $n \rightarrow -\infty$ 时的 Lyapunov 指数.

对于保测的微分动力系统, Liao^[19] 于 1963 年率先建立了乘法遍历定理, 指出了全测集上所有非零向量的 Lyapunov 指数都存在. 1968 年, Oseledec^[20] 给出了被广泛接受的乘法遍历定理的形式.

定理 1.1 (乘法遍历定理^[19,20]) 设 f 是一个 d 维紧致 Riemann 流形 M 上的 C^1 微分同胚, 保持遍历测度 ω , 则

- (1) 存在正整数 $s \leq d$;
- (2) 存在 s 个不同的实数 $\lambda_1 < \cdots < \lambda_s$;
- (3) 存在正整数 $n_1, \dots, n_s$, 满足 $n_1 + \cdots + n_s = d$;
- (4) 存在一个 Borel 集 $O(\omega)$ (称作测度 ω 的 Oseledec 吸引域), 满足 $f(O(\omega)) = O(\omega)$ 和 $\omega(O(\omega)) = 1$;
- (5) 存在切空间的一个可测分解 (称为 Oseledec 分解)

$$T_x M = E_1(x) \oplus \cdots \oplus E_s(x)$$

满足 $\dim E_i(x) = n_i$ 和 $Df(E_i(x)) = E_i(fx)$,

使得对任意点 $x \in O(\omega)$ 和任意非零向量 $v \in E_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, s$, 成立

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{\log \|Df^n v\|}{n} = \lambda_i.$$

注 1.1 定理 1.1(3) 中的 n_i , 既是切空间 Oseledec 分解中第 i 个丛 E_i 的维数, 也是第 i 个 Lyapunov 指数的重数.

由乘法遍历定理可知, 给定保持概率测度的动力系统, 如果不具有零 Lyapunov 指数, 则它的非一致双曲集 (详见定义 1.2) 是该测度下全测的、不变的集合. 这样的测度称为双曲测度. 我们可以用系统最小的正 Lyapunov 指数替代一致双曲情形的扩张常数, 用最大的负 Lyapunov 指数的绝对值替代一致双曲情形的压缩常数.

定义 1.2 设 f 是紧致光滑 Riemann 流形 M 上的一个微分同胚. 称一个 f -不变的 Borel 子集 $\mathcal{R}$ 是非一致双曲的 (non-uniformly hyperbolic), 若满足以下条件:

- (1) 存在常数 λ 和 μ 满足 $0 < \lambda < 1 < \mu$.
- (2) 存在正常数 $\varepsilon \ll \lambda, \mu$, 以及两个从 $\mathcal{R}$ 到 $(0, \infty)$ 的 Borel 函数 C 和 K .
- (3) 对于 $\mathcal{R}$ 中的每一个点 x , 在切空间 $T_x M$ 中存在子空间 $E^s(x)$ 和 $E^u(x)$, 满足以下 5 个条件:

(H1) 子空间 $E^s(x)$ 和 $E^u(x)$ 随基点 x 可测变化, 并且构成切空间 $T_x M$ 的一个不变分解, 即

$$\begin{aligned} T_x M &= E^s(x) \oplus E^u(x), \\ D_x f E^s(x) &= E^s(fx), \quad D_x f E^u(x) = E^u(fx); \end{aligned}$$

(H2) 子空间 $E^s(x)$ 是稳定的, 即对于任意非零向量 $v \in E^s(x)$ 和任意正整数 $n > 0$, 有

$$\|D_x f^n v\| \leq C(x) \lambda^n e^{\varepsilon n} \|v\|;$$

(H3) 子空间 $E^u(x)$ 是不稳定的, 即对于任意非零向量 $v \in E^u(x)$ 和任意负整数 $n < 0$, 有

$$\|D_x f^n v\| \leq C(x) \mu^n e^{\varepsilon |n|} \|v\|;$$

(H4) 子空间 $E^s(x)$ 与 $E^u(x)$ 之间的夹角满足

$$\angle(E^s(x), E^u(x)) \geq K(x);$$

(H5) 对任意整数 $n \in \mathbb{Z}$, 成立

$$C(f^n(x)) \leq C(x)e^{\varepsilon|n|}, \quad K(f^n(x)) \geq K(x)e^{-\varepsilon|n|}.$$

注 1.2 在上述定义中, 如果 C 和 K 能够在整个 Borel 子集 $\mathcal{R}$ 一致选取 (与基点 x 无关), 则集合 $\mathcal{R}$ 被称作一致双曲的 (uniformly hyperbolic). 此时称 f 为一致双曲微分同胚. 进一步地, 若 $\mathcal{R}$ 取到全流形, 则称 f 为 Anosov 微分同胚.

定义 1.3 给定 3 个正数 $\lambda, \mu \gg \varepsilon > 0$ 和一个正整数 $k \in \mathbb{Z}^+$, 定义集合 $\Lambda_k = \Lambda_k(\lambda, \mu; \varepsilon)$, 它是由满足以下性质的 M 中的点 x 所构成的集合: 在 x 处的切空间存在一个不变分解 $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$ (即 $D_x f^m(E^s(x)) = E^s(f^m x)$ 且 $D_x f^m(E^u(x)) = E^u(f^m x)$), 使得

- (a) $\|Df^n|_{E^s(f^m x)}\| \leq e^{\varepsilon k} e^{-(\lambda-\varepsilon)n} e^{\varepsilon|m|}, \forall m \in \mathbb{Z}, n \geq 1;$
- (b) $\|Df^{-n}|_{E^u(f^m x)}\| \leq e^{\varepsilon k} e^{-(\mu-\varepsilon)n} e^{\varepsilon|m|}, \forall m \in \mathbb{Z}, n \geq 1;$
- (c) $\tan(\angle(E^s(f^m x), E^u(f^m x))) \geq e^{-\varepsilon k} e^{-\varepsilon|m|}, \forall m \in \mathbb{Z}.$

令 $\Lambda = \Lambda(\lambda, \mu; \varepsilon) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Lambda_k$. 集合 Λ 称为相对于正数 λ, μ 和 ε 的一个 Pesin 集.

Pesin 集的结构很复杂, 通常以分形形式存在, 不一定具有 Lebesgue 正测度. 无论是 Lyapunov 指数还是不变丛, 一般都是随基点 x 可测变化的, 并不是连续变化的. 也就是说, 当动点 y 逼近定点 x 时, 无论是在 y 上的 Lyapunov 指数还是丛, 都有可能与 x 点的指数和丛存在较大差异. 不同子丛之间的夹角也有这样的现象.

Katok^[8] 对于非一致双曲系统的封闭引理 (closing lemma) 指出, 双曲周期点在给定双曲测度的 Oseledec 吸引域的闭包中是稠密的. 这些观察和结论启发我们考虑一系列问题, 即如何寻找合适的周期点, 使得其轨道支撑的测度逼近 Pesin 集上事先给定的不变测度, 其 Lyapunov 指数逼近测度的指数, 其 Oseledec 不变丛分解逼近测度的不变丛分解等.

2 周期轨的存在性与稠性

周期轨道是动力系统最简单的回复形式, 在理解全局动力学中起着重要的作用. 然而, 并非所有系统都存在周期轨道, 如圆周上的无理旋转. 周期点的存在性、周期轨道的数量, 以及其数量的指数增长率均为重要课题. 笼统地讲, 周期轨道在一致双曲系统和非一致双曲系统中都是稠密的.

定理 2.1^[1] 设 $f: M \rightarrow M$ 为紧致光滑 Riemann 流形 M 上一个拓扑传递 (即具有稠密轨道) 的 C^1 一致双曲微分同胚, 则如下结论成立:

$$M = \text{Closure}(\text{Per}(f)).$$

定理 2.2^[8] 设 $f: M \rightarrow M$ 为紧致光滑 Riemann 流形 M 上一个 $C^{1+\alpha}$ 微分同胚, 保持遍历双曲测度 ω , 则如下结论成立:

$$\text{Supp}(\omega) \subseteq \text{Closure}(\text{Per}(f)).$$

正是由于周期点的稠密性, 我们才能够通过研究周期点上的动力学来观测整个系统的行为. 这主要包括各种逼近性质, 我们将在下面展开讨论.

3 Lyapunov 指数的周期逼近

对于周期为 p 的周期点 x , 记

$$\mu_x = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \delta_{f^i x}$$

为沿 x 的轨道定义的周期测度, 则 μ_x 是一个遍历测度. 由乘法遍历定理可知, 遍历测度 μ_x 的 Lyapunov 指数是常数, 即不随点变化.

2010 年, Wang 和 Sun^[23] 建立了 Lyapunov 指数的周期逼近定理. 定理指出, 双曲测度的 Lyapunov 指数可以由周期测度的 Lyapunov 指数逼近. 周期轨道因状态点有限, 其测度的 Lyapunov 指数容易计算, 于是双曲遍历测度的 Lyapunov 指数的渐近值容易计算. 双曲测度的 Oseledec 丛关于状态点是可测分布的, 一般不是连续分布的, 故 Lyapunov 指数逼近不是测度逼近性质 (定理 4.2) 的衍生结论. 在一致双曲系统中, 每个测度都是双曲测度, 其稳定丛和非稳定丛关于状态点是连续分布的, 而稳定丛和非稳定丛内的 Oseledec 子丛关于状态点是可测分布的. Wang 和 Sun^[23] 的 Lyapunov 指数逼近定理揭示了一致双曲系统和非一致双曲系统的一个基本逼近性质.

定理 3.1^[23] 设 f 是紧致的 d 维流形 M 上的一个 $C^{1+\alpha}$ 微分同胚, 它保持一个遍历双曲测度 μ , 且具有 Lyapunov 指数

$$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k < 0 < \lambda_{k+1} \leq \cdots \leq \lambda_d$$

(以重数计). 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在一个双曲周期点 x , 使得对于任意的 $i = 1, \dots, d$, 有

$$|\lambda_i - \lambda_i(\mu_x)| < \varepsilon,$$

其中 $\lambda_i(\mu_x)$ 表示周期测度 μ_x 的按递增顺序排列的第 i 个 Lyapunov 指数.

Katok 和 Hasselbatt 于 1995 年在文献 [9, 定理 S.5.4] 中, 对于二维流形, 就双曲测度的 Lyapunov 指数的最小绝对值 χ , 证明了存在周期测度, 其 Lyapunov 指数的最小绝对值从上侧逼近 χ .

4 测度的周期逼近

在概率测度空间中考察一系列测度 ν_n 和一个测度 μ , 如果对于所有连续函数 ϕ , 都有

$$\int \phi d\nu_n \rightarrow \int \phi d\mu, \quad \text{当 } n \rightarrow +\infty \text{ 时,}$$

则称测度序列 ν_n 依弱 * 拓扑收敛于测度 μ . 对于一个拓扑系统 (X, f) (X 是紧致度量空间, f 是其上的连续同胚), 记 $\mathcal{M}_{\text{inv}}(f)$ 为全体 f -不变测度的集合, 则 $\mathcal{M}_{\text{inv}}(f)$ 是一个紧致度量空间.

测度在理解动力系统的长期行为方面起着重要作用. 对于非一致双曲系统而言, 其行为相当复杂, 测度逼近有助于描述轨道的分布情况, 捕捉系统的统计特性, 深入了解系统随时间的演化情况. 周期测度逼近理论的研究受到 Bowen 和 Katok 的周期稠密定理^[2, 3, 6]启发. 用周期测度逼近给定不变测度需要进一步要求周期轨道足够长, 且其轨道的点分布与不变测度的测度分布相近. Sigmund 在测度逼近性质研究方面作出了基础性贡献.

定理 4.1^[22] 设 $f: M \rightarrow M$ 为紧致光滑 Riemann 流形 M 上一个 C^1 一致双曲微分同胚, 则周期测度在 $\mathcal{M}_{\text{inv}}(f)$ 中是稠密的.

对于非一致双曲情形, 2009 年 Liang 等^[15] 证明了不变测度均可以由周期测度逼近的性质. 给定一个遍历双曲测度 ω . 设 λ_s 为最大负 Lyapunov 指数的绝对值, λ_u 为最小正 Lyapunov 指数, 并选取 $0 < \varepsilon \ll \min\{\lambda_s, \lambda_u\}$. 则 $\Lambda = \Lambda(\lambda_s, \lambda_u; \varepsilon) = \bigcup_k \Lambda_k(\lambda_s, \lambda_u; \varepsilon)$ 就是一个 Pesin 集 (参见定义 1.3). 记

$$\tilde{\Lambda}_k = \text{Supp}(\omega|_{\Lambda_k}), \quad \tilde{\Lambda} = \bigcup_k \tilde{\Lambda}_k.$$

将 $\tilde{\Lambda}$ 称作与 ω 相关联的 Pesin 集. 显然, $\omega(\tilde{\Lambda}) = 1$. 记 $\mathcal{M}_{\text{inv}}(f, \tilde{\Lambda})$ 为支撑在 $\tilde{\Lambda}$ 上的所有 f -不变测度构成的集合.

定理 4.2^[15] 设 $f: M \rightarrow M$ 是紧致流形上的 $C^{1+\alpha}$ ($\alpha > 0$) 微分同胚, 保持一个遍历双曲测度 ω , 则周期测度在不变测度集合 $\mathcal{M}_{\text{inv}}(f, \tilde{\Lambda})$ 中是稠密的.

当测度 ω 是混合的 (mixing), Hirayama^[6] 于 2003 年证明了相同结论. 2011 年 Dai^[5] 证明了关于双曲测度驱动系统上的 Hölder 连续线性上链 (linear cocycle) 的测度逼近和 Lyapunov 指数逼近结果. 对于带奇点的流的情形, Li 等^[10] 于 2024 年证明了每一个非支撑在奇点上的遍历双曲测度都可以被周期测度逼近.

5 平均夹角、无关数与 Oseledec 分解的周期逼近

一致双曲系统和非一致双曲系统之间的区别之一是 Oseledec 不变丛之间的夹角差异: 前者是夹角一致地远离 0, 后者是夹角非一致地 (与基点有关) 远离 0. 涉及向量间的平均夹角这类问题的一个相关课题就是廖山涛先生的格数 (style number) 理论 (参见文献 [15]). 简单来说, 格数就是标架丛中平均线性无关的向量的最大个数.

设 $f: M \rightarrow M$ 是紧致光滑 Riemann 流形 M 的 C^1 微分同胚, 且设 $Df: TM \rightarrow TM$ 是切丛 TM 上的切映射. 对于任意整数 ℓ , $1 \leq \ell \leq \dim M = d$, 构造一个丛 $\mathcal{U}_\ell^\#(M) = \bigcup_{x \in M} \mathcal{U}_\ell^\#(x)$, 其中点 x 上的纤维是

$$\mathcal{U}_\ell^\#(x) = \{\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_\ell) \in T_x M \times T_x M \times \dots \times T_x M \mid \|u_i\| = 1, i = 1, \dots, \ell, \\ \text{且 } u_1, u_2, \dots, u_\ell \text{ 是线性无关向量}\}.$$

设 $\pi: \mathcal{U}_\ell^\#(M) \rightarrow M$ 是自然诱导的丛投射. 切映射 Df 诱导了 $\mathcal{U}_\ell^\#(M)$ 上的一个映射

$$D^\#f: \mathcal{U}_\ell^\#(M) \rightarrow \mathcal{U}_\ell^\#(M), \quad (u_1, u_2, \dots, u_\ell) \mapsto \left(\frac{Df u_1}{\|Df u_1\|}, \frac{Df u_2}{\|Df u_2\|}, \dots, \frac{Df u_\ell}{\|Df u_\ell\|} \right).$$

显然有 $\pi \circ D^\#f = f \circ \pi$.

对于在点 $x \in M$ 处的一个 ℓ -标架 $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_\ell) \in \mathcal{U}_\ell^\#(x)$, 定义

$$\text{Vol}(\alpha) = \text{Vol}(u_1, u_2, \dots, u_\ell)$$

为向量 $u_1, u_2, \dots, u_\ell$ 生成的平行六面体的体积. 更精确地, 选取一个正交 ℓ -标架 $\beta = (w_1, w_2, \dots, w_\ell)$, $w_i \in T_x M$, $i = 1, \dots, \ell$, 它生成与 α 相同的线性子空间, 并且取唯一的 $\ell \times \ell$ 矩阵 A 使得 $\alpha = \beta A$. 然后通过 $\text{Vol}(\alpha) = |\det A|$ 来定义 α 的体积. 体积 $\text{Vol}(\alpha)$ 不依赖于 β 的选择, 因为在两个正交标架之间过渡矩阵的行列式是 ± 1 . 因此, $\text{Vol}(\alpha)$ 是良定义的.

定义 5.1 给定点 $x \in M$ 处的一个标架 $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_l) \in \mathcal{U}_\ell^\#(x)$, 如果存在 $\varepsilon > 0$ 使得集合 $\{n \in \mathbb{Z}^+ \mid \text{Vol}(D^\# f^n \alpha) \geq \varepsilon\}$ 上的特征函数 $\chi_{\alpha\varepsilon}$ 具有正的时间均值, 即

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_{\alpha\varepsilon}(i) > 0,$$

则称标架 $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_l) \in \mathcal{U}_\ell^\#(x)$ 为正平均线性无关的. 对于任意正数 ε , 如果上述上极限为零, 则称 α 为正平均线性相关的. 类似定义负平均线性无关和线性相关.

设 $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_l) \in \mathcal{U}_\ell^\#$. 用 $A(\alpha)$ 表示矩阵 $(\langle u_i, u_j \rangle)_{\ell \times \ell}$, 其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示由 Riemann 度量诱导的内积. 设 $\sigma(\alpha)$ 是 $A(\alpha)$ 的所有特征值构成的集合, 并且设 $\tau(\alpha)$ 是最小特征值. 注意 $A(\alpha)$ 是一个实正定对称矩阵, 因此, $\sigma(\alpha) \subset (0, +\infty)$. 现在给出一个平均线性无关性的替代描述.

定义 5.2 称一个标架 $\alpha \in \mathcal{U}_f^\#$ 是正平均线性无关的, 如果

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \tau(D^\# f^i \alpha) > 0.$$

类似定义负平均线性无关.

下面给出廖山涛先生的格数定义.

定义 5.3 ^[19] (1) 设 $x \in M$, 令

$$k_+^*(x) := \max\{\ell \mid \text{存在 } \alpha \in \mathcal{U}_f^{\ell\#}, \text{ 使得 } \alpha \text{ 是正平均线性无关的}\}.$$

称 $k_f^+(x)$ 为 f 在 x 处的正格数. 类似定义负格数.

(2) 设 $F \subseteq M$ 是一个 f -不变子集. F 的正格数 $k_f^+(F)$ 和负格数 $k_f^-(F)$ 分别定义为

$$k_+^*(F) := \sup_{x \in F} k_+^*(x) \quad \text{和} \quad k_-^*(F) := \sup_{x \in F} k_-^*(x).$$

F 的格数 $k_f^*(F)$ 定义为

$$k^*(F) := \max\{k_+^*(F), k_-^*(F)\}.$$

由定义不难发现, 一个系统的格数不小于 Lyapunov 指数的个数, 但并不一定等于 Lyapunov 指数的个数. 格数可以更细致地描述 Oseledec 不变丛中两个不同方向在微分同胚迭代下的渐近性质. 关于格数的理论参见文献 [4, 15, 19]. 定义格数所使用的平均线性无关概念有两个等价形式 (定义 5.1 和 5.2), 其中定义 5.2 由 Liang 等 ^[15] 于 2009 年给出, 进而引出了无关数 (independent number) 的概念, 以描述向量的平均线性无关的程度.

定义 5.4 (1) 设 $\alpha \in \mathcal{U}_\ell^\#$. 称上极限

$$\tilde{\tau}(\alpha) := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \tau(D^\# f^i \alpha)$$

为 α 的无关数.

(2) 对任意 $\mu \in M_{\text{erg}}(\mathcal{U}_\ell^\#, D^\# f)$, 定义 μ 的无关数为

$$\tilde{\tau}(\mu) := \sup\{\tilde{\tau}(\alpha) \mid \alpha \in Q_\mu(\mathcal{U}_\ell^\#, D^\# f)\},$$

其中,

$$Q_\mu(\mathcal{U}_\ell^\#, D^\# f) = \left\{ \alpha \in \mathcal{U}_\ell^\# \mid \text{对任意有界连续函数 } \phi: \mathcal{U}_\ell^\# \rightarrow \mathbb{R}, \text{ 成立 } \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi(D^\# f^i \alpha) = \int \phi d\mu \right\}.$$

于是 $\tau(\cdot)$ 是一个从 $\mathcal{U}_\ell^\#$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数.

注 5.1 在上述定义中用 $\text{Vol}(D^\# f^i \alpha)$ 替换 $\tau(D^\# f^i \alpha)$, 可得到无关数的另一种描述.

下面给出两个不变子丛之间平均夹角的定义.

定义 5.5 设 E 和 F 是 TM 的两个 Df -不变子丛. $E(x)$ 与 $F(x)$ ($x \in M$) 之间的夹角定义为

$$\sin \angle(E(x), F(x)) := \inf_{0 \neq u \in E(x), 0 \neq v \in F(x)} \sin \angle(u, v) = \inf_{0 \neq u \in E(x), 0 \neq v \in F(x)} \frac{\|u \wedge v\|}{\|u\| \|v\|},$$

其中 $\wedge$ 表示外积. 称

$$m\angle(E(x), F(x)) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \angle(Df^i E(x), Df^i F(x))$$

为 E 与 F 在 x 处的平均夹角.

设 $f: M \rightarrow M$ 是一个保持遍历双曲测度 $\tilde{\omega}$ 的 $C^{1+\alpha}$ 微分同胚, 并记 $d = \dim M$. 设

$$T_x M = E_1(x) \oplus E_2(x) \oplus \cdots \oplus E_s(x), \quad s \leq d = \dim M, \quad x \in O(\tilde{\omega})$$

为按照 $\tilde{\omega}$ 的 Lyapunov 指数递增顺序排列的 Oseledec 分解. 由 Birkhoff 遍历定理可知, 在 $O(\tilde{\omega})$ 中存在一个 $\tilde{\omega}$ -全测集, 使得该子集中的每一个点 x 都满足

$$m\angle_{\tilde{\omega}}(E_i(x), E_j(x)) = \int_{O(\tilde{\omega})} \angle(E_i(y), E_j(y)) d\tilde{\omega}(y).$$

对于所有 $1 \leq i \neq j \leq d$, 将 $\int_{O(\tilde{\omega})} \angle(E_i(y), E_j(y)) d\tilde{\omega}(y)$ 称为 E_i 与 E_j 之间的平均夹角, 并将其记为 $m\angle_{\tilde{\omega}}(E_i, E_j)$.

现在陈述关于 Oseledec 不变子丛间平均夹角、无关数和 Oseledec 丛的逼近性质. 这些性质先由 Liang 等^[15] 针对具有单谱的微分同胚证明, 2014 年 Liang 等^[14] 将结论推广到一般情形.

定理 5.1^[14, 15] 设 $f: M \rightarrow M$ 是一个 $C^{1+\alpha}$ 微分同胚, 保持遍历双曲测度 $\tilde{\omega}$. 令

$$T_\Lambda M = E_1(\Lambda) \oplus E_2(\Lambda) \oplus \cdots \oplus E_s(\Lambda), \quad \dim(E_i) = n_i, \quad 1 \leq i \leq s \leq \dim M$$

为按照 Lyapunov 指数递增顺序排列的 Oseledec 分解, 其中 $\Lambda = \bigcup_{k=1}^\infty \Lambda_k$ 是与 $\tilde{\omega}$ 相关的 Pesin 集. 给定 $\varepsilon > 0$, 存在一个双曲周期轨道 $\text{Orb}(z, f)$ 及其 Oseledec 分解

$$T_{f^j z} M = E_1(f^j z) \oplus E_2(f^j z) \oplus \cdots \oplus E_s(f^j z), \quad \dim(E_i) = n_i, \quad 1 \leq i \leq s, \quad 1 \leq j \leq p,$$

其中 $p = p(\varepsilon)$ 为 $\text{Orb}(z, f)$ 的最小正周期, 子丛按照轨道 $\text{Orb}(z, f)$ 的 Lyapunov 指数递增顺序排列, 则 $\text{Orb}(z, f)$ 上支撑的周期测度 ω_z 在弱 * 拓扑下 ε -逼近 $\tilde{\omega}$, 且满足以下性质:

(1) $\tilde{\omega}$ 与 ω_z 的平均夹角是 ε -接近的, 即

$$|m\angle_{\tilde{\omega}}(E_i(\Lambda), E_j(\Lambda)) - m\angle_{\omega_z}(E_i(\text{Orb}(z)), E_j(\text{Orb}(z)))| < \varepsilon, \quad \forall 1 \leq i \neq j \leq s;$$

(2) $\tilde{\omega}$ 与 ω_z 的无关数是 ε - 接近的, 即

$$|\tilde{\tau}(\tilde{\omega}) - \tilde{\tau}(\omega_z)| < \varepsilon;$$

(3) $\tilde{\omega}$ 的 Oseledec 分解被 ω_z 的 Oseledec 分解 ε - 逼近.

源于第 2 节介绍的 Bowen 和 Katok 的周期轨稠密定理^[2,3,6], 第 3 节的 Lyapunov 指数周期逼近性质, 第 4 节的周期测度逼近性质, 本节的 Oseledec 分解、平均夹角与无关数的逼近性质, 均能够被相同双曲周期轨道实现这些逼近. 这样, 我们共同强化了周期轨稠密定理, 给出了不仅关于状态系统, 还涉及其线性化的更广泛信息.

6 应用与精细化: 周期点 (轨) 个数的指数增长率

1978 年, Bowen^[2] 提出了如下问题: 熵等式

$$h(f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sharp P_n(f)$$

是否对通有的 C^r 微分同胚 f 成立, 其中 $P_n(f) = \{x : f^n x = x\}$, 并且 $\sharp A$ 表示集合 A 的基数?

对于满足公理 A^[2] 的微分同胚 f (即 f 的非游荡集 $\Omega(f)$ 具有双曲结构, 且周期点在 $\Omega(f)$ 中稠密), 等式成立. 但一般情形下, 等式并不一定成立. 2004 年, Kaloshin^[7] 指出, 一般而言 $\sharp P_n(f)$ 的指数增长率是无界的, 进而等式无法成立. 对于非一致双曲系统的情形, Katok^[8] 于 1980 年针对遍历双曲测度 μ 证明了如下不等式:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sharp P_n(f) \geq h_\mu(f), \quad (*)$$

其中 $h_\mu(f)$ 表示 μ 的测度熵. 接下来的问题是, 上式是否有可能取到等号呢? 答案是肯定的, 但需要对逼近速率有所限制. 额外的收获是, 可以兼顾测度的周期逼近和指数的周期逼近. μ 为遍历测度的情形由 Liao 等^[17] 证明, μ 为不变测度的情形由 Liao 等^[18] 证明.

用 $\mathcal{E}_n(f)$ 表示所有 n - 周期测度构成的集合. 对于正实数 δ , 考察由所有 δ - 逼近 μ 且满足指数逼近性质的 n - 周期测度组成的集合:

$$\Upsilon_n(\mu, \delta) = \{\nu_p \in \mathcal{E}_n(f) \mid D(\nu_p, \mu) < \delta, |\tilde{\lambda}_i(p) - \tilde{\lambda}_i(\mu)| < \delta, 1 \leq i \leq d\},$$

其中 $\tilde{\lambda}_i(p)$ 表示 ν_p 支撑的周期轨上的第 i 个 Lyapunov 指数, $\tilde{\lambda}_i(\mu)$ 表示 μ 支撑的系统上的第 i 个 Lyapunov 指数, 每组指数均依重数依递减顺序排列, $D(\cdot, \cdot)$ 表示测度空间弱 * 拓扑下的一个度量.

定理 6.1 (遍历测度情形^[17]) 设 f 是紧致流形 M 上的一个 $C^{1+\alpha}$ ($\alpha > 0$) 微分同胚, 它保持一个遍历双曲测度 μ , 则有

$$\sup_{\eta \in F} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \sharp \Upsilon_n(\mu, \eta_n) = h_\mu(f),$$

其中

$$F = \left\{ \eta = \{\eta_n\}_{n=1}^{+\infty} \mid \eta_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0 \right\}.$$

而且, 存在 $\eta \in F$ 满足

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \sharp \Upsilon_n(\mu, \eta_n) = h_\mu(f).$$

2020 年, Liang 等^[16] 推广了上述双曲测度的熵等式到压等式.

定理 6.2^[16] 设 f 是紧致流形 M 上的一个 C^{1+r} ($r > 0$) 微分同胚, 保持双曲测度 μ . 设 $\phi \in C(M)$, 则有

$$\sup_{\eta \in F} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\nu_p \in \Upsilon_n(\mu, \eta_n)} e^{S_n \phi(p)} = h_\mu(f) + \int \phi d\mu,$$

其中

$$F = \left\{ \eta = \{\eta_n\}_{n=1}^{+\infty} \mid \eta_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0 \right\},$$

且 $S_n(p) = \phi(p) + \cdots + \phi(f^{n-1}p)$. 而且, 存在 $\eta \in F$ 满足

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu_p \in \Upsilon_n(\mu, \eta_n)} e^{S_n \phi(p)} = h_\mu(f) + \int \phi d\mu.$$

对于可分的 Hilbert 空间上的 Fréchet 导数, 在某些紧致和遍历性假设下, Lian 和 Lu^[11] 以及 Lian 和 Young^[12, 13] 将 Katok 证明的不等式 (*) 推广到了无穷维空间. Ren 和 Zhou^[21] 于 2024 年推广了指数逼近性质以及定理 6.1 的单边结论. 因为空间非紧, 所以 n - 双曲周期点的有限性并非必然能够达成. 因此, 在无穷维空间中, 相关结论仅能确保不等式成立.

致谢 感谢审稿人对稿件的认真阅读以及提出的宝贵建议.

参考文献

- 1 Bowen R. Topological entropy and Axiom A. *Proc Symp Pure Math Amer Math Soc*, 1970, 14: 23–42
- 2 Bowen R. Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms. *Trans Amer Math Soc*, 1971, 154: 377–397
- 3 Bowen R. Periodic orbits for hyperbolic flows. *Amer J Math*, 1972, 94: 1–30
- 4 Dai X P. Liao style numbers of differential systems. *Commun Contemp Math*, 2004, 6: 279–299
- 5 Dai X P. Exponential closing property and approximation of Lyapunov exponents of linear cocycles. *Forum Math*, 2011, 23: 321–347
- 6 Hirayama M. Periodic probability measures are dense in the set of invariant measures. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2003, 9: 1185–1192
- 7 Kaloshin V Y. An extension of the Artin-Mazur theorem. *Ann of Math (2)*, 1999, 150: 729–741
- 8 Katok A. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Publ Math Inst Hautes Études Sci*, 1980, 51: 137–173
- 9 Katok A, Hasselbatt B. *Introduction to Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1995
- 10 Li M, Liang C, Liu X Z. A closing lemma for non-uniformly hyperbolic singular flows. *Comm Math Phys*, 2024, 405: 195
- 11 Lian Z, Lu K N. Lyapunov exponents and invariant manifolds for random dynamical systems in a Banach space. *Memoirs of the American Mathematical Society*, no. 967. Providence: Amer Math Soc, 2010
- 12 Lian Z, Young L S. Lyapunov exponents, periodic orbits and horseshoes for mappings of Hilbert spaces. *Ann Henri Poincaré*, 2011, 12: 1081–1108
- 13 Lian Z, Young L S. Lyapunov exponents, periodic orbits, and horseshoes for semiflows on Hilbert spaces. *J Amer Math Soc*, 2012, 25: 637–665
- 14 Liang C, Liao G, Sun W X. A note on approximation properties of the Oseledets splitting. *Proc Amer Math Soc*, 2014, 142: 3825–3838
- 15 Liang C, Liu G, Sun W X. Approximation properties on invariant measure and Oseledets splitting in non-uniformly hyperbolic systems. *Trans Amer Math Soc*, 2009, 361: 1543–1579
- 16 Liang C, Qian S, Sun W X. Pressure and exponential rate over periodic orbits. *J Math Anal Appl*, 2020, 486: 123886
- 17 Liao G, Sun W X, Tian X T. Metric entropy and the number of periodic points. *Nonlinearity*, 2010, 23: 1547–1558
- 18 Liao G, Sun W X, Yang Y. Exponential rate of periodic points and metric entropy in nonuniformly hyperbolic systems. *J Math Anal Appl*, 2016, 434: 1253–1266
- 19 Liao S T. Certain ergodic theorems for differential systems on a compact differentiable manifold (in Chinese). *Acta Sci Natur Univ Pekinensis*, 1963, 9: 241–265, 309–326 [廖山涛. 紧致微分流形上常微分方程系统的某类诸态备经

- 性质. 北京大学学报 (自然科学版), 1963, 9: 241–265, 309–326]. English translation appears as Chapter 1 in Liao’s book “Qualitative Theory on Differentiable Dynamical Systems”. Beijing-New York: Science Press, 1996
- 20 Oseledec V I. A multiplicative ergodic theorem and Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. Trans Moscow Math Soc, 1968, 19: 197–231
- 21 Ren X K, Zhou Y H. Shadowing for nonuniformly hyperbolic maps in Hilbert spaces. Nonlinearity, 2024, 37: 1–28
- 22 Sigmund K. On dynamical systems with the specification property. Trans Amer Math Soc, 1974, 190: 285–299
- 23 Wang Z Q, Sun W X. Lyapunov exponents of hyperbolic measures and hyperbolic periodic orbits. Trans Amer Math Soc, 2010, 362: 4267–4282

Periodic approximation of non-uniformly hyperbolic systems

Chao Liang, Geng Liu & Wenxiang Sun

Abstract In this paper, we give a review of the periodic approximation properties of non-uniformly hyperbolic systems, including the approximation of state points by periodic points, the approximation of invariant measures by periodic measures (atomic measures supported on periodic orbits), the approximation of the Lyapunov exponents of invariant measures by the Lyapunov exponents of periodic measures, the approximation of the independent numbers and style numbers of invariant measures by the independent numbers and style numbers of periodic measures, and the approximation of the invariant bundles of the Oseledec decomposition of invariant measures by the Oseledec invariant bundles of periodic measures.

Keywords non-uniformly hyperbolic system, Lyapunov exponent, periodic measure, Oseledec invariant splitting, independent number

MSC(2020) 37D25, 37C27, 37C50

doi: 10.1360/SSM-2024-0393