中国科学: 数学 2026 年 第 56 卷 第 1 期: 73 ∼ 92
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark click for updates

次线性期望下 m 相依平稳随机变量的强大数律

献给林正炎教授 85 寿辰

顾王韫[1], 张立新[2,3]*

1. 浙江大学数学科学学院, 杭州 310058;
2. 浙江工商大学统计与数学学院, 杭州 310018;
3. 浙江大学数据科学研究中心, 杭州 310058
E-mail: 12135027@zju.edu.cn, stazlx@mail.zjgsu.edu.cn

收稿日期: 2023-12-09; 接受日期: 2025-01-17; 网络出版日期: 2025-02-17; * 通信作者
国家重点研发计划 (批准号: 2024YFA1013502) 和国家自然科学基金 (批准号: U23A2064 和 12031005) 资助项目

摘要 本文在次线性期望框架下建立了 m 相依平稳随机变量的强大数定律. 首先建立独立但不一定同分布随机变量序列的一般强大数律, 以此为工具将独立同分布随机变量序列的强大数律扩展到 m 相依平稳且满足条件 $C_{\mathbb{V}}(|X_1|) < \infty$ 的随机变量序列. 本文还证明了这个条件是 m 相依同分布的序列满足强大数律的必要条件.

关键词 次线性期望 容度 大数定律 m 相依 平稳

MSC (2020) 主题分类 60F15

1 引言

经典大数定律是概率论的基石, 随着样本量的增长, 支撑着样本平均值的可预测行为. 著名的 Kolmogorov 强大数定律 [3] 通常假设随机变量序列是独立同分布的. 然而, 这种假设并没有考虑到现实世界数据的复杂性, 现实世界数据通常涉及观测值之间的不同分布和相依性. 经典大数定律和中心极限定理被推广到各种相依变量的情形. 林正炎自 1965 年首次发表关于相依变量的极限理论的文献 [6] 开始, 在相依变量的各种强弱极限定理方面开展了数十年的研究, 发表了 90 多篇相关论文 1), 1997 年出版的专著 [9] 总结了其在混合相依变量方面的成果. 作为独立性的直接拓展, m 相依是一种常见的弱化条件. 林正炎 [7,8] 分别于 1980 和 1981 年给出了方差不存在时 m 相依平稳随机变量的中心极限定理和弱不变原理. 相比于中心极限定理, 在经典的概率框架下, 由于期望和概率的可加性, m 相依随机变量序列的大数律可以比较容易地由独立变量情形的结果获得, 比较近期的工作有 Zhang [17] 和 Thanh [15] 证明的成块 m 相依和成对 m 相依的随机变量序列的强大数律.

1) https://mathscinet.ams.org/mathscinet/author?authorId=191973.

英文引用格式: Gu W Y, Zhang L-X. Strong law of large numbers for m-dependent and stationary random variables under sub-linear expectations (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 73–92, doi: 10.1360/SSM-2023-0334

© 2025《中国科学》杂志社

Peng[11] 提出的次线性期望通过放宽经典期望的线性和可加性条件, 提供了处理不确定性的框架, 并证明了弱大数律和中心极限定理. 林正炎在浙江大学组织讨论班研读次线性期望理论, 极力推崇次线性期望极限理论的研究. Lin 和 Zhang[10] 证明了独立同分布随机变量的部分和过程自正则化后弱收敛于一个由二次变差正则化的 G-Brown 运动, 获得了极限有别于经典概率论中对应极限的自正则化中心极限定理和泛函中心极限定理. Chen[1] 和 Zhang[18] 证明了次线性期望下独立同分布随机变量的强大数律. 为了获得精确的极限和极限点集, Chen[1] 和 Zhang[18] 假设与次线性期望相关的容度是连续的. Zhang[19] 发现容度连续是一个非常苛刻的条件, 证明了如果一个次线性期望空间上有一列独立同分布的随机变量并且容度是连续的, 则次线性期望就退化为线性期望. 在最近的工作中, Song[14] 对 Polish 空间上用一族弱紧概率测度表示的次线性期望, 在 $1+\alpha$ 阶矩条件下获得了独立同分布随机变量的强大数律; Zhang[20] 在一般空间上为强大数律给出一个关于次线性期望和容度的合理条件, 建立了次线性期望下独立同分布随机变量的强大数律成立的充分必要条件. 然而, 在次线性期望框架下, 对非独立的随机变量的极限性质的研究比较稀少. Lin[5] 使用 Li[4] 的方法证明了 m 相依随机变量的弱大数律. 本文旨在将强大数律从独立情形扩展到 m 相依情形. 由于次线性期望的不可加性和容度的不连续性, 在 m 相依情形, 最基础的大数律也不能由关于独立同分布随机变量的结果直接获得. 首先, 我们证明一个关于次线性期望下独立但不相同分布随机变量序列的一般强大数律, 以此为基础, 我们借鉴林正炎[6,8] 采用的大块小块分段技术得到了 m 相依的线性平稳随机变量的强大数定律, 其条件与独立同分布情形一样弱. 同时, 我们还证明了即使是对于 m 相依的同分布变量, Choquet 期望存在仍然是强大数律成立的必要条件.

本文余下部分内容的结构如下. 第 2 节简要介绍次线性期望的框架. 第 3 节给出本文的主要结果. 第 4 节列出证明所需要的不等式和一些性质. 第 5 节给出主要结果的详细证明.

2 基本设定

我们使用 Peng[11–13] 的框架和符号. 令 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为给定的可测空间, 并令 $\mathscr{H}$ 为在 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上定义的实函数的线性空间, 满足条件: 如果 $X_1,\dots,X_n\in\mathscr{H}$, 则 $\varphi(X_1,\dots,X_n)\in\mathscr{H}$ 对于任意 $\varphi\in C_{l,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^n)$ 成立, 其中 $C_{l,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^n)$ 表示局部 Lipschitz 函数 φ 构成的线性空间, 即 $\varphi\in C_{l,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当存在某个依赖于 φ 的常数 $C>0$, $m\in\mathbb{N}$, 有

$$|\varphi(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{y})|\leqslant C(1+|\boldsymbol{x}|^m+|\boldsymbol{y}|^m)|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|,\quad\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n.$$

$\mathscr{H}$ 被视为 "随机变量" 的空间, 在这种情形下, 记 $X\in\mathscr{H}$. 用 $C_{b,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^n)$ 表示有界 Lipschitz 函数的空间.

定义 2.1 在空间 $\mathscr{H}$ 上的次线性期望 $\widehat{\mathbb{E}}:\mathscr{H}\to\bar{\mathbb{R}}$ 是一个满足以下性质的函数: 对于所有的 $X,Y\in\mathscr{H}$,

(a) 如果 $X\geqslant Y$, 则 $\widehat{\mathbb{E}}[X]\geqslant\widehat{\mathbb{E}}[Y]$;

(b) $\widehat{\mathbb{E}}[c]=c$;

(c) 当 $\widehat{\mathbb{E}}[X]$ 和 $\widehat{\mathbb{E}}[Y]$ 不是一个为 $+\infty$ 且另一个为 $-\infty$ 情形时, 有 $\widehat{\mathbb{E}}[X+Y]\leqslant\widehat{\mathbb{E}}[X]+\widehat{\mathbb{E}}[Y]$;

(d) 对于 $\lambda>0$, 有 $\widehat{\mathbb{E}}[\lambda X]=\lambda\widehat{\mathbb{E}}[X]$,

这里, $\bar{\mathbb{R}}=[-\infty,\infty]$, $0\cdot\infty$ 定义为 0. 三元组 $(\Omega,\mathscr{H},\widehat{\mathbb{E}})$ 被称为次线性期望空间. 给定一个次线性期望 $\widehat{\mathbb{E}}$, $\widehat{\mathcal{E}}$ 表示 $\widehat{\mathbb{E}}$ 的共轭期望, 即

$$\widehat{\mathcal{E}}[X]:=-\widehat{\mathbb{E}}[-X],\quad\forall\,X\in\mathscr{H}.$$

从定义中容易得出, 对于所有 $X,Y\in\mathscr{H}$ 且 $\widehat{\mathbb{E}}[Y]$ 是有限的, 有 $\widehat{\mathcal{E}}[X]\leqslant\widehat{\mathbb{E}}[X]$, $\widehat{\mathbb{E}}[X+c]=\widehat{\mathbb{E}}[X]+c$, 以及 $\widehat{\mathbb{E}}[X-Y]\geqslant\widehat{\mathbb{E}}[X]-\widehat{\mathbb{E}}[Y]$. 我们还将 $\widehat{\mathbb{E}}[X]$ 和 $\widehat{\mathcal{E}}[X]$ 分别称为 X 的上期望和下期望.

定义 2.2 (i) (同分布) 设 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$ 分别是定义在次线性期望空间 $(\Omega_1,\mathscr{H}_1,\widehat{\mathbb{E}}_1)$ 和 $(\Omega_2,\mathscr{H}_2,\widehat{\mathbb{E}}_2)$ 上的两个 n 维随机向量. 如果对于任意 $\varphi\in C_{b,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^n)$ 都有

$$\widehat{\mathbb{E}}_1[\varphi(\boldsymbol{X}_1)]=\widehat{\mathbb{E}}_2[\varphi(\boldsymbol{X}_2)],$$

则称它们同分布, 记作 $\boldsymbol{X}_1\overset{d}{=}\boldsymbol{X}_2$. 如果对于每个 $i\geqslant 1$ 都有 $X_i\overset{d}{=}X_1$, 则称一列随机变量 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 同分布.

(ii) (独立) 在次线性期望空间 $(\Omega,\mathscr{H},\widehat{\mathbb{E}})$ 中, 称随机向量 $\boldsymbol{Y}=(Y_1,\ldots,Y_n)$, $Y_i\in\mathscr{H}$ 在 $\widehat{\mathbb{E}}$ 下独立于另一个随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_m)$, $X_i\in\mathscr{H}$, 如果对于每个测试函数 $\varphi\in C_{b,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)$ 都有

$$\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})]=\widehat{\mathbb{E}}[\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y})]|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}}].$$

(iii) (独立随机变量) 如果对于每个 $i\geqslant 1$, X_{i+1} 独立于 $(X_1,\ldots,X_i)$, 则称一列随机变量 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 独立.

(iv) (m 相依) 如果存在一个整数 m 使得对于每个 n 和每个 $j\geqslant m+1$, $(X_{n+m+1},\ldots,X_{n+j})$ 独立于 $(X_1,\ldots,X_n)$, 则称一列随机变量 (或随机向量) $\{X_n;n\geqslant 1\}$ m 相依. 特别地, 如果 $m=0$, 则 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是一个独立序列.

(v) (平稳) 如果对于每个正整数 n 和 p, 有 $(X_1,\ldots,X_n)\overset{d}{=}(X_{1+p},\ldots,X_{n+p})$, 则称一列随机变量 (或随机向量) $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 平稳.

(vi) (线性平稳) 如果对于每个正整数 n 和 p, 有 $X_1+\cdots+X_n\overset{d}{=}X_{1+p}+\cdots+X_{n+p}$, 则称一列随机变量 (或随机向量) $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 线性平稳.

注 2.1 在同分布和独立性的定义中, 这里的测试函数 φ 的范围 $\varphi\in C_{b,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^n)$ 与 Peng [11–13] 的 $\varphi\in C_{l,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^n)$ 略有不同, 这是为了保证所涉及的函数的次线性期望都存在, 无需讨论期望存在性的问题.

容易看出, 如果 $\{X_1,\ldots,X_n\}$ 是独立且有界的随机变量, 则 $\widehat{\mathbb{E}}[\sum_{i=1}^n X_i]=\sum_{i=1}^n\widehat{\mathbb{E}}[X_i]$.

接下来, 考虑与次线性期望相对应的容度. 设 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$. 称函数 $V:\mathcal{G}\to[0,1]$ 为容度, 如果它满足

$$V(\emptyset)=0,\quad V(\Omega)=1,\quad V(A)\leqslant V(B),\quad \forall\, A\subset B,\quad A,B\in\mathcal{G}.$$

如果对于所有的 $A,B\in\mathcal{G}$ 且 $A\cup B\in\mathcal{G}$, 都有 $V(A\cup B)\leqslant V(A)+V(B)$, 则称它为次可加的.

设 $(\Omega,\mathscr{H},\widehat{\mathbb{E}})$ 为一个次线性期望空间. 设 $(\mathbb{V},\mathcal{V})$ 为一对具有以下性质的容度对:

$$\text{对任意 } f\leqslant I_A\leqslant g,\ f,g\in\mathscr{H} \text{ 和 } A\in\mathcal{F},\ \text{有 } \widehat{\mathbb{E}}[f]\leqslant\mathbb{V}(A)\leqslant\widehat{\mathbb{E}}[g], \tag{2.1}$$

其中 $\mathbb{V}$ 是次可加的, 而 $\mathcal{V}(A):=1-\mathbb{V}(A^c)$, $A\in\mathcal{F}$. 我们分别称 $\mathbb{V}$ 和 $\mathcal{V}$ 为上容度和下容度.

此外, 通过以下公式定义了 Choquet 积分/期望 $(C_{\mathbb{V}},C_{\mathcal{V}})$:

$$C_V[X]=\int_0^\infty V(X\geqslant t)dt+\int_{-\infty}^0[V(X\geqslant t)-1]dt,$$

其中 V 分别被 $\mathbb{V}$ 和 $\mathcal{V}$ 所代替. 如果在次线性期望空间 $(\Omega,\mathscr{H},\widehat{\mathbb{E}})$ 上的 $\mathbb{V}$ 以及在次线性期望空间 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{H}},\widetilde{\mathbb{E}})$ 上的 $\widetilde{\mathbb{V}}$ 是两个具有性质 (2.1) 的容度, 则对于任意满足 $X\overset{d}{=}\widetilde{X}$ 的随机变量 $X\in\mathscr{H}$ 和 $\widetilde{X}\in\widetilde{\mathscr{H}}$, 都有

$$\mathbb{V}(X\geqslant x+\epsilon)\leqslant\widetilde{V}(\widetilde{X}\geqslant x)\leqslant\mathbb{V}(X\geqslant x-\epsilon),\quad\forall\, x,\epsilon>0 \tag{2.2}$$

和 $C_{\mathbb{V}}[X]=C_{\widetilde{\mathbb{V}}}[\widetilde{X}]$.

通常, 选择 $(\mathbb{V},\mathcal{V})$ 为

$$\widehat{\mathbb{V}}(A):=\inf\{\widehat{\mathbb{E}}[\xi]:I_A\leqslant\xi,\xi\in\mathscr{H}\},\quad \widehat{\mathcal{V}}(A)=1-\widehat{\mathbb{V}}(A^c),\quad \forall\, A\in\mathcal{F}.$$

因为 $\widehat{\mathbb{V}}$ 可能不是可列次可加的, 因此 Borel-Cantelli 引理不成立, 考虑其可列次可加的扩展 $\widehat{\mathbb{V}}^*$, 它由下面的公式定义:

$$\widehat{\mathbb{V}}^*(A):=\inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{\mathbb{V}}(A_n):A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big\},\quad \widehat{\mathcal{V}}^*(A)=1-\widehat{\mathbb{V}}^*(A^c),\quad A\in\mathcal{F}.$$

正如 Zhang[18] 指出, $\widehat{\mathbb{V}}^*$ 是可列次可加的, 并且 $\widehat{\mathbb{V}}^*(A)\leqslant\widehat{\mathbb{V}}(A)$. 此外, $\widehat{\mathbb{V}}(A)$ (相应地, $\widehat{\mathbb{V}}^*$) 是最大的次可加 (相应地, 可列次可加) 容度, 即如果 V 也是一个次可加 (相应地, 可数次可加) 容度使得 $V(A)\leqslant\widehat{\mathbb{E}}[g]$ 对满足 $I_A\leqslant g\in\mathscr{H}$ 的任意 A 和 g 成立, 则 $V(A)\leqslant\widehat{\mathbb{V}}(A)$ (相应地, $V(A)\leqslant\widehat{\mathbb{V}}^*(A)$).

最后, 介绍 Zhang[19] 提出的 CC (countable-dimensional compactness) 条件. 称次线性期望 $\widehat{\mathbb{E}}$ 满足 CC 条件, 如果

$$\widehat{\mathbb{E}}[X]=\sup_{P\in\mathscr{P}}P[X],\quad X\in\mathscr{H}_b,$$

其中 $\mathscr{H}_b=\{f\in\mathscr{H}:f\ \text{有界}\}$, $\mathscr{P}$ 是在 $(\Omega,\sigma(\mathscr{H}))$ 上可列维弱紧的概率测度族, 即对任意的 $Y_1,Y_2,\ldots\in\mathscr{H}_b$ 和任意的概率测度序列 $\{P_n\}\subset\mathscr{P}$, 存在一个子序列 n_k 和一个概率测度 $P\in\mathscr{P}$, 使得对于所有的 $\varphi\in C_{b,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^d)$, $d\geqslant 1$, 有

$$\lim_{k\to\infty}P_{n_k}[\varphi(Y_1,\ldots,Y_d)]=P[\varphi(Y_1,\ldots,Y_d)],$$

这等价于 $\mathscr{P}\boldsymbol{Y}^{-1}=\{Q:Q(A)=P(\boldsymbol{Y}\in A),P\in\mathscr{P}\}$ 是可列距离空间 $\mathbb{R}^\infty$ 上的弱紧概率测度族, 其中 $\boldsymbol{Y}=(Y_1,Y_2,\ldots)$; $P[X]$ 表示在概率测度 P 下, 随机变量 X 的数学期望, 即积分 $\int X\mathrm{d}P$. 记

$$\mathbb{V}^{\mathscr{P}}(A)=\sup_{P\in\mathscr{P}}P(A),\quad A\in\sigma(\mathscr{H}),$$

显然, $\mathbb{V}^{\mathscr{P}}\leqslant\widehat{\mathbb{V}}^*\leqslant\widehat{\mathbb{V}}$. 记

$$\mathscr{P}^e=\{P:P\ \text{是}\ (\Omega,\sigma(\mathscr{H}))\ \text{上的概率测度},P[f]\leqslant\widehat{\mathbb{E}}[f],\ \forall\, f\in\mathscr{H}\}.$$

Zhang[19] 证明了下述等价: (i) 条件 CC 对某个 $\mathscr{P}$ 成立; (ii) 条件 CC 对 $\mathscr{P}^e$ 成立; (iii) $\widehat{\mathbb{E}}$ 在 $\mathscr{H}_b$ 上正则, 即只要 $\mathscr{H}_b\ni\varphi_n\searrow 0$ 就有 $\widehat{\mathbb{E}}[\varphi_n]\searrow 0$. 需要指出的是, $\sup_{P\in\mathscr{P}_1}P[X]=\sup_{P\in\mathscr{P}_2}P[X],\forall\, X\in\mathscr{H}_b$ 推导不出 $\sup_{P\in\mathscr{P}_1}P(A)=\sup_{P\in\mathscr{P}_2}P(A),\forall\, A\in\sigma(\mathscr{H})$.

本文对于实数 x 和 y, 记 $x\vee y=\max\{x,y\}$, $x\wedge y=\min\{x,y\}$, $x^+=x\vee 0$ 和 $x^-=(-x)\vee 0$. 对于随机变量 X, 因为 $XI\{|X|\leqslant c\}$ 可能不属于 $\mathscr{H}$, 所以用 $(-c)\vee X\wedge c$ 对其截断, 记为 $X^{(c)}$. 如果极限存在, 定义 $\breve{\mathbb{E}}[X]=\lim_{c\to\infty}\widehat{\mathbb{E}}[X^{(c)}]$, 并且 $\breve{\mathcal{E}}[X]=-\breve{\mathbb{E}}[-X]$. 显然, 如果 $C_{\widehat{\mathbb{V}}}(|X|)<\infty$, 则 $\breve{\mathbb{E}}[X]$, $\breve{\mathcal{E}}[X]$ 和 $\breve{\mathbb{E}}[|X|]$ 是有定义的, 并且 $\breve{\mathbb{E}}[X]$, $\breve{\mathcal{E}}[X]\leqslant\breve{\mathbb{E}}[|X|]\leqslant C_{\widehat{\mathbb{V}}}(|X|)$.

3 主要结果

本文的第一个定理给出了一列在次线性期望下独立、但未必同分布的随机变量的强极限定理.

定理 3.1 设 $\{X_n; n \geqslant 1\}$ 是在次线性期望空间 $(\Omega, \mathscr{H}, \widehat{\mathbb{E}})$ 中的一列独立随机变量. 假设 $\{a_n\}$ 是一个序列, 满足 $1 \leqslant a_n \nearrow \infty$, 并且满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{\mathbb{E}}[X_n^2]}{a_n^2} < \infty. \tag{3.1}$$

记 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ 为部分和, 则

$$\widehat{\mathbb{V}}^*\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n - \widehat{\mathbb{E}}[S_n]}{a_n} > 0 \ \text{或} \ \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n - \widehat{\mathcal{E}}[S_n]}{a_n} < 0 \right) = 0. \tag{3.2}$$

下述定理考察 (3.2) 中上极限和上极限等号成立的问题, 这时需要条件 CC.

定理 3.2 设 $\{X_n\}$ 和 $\{a_n\}$ 满足定理 3.1 中相同的条件, 并且进一步假设 $\widehat{\mathbb{E}}$ 满足条件 CC, 则以下两个结论成立.

(i) 存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n - \widehat{\mathbb{E}}[S_n]}{a_n} = 0 \ \text{且} \ \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n - \widehat{\mathcal{E}}[S_n]}{a_n} = 0 \right) = 1; \tag{3.3}$$

(ii) 任意一序列 $\{\mu_n\}$ 满足 $\widehat{\mathcal{E}}[X_n] \leqslant \mu_n \leqslant \widehat{\mathbb{E}}[X_n]$, 存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)}{a_n} = 0 \right) = 1. \tag{3.4}$$

经过之前的准备工作, 现在将注意力转移到 m 相依的情形. 在经典的概率空间中, m 相依随机变量的强大数律不需要另行讨论. 这是因为, 如果 $\{X_n; n \geqslant 1\}$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ 上的 m 相依同分布且期望存在的随机变量序列, 则 $\{X_{km+i}; k \geqslant 1\}$ 为独立同分布随机变量序列, 从而

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_{km+i}}{n} \to \mathsf{E}X_1 \ \text{ a.s. } P, \quad i = 1, \ldots, m,$$

将上述 m 个极限拼起来立即可得到

$$\frac{S_n}{n} \to \mathsf{E}X_1 \ \text{ a.s. } P.$$

按照同样的思路, 在次线性期望下可以得到

$$\widehat{\mathcal{V}}^*\left(\breve{\mathcal{E}}[X_1] \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leqslant \breve{\mathbb{E}}[X_1] \right) = 1.$$

但是 $[\breve{\mathcal{E}}[X_1], \breve{\mathbb{E}}[X_1]]$ 不是最优的极限区间. 以下定理是 m 相依且平稳随机变量的大数定律.

定理 3.3 设 $\{X_n; n \geqslant 1\}$ 是在次线性期望空间 $(\Omega, \mathscr{H}, \widehat{\mathbb{E}})$ 中的一列 m 相依且线性平稳的随机变量, 满足

$$C_{\widehat{\mathbb{V}}}(|X_1|) < \infty. \tag{3.5}$$

记 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ 为部分和, 则存在实数 $\underline{\mu}$ 和 $\overline{\mu}$ 使得 $\breve{\mathcal{E}}[X_1] \leqslant \underline{\mu} \leqslant \overline{\mu} \leqslant \breve{\mathbb{E}}[X_1]$, 并且

$$\overline{\mu} = \lim_{n\to\infty} \frac{\breve{\mathbb{E}}[S_n]}{n}, \quad \underline{\mu} = \lim_{n\to\infty} \frac{\breve{\mathcal{E}}[S_n]}{n}, \tag{3.6}$$

$$\widehat{\mathbb{V}}^*\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} > \overline{\mu} \ \text{或} \ \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} < \underline{\mu} \right) = 0. \tag{3.7}$$

进一步地, 假设 $\widehat{\mathbb{E}}$ 满足条件 CC, 则存在 $P\in\mathscr{P}$ 使得

$$P\bigg(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\overline{\mu}\ \text{且}\ \liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\underline{\mu}\bigg)=1; \tag{3.8}$$

对于任意序列 $\{\mu_j;j\geqslant 1\}$, 若满足 $\underline{\mu}\leqslant\mu_j\leqslant\overline{\mu}$, 则存在 $P\in\mathscr{P}$ 使得

$$P\bigg(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-\sum_{j=1}^n\mu_j}{n}=0\bigg)=1; \tag{3.9}$$

对于任意 $\underline{\mu}\leqslant a\leqslant b\leqslant\overline{\mu}$, 存在 $P\in\mathscr{P}$ 使得

$$P\bigg(C\bigg\{\frac{S_n}{n}\bigg\}=[a,b]\bigg)=1, \tag{3.10}$$

其中 $C\{x_n\}$ 表示序列 $\{x_n\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中的聚点集.

注 3.1 (3.8) 和 (3.9) 表明了对于 $\mathbb{V}=\mathbb{V}^{\mathscr{P}}$, $\widehat{\mathbb{V}}^*$ 或 $\widehat{\mathbb{V}}$, 有

$$\mathbb{V}\bigg(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\overline{\mu}\ \text{且}\ \liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\underline{\mu}\bigg)=1; \tag{3.11}$$

并且对于任意 $\underline{\mu}\leqslant\mu\leqslant\overline{\mu}$, 都有

$$\mathbb{V}\bigg(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\mu\bigg)=1; \tag{3.12}$$

存在 $P_\mu\in\mathscr{P}$ 使得

$$P_\mu\bigg(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\mu\bigg)=1. \tag{3.13}$$

对独立同分布随机变量序列 $\{X_n;n\geqslant 1\}$, Zhang [20] 证明了 (3.11) 和 (3.12) 成立. 当 Ω 是一完备距离空间、$\mathscr{P}$ 是 Ω 上一族弱紧概率测度族时, Song [14] 在 $(1+\alpha)$- 阶矩下对独立同分布随机变量序列 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 证明了 (3.13).

注 3.2 线性平稳性可以用更弱的条件代替: $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是在次线性期望空间 $(\Omega,\mathscr{H},\widehat{\mathbb{E}})$ 中的一列同分布且在 $\breve{\mathbb{E}}$ 下一阶弱平稳的随机变量, 即 $\breve{\mathbb{E}}[X_1+\cdots+X_n]=\breve{\mathbb{E}}[X_{1+p}+\cdots+X_{n+p}]$ 对每个正整数 n 和 p 成立.

如下定理表明条件 (3.5) 是强大数定律的必要条件.

定理 3.4 设 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是在满足条件 CC 的次线性期望空间 $(\Omega,\mathscr{H},\widehat{\mathbb{E}})$ 中的一列 m 相依且同分布的随机变量. 如果

$$C_{\widehat{\mathbb{V}}}(|X_1|)=\infty, \tag{3.14}$$

则存在一个概率测度 $P\in\mathscr{P}$ 使得

$$\widehat{\mathbb{V}}^*\bigg(\limsup_{n\to\infty}\frac{|S_n|}{n}=\infty\bigg)=P\bigg(\limsup_{n\to\infty}\frac{|S_n|}{n}=\infty\bigg)=1. \tag{3.15}$$

4 相关不等式和性质

在介绍主要结果之前, 需要一些基本的引理作为准备. 第一个引理是在次线性期望空间下 Borel-Cantelli 引理, 这在许多论文中已经被证明.

引理 4.1 (参见文献 [19, 引理 4.1]) 设 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathcal{F}$ 中的一列事件. 假设 $\mathbb{V}$ 是一个次可加容度, 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{V}(A_n) < \infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \max_{N} \mathbb{V}\Big(\bigcup_{i=n}^{N} A_i \Big) = 0.$$

如果 $\mathbb{V}$ 是一个可列次可加容度, 则

$$\mathbb{V}(A_n \text{ i.o.}) = 0, \quad \text{其中 } \{A_n \text{ i.o.}\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n.$$

下述 Borel-Cantelli 引理是文献 [20, 引理 2.5] 的精细化.

引理 4.2 设 $(\Omega, \mathscr{H}, \widehat{\mathbb{E}})$ 满足条件 CC, $\mathbb{V}$ 是一容度且满足 (2.1), $\mathcal{V} = 1 - \mathbb{V}$. 假设 $\{\boldsymbol{X}_n; n \geqslant 1\}$ 为 $(\Omega, \mathscr{H}, \widehat{\mathbb{E}})$ 中的一列独立随机向量, 其中 $\boldsymbol{X}_n$ 是 d_n 维的.

(i) 若 F_n 是 d_n 维闭集, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}(\boldsymbol{X}_n \notin F_n) < \infty$, 则存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得

$$P(\boldsymbol{X}_n \notin F_n \text{ i.o.}) = 0; \tag{4.1}$$

(ii) 若 $F_{n,j}$ 为 d_n 维闭集, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{V}(\boldsymbol{X}_n \in F_{n,j}) = \infty$, $j = 1, 2, \ldots$, 则存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} \{\boldsymbol{X}_n \in F_{n,j} \text{ i.o.}\} \Big) = 1. \tag{4.2}$$

证明 先证明 (i). 令 $d(\boldsymbol{x}, F) = \inf\{\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| : \boldsymbol{y} \in F\}$, 则 $d(\boldsymbol{x}, F)$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的 Lipschitz 函数. 若 F_n 为闭集, 则

$$\boldsymbol{X}_n \in F_n \Leftrightarrow d(\boldsymbol{X}_n, F_n) = 0 \Leftrightarrow Y_n = f_n(\boldsymbol{X}_n) =: 1 - 1 \wedge d(\boldsymbol{X}_n, F_n) \geqslant 1.$$

而 $Y_n \in \mathscr{H}_b$, 记 $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots)$, 则由条件 CC 可知, $\mathscr{P}\boldsymbol{Y}^{-1}$ 是在弱收敛意义下一个紧的概率测度族. 取单调非增 Lipschitz 函数 f 使得 $I\{x < -1\} \leqslant f(x) \leqslant I\{x < 0\}$, 则当 $0 < \delta < \epsilon$ 时 $f(x/\delta) \geqslant f(x/\epsilon)$. 事实上, 当 $x \geqslant 0$ 时, $f(x/\delta) = f(x/\epsilon) = 0$; 而当 $x < 0$ 时, $x/\delta \leqslant x/\epsilon$, 从而 $f(x/\delta) \geqslant f(x/\epsilon)$. 注意到 $\widehat{\mathcal{E}}[((Y_n - 1)/\delta)] \leqslant \mathcal{V}(Y_n < 1)$ 对任意 $\delta > 0$ 成立. 令 $A = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}(Y_n < 1)$. 由独立性, 有

$$\widehat{\mathcal{E}}\Big[\sum_{n=1}^{N} f\Big(\frac{Y_n - 1}{\delta} \Big) \Big] = \sum_{n=1}^{N} \widehat{\mathcal{E}}\Big[f\Big(\frac{Y_n - 1}{\delta} \Big) \Big] \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mathcal{V}(Y_n < 1) \leqslant A, \quad \forall N \geqslant 1, \quad \delta > 0.$$

取 $\delta_N \searrow 0$. 注意到 $\widehat{\mathcal{E}}[Y] = \inf_{P\in\mathscr{P}} P[Y]$, $Y \in \mathscr{H}_b$. 对每个 N, 存在 $P_N \in \mathscr{P}$ 使得

$$P_N\Big[\sum_{n=1}^{N} f\Big(\frac{Y_n - 1}{\delta_N} \Big) \Big] \leqslant \widehat{\mathcal{E}}\Big[\sum_{n=1}^{N} f\Big(\frac{Y_n - 1}{\delta_N} \Big) \Big] + \frac{1}{N} \leqslant A + \frac{1}{N}.$$

由 $\mathscr{P}$ 的弱紧性, 存在子列 $N' \nearrow \infty$ 和概率测度 $P \in \mathscr{P}$ 使得

$$P_{N'}\Big[\sum_{n=1}^{N} f\Big(\frac{Y_n - 1}{\delta_N} \Big) \Big] \to P\Big[\sum_{n=1}^{N} f\Big(\frac{Y_n - 1}{\delta_N} \Big) \Big] \text{ 对所有 } N \text{ 成立.}$$

注意到当 $N' \geqslant N$ 时, $f(x/\delta_{N'}) \geqslant f(x/\delta_N)$. 我们有

$$P\Big[\sum_{n=1}^{L} f\Big(\frac{Y_n-1}{\delta_N}\Big)\Big] \leqslant \liminf_{N'\to\infty} P_{N'}\Big[\sum_{n=1}^{N'} f\Big(\frac{Y_n-1}{\delta_{N'}}\Big)\Big] \leqslant A, \quad L \leqslant N.$$

当 $\delta \to 0$ 时, $f((x-1)/\delta) \to I\{x<1\}$. 由概率测度 P 的连续性, 可得

$$\sum_{n=1}^{L} P(Y_n < 1) \leqslant A, \quad \forall\, L \geqslant 1.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Y_n < 1) \leqslant A < \infty.$$

由此可得 (4.1).

考察 (ii). 注意到

$$\boldsymbol{X}_n \in F_{n,j} \Leftrightarrow d(\boldsymbol{X}_n, F_{n,j}) = 0 \Leftrightarrow f_{n,j}(\boldsymbol{X}_n) =: 1 - 1 \wedge d(\boldsymbol{X}_n, F_{n,j}) \geqslant 1,$$

$f_{n,j}(\boldsymbol{X}_n) \in \mathscr{H}_b$. 对 $n \geqslant m \geqslant 1$, $j \geqslant 1$ 和 $\epsilon > 0$, 由独立性有

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{E}}\Big[\prod_{i=m}^{n} f\Big(\frac{f_{i,j}(\boldsymbol{X}_i)-1}{\epsilon}\Big)\Big] &= \prod_{i=m}^{n} \widehat{\mathcal{E}}\Big[f\Big(\frac{f_{i,j}(\boldsymbol{X}_i)-1}{\epsilon}\Big)\Big] \\
&\leqslant \prod_{i=m}^{n} \mathcal{V}(f_{i,j}(\boldsymbol{X}_i) < 1) \\
&= \prod_{i=m}^{n} (1 - \mathbb{V}(f_{i,j}(\boldsymbol{X}_i) \geqslant 1)) \\
&\leqslant \exp\Big\{-\sum_{i=m}^{n} \mathbb{V}(f_{i,j}(\boldsymbol{X}_i) \geqslant 1)\Big\}.
\end{aligned}$$

存在 $P_\epsilon \in \mathscr{P}$ 使得

$$P_\epsilon\Big[\prod_{i=m}^{n} f\Big(\frac{f_{i,j}(\boldsymbol{X}_i)-1}{\epsilon}\Big)\Big] \leqslant \exp\Big\{-\sum_{i=m}^{n} \mathbb{V}(f_{i,j}(\boldsymbol{X}_i) \geqslant 1)\Big\} + \epsilon.$$

由弱紧性, 存在序列 $\epsilon_N \searrow 0$ 和概率测度 $P \in \mathscr{P}$ 使得

$$\begin{aligned}
P\Big[\prod_{i=m}^{n} f\Big(\frac{f_{i,j}(\boldsymbol{X}_i)-1}{\epsilon_L}\Big)\Big] &= \lim_{N\to\infty} P_{\epsilon_N}\Big[\prod_{i=m}^{n} f\Big(\frac{f_{i,j}(\boldsymbol{X}_i)-1}{\epsilon_L}\Big)\Big] \\
&\leqslant \lim_{N\to\infty} P_{\epsilon_N}\Big[\prod_{i=m}^{n} f\Big(\frac{f_{i,j}(\boldsymbol{X}_i)-1}{\epsilon_N}\Big)\Big] \\
&\leqslant \exp\Big\{-\sum_{i=m}^{n} \mathbb{V}(f_{i,j}(\boldsymbol{X}_i) \geqslant 1)\Big\}.
\end{aligned}$$

令 $L \to \infty$, 则可得

$$\mathcal{V}^{\mathscr{P}}\Big(\bigcap_{i=m}^{n}\{f_{i,j}(\boldsymbol{X}_i) < 1\}\Big) \leqslant P\Big(\bigcap_{i=m}^{n}\{f_{i,j}(\boldsymbol{X}_i) < 1\}\Big) \leqslant \exp\Big\{-\sum_{i=m}^{n} \mathbb{V}(f_{i,j}(\boldsymbol{X}_i) \geqslant 1)\Big\}.$$

令 $\delta_k = 2^{-k}$. 注意到 $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{V}(f_{i,j}(\boldsymbol{X}_i) \geqslant 1) = \infty$. 取序列 $1 = n_{0,0} < n_{1,1} < n_{2,1} < n_{2,2} < \cdots < n_{k,1} < \cdots < n_{k,k} < n_{k+1,1} < \cdots$ 使得

$$\mathcal{V}^{\mathscr{P}}\Big(\bigcap_{i=n_{k,j-1}+1}^{n_{k,j}} \{f_{i,j}(\boldsymbol{X}_i) < 1\}\Big) \leqslant \delta_{k+j}, \quad j \leqslant k, \quad k \geqslant 1,$$

其中 $n_{k,0} = n_{k-1,k-1}$. 令 $Z_{k,j} = \max_{n_{k,j-1}+1 \leqslant i \leqslant n_{k,j}} f_{i,j}(\boldsymbol{X}_i)$. 则随机变量 $Z_{1,1}, Z_{2,1}, Z_{2,2}, \ldots, Z_{k,1}, \ldots, Z_{k,k}, Z_{k+1,1}, \ldots$ 是 $\mathscr{H}_b$ 中的元素, 在 $\widehat{\mathbb{E}}$ 下相互独立, 且

$$\mathcal{V}^{\mathscr{P}}(Z_{k,j} < 1) < \delta_{k+j}.$$

注意到 $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \delta_{k+j} < \infty$, 并且 $\{Z_{k,j} \geqslant 1\}$ 为闭集. 由 (i), 存在概率测度 $P \in \mathscr{P}$ 使得

$$P\Big(\bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=l}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{k} \{Z_{k,j} < 1\}\Big) = 0,$$

即

$$P\Big(\bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=l}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{k} \{Z_{k,j} \geqslant 1\}\Big) = 1.$$

在事件 $\bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=l}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{k} \{Z_{k,j} \geqslant 1\}$ 上, 存在 l_0 使得 $Z_{k,j} \geqslant 1$ 对 $k \geqslant l_0$ 和 $1 \leqslant j \leqslant k$ 成立. 对每个 j, 当 $k \geqslant j \vee l_0$ 时, 有 $Z_{k,j} \geqslant 1$, 从而 $\{f_{n,j}(\boldsymbol{X}_n) \geqslant 1 \text{ i.o.}\}$ 发生. 故

$$\bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=l}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{k} \{Z_{k,j} \geqslant 1\} \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} \{f_{n,j}(\boldsymbol{X}_n) \geqslant 1 \text{ i.o.}\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{\boldsymbol{X}_n \in F_{n,j} \text{ i.o.}\}.$$

(4.2) 得证. □

在我们的证明中, 还需要在 $\widehat{\mathbb{V}}$ 和 $\widehat{\mathcal{V}}$ 下的指数不等式和 Kolmogorov 极大不等式, 其证明分别给出在文献 [19, 引理 3.1] 和 [20, 引理 2.7].

引理 4.3 设 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ 是次线性期望空间 $(\Omega, \mathscr{H}, \widehat{\mathbb{E}})$ 中的一列独立随机变量. 设

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \widehat{\mathbb{E}}[X_i^2],$$

则对于所有 $x, y > 0$, $p \geqslant 2$ 和 $0 < \delta \leqslant 1$, 有

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathbb{V}}\Big(\max_{k \leqslant n}(S_k - \widehat{\mathbb{E}}[S_k]) \geqslant x\Big) \quad \Big(\text{相应地, } \widehat{\mathcal{V}}\Big(\max_{k \leqslant n}(S_k - \widehat{\mathcal{E}}[S_k]) \geqslant x\Big)\Big) \\ &\leqslant C_p \delta^{-p} x^{-p} \sum_{i=1}^{n} \widehat{\mathbb{E}}[|X_i|^p] + \exp\Big\{-\frac{x^2}{2(1+\delta)B_n^2}\Big\}. \end{aligned}$$

此外, 注意到当 $x \geqslant 0$ 时, 有 $x\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$, 我们得到以下在 $\mathbb{V}$ 和 $\mathcal{V}$ 下的 Kolmogorov 极大不等式:

$$\widehat{\mathbb{V}}\Big(\max_{k \leqslant n}(S_k - \widehat{\mathbb{E}}[S_k]) \geqslant x\Big) \leqslant Cx^{-2} \sum_{i=1}^{n} \widehat{\mathbb{E}}[X_i^2], \tag{4.3}$$

$$\widehat{\mathcal{V}}\Big(\max_{k \leqslant n}(S_k - \widehat{\mathcal{E}}[S_k]) \geqslant x\Big) \leqslant Cx^{-2} \sum_{i=1}^{n} \widehat{\mathbb{E}}[X_i^2]. \tag{4.4}$$

引理 4.4 设 $\{X_k; k=1,\dots,n\}$ 是次线性期望空间 $(\Omega,\mathscr{H},\widehat{\mathbb{E}})$ 中的一列独立随机变量, 满足 $\widehat{\mathbb{E}}[X_k^2]<\infty$, $k=1,\dots,n$. 则对于任意满足 $\widehat{\mathcal{E}}[X_k]\leqslant\mu_k\leqslant\widehat{\mathbb{E}}[X_k]$ 的常数 μ_k, $k=1,\dots,n$, 有

$$\widehat{\mathcal{V}}\Big(\max_{k\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{k}(X_i-\mu_i)\Big|\geqslant x\Big)\leqslant\frac{2}{x^2}\sum_{i=1}^{n}\widehat{\mathbb{E}}[X_i^2],\quad\forall\, x>0.$$

引理 4.5 (参见文献 [16, 引理 3.3]) 设 a_n 是一个序列, 满足 $a_n\nearrow\infty$, 则对于任意 $\lambda>1$, 存在一个序列 n_k 满足 $n_k\nearrow\infty$ 使得 $\lambda a_{n_k}\leqslant a_{n_{k+1}}\leqslant\lambda^3 a_{n_k+1}$.

接下来的引理是关于满足 $C_{\widehat{\mathbb{V}}}(|X|)<\infty$ 的随机变量的性质.

引理 4.6 (参见文献 [20, 引理 4.1]) 假设 $X\in\mathscr{H}$ 且 $C_{\widehat{\mathbb{V}}}(|X|)<\infty$, 则 $\sum_{i=1}^{\infty}\widehat{\mathbb{V}}(|X|\geqslant Mi)<\infty$ 对于所有的 $M>0$ 成立或等价于对于某个 $M>0$ 成立, 并且随着 $c\to\infty$, 有 $\breve{\mathbb{E}}[(|X|-c)^+]=o(1)$. 反过来, 若 $X\in\mathscr{H}$ 且 $C_{\widehat{\mathbb{V}}}(|X|)=\infty$, 则对所有的 $M>0$ 有 $\sum_{i=1}^{\infty}\widehat{\mathbb{V}}(|X|\geqslant Mi)=\infty$.

下一个关于 $\breve{\mathbb{E}}$ 的引理是文献 [20, 命题 1.3].

引理 4.7 考虑 $\mathscr{H}$ 的一个子空间, 定义为

$$\mathscr{H}_1=\Big\{X\in\mathscr{H}:\lim_{c,d\to\infty}\widehat{\mathbb{E}}[(|X|\wedge d-c)^+]=0\Big\}.$$

则对于任意 $X\in\mathscr{H}_1$, $\breve{\mathbb{E}}[X]$ 都有定义, 并且 $(\Omega,\mathscr{H}_1,\breve{\mathbb{E}})$ 是一个次线性期望空间.

引理 4.8 假设 $X,Y\in\mathscr{H}_1$ 在次线性期望 $\widehat{\mathbb{E}}$ 下是独立的, 则

$$\breve{\mathbb{E}}[X+Y]=\breve{\mathbb{E}}[X]+\breve{\mathbb{E}}[Y].\tag{4.5}$$

进一步地, $X,Y\in\mathscr{H}$ 在次线性期望 $\widehat{\mathbb{E}}$ 下是独立的, 且 $\lim_{c\to\infty}\widehat{\mathbb{E}}[(|X|-c)^+]=0$, $\lim_{c\to\infty}\widehat{\mathbb{E}}[(|Y|-c)^+]=0$, 则

$$\widehat{\mathbb{E}}[X+Y]=\widehat{\mathbb{E}}[X]+\widehat{\mathbb{E}}[Y].$$

证明 注意到 $|X^{(b)}-X|\leqslant(|X|-b)^+$, 由此可以得到

$$\begin{aligned}|(X+Y)^{(b)}-(X^{(b)}+Y^{(b)})|&\leqslant(|(X+Y)^{(b)}-(X+Y)|+|X^{(b)}-X|+|Y^{(b)}-Y|)\wedge(3b)\\&\leqslant 2\cdot((|X|-b/2)^+ +(|Y|-b/2)^+)\wedge(3b).\end{aligned}$$

因此, 当 $b\to\infty$ 时,

$$|\widehat{\mathbb{E}}[(X+Y)^{(b)}]-\widehat{\mathbb{E}}[X^{(b)}+Y^{(b)}]|\leqslant 2(\widehat{\mathbb{E}}[(|X|\wedge(3b)-b/2)^+]+\widehat{\mathbb{E}}[(|Y|\wedge(3b)-b/2)^+])\to 0.$$

另外, 由独立性可以得知 $\widehat{\mathbb{E}}[X^{(b)}+Y^{(b)}]=\widehat{\mathbb{E}}[X^{(b)}]+\widehat{\mathbb{E}}[Y^{(b)}]$. 因此, (4.5) 成立.

若 $\lim_{c\to\infty}\widehat{\mathbb{E}}[(|X|-c)^+]=0$, $\lim_{c\to\infty}\widehat{\mathbb{E}}[(|Y|-c)^+]=0$, 则 $X,Y\in\mathscr{H}_1$, 且 $\widehat{\mathbb{E}}[X]=\breve{\mathbb{E}}[X]$, $\widehat{\mathbb{E}}[Y]=\breve{\mathbb{E}}[Y]$, $\widehat{\mathbb{E}}[X+Y]=\breve{\mathbb{E}}[X+Y]$. 结论得证. □

5 定理的证明

本节证明第 3 节中的定理.

定理 3.1 的证明 由 (3.1) 可知, 存在一个序列 $\epsilon_n \searrow 0$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{\mathbb{E}}[X_n^2]}{\epsilon_n^2 a_n^2} < \infty.$$

根据引理 4.5, 对于任意的 $\lambda > 1$, 存在一个序列 $n_k \nearrow \infty$, 使得

$$\lambda a_{n_k} \leqslant a_{n_{k+1}} \leqslant \lambda^3 a_{n_k+1}. \tag{5.1}$$

然后根据 Kolmogorov 极大不等式 (4.3), 可得

$$\widehat{\mathbb{V}}\Big(\max_{n_k+1\leqslant n\leqslant n_{k+1}} (S_n - S_{n_k} - \widehat{\mathbb{E}}[S_n - S_{n_k}]) \geqslant \epsilon_{n_k} a_{n_{k+1}} \Big) \leqslant C \frac{\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} \widehat{\mathbb{E}}[X_j^2]}{\epsilon_{n_k}^2 a_{n_{k+1}}^2} \leqslant C \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{\widehat{\mathbb{E}}[X_j^2]}{\epsilon_j^2 a_j^2}.$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\mathbb{V}}\Big(\max_{n_k+1\leqslant n\leqslant n_{k+1}} (S_n - S_{n_k} - \widehat{\mathbb{E}}[S_n - S_{n_k}]) \geqslant \epsilon_{n_k} a_{n_{k+1}} \Big) < \infty.$$

注意到 $\widehat{\mathbb{V}}^*$ 的可列次可加性, 有

$$\widehat{\mathbb{V}}^*\Big(\max_{n_k+1\leqslant n\leqslant n_{k+1}} (S_n - S_{n_k} - \widehat{\mathbb{E}}[S_n - S_{n_k}]) \geqslant \epsilon_{n_k} a_{n_{k+1}} \text{ i.o.} \Big) = 0.$$

记

$$\Lambda_0 = \Big\{ \max_{n_k+1\leqslant n\leqslant n_{k+1}} (S_n - S_{n_k} - \widehat{\mathbb{E}}[S_n - S_{n_k}]) \geqslant \epsilon_{n_k} a_{n_{k+1}} \text{ i.o.} \Big\}^c.$$

对任意 k_0, $k \geqslant k_0$ 和 $n_k + 1 \leqslant n \leqslant n_{k+1}$, 由引理 4.8 有

$$\widehat{\mathbb{E}}[S_n] = \sum_{j=1}^{n} \widehat{\mathbb{E}}[X_j] = \widehat{\mathbb{E}}[S_n - S_{n_k}] + \sum_{i=k_0+1}^{k} \widehat{\mathbb{E}}[S_{n_i} - S_{n_{i-1}}] + \widehat{\mathbb{E}}[S_{n_{k_0}}].$$

故

$$S_n - \widehat{\mathbb{E}}[S_n] = S_n - S_{n_k} - \widehat{\mathbb{E}}[S_n - S_{n_k}] + \sum_{i=k_0+1}^{k} (S_{n_i} - S_{n_{i-1}} - \widehat{\mathbb{E}}[S_{n_i} - S_{n_{i-1}}]) + S_{n_{k_0}} - \widehat{\mathbb{E}}[S_{n_{k_0}}].$$

在事件 Λ_0 上, 存在一个正整数 m_0, 使得对于所有 $k \geqslant m_0$, 都有

$$\max_{n_k+1\leqslant n\leqslant n_{k+1}} (S_n - S_{n_k} - \widehat{\mathbb{E}}[S_n - S_{n_k}]) \leqslant \epsilon_{n_k} a_{n_{k+1}}.$$

对于 $k_0 \geqslant m_0$ 和任意的 $n \geqslant n_{k_0+1}$, 存在一个 $k \geqslant k_0$ 使得 $n_k + 1 \leqslant n \leqslant n_{k+1}$, 则基于 (5.1), 在事件 Λ_0 上, 可以得到

$$\begin{aligned}
S_n - \widehat{\mathbb{E}}[S_n] &\leqslant \epsilon_{n_k} a_{n_{k+1}} + \epsilon_{n_{k-1}} a_{n_k} + \cdots + \epsilon_{n_{k_0}} a_{n_{k_0+1}} + S_{n_{k_0}} - \widehat{\mathbb{E}}[S_{n_{k_0}}] \\
&\leqslant \epsilon_{n_{k_0}} a_{n_{k+1}} \left(1 + \frac{a_{n_k}}{a_{n_{k+1}}} + \frac{a_{n_k}}{a_{n_{k+1}}} \frac{a_{n_{k-1}}}{a_{n_k}} + \cdots + \frac{a_{n_k}}{a_{n_{k+1}}} \frac{a_{n_{k-1}}}{a_{n_k}} \cdots \frac{a_{n_{k_0+1}}}{a_{n_{k_0+2}}} \right) + S_{n_{k_0}} - \widehat{\mathbb{E}}[S_{n_{k_0}}] \\
&\leqslant \epsilon_{n_{k_0}} a_{n_{k+1}} \left(1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \cdots + \frac{1}{\lambda^{k-k_0}} \right) + S_{n_{k_0}} - \widehat{\mathbb{E}}[S_{n_{k_0}}] \\
&\leqslant \epsilon_{n_{k_0}} a_{n_{k+1}} \frac{\lambda}{\lambda - 1} + S_{n_{k_0}} - \widehat{\mathbb{E}}[S_{n_{k_0}}].
\end{aligned}$$

再次利用 (5.1), 得到

$$\frac{S_n-\widehat{\mathbb{E}}[S_n]}{a_n}\leqslant\epsilon_{n_{k_0}}\frac{a_{n_{k+1}}}{a_n}\cdot\frac{\lambda}{\lambda-1}+\frac{S_{n_{k_0}}-\widehat{\mathbb{E}}[S_{n_{k_0}}]}{a_n}\leqslant\epsilon_{n_{k_0}}\frac{\lambda^4}{\lambda-1}+\frac{S_{n_{k_0}}-\widehat{\mathbb{E}}[S_{n_{k_0}}]}{a_n}.$$

所以, 当 $k_0\to\infty$ 时,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n-\widehat{\mathbb{E}}[S_n]}{a_n}\leqslant\epsilon_{n_{k_0}-1}\frac{\lambda^4}{\lambda-1}\to 0,$$

这意味着 $\{\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n-\widehat{\mathbb{E}}[S_n]}{a_n}>0\}\subset\Lambda_0^c$. 因此,

$$\widehat{\mathbb{V}}^*\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n-\widehat{\mathbb{E}}[S_n]}{a_n}>0\right)=0.$$

另外,

$$\widehat{\mathbb{V}}^*\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{S_n-\widehat{\mathcal{E}}[S_n]}{a_n}<0\right)=\widehat{\mathbb{V}}^*\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{-S_n-\widehat{\mathbb{E}}[-S_n]}{a_n}>0\right)=0.$$

二者结合得到定理结论. □

在证明了定理 3.1 之后, 我们将注意力转向在条件 CC 下强大数律的精确极限和极限点集问题.

定理 3.2 的证明 首先证明 (3.3). 对于 $m<n$, 记 $S_{m,n}=\sum_{i=m+1}^n X_i$. 应用 Kolmogorov 极大不等式 (4.4) 和 Kronecker 引理, 得到

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{V}}\left(\frac{S_{m,n}-\widehat{\mathbb{E}}[S_{m,n}]}{a_n}\leqslant-\epsilon\right)&=\widehat{\mathcal{V}}\left(\frac{-S_{m,n}-\widehat{\mathcal{E}}[-S_{m,n}]}{a_n}\geqslant\epsilon\right)\\&\leqslant C\frac{\sum_{i=m+1}^n\widehat{\mathbb{E}}[X_i^2]}{\epsilon^2a_n^2}\\&\leqslant C\frac{\sum_{i=1}^n\widehat{\mathbb{E}}[X_i^2]}{a_n^2}\\&\to 0.\end{aligned}$$

类似地,

$$\widehat{\mathcal{V}}\left(\frac{-S_{m,n}-\widehat{\mathbb{E}}[-S_{m,n}]}{a_n}\leqslant-\epsilon\right)\to 0.$$

令 $\epsilon_k=2^{-k}$, 则存在一个序列 $n_k\nearrow\infty$, 使得 $\frac{a_{n_{k+1}}}{a_{n_k}}\to\infty$, $\frac{\widehat{\mathbb{E}}[|S_{n_{k-1}}|]}{a_{n_k}}\to 0$ 和

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{V}}\left(\frac{S_{n_{k-1},n_k}-\widehat{\mathbb{E}}[S_{n_{k-1},n_k}]}{a_{n_k}}\leqslant-\epsilon_k\right)&\leqslant\epsilon_k,\\\widehat{\mathcal{V}}\left(\frac{-S_{n_{k-1},n_k}-\widehat{\mathbb{E}}[-S_{n_{k-1},n_k}]}{a_{n_k}}\leqslant-\epsilon_k\right)&\leqslant\epsilon_k.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^\infty\mathbb{V}\left(\frac{S_{n_{k-1},n_k}-\widehat{\mathbb{E}}[S_{n_{k-1},n_k}]}{a_{n_k}}\geqslant-\epsilon_k\right)&=\infty,\\\sum_{k=1}^\infty\mathbb{V}\left(\frac{-S_{n_{k-1},n_k}-\widehat{\mathbb{E}}[-S_{n_{k-1},n_k}]}{a_{n_k}}\geqslant-\epsilon_k\right)&=\infty.\end{aligned}$$

上述两式括号中的事件为 $X_{n_{k-1}+1},\dots,X_{n_k}$ 的闭集. 注意到独立性, 由引理 4.2(ii) 可知, 存在概率测度 $P\in\mathscr{P}$ 使得 $P(\Omega_0)=1$, 其中

$$\Omega_0=\left\{\frac{S_{n_{k-1},n_k}-\widehat{\mathbb{E}}[S_{n_{k-1},n_k}]}{a_{n_k}}\geqslant-\epsilon_k \text{ i.o.}\right\}\cap\left\{\frac{-S_{n_{k-1},n_k}-\widehat{\mathbb{E}}[-S_{n_{k-1},n_k}]}{a_{n_k}}\geqslant-\epsilon_k \text{ i.o.}\right\}.$$

另外, 在事件 Ω_0 上, 有

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{S_{n_{k-1},n_k}-\widehat{\mathbb{E}}[S_{n_{k-1},n_k}]}{a_{n_k}}\geqslant 0.$$

类似地,

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{S_{n_{k-1},n_k}-\widehat{\mathcal{E}}[S_{n_{k-1},n_k}]}{a_{n_k}}\leqslant 0.$$

进一步地, 如果 $\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n-\widehat{\mathbb{E}}[S_n]}{a_n}\leqslant 0$ 和 $\liminf_{n\to\infty}\frac{S_n-\widehat{\mathcal{E}}[S_n]}{a_n}\geqslant 0$ 成立, 注意到 $\frac{a_{n_{k-1}}}{a_{n_k}}\to 0$ 和 $\frac{\widehat{\mathbb{E}}[|S_{n_{k-1}}|]}{a_{n_k}}\to 0$, 有

$$\begin{aligned}
0&\geqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n-\widehat{\mathbb{E}}[S_n]}{a_n}\geqslant\limsup_{k\to\infty}\frac{S_{n_k}-\widehat{\mathbb{E}}[S_{n_k}]}{a_{n_k}}\\
&\geqslant\limsup_{k\to\infty}\frac{S_{n_{k-1},n_k}-\widehat{\mathbb{E}}[S_{n_{k-1},n_k}]}{a_{n_k}}+\liminf_{k\to\infty}\frac{S_{n_{k-1}}-\widehat{\mathcal{E}}[S_{n_{k-1}}]}{a_{n_{k-1}}}\frac{a_{n_{k-1}}}{a_{n_k}}\\
&\quad+\liminf_{k\to\infty}\frac{\widehat{\mathcal{E}}[S_{n_{k-1}}]-\widehat{\mathbb{E}}[S_{n_{k-1}}]}{a_{n_k}}\\
&\geqslant 0,\\
0&\leqslant\liminf_{n\to\infty}\frac{S_n-\widehat{\mathcal{E}}[S_n]}{a_n}\leqslant\liminf_{k\to\infty}\frac{S_{n_k}-\widehat{\mathcal{E}}[S_{n_k}]}{a_{n_k}}\\
&\leqslant\liminf_{k\to\infty}\frac{S_{n_{k-1},n_k}-\widehat{\mathcal{E}}[S_{n_{k-1},n_k}]}{a_{n_k}}+\limsup_{k\to\infty}\frac{S_{n_{k-1}}-\widehat{\mathbb{E}}[S_{n_{k-1}}]}{a_{n_{k-1}}}\frac{a_{n_{k-1}}}{a_{n_k}}\\
&\quad+\limsup_{k\to\infty}\frac{\widehat{\mathbb{E}}[S_{n_{k-1}}]-\widehat{\mathcal{E}}[S_{n_{k-1}}]}{a_{n_k}}\\
&\leqslant 0.
\end{aligned}$$

所以由定理 3.1, 得到

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n-\widehat{\mathbb{E}}[S_n]}{a_n}=0\ \text{且}\ \liminf_{n\to\infty}\frac{S_n-\widehat{\mathcal{E}}[S_n]}{a_n}=0\right)=1.$$

接下来证明 (3.4). 设 $\{\epsilon_n\}$ 和 $\{n_k\}$ 与定理 3.1 的证明中相同. 根据引理 4.4, 可以得到

$$\widehat{\mathcal{V}}\left(\max_{n_k+1\leqslant n\leqslant n_{k+1}}\left|\sum_{i=n_k+1}^{n}(X_i-\mu_i)\right|>\epsilon_{n_k}a_{n_{k+1}}\right)\leqslant C\frac{\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}\widehat{\mathbb{E}}[X_j^2]}{\epsilon_{n_k}^2a_{n_{k+1}}^2}\leqslant C\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}\frac{\widehat{\mathbb{E}}[X_j^2]}{\epsilon_j^2a_j^2}.$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\mathcal{V}}\left(\max_{n_k+1\leqslant n\leqslant n_{k+1}}\left|\sum_{i=n_k+1}^{n}(X_i-\mu_i)\right|>\epsilon_{n_k}a_{n_{k+1}}\right)\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\widehat{\mathbb{E}}[X_j^2]}{\epsilon_j^2a_j^2}<\infty.$$

上式括号中的事件为 $X_{n_k+1},\dots,X_{n_{k+1}}$ 的开集. 注意到独立性, 由引理 4.2(i) 可知, 存在概率测度 $P\in\mathscr{P}$ 使得

$$P\bigg(\max_{n_k+1\leqslant n\leqslant n_{k+1}}\bigg|\sum_{i=n_k+1}^{n}(X_i-\mu_i)\bigg|>\epsilon_{n_k}a_{n_{k+1}}\text{ i.o.}\bigg)=0.$$

易知在事件 $\{\max_{n_k+1\leqslant n\leqslant n_{k+1}}|\sum_{i=n_k+1}^{n}(X_i-\mu_i)|>\epsilon_{n_k}a_{n_{k+1}}\text{ i.o.}\}^c$ 上, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)}{a_n}=0.$$

证毕. □

基于上述结果, 现在来证明 m 相依平稳随机变量的强大数律.

定理 3.3 的证明 下面分 5 步来证明这个定理.

第 1 步 我们证明: 如果 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是一列 m 相依且同分布的随机变量且满足 (3.5), 则

$$\widehat{\mathbb{V}}^*\bigg(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n-\breve{\mathbb{E}}[S_n]}{n}>0\ \text{或}\ \liminf_{n\to\infty}\frac{S_n-\breve{\mathcal{E}}[S_n]}{n}<0\bigg)=0. \tag{5.2}$$

令 $Y_i=X_i^{(i)}$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\widehat{\mathbb{E}}[Y_i^2]}{i^2}&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_{\widehat{\mathbb{V}}}(Y_i^2)}{i^2}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\int_0^{i^2}\widehat{\mathbb{V}}(X_1^2\geqslant y)dy=2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\int_0^{i}y\widehat{\mathbb{V}}(|X_1|\geqslant y)dy\\&\leqslant 2\sum_{i=1}^{\infty}\int_i^{i+1}\bigg(\frac{i+1}{i}\bigg)^2\frac{1}{x^2}\int_0^x y\widehat{\mathbb{V}}(|X_1|\geqslant y)dydx\leqslant 8\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}\int_0^x y\widehat{\mathbb{V}}(|X_1|\geqslant y)dy\\&\leqslant 8\int_0^{\infty}y\widehat{\mathbb{V}}(|X_1|\geqslant y)dy\int_y^{\infty}\frac{dx}{x^2}\leqslant 8\int_0^{\infty}\widehat{\mathbb{V}}(|X_1|\geqslant y)dy=8C_{\widehat{\mathbb{V}}}(|X_1|)<\infty.\end{aligned}$$

存在一个序列 $M_i\nearrow\infty$, 使得 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{M_i\widehat{\mathbb{E}}[Y_i^2]}{i^2}<\infty$. 下面要对和式 $\sum_{i=1}^{n}Y_i$ 采取大块小块分段求和技术. 定义 $a_0=0$, $a_n=a_{n-1}+l_n$, 其中 l_n 满足 $l_n\nearrow\infty$, 并且 $l_n\leqslant M_{a_{n-1}+1}^{1/4}$, $l_n\leqslant n^{1/4}$. 记

$$Z_n=\sum_{i=a_{n-1}+1}^{a_n-m}Y_i,\quad W_n=\sum_{i=a_n-m+1}^{a_n}Y_i.$$

则 $\{Z_n;n\geqslant 1\}$ 和 $\{W_n;n\geqslant 1\}$ 分别是独立的随机变量序列, 前者是要考察的主要部分, 后者要证明其可以被忽略. 注意到 l_n 的构造, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\widehat{\mathbb{E}}[Z_n^2]}{a_n^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(l_n-m)\sum_{i=a_{n-1}+1}^{a_n-m}\widehat{\mathbb{E}}[Y_i^2]}{a_n^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=a_{n-1}+1}^{a_n-m}\frac{M_i\widehat{\mathbb{E}}[Y_i^2]}{i^2}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{M_i\widehat{\mathbb{E}}[Y_i^2]}{i^2}<\infty. \tag{5.3}$$

类似地,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\widehat{\mathbb{E}}[W_n^2]}{a_n^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m\sum_{i=a_n-m+1}^{a_n}\widehat{\mathbb{E}}[Y_i^2]}{a_n^2}\leqslant m\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\widehat{\mathbb{E}}[Y_i^2]}{i^2}<\infty. \tag{5.4}$$

由 (5.4) 和定理 3.1, 可得

$$\widehat{\mathbb{V}}^*\bigg(\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}W_i-\widehat{\mathbb{E}}[\sum_{i=1}^{n}W_i]}{a_n}>0\ \text{或}\ \liminf_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}W_i-\widehat{\mathcal{E}}[\sum_{i=1}^{n}W_i]}{a_n}<0\bigg)=0. \tag{5.5}$$

由 (5.3) 和定理 3.1, 可得

$$\widehat{\mathbb{V}}^*\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n Z_i-\widehat{\mathbb{E}}[\sum_{i=1}^n Z_i]}{a_n}>0 \text{ 或 } \liminf_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n Z_i-\widehat{\mathcal{E}}[\sum_{i=1}^n Z_i]}{a_n}<0\right)=0.$$

因此, 要证明 (5.2), 只需要证明

$$\widehat{\mathbb{V}}^*\left(\lim_{n\to\infty}\max_{a_n+1\leqslant N\leqslant a_{n+1}}\left|\frac{S_N}{N}-\frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{a_n}\right|\neq 0\right)=0, \tag{5.6}$$

$$\breve{\mathbb{E}}\left[\max_{a_n+1\leqslant N\leqslant a_{n+1}}\left|\frac{S_N}{N}-\frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{a_n}\right|\right]\to 0. \tag{5.7}$$

由于 $\widehat{\mathbb{E}}[|Y_i|]\leqslant\breve{\mathbb{E}}[|X_1|]$ 对任意 i 都成立, 所以有

$$\frac{|\widehat{\mathbb{E}}[\sum_{i=1}^n W_i]|}{a_n}\leqslant\frac{\widehat{\mathbb{E}}[\sum_{i=1}^n |W_i|]}{a_n}\leqslant\frac{nm\breve{\mathbb{E}}[|X_1|]}{a_n}\to 0. \tag{5.8}$$

令 $T_n=\sum_{i=1}^n Y_i$, 由 (5.5) 和 (5.8), 有

$$\widehat{\mathbb{V}}^*\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{T_{a_n}}{a_n}-\frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{a_n}\right)\neq 0\right)=\widehat{\mathbb{V}}^*\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n W_i}{a_n}\neq 0\right)=0 \tag{5.9}$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\widehat{\mathbb{E}}[|T_{a_n}-\sum_{i=1}^n Z_i|]}{a_n}=0. \tag{5.10}$$

对于 $a_n+1\leqslant N\leqslant a_{n+1}$, 有

$$\left|\frac{T_N}{N}-\frac{T_{a_n}}{a_n}\right|=\left|\frac{T_N-T_{a_n}}{N}+T_{a_n}\cdot\frac{a_n-N}{Na_n}\right|\leqslant\frac{\sum_{i=a_n+1}^{a_{n+1}}|Y_i|}{a_n}+\frac{|T_{a_n}|}{a_n}\cdot\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}. \tag{5.11}$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{\infty}\widehat{\mathbb{V}}^*\left(|Y_i|>\frac{i}{M_i^{1/2}}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{M_i\widehat{\mathbb{E}}[Y_i^2]}{i^2}<\infty,$$

由 Borel-Cantelli 引理 (引理 4.1) 可以得到

$$\widehat{\mathbb{V}}^*\left(|Y_i|>\frac{i}{M_i^{1/2}}\text{ i.o.}\right)=0.$$

在事件 $\{|Y_i|>\frac{i}{M_i^{1/2}}\text{ i.o.}\}^c$ 上, 对充分大的 n, 有

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{i=a_n+1}^{a_{n+1}}|Y_i|}{a_n}&\leqslant\frac{\sum_{i=a_n+1}^{a_{n+1}}i/(M_i^{1/2})}{a_n}\leqslant\frac{1}{a_nM_{a_n+1}^{1/2}}\sum_{i=a_n+1}^{a_{n+1}}i\\&\leqslant\frac{a_{n+1}}{a_n}(a_{n+1}-a_n)\frac{1}{M_{a_n+1}^{1/2}}=\left(1+\frac{l_{n+1}}{a_n}\right)l_{n+1}\frac{1}{M_{a_n+1}^{1/2}}\\&\leqslant\left(1+\frac{l_{n+1}}{a_n}\right)\frac{1}{M_{a_n+1}^{1/4}}\to 0.\end{aligned} \tag{5.12}$$

注意到 $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}=\frac{l_{n+1}}{a_n}\to 0$, 从 (5.11) 和 (5.12) 可以得出

$$\widehat{\mathbb{V}}^*\left(\lim_{n\to\infty}\max_{a_n+1\leqslant N\leqslant a_{n+1}}\left|\frac{T_N}{N}-\frac{T_{a_n}}{a_n}\right|\neq 0\right)=0. \tag{5.13}$$

进一步地, 由引理 4.6, 可得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\widehat{\mathbb{V}}(X_i\neq Y_i)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\widehat{\mathbb{V}}(|X_1|>i/2)<\infty,$$

因此,

$$\widehat{\mathbb{V}}^*(X_i\neq Y_i \text{ i.o.})=0. \tag{5.14}$$

由 (5.9), (5.13) 和 (5.14), 得到 (5.6).

另外, 由引理 4.6, 可得

$$\frac{\breve{\mathbb{E}}[|T_{a_n}-S_{a_n}|]}{a_n}\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{a_n}\breve{\mathbb{E}}[(|X_1|-i)^+]}{a_n}\to 0. \tag{5.15}$$

类似于 (5.11), 有

$$\begin{aligned}\breve{\mathbb{E}}\left[\max_{a_n+1\leqslant N\leqslant a_{n+1}}\left|\frac{S_N}{N}-\frac{S_{a_n}}{a_n}\right|\right]&\leqslant\frac{\sum_{i=a_n+1}^{a_{n+1}}\breve{\mathbb{E}}[|X_i|]}{a_n}+\frac{\breve{\mathbb{E}}[|S_{a_n}|]}{a_n}\cdot\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\\&\leqslant 2\breve{\mathbb{E}}[|X_1|]\frac{l_{n+1}}{a_n}\to 0.\end{aligned} \tag{5.16}$$

结合 (5.10), (5.15) 和 (5.16) 得到 (5.7).

第 2 步 假设 $\widehat{\mathbb{E}}$ 满足条件 CC. 我们证明: 如果 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 为一列 m 相依且同分布的随机变量且满足 (3.5), 则存在 $P\in\mathscr{P}$ 使得

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n-\breve{\mathbb{E}}[S_n]}{n}=0\ \text{ 且 }\ \liminf_{n\to\infty}\frac{S_n-\breve{\mathcal{E}}[S_n]}{n}=0\right)=1. \tag{5.17}$$

由 (5.3) 和定理 3.2(i) 可知, 存在 $P\in\mathscr{P}$ 使得

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n Z_i-\widehat{\mathbb{E}}[\sum_{i=1}^n Z_i]}{a_n}=0\ \text{ 且 }\ \liminf_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n Z_i-\widehat{\mathcal{E}}[\sum_{i=1}^n Z_i]}{a_n}=0\right)=1.$$

结合 (5.6) 和 (5.7) 得到 (5.17).

第 3 步 我们证明: 如果 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 为一列 m 相依且线性平稳的随机变量且满足 (3.5), 则 (3.6) 中的极限存在.

注意到, 如果 $C_{\widehat{\mathbb{V}}}(|X|)<\infty$, 则 $\breve{\mathbb{E}}[X]$ 和 $\breve{\mathcal{E}}[X]$ 有定义. 由引理 4.7, 有

$$\breve{\mathcal{E}}[X_1]\leqslant\frac{\sum_{i=1}^n\breve{\mathcal{E}}[X_i]}{n}\leqslant\frac{\breve{\mathcal{E}}[S_n]}{n}\leqslant\frac{\breve{\mathbb{E}}[S_n]}{n}\leqslant\frac{\sum_{i=1}^n\breve{\mathbb{E}}[X_i]}{n}=\breve{\mathbb{E}}[X_1].$$

因此, 存在一个序列 $k_n\nearrow\infty$, 使得当 $n\to\infty$ 时, $\frac{\breve{\mathbb{E}}[S_{k_n}]}{k_n}$ 的极限存在, 将这个极限表示为 $\bar{\mu}$. 不失一般性, 可以假设 $k_n=o(\sqrt{n})$, 否则可以令 $l_n=\sup\{i:k_i\leqslant n^{1/4}\}$ 并用 k_{l_n} 替换 k_n. 令 $m_n=[\frac{n}{k_n}]$, 则

$$S_n=\sum_{i=1}^{m_n}\sum_{j=(i-1)k_n+1}^{ik_n}X_j+S_n-S_{m_nk_n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m_n}(S_{ik_n} - S_{(i-1)k_n}) + S_n - S_{m_nk_n} \\
&= \sum_{i=1}^{m_n}(S_{ik_n-m} - S_{(i-1)k_n}) + S_n - S_{m_nk_n} + \sum_{i=1}^{m_n}(S_{ik_n} - S_{ik_n-m}).
\end{aligned}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
&\frac{|\breve{\mathbb{E}}[S_n - S_{m_nk_n}]|}{n} \leqslant \frac{n - m_nk_n}{n}\breve{\mathbb{E}}[|X_1|] \to 0, \\
&\frac{|\breve{\mathbb{E}}[\sum_{i=1}^{m_n}(S_{ik_n} - S_{ik_n-m})]|}{n} \leqslant m\frac{m_n}{n}\breve{\mathbb{E}}[|X_1|] \to 0,
\end{aligned}
$$

且由 m 相依性和线性平稳性知 $S_{ik_n-m} - S_{(i-1)k_n}$, $i = 1, \ldots, m_n$ 独立同分布, 所以由引理 4.8, 可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\breve{\mathbb{E}}[S_n]}{n} &= \frac{\sum_{i=1}^{m_n}\breve{\mathbb{E}}[S_{ik_n-m} - S_{(i-1)k_n}]}{n} + o(1) = \frac{m_n\breve{\mathbb{E}}[S_{k_n-m}]}{n} + o(1) \\
&= \frac{m_n\breve{\mathbb{E}}[S_{k_n}]}{n} + o(1) = \frac{m_nk_n}{n}\frac{\breve{\mathbb{E}}[S_{k_n}]}{k_n} + o(1) \to \overline{\mu}.
\end{aligned}
$$

类似地, $\underline{\mu} = \lim_{n\to\infty}\frac{\breve{\mathcal{E}}[S_n]}{n}$ 存在. 不等式 $\breve{\mathcal{E}}[X_1] \leqslant \underline{\mu} \leqslant \overline{\mu} \leqslant \breve{\mathbb{E}}[X_1]$ 是显然的.

第 4 步 我们证明 (3.9). 假设 $\widehat{\mathbb{E}}$ 满足条件 CC. 令 $\underline{\mu} \leqslant \mu_j \leqslant \overline{\mu}$, $x_i = \widehat{\mathcal{E}}[Z_i] \vee (\sum_{j=a_{i-1}+1}^{a_i}\mu_j) \wedge \widehat{\mathbb{E}}[Z_i]$. 由 (5.3) 和定理 3.2(ii) 可知, 存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得

$$
P\bigg(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}(Z_i - x_i)}{a_n} = 0\bigg) = 1.
$$

由引理 4.7 可知 $\breve{\mathbb{E}}$ 也是次线性期望, 从而

$$
\begin{aligned}
\bigg|\widehat{\mathbb{E}}\bigg[\sum_{j=a_{i-1}+1}^{a_i}Y_j\bigg] - \breve{\mathbb{E}}\bigg[\sum_{j=a_{i-1}+1}^{a_i}X_j\bigg]\bigg| &= \bigg|\breve{\mathbb{E}}\bigg[\sum_{j=a_{i-1}+1}^{a_i}Y_j\bigg] - \breve{\mathbb{E}}\bigg[\sum_{j=a_{i-1}+1}^{a_i}X_j\bigg]\bigg| \\
&\leqslant \sum_{j=a_{i-1}+1}^{a_i}\breve{\mathbb{E}}[|Y_j - X_j|] \leqslant \sum_{j=a_{i-1}+1}^{a_i}\breve{\mathbb{E}}[(|X_1| - j)^+] \\
&\leqslant \sum_{j=a_{i-1}+1}^{a_i}C_{\widehat{\mathbb{V}}}[(|X_1| - j)^+] = o(l_i).
\end{aligned}
$$

由此容易看出

$$
\begin{aligned}
\lim_{i\to\infty}\frac{\widehat{\mathbb{E}}[Z_i]}{l_i} &= \lim_{i\to\infty}\frac{\widehat{\mathbb{E}}[\sum_{j=a_{i-1}+1}^{a_i-m}Y_j]}{l_i} = \lim_{i\to\infty}\frac{\widehat{\mathbb{E}}[\sum_{j=a_{i-1}+1}^{a_i}Y_j]}{l_i} \\
&= \lim_{i\to\infty}\frac{\breve{\mathbb{E}}[\sum_{j=a_{i-1}+1}^{a_i}X_j]}{l_i} = \lim_{i\to\infty}\frac{\breve{\mathbb{E}}[S_{l_i}]}{l_i} = \overline{\mu}.
\end{aligned}
$$

同理,

$$
\lim_{i\to\infty}\frac{\widehat{\mathcal{E}}[Z_i]}{l_i} = \lim_{i\to\infty}\frac{\widehat{\mathcal{E}}[\sum_{j=a_i+1}^{a_{i+1}}Y_j]}{l_i} = \lim_{i\to\infty}\frac{\breve{\mathcal{E}}[\sum_{j=a_i+1}^{a_{i+1}}X_j]}{l_i} = \lim_{i\to\infty}\frac{\breve{\mathcal{E}}[S_{l_i}]}{l_i} = \underline{\mu}.
$$

又因为

$$
\bigg|x_i - \sum_{j=a_{i-1}+1}^{a_i}\mu_j\bigg| \leqslant |\widehat{\mathbb{E}}[Z_i] - l_i\overline{\mu}| + |\widehat{\mathcal{E}}[Z_i] - l_i\underline{\mu}|,
$$

由此可以得到

$$\frac{|\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{j=1}^{a_n} \mu_j|}{a_n} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i(|\frac{\widehat{\mathbb{E}}[Z_i]}{l_i} - \overline{\mu}| + |\frac{\widehat{\mathcal{E}}[Z_i]}{l_i} - \underline{\mu}|)}{a_n} \to 0,$$

所以

$$P\bigg(\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i - \sum_{j=1}^{a_n} \mu_j}{a_n} = 0\bigg) = 1.$$

另外, 容易看出

$$\max_{a_n+1\leqslant N\leqslant a_{n+1}} \left|\frac{\sum_{j=1}^{N} \mu_j}{N} - \frac{\sum_{j=1}^{a_n} \mu_j}{a_n}\right| \to 0.$$

由 (5.9), (5.13) 和 (5.15), (3.9) 得证.

第 5 步 最后证明 (3.10). 当 $\check{\mathbb{E}}[X_1] = \check{\mathcal{E}}[X_1]$ 时, $\overline{\mu} = \underline{\mu}$, 从 (3.9) 中可以立即得出 (3.10). 当 $\check{\mathbb{E}}[X_1] > \check{\mathcal{E}}[X_1]$ 时, 由 $\check{\mathbb{E}}[X_1]$ 和 $\check{\mathcal{E}}[X_1]$ 的定义可知, 存在一个常数 $c > 0$, 使得 $\alpha := \widehat{\mathcal{E}}[(-c) \vee X_1 \wedge c] < \widehat{\mathbb{E}}[(-c) \vee X_1 \wedge c] =: \beta$. 设 $Y_i = (-c) \vee X_{i(m+1)} \wedge c$, 则 $\{Y_i; i \geqslant 1\}$ 是一个有界的独立同分布随机变量序列, 其满足 $\widehat{\mathbb{E}}[Y_i] = \beta$ 和 $\widehat{\mathcal{E}}[Y_i] = \alpha$. 根据 (3.8), 存在一个概率测度 $P \in \mathscr{P}$ 使得

$$P\bigg(\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \beta \text{ 且 } \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \alpha\bigg) = 1.$$

另外, $\{Y_i - E_P[Y_i \mid \mathcal{F}_{i-1}]; i \geqslant 1\}$ 在概率测度 P 下是一个有界鞅差序列, 其中 $\mathcal{F}_i = \sigma(X_{j(m+1)}; j = 1, \ldots, i)$. 根据鞅的大数定律, 可得

$$P\bigg(\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - E_P[Y_i \mid \mathcal{F}_{i-1}])}{n} = 0\bigg) = 1.$$

于是有

$$P\bigg(\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} E_P[Y_i \mid \mathcal{F}_{i-1}]}{n} = \beta \text{ 且 } \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} E_P[Y_i \mid \mathcal{F}_{i-1}]}{n} = \alpha\bigg) = 1.$$

注意到 $\alpha = \widehat{\mathcal{E}}[Y_i] \leqslant E_P[Y_i \mid \mathcal{F}_{i-1}] \leqslant \widehat{\mathbb{E}}[Y_i] = \beta$ a.s. P (参见文献 [2]). 因此, 存在一列实数 $\{y_i; i \geqslant 1\}$ 满足 $\alpha \leqslant y_i \leqslant \beta$ 使得

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \beta, \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \alpha.$$

令 $\mu_i = \frac{y_i - \alpha}{\beta - \alpha}(b - a) + a$, 则 $\mu_i \in [a, b]$ 且

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}{n} = b, \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}{n} = a,$$

这表明实数列 $\{\mu_i; i \geqslant 1\}$ 满足 $\underline{\mu} \leqslant \mu_i \leqslant \overline{\mu}$,

$$C\bigg\{\frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}{n}\bigg\} = [a, b].$$

从 (3.9) 立即可以得到 (3.10). □

定理 3.4 的证明 由引理 4.6, 可得

$$\sum_{i=1}^{\infty} \widehat{\mathbb{V}}(|X_1| \geqslant Mi) = \infty, \quad \forall M > 0.$$

因此存在 $l_i \nearrow \infty$, 使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} \widehat{\mathbb{V}}(|X_1| \geqslant 2l_i i) = \infty.$$

由 (2.2), 有

$$\sum_{i=1}^{\infty} \widehat{\mathbb{V}}(|X_{i(m+1)}| \geqslant l_i i) = \infty.$$

由 m 相依性可知 $\{X_{i(m+1)}; i \geqslant 1\}$ 在 $\widehat{\mathbb{E}}$ 下独立, 因此由引理 4.2(ii), 存在概率测度 $P \in \mathscr{P}$ 使得

$$P(|X_{i(m+1)}| \geqslant l_i i \ \text{ i.o.}) = 1.$$

另外, 在事件 $\{|X_{i(m+1)}| \geqslant l_i i \ \text{ i.o.}\}$ 上, 有

$$\infty = \limsup_{i\to\infty} \frac{|X_{i(m+1)}|}{i(m+1)} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n - S_{n-1}|}{n} \leqslant 2\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n}.$$

所以 (3.15) 成立. □

注 5.1 证明过程只涉及给定随机变量序列 $\{X_n; n \geqslant 1\}$ 的函数, 因此条件 CC 可以用如下更弱的条件代替: 存在可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上概率测度族 $\mathscr{P}$ 使得

$$\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(X_1, \ldots, X_d)] = \sup_{P\in\mathscr{P}} P[\varphi(X_1, \ldots, X_d)], \quad \varphi \in C_{b,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^d), \quad d \geqslant 1,$$

且 $\mathscr{P}\boldsymbol{X}^{-1}$ 是实空间 $\mathbb{R}^\infty$ 上弱紧的概率测度族.

致谢 感谢审稿人提供的宝贵修改意义. 第二作者张立新 1990 年保送到杭州大学数学系, 攻读硕士学位, 在林正炎教授指导下 1995 年获得复旦大学理学博士学位, 1997 年杭州大学数学博士后科研流动站出站后留校工作, 主要研究方向是概率统计极限理论及其应用, 无论是早期学生阶段的读书学习, 还是后来工作之中的教学科研, 都得到林正炎教授的悉心指导和亲切关怀, 对此表示衷心感谢.

参考文献

1 Chen Z J. Strong laws of large numbers for sub-linear expectations. Sci China Math, 2016, 59: 945–954
2 Guo X F, Li S, Li X P. On the laws of the iterated logarithm with mean-uncertainty under sublinear expectations. Probab Uncert Quant Risk, 2022, 7: 1–12
3 Kolmogorov A. Sur la lou forte des grands nombres. C R Acad Sci Paris, 1930, 191: 910–912
4 Li X P. A central limit theorem for m-dependent random variables under sublinear expectations. Acta Math Appl Sin Engl Ser, 2015, 31: 435–444
5 Lin Y W. Laws of large numbers under model uncertainty with an application to m-dependent random variables. J Math Anal Appl, 2022, 513: 126200
6 Lin Z Y. Precise limit theorem of a class of sequence of dependent random variables (in Chinese). J Hangzhou Univ, 1965, 2: 37–44 [林正炎. 一类相依随机变量的精确极限定理. 杭州大学学报, 1965, 2: 37–44]
7 Lin Z Y. Invariance principle of a class of sequence of weakly dependent random variables (in Chinese). Chin Sci Bull, 1980, 25: 862–862 [林正炎. 一类弱相依序列的不变原理. 科学通报, 1980, 25: 862–862]
8 Lin Z Y. Limit theorem for a class of sequence of weakly dependent random variables (in Chinese). Chinese Ann Math, 1981, 2: 181–185 [林正炎. 一类弱相依序列的极限定理. 数学年刊, 1981, 2: 181–185]
9 Lin Z Y, Lu C R. Limit Theory on Mixing Dependent Random Variables. Beijing: Science Press; Dordrecht: Kluwer Acad Publ, 1997
10 Lin Z Y, Zhang L X. Convergence to a self-normalized G-Brownian motion. Probab Uncert Quant Risk, 2017, 2: 4
11 Peng S G. A new central limit theorem under sublinear expectations. arXiv:0803.2656, 2008
12 Peng S G. Survey on normal distributions, central limit theorem, Brownian motion and the related stochastic calculus under sublinear expectations. Sci China Ser A, 2009, 52: 1391–1411

13 Peng S G. Nonlinear Expectations and Stochastic Calculus under Uncertainty with Robust CLT and G-Brownian Motion. Berlin-Heidelberg: Springer, 2019
14 Song Y S. A strong law of large numbers under sublinear expectations. Probab Uncert Quant Risk, 2023, 8: 333–350
15 Thanh L V. Strong laws of large numbers for sequences of blockwise and pairwise m-dependent random variables. Bull Inst Math Acad Sin (NS), 2005, 33: 397–405
16 Wittmann R. A general law of iterated logarithm. Z Wahrsch Verw Geb, 1985, 85: 521–543
17 Zhang B. Marcinkiewicz-zygmund law for sequences of blockwise m-dependent random variables. Statist Probab Lett, 1998, 38: 83–88
18 Zhang L X. Rosenthal's inequalities for independent and negatively dependent random variables under sub-linear expectations with applications. Sci China Math, 2016, 59: 751–768
19 Zhang L X. On the laws of the iterated logarithm under sub-linear expectations. Probab Uncert Quant Risk, 2021, 6: 409–460
20 Zhang L X. The sufficient and necessary conditions of the strong law of large numbers under sub-linear expectations. Acta Math Sin (Engl Ser), 2023, 39: 2283–2315

Strong law of large numbers for m-dependent and stationary random variables under sub-linear expectations

Wangyun Gu & Li-Xin Zhang

Abstract In this paper, we establish the strong law of large numbers (SLLN) of m-dependent random variables under the framework of sub-linear expectations. The SLLN is established for a sequence of independent but not necessarily identically distributed random variables. We further extend the SLLN to an m-dependent and stationary sequence of random variables with the condition that $C_{\widehat{\mathbb{V}}}(|X_1|) < \infty$ which is also proved to be the necessary condition of SLLN in the m-dependence and identically distribution case.

Keywords sub-linear expectation, capacity, law of large numbers, m-dependent, stationary

MSC(2020) 60F15

doi: 10.1360/SSM-2023-0334