



分数次微分交换子的谱估计

陈嵩菁^{1,2*}, 杨福林^{3,4}

1. 湖北经济学院数字金融创新湖北省重点实验室, 武汉 430205;

2. 湖北经济学院新财经交叉学科研究院, 武汉 430205;

3. 哈尔滨工业大学数学学院, 哈尔滨 150001;

4. 北京雁栖湖应用数学研究院, 北京 101408

E-mail: chensongqing@hbue.edu.cn, fulinyoung@hit.edu.cn

收稿日期: 2025-08-29; 接受日期: 2026-02-05; 网络出版日期: 2026-02-28; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12371138) 资助项目

摘要 本文研究 Euclid 空间上由分数阶微分算子 $|D|^\epsilon$ ($0 < \epsilon < 1$)、Riesz 变换 $\{R_j\}_{j=1}^d$ 及乘法算子 M_f 所生成的交换子 $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$. 本文建立该交换子奇异值的渐近极限, 并且给出其弱 Schatten 类 $S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}$ 的完整刻画, 其中 f 属于局部可积函数类 $L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, 分数阶微分算子 $|D|^\epsilon$ 通过 Fourier 变换定义如下: 对任意 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$, 有 $|D|^\epsilon \phi(x) = |x|^\epsilon \widehat{\phi}(x)$.

关键词 谱估计 渐近极限 奇异值 交换子 分数次微分

MSC (2020) 主题分类 47L20, 46L51, 46L52, 35P20, 35P15

1 引言

1.1 研究背景

在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^d$ 上, 记 $\{\partial_j\}_{j=1}^d$ 为关于坐标的偏导算子, $\Delta = \sum_{j=1}^d \partial_j^2$ 为 Laplace 算子. 对于 $j = 1, \dots, d$, Riesz 变换定义为 $R_j = \partial_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$, 同时分数阶微分算子 $|D|^\epsilon$ 通过 Fourier 变换定义为

$$|D|^\epsilon \phi(x) = |x|^\epsilon \widehat{\phi}(x), \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

定义乘法算子 M_f 为 $M_f \phi = f\phi$, 其中 f 和 ϕ 属于 L_1 局部可积函数空间 $L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. 本文主要研究 $\mathbb{R}^d$ 上与分数阶微分相关的交换子 $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$ ($0 < \epsilon < 1$) 的谱性质. 在分布意义下, 该交换子总是良定义的.

此类交换子最初由 Segovia 和 Wheeden [35] 对其在直线上的有界性进行了研究. 随后, 文献 [2, 29] 对高维情形的有界性给出了刻画. 特别地, 文献 [2] 的研究表明, 当 $0 < \epsilon < 1$ 时, 交换子 $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$

英文引用格式: Chen S Q, Yang F L. Spectral estimates for commutators of fractional derivatives (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 1–24, doi: [10.1360/SSM-2025-0214](https://doi.org/10.1360/SSM-2025-0214)

在 $L_p(\mathbb{R}^d)$ ($1 < p < \infty$) 空间上有界, 当且仅当 $f \in (-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}} \text{BMO}(\mathbb{R}^d)$, 其中 $(-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}} \text{BMO}(\mathbb{R}^d)$ 为有界均值振荡 (BMO)-Sobolev 空间 (参见文献 [38, 45]).

下面回顾奇异积分交换子的谱刻画相关结果. 该类交换子的有界性与紧性研究可追溯至文献 [3, 41]. 关于谱刻画, 当 H 是 $\mathbb{R}$ 上的 Hilbert 变换时, 结合文献 [32, 第 6 章] 的结论可知, 对所有 $0 < p < \infty$, 有

$$[M_f, H] \in S_p(L_2(\mathbb{R})) \Leftrightarrow f \in B_p^{\frac{1}{p}}(\mathbb{R}),$$

其中 $B_p^{\frac{1}{p}}(\mathbb{R})$ 是齐次 Besov 空间, $S_p(L_2(\mathbb{R}))$ 表示 $L_2(\mathbb{R})$ 上的 Schatten 理想 (参见第 2 节). 这一等价关系的证明源于 Peller [30] 的著名工作 (针对 $p \geq 1$ 情形), 以及 Peller [31] 和 Semmes [36] 的独立工作 (针对 $0 < p < 1$ 情形).

相对于一维情形, 高维情形会出现新的现象, 如常数刻画问题. 对于 Riesz 变换, 当 $d \geq 2$ 时有如下结论:

- (1) 若 $d < p < \infty$, 则 $[M_f, R_j] \in S_p$ 当且仅当 $f \in B_p^{\frac{d}{p}}(\mathbb{R}^d)$;
 - (2) 若 $0 < p \leq d$, 则 $[M_f, R_j] \in S_p$ 当且仅当 f 为常数;
 - (3) 在临界指标 $p = d$ 处, $[M_f, R_j] \in S_{d,\infty}$ 当且仅当 $f \in \dot{W}_d^1(\mathbb{R}^d)$, 其中 $\dot{W}_d^1(\mathbb{R}^d)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上的一阶齐次 Sobolev 空间, $(S_{p,\infty}) S_p$ 表示 $L_2(\mathbb{R}^d)$ 上的 (弱) Schatten 理想 (参见第 2 节).
- 此处结论 (1) 和 (2) 首先在文献 [17] 中得到证明; 结论 (3) 则需要结合文献 [11, 34] 的结果方可得到.

其他情形下奇异积分交换子的 Schatten 类估计结果 (包括非交换情形) 可总结如下:

- (1) 在 $\mathbb{R}^d$ 上考虑带权情形 [14, 20, 21]、Neumann-Laplace 算子 [7] 或 Bessel-Laplace 算子 [8];
- (2) Heisenberg 群 [6, 9]、一般分层 Lie 群 [23] 或一般齐型空间 [15, 43];
- (3) $\mathbb{R}^d$ 上的多参数仿积 [19] 或算子值情形 [44];
- (4) 量子导数情形 (参见文献 [4, 12, 24, 27, 28]).

关于分数次积分, 文献 [16] 首先给出了其交换子类似于结论 (1) 与 (2) 的 S_p 刻画. 最近, 文献 [13] 考察了分数次积分交换子在临界指标 $p = \frac{d}{1-\epsilon}$ 的谱刻画, 即当 $d \geq 2$ 且 $\epsilon \in (-\frac{d}{2}, 0) \cup (0, 1)$ 时, 有

$$[M_f, (-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}] \in S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty} \text{ 当且仅当 } f \in \dot{W}_{\frac{d}{1-\epsilon}}^1(\mathbb{R}^d).$$

为得到上述刻画, 文献 [13] 证明了一个精细的奇异值渐近极限: 对于 $f \in \dot{W}_{\frac{d}{1-\epsilon}}^1(\mathbb{R}^d)$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1-\epsilon}{d}} \mu(t, [M_f, (-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}]) = c_{d,\epsilon} \|f\|_{\dot{W}_{\frac{d}{1-\epsilon}}^1}$$

(有关奇异值和半范数 $\|\cdot\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}}$ 的精确定义, 参见第 2 节). 事实上, 该渐近极限也印证了文献 [16] 中的 S_p 刻画结果: 对于 $f \in \dot{W}_p^1(\mathbb{R}^d)$, 当 $p > \frac{d}{1-\epsilon}$ 时, 有 $[M_f, (-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}] \in S_p$; 当 $0 < p \leq \frac{d}{1-\epsilon}$ 时, 若 $[M_f, (-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}] \in S_p$, 则 f 必为常值函数. 这说明交换子的奇异值渐近极限揭示了其弱 Schatten 类性质所对应的非无穷处的临界指标为 $p = \frac{d}{1-\epsilon}$. 因此, 在研究交换子 $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$ 的弱 Schatten 类性质时, 我们也将通过奇异值的渐近极限来确定对应的非无穷处的临界指标. 更多相关内容可参见文献 [10, 12, 39].

受上述工作启发, 本文主要关注交换子 $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$ ($0 < \epsilon < 1$) 的奇异值渐近极限, 以及其在非无穷处的临界指标处的弱 Schatten 类刻画.

1.2 研究结果

本小节介绍本文的主要结论, 即交换子 $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$ ($0 < \epsilon < 1$) 的弱 Schatten 估计以及其奇异值的渐近极限. 从本小节开始, 若无特殊说明, S_p 和 $S_{p,\infty}$ 分别表示 $L_2(\mathbb{R}^d)$ 上的 Schatten 理想和弱 Schatten 理想 (具体定义参见第 2 节).

1.2.1 主要结果

为了方便, 本文范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^d))}$ 和 $\|\cdot\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}$ 均记为 $\|\cdot\|_\infty$. 当 $f \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ 时, M_f 为 $L_2(\mathbb{R}^d)$ 上的有界线性算子且 $\|M_f\|_\infty = \|f\|_\infty$.

对于 $1 < p < \infty$, 齐次 Sobolev 空间 $\dot{W}_p^1(\mathbb{R}^d)$ 定义为 $L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ 的子空间且满足对任意 $\phi \in \dot{W}_p^1(\mathbb{R}^d)$ 有 $\nabla \phi \in (L_p(\mathbb{R}^d))^d$ (梯度算子记为 $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_d)$). 其范数定义为

$$\|\phi\|_{\dot{W}_p^1} = \sum_{j=1}^d \|\partial_j \phi\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}.$$

事实上, $\|\phi\|_{\dot{W}_p^1}$ 与 $(\sum_{j=1}^d \|\partial_j \phi\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^p)^{\frac{1}{p}}$ 及 $\|\nabla \phi\|_{L_p(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^d)}$ 等价.

以下定理是本文的第一个结论: 交换子 $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$ 奇异值的渐近极限.

定理 1.1 令 $0 < \epsilon < 1$ 和 $d \geq 2$. 若 $f \in \dot{W}_{\frac{d}{1-\epsilon}}^1(\mathbb{R}^d)$ 且 $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$ 是紧算子, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1-\epsilon}{d}} \mu(t, [M_f, R_j|D|^\epsilon]) = d^{\frac{\epsilon-1}{d}} (2\pi)^{\epsilon-1} \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left\| \partial_j f - (1+\epsilon) \sum_{k=1}^d \xi_j \xi_k \cdot \partial_k f \right\|_{L_{\frac{d}{1-\epsilon}}(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1-\epsilon}{d}} d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1-\epsilon}{d}}.$$

该渐近公式表明, 交换子 $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$ ($0 < \epsilon < 1$) 的 S_p 刻画的非无穷的临界指标恰为 $p = \frac{d}{1-\epsilon}$. 具体而言, 对于 $f \in \dot{W}_p^1(\mathbb{R}^d)$, 当 $p > \frac{d}{1-\epsilon}$ 时, $[M_f, R_j|D|^\epsilon] \in S_p$; 当 $0 < p \leq \frac{d}{1-\epsilon}$ 时, 若 $[M_f, R_j|D|^\epsilon] \in S_p$, 则 f 必为常值函数. 因此, 研究该交换子在临界指标 $p = \frac{d}{1-\epsilon}$ 的弱 Schatten 类性质具有重要的意义.

以下定理是本文的第二个结论: 交换子 $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$ 的弱 Schatten 类估计.

定理 1.2 令 $0 < \epsilon < 1$ 和 $d \geq 2$. 若 $f \in (-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}} \text{BMO}(\mathbb{R}^d)$ 且 $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$ 是紧算子, 则 $[M_f, R_j|D|^\epsilon] \in S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}$ 当且仅当 $f \in \dot{W}_{\frac{d}{1-\epsilon}}^1$. 更精确地讲, 存在依赖于 ϵ 和 $\mathbb{R}^d$ 的常数 c_1 和 c_2 使得

$$c_1 \|f\|_{\dot{W}_{\frac{d}{1-\epsilon}}^1} \leq \|[M_f, R_j|D|^\epsilon]\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}} \leq c_2 \|f\|_{\dot{W}_{\frac{d}{1-\epsilon}}^1}.$$

该定理给出了交换子 $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$ ($0 < \epsilon < 1$) 在临界指标 $\frac{d}{1-\epsilon}$ 处的弱 Schatten 类等价刻画. 特别地, $\epsilon = 0$ 的情形已在文献 [34] 中建立. 定理 1.2 的上界估计可借助双重算子积分理论证明, 而其下界估计则需要依赖本文的定理 1.1.

尽管与奇异积分交换子的已有结果 [8, 15, 17, 23, 34] 相比, 本文方法因泛函演算的需要而使得本文只能得到非无穷端点的弱 Schatten 类, 但它却能实现对算子 $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$ ($0 < \epsilon < 1$) 奇异值渐近极限的精确刻画, 这是纯 Fourier 分析方法目前难以实现的.

注 1.1 文献 [2, 29] 给出了交换子 $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$ ($0 < \epsilon < 1$) 的有界性刻画, 但尚未对其紧性进行系统研究. 然而, 结合 Riesz 变换 [41] 与分数次积分 [42] 交换子的紧性刻画, 可以合理推测: 使得 $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$ 为紧算子的函数空间应为 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 在 BMO-Sobolev 空间 $(-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}} \text{BMO}(\mathbb{R}^d)$ 中的完备化空间.

注 1.2 虽然交换子 $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$ ($0 < \epsilon < 1$) 在 S_p 类上的完整刻画尚未建立, 但是这类结果原则上可通过 Fourier 分析的方法 (参见文献 [8, 15, 17, 23, 34]) 较为直接地获得. 然而, 本文基于非交换几何 [5] 的框架考虑, 非交换留数与积分的定义依赖于算子奇异值的渐近行为, 而 Chern 特征的描述又与交换子在弱 Schatten 类中的性质密切相关. 因此, 本文不侧重于 S_p 类的刻画, 而是直接研究该交换子的奇异值渐近极限及其弱 Schatten 类性质.

1.2.2 结论比较

- 与定理 1.1 比较. 对于定理 1.1, 当 $\epsilon = 0$ 时, 根据文献 [12] 中 $\mathbb{R}^d$ 上有关量子导数奇异值的渐近极限的证明内容可以得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{d}} \mu(t, [M_f, R_j]) = d^{-\frac{1}{d}} (2\pi)^{-1} \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left\| \partial_j f - \sum_{k=1}^d \xi_j \xi_k \cdot \partial_k f \right\|_{L_d(\mathbb{R}^d)}^d d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{d}}.$$

由此可知, 定理 1.1 在 $\epsilon = 0$ 时依然成立, 即定理 1.1 涵盖了 $[M_f, R_j]$ 奇异值的渐近极限的内容.

- 与定理 1.2 比较. (i) 对于定理 1.2, 当 $\epsilon = 0$ 时, $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$ 退化为 $[M_f, R_j]$. 后者的弱 Schatten 估计已由文献 [11, 34] 给出:

$$c'_1 \|f\|_{\dot{W}_d^1} \leq \|[M_f, R_j]\|_{S_{d,\infty}} \leq c'_2 \|f\|_{\dot{W}_d^1}.$$

这表明 $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$ 的弱 Schatten 估计可视为 $[M_f, R_j]$ 相应估计的自然推广.

- (ii) 从分数次积分的视角看, $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$ 与 $[M_f, (-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}]$ 具有相似的弱 Schatten 估计 (参见文献 [13]):

$$c''_1 \|f\|_{\dot{W}_d^1 \frac{1}{1-\epsilon}} \leq \|[M_f, (-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}]\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}} \leq c''_2 \|f\|_{\dot{W}_d^1 \frac{1}{1-\epsilon}}.$$

从 Fourier 变换的角度理解, $R_j|D|^\epsilon$ 的乘子符号相对于 $(-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}$ 的乘子符号多了一个 j 方向的符号函数的变化, 该差异不影响交换子的谱衰减行为.

在研究思路上, 本文主要结合了文献 [9, 12, 13] 中的方法, 将文献 [9, 12] 中处理零阶拟微分算子 R_j 的技术推广到 ϵ -阶情形 $R_j|D|^\epsilon$. 为构造算子 $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$ 的逼近, 我们采用分解

$$[M_f, R_j|D|^\epsilon] = [M_f, R_j]|D|^\epsilon + R_j[M_f, |D|^\epsilon].$$

对于右端第一项, 我们主要借鉴文献 [9] 中发展的泛函演算方法. 对于第二项, 由于 $R_j|D|^\epsilon$ 涉及分数阶的情形, 我们引入如下泛函演算公式:

$$(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} - (1-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} = \frac{\epsilon-1}{2} \int_0^1 (s-\Delta)^{-\frac{3-\epsilon}{2}} ds.$$

结合文献 [13] 中的处理技巧, 将两部分结果融合, 得到所需要的逼近公式, 即命题 4.1. 随后, 借助文献 [13] 中建立的拟微分算子奇异值渐近理论, 推导出定理 1.1. 最后, 通过分解 $\mathbb{R}^d$ 和定理 1.1, 得到定理 1.2 的下界证明, 该技巧与文献 [12, 定理 1.1] 中的下界证明略有不同. 需要指出的是, 由于此处额外多乘一个算子, 相应的分析较之以往更为复杂.

本文余下内容的结构安排如下. 第 2 节介绍有关奇异值和 Schatten 理想的定义, 以及一些基本事实. 第 3 节给出定理 1.2 上界估计的证明. 第 4 节在命题 4.1 中给出交换子 $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$ 的一个逼近公式; 具体而言, 该公式在模去一个特定的紧算子理想的意义下成立. 最后, 第 5 节分别在第 5.1 和 5.2 小节给出定理 1.1 和 1.2 下界估计的证明.

2 预备知识

本节介绍奇异值及 Schatten 理想 $S_p(\mathcal{H})$ 与 $S_{p,\infty}(\mathcal{H})$ 的定义与基本性质. 以下内容可参见文献 [25, 26].

设 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子全体, 其算子范数简记为 $\|\cdot\|_\infty$. 记 $S_\infty(\mathcal{H})$ (或简称为 S_∞) 为 $\mathcal{H}$ 上全体紧算子构成的集合, 赋予算子范数 $\|\cdot\|_\infty$. 对于紧算子 A , 其奇异值函数 $t \mapsto \mu(t, A)$ 定义为

$$\mu(t, A) = \inf\{\|A - R\|_\infty : \text{rank}(R) \leq t, R \in S_\infty\}, \quad t \geq 0.$$

相应奇异值序列 $\{\mu(k, A)\}_{k=0}^\infty$ 简记为 $\mu(A)$.

奇异值函数具有以下基本性质:

$$\mu(t+s, A+B) \leq \mu(t, A) + \mu(s, B), \quad t, s \geq 0,$$

并且, 对于 $0 < p < \infty$, 有

$$\mu(t, A) = \mu(t, A^*) = \mu(t, |A|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad t \geq 0.$$

对于 $0 < p < \infty$, 如果紧算子 A 的奇异值序列 $\{\mu(k, A)\}_{k=0}^\infty$ 是 p -可和的, 即 $\{\mu(k, A)\}_{k=0}^\infty$ 属于 l_p , 则称 A 属于 Schatten 类 $S_p(\mathcal{H})$, 并记为 $A \in S_p(\mathcal{H})$. 当 $p \geq 1$ 时, S_p -范数定义为

$$\|A\|_{S_p(\mathcal{H})} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mu(k, A)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

此时 $S_p(\mathcal{H})$ 成为一个 Banach 空间, 并且是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的一个理想. 当 $p, q, r \geq 1$ 满足 $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ 时, 有以下 Hölder 不等式成立:

$$\|AB\|_{S_r(\mathcal{H})} \leq \|A\|_{S_p(\mathcal{H})} \|B\|_{S_q(\mathcal{H})}.$$

对于 $0 < p < \infty$, 如果紧算子 A 的奇异值序列 $\{\mu(k, A)\}_{k=0}^\infty$ 属于 $l_{p,\infty}$, 则称 A 属于弱 Schatten 类 $S_{p,\infty}(\mathcal{H})$, 并记为 $A \in S_{p,\infty}(\mathcal{H})$. 当 $p \geq 1$ 时, 弱 Schatten 类 $S_{p,\infty}(\mathcal{H})$ 的拟范数定义为

$$\|A\|_{S_{p,\infty}(\mathcal{H})} = \sup_{k \geq 0} (k+1)^{\frac{1}{p}} \mu(k, A).$$

当 $p, q, r \geq 1$ 满足 $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ 时, 存在正常数 $c_{p,q,r}$ 使得如下类 Hölder 不等式成立:

$$\|AB\|_{S_{r,\infty}(\mathcal{H})} \leq c_{p,q,r} \|A\|_{S_{p,\infty}(\mathcal{H})} \|B\|_{S_{q,\infty}(\mathcal{H})}.$$

当 $1 \leq p < \infty$ 时, 定义 $S_{p,\infty}(\mathcal{H})$ 的可分部分 $(S_{p,\infty}(\mathcal{H}))_0$ 为

$$(S_{p,\infty}(\mathcal{H}))_0 = \left\{ A \in S_{p,\infty}(\mathcal{H}) : \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1)^{\frac{1}{p}} \mu(k, A) = 0 \right\}.$$

该空间是 $S_{p,\infty}(\mathcal{H})$ 的一个闭子空间, 为有限秩算子在 $S_{p,\infty}(\mathcal{H})$ 里的闭包. 进一步地, 由 Hölder 不等式容易得到以下基本结论:

(1) 对于任意 $\epsilon > 0$, 有 $(S_{p,\infty}(\mathcal{H}))_0 \subset (S_{p+\epsilon,\infty}(\mathcal{H}))_0$;

(2) 对于任意满足 $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ 的 $1 \leq p, q, r < \infty$, 有

$$S_{p,\infty}(\mathcal{H}) \cdot (S_{q,\infty}(\mathcal{H}))_0 \subset (S_{r,\infty}(\mathcal{H}))_0 \quad \text{和} \quad (S_{q,\infty}(\mathcal{H}))_0 \cdot S_{p,\infty}(\mathcal{H}) \subset (S_{r,\infty}(\mathcal{H}))_0;$$

(3) 可分部分 $(S_{p,\infty}(\mathcal{H}))_0$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的一个双边理想, 即有 $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \cdot (S_{p,\infty}(\mathcal{H}))_0 \subset (S_{p,\infty}(\mathcal{H}))_0$ 和 $(S_{p,\infty}(\mathcal{H}))_0 \cdot \mathcal{B}(\mathcal{H}) \subset (S_{p,\infty}(\mathcal{H}))_0$.

在本文中, 当在 $\mathbb{R}^d$ 上讨论 Schatten 类时, 考虑 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 为 $L_2(\mathbb{R}^d)$, 并且分别记 $S_p(\mathcal{H})$ 和 $S_{p,\infty}(\mathcal{H})$ 为 S_p 和 $S_{p,\infty}$.

在 $\mathbb{R}^d$ 上, 我们需要用到以下关于 Laplace 算子的 Schatten 估计, 即 Cwikel 估计 (参见文献 [13,37]). 为了后文使用方便, 将其列在此处.

引理 2.1 令 $\psi \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ 是一个快速衰减的函数, 即对于任意多元指标 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, 函数 $|x_1|^{\alpha_1} \cdots |x_d|^{\alpha_d} \psi(x)$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, 均是本性有界的. 如果 $\beta > 0$, 则

$$M_\psi(1 - \Delta)^{-\frac{\beta}{2}} \in S_{\frac{d}{\beta}, \infty}.$$

特别地, 当 $\frac{d}{\beta} > 2$ 时, 有

$$\|M_\psi(1 - \Delta)^{-\frac{\beta}{2}}\|_{S_{\frac{d}{\beta}, \infty}} \leq c_\beta \|\psi\|_{L_{\frac{d}{\beta}}},$$

其中常数 c_β 只依赖于 β 和 $\mathbb{R}^d$.

3 定理 1.2 的上界估计

本节主要证明定理 1.2 中交换子的上界估计. 为此, 需要使用双重算子积分理论.

3.1 双重算子积分

以下关于双重算子积分的内容可参见文献 [18,33]. 设 $\mathcal{H}$ 是可分 Hilbert 空间, D_0 和 D_1 是 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子, 其谱测度分别记为 E^0 和 E^1 .

对于任意 $x, y \in S_2(\mathcal{H})$, 映射 $(\lambda, \mu) \mapsto \text{Tr}(x dE^0(\lambda) y dE^1(\mu))$ 定义了 $\mathbb{R}^2$ 上的一个可数可加复测度. 若对某个 $g \in L_\infty(\mathbb{R}^2)$, 存在算子 $T_g^{D_0, D_1} \in \mathcal{B}(S_2(\mathcal{H}))$, 使得对于任意 $x, y \in S_2(\mathcal{H})$, 成立

$$\text{Tr}(x T_g^{D_0, D_1} y) = \int_{\mathbb{R}^2} g(\lambda, \mu) \text{Tr}(x dE^0(\lambda) y dE^1(\mu)),$$

则称 g 关于谱测度 $E^0 \otimes E^1$ 是可积的, 并称 $T_g^{D_0, D_1}$ 为对应的转换子. 对 $B \in S_2(\mathcal{H})$, 定义

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(\lambda, \mu) dE^0(\lambda) B dE^1(\mu) =: T_g^{D_0, D_1}(B),$$

并称之为双重算子积分. 进一步地, 若 $A = (A_1, \dots, A_d)$ 的每个分量均为有界自伴算子, 则可类似地定义多元双重算子积分 $T_g^A(B)$, 其中 $g \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$. 更多细节可参见文献 [1,18].

引理 3.1 (参见文献 [13, 引理 4.4]) 对于 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^d$, 记 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ 和 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$. 定义 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上的函数 ψ_k ($1 \leq k \leq d$) 为

$$\psi_k(\lambda, \mu) = \begin{cases} \frac{|\lambda| - |\mu|}{|\lambda - \mu|^2} (\lambda_k - \mu_k), & \text{当 } \lambda \neq \mu \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } \lambda = \mu. \end{cases}$$

对于 $1 \leq k \leq d$, 若 $1 < p < \infty$, 则双重算子积分 $T_{\psi_k}^{-i\nabla}$ 于 S_p 和 $S_{p,\infty}$ 上是有界的.

以下关于双重算子积分的内容可以参见文献 [13, 引理 4.5].

引理 3.2 假设向量 $A = (A_1, \dots, A_d)$ 满足 A 的分量均是有界自伴算子, 并且是两两可换的. 令 $|A| = (A_1^2 + \dots + A_d^2)^{\frac{1}{2}}$. 若 $B \in S_2$ 以及 $|A|$ 具有严格正的下界, 即存在常数 $c > 0$ 使得 $|A| \geq c$, 则

$$[|A|, B] = \sum_{k=1}^d T_{\psi_k}^A([A_k, B]),$$

这里的 ψ_k 来自引理 3.1.

引理 3.3 令 $0 < \epsilon < 1$ 和 $f \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$. 对 $m \geq 1$, 令 $P_m = \chi_{(\frac{1}{m}, m)}(-\Delta)$. 若 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, 则在分布的意义下, 当 $m \rightarrow \infty$ 时有

$$P_m(-\Delta)^{\frac{1}{2}} M_f(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} P_m \phi \rightarrow (-\Delta)^{\frac{1}{2}} M_f(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \phi, \quad P_m M_f(-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}} P_m \phi \rightarrow M_f(-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}} \phi.$$

证明 该证明类似于文献 [13, 引理 3.2] 的证明, 并且第二个结论已经在文献 [13, 引理 3.2] 中给出. $\square$

引理 3.4 令 $0 < \epsilon < 1$ 和 $d \geq 2$. 若 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, 则

$$[M_f, (-\Delta)^{\frac{1}{2}}](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} = i \sum_{k=1}^d T_{\psi_k}^{-i\nabla}(M_{\partial_k f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}).$$

证明 对于取定的 $m \in \mathbb{N}$, 令 $P_m = \chi_{(\frac{1}{m}, m)}(-\Delta)$. 在 Hilbert 空间 $P_m(L_2(\mathbb{R}^d))$ 上考虑算子 $A = -i\nabla \cdot P_m$ 和 $B = P_m M_f P_m$. 显然, A 是一个有界算子, 以及 $|A|$ 是一个有界算子并且有着严格正的下界. 同时, 当 $h, g \in L_2(\mathbb{R}^d)$ 时有 $M_h g(-i\nabla) \in S_2$, 可知 $B \in S_2$. 从而由引理 3.2 得

$$T_m := [|A|, B](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} = \sum_{k=1}^d T_{\psi_k}^{-i\nabla}([A_k, B](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}). \quad (3.1)$$

因为

$$[A_k, B](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} = (-i)P_m M_{\partial_k f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} P_m,$$

所以等式 (3.1) 可以表示为

$$T_m = (-i) \sum_{k=1}^d T_{\psi_k}^{-i\nabla}(P_m M_{\partial_k f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} P_m).$$

因为 $0 < \epsilon < 1$ 和 $d \geq 2$, 所以 $\frac{d}{1-\epsilon} > 2$. 根据引理 2.1, 可得

$$M_{\partial_k f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \in S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty} \subset S_p, \quad \forall \frac{d}{1-\epsilon} < p < \infty.$$

注意到 $P_m \rightarrow 1$ 在强算子拓扑下成立 (更多解释参见文献 [13, 注记 4.10]). 从而在 S_p -范数 ($\frac{d}{1-\epsilon} < p < \infty$) 的意义下有

$$P_m M_{\partial_k f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} P_m \rightarrow M_{\partial_k f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}.$$

由引理 3.1 知 $T_{\psi_k}^{-i\nabla}$ 于 S_p ($1 < p < \infty$) 上是有界的. 因此在 S_p -范数 ($\frac{d}{1-\epsilon} < p < \infty$) 的意义下有

$$T_{\psi_k}^{-i\nabla}(P_m M_{\partial_k f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} P_m) \rightarrow T_{\psi_k}^{-i\nabla}(M_{\partial_k f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}).$$

进一步地, 在 S_p -范数 ($\frac{d}{1-\epsilon} < p < \infty$) 的意义下有

$$T_\infty := \lim_{m \rightarrow \infty} T_m = (-i) \sum_{k=1}^d T_{\psi_k}^{-i\nabla} (M_{\partial_k f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}) \in S_p.$$

接下来证明 $T_\infty : L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ 是算子 $[(-\Delta)^{\frac{1}{2}}, M_f](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} : C_c^\infty \rightarrow (C_c^\infty(\mathbb{R}^d))'$ 唯一的有界延拓. 注意到

$$[[A], B](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} = P_m(-\Delta)^{\frac{1}{2}} M_f(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} P_m - P_m M_f(-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}} P_m.$$

因此, 在分布的意义下, 根据引理 3.3, 得到

$$T_m \phi \rightarrow (-\Delta)^{\frac{1}{2}} M_f(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \phi - M_f(-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}} \phi = [(-\Delta)^{\frac{1}{2}}, M_f](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \phi, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d).$$

这说明

$$T_\infty \phi = [(-\Delta)^{\frac{1}{2}}, M_f](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \phi, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d).$$

至此证明完成. $\square$

3.2 定理 1.2 的上界估计

为证明定理 1.2 中的交换子上界, 我们需要以下关于 Sobolev 空间 $\dot{W}_p^1(\mathbb{R}^d)$ 的稠密性事实, 它直接来源于文献 [22, 定理 11.43].

引理 3.5 设 $1 < p < \infty$. 对于任意 $f \in \dot{W}_p^1(\mathbb{R}^d)$, 存在序列 $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时 f_n 在 $\dot{W}_p^1(\mathbb{R}^d)$ 中收敛于 f . 此外, 存在复数序列 $\{c_n\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$, 使得对于任意紧集 $K \subset \mathbb{R}^d$, $f_n - c_n$ 在 $L_p(K)$ 中收敛于 f .

现在开始定理 1.2 上界估计的证明.

命题 3.1 令 $0 < \epsilon < 1$ 和 $d \geq 2$. 若 $f \in \dot{W}_{\frac{d}{1-\epsilon}}^1(\mathbb{R}^d)$, 则存在不依赖于 f 的常数 c_2 满足

$$\|[M_f, R_j]D|^\epsilon\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}} \leq c_2 \|f\|_{\dot{W}_{\frac{d}{1-\epsilon}}^1}.$$

证明 首先假设 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. 根据 Leibniz 法则, 有

$$[M_f, R_j](-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}} = R_j[M_f, (-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}] + [M_f, R_j](-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}. \quad (3.2)$$

接下来分别对等号右边的两项进行估计. 对于 (3.2) 等号右边第一项, 根据文献 [13, 定理 1.1], 可知存在只依赖于 ϵ 和 $\mathbb{R}^d$ 的常数 c_ϵ 满足

$$\|[M_f, (-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}]\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}} \leq c_\epsilon \|f\|_{\dot{W}_{\frac{d}{1-\epsilon}}^1}.$$

因为, 对于所有的 $1 \leq j \leq d$, 算子 $R_j : L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ 有界, 所以存在只依赖于 ϵ 和 $\mathbb{R}^d$ 的常数 c'_2 使得

$$\|R_j[M_f, (-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}]\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}} \leq \|R_j\|_\infty \|[M_f, (-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}]\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}} \leq c'_2 \|f\|_{\dot{W}_{\frac{d}{1-\epsilon}}^1}.$$

为了估计 (3.2) 等号右边第二项, 首先考虑以下分解:

$$[M_f, R_j](-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}} = [M_f, \partial_j](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} + \partial_j[M_f, (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}](-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}$$

$$= -M_{\partial_j f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} - \partial_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}[M_f, (-\Delta)^{\frac{1}{2}}](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}.$$

因为 $0 < \epsilon < 1$ 和 $d \geq 2$, 所以 $\frac{d}{1-\epsilon} > 2$. 由引理 2.1 知存在依赖于 ϵ 和 $\mathbb{R}^d$ 的常数 c_2'' 满足

$$\|M_{\partial_j f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}} \leq c_2'' \|f\|_{\dot{W}_{\frac{d}{1-\epsilon}}^1}.$$

为了继续进行估计, 接下来使用双重算子积分的工具. 由引理 3.4 知

$$R_j[M_f, (-\Delta)^{\frac{1}{2}}](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} = i \sum_{k=1}^d R_j \cdot T_{\psi_k}^{-i\nabla}(M_{\partial_k f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}).$$

结合引理 3.1 和 2.1, 得到

$$\begin{aligned} \|R_j[M_f, (-\Delta)^{\frac{1}{2}}](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}} &\leq \sum_{k=1}^d \|R_j \cdot T_{\psi_k}^{\nabla, \nabla}(M_{\partial_k f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}})\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}} \\ &\leq \sum_{k=1}^d \|R_j\|_{\infty} \|T_{\psi_k}^{\nabla, \nabla}(M_{\partial_k f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}})\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}} \\ &\leq \sum_{k=1}^d \|R_j\|_{\infty} \|M_{\partial_k f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}} \\ &\leq c_2''' \|f\|_{\dot{W}_{\frac{d}{1-\epsilon}}^1}. \end{aligned}$$

综上所述, 当 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 时, 存在不依赖于 f 的常数 c_2 满足

$$\|[M_f, R_j|D|^\epsilon]\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}} \leq c_2 \|f\|_{\dot{W}_{\frac{d}{1-\epsilon}}^1}.$$

接下来讨论 $f \in \dot{W}_{\frac{d}{1-\epsilon}}^1(\mathbb{R}^d)$ 的情形. 由引理 3.5 可知, 存在 $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 使得 $f_n \rightarrow f$ 在 $\dot{W}_{\frac{d}{1-\epsilon}}^1(\mathbb{R}^d)$ 的意义下成立, 以及存在 $\{c_n\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$ 使得 $f_n - c_n \rightarrow f$ 在 $L_{\frac{d}{1-\epsilon}}(K)$ 意义下成立, 其中 K 是包含于 $\mathbb{R}^d$ 的任意紧集. 记

$$A_n = [M_{f_n}, R_j|D|^\epsilon] = [M_{f_n - c_n}, R_j|D|^\epsilon], \quad A = [M_f, R_j|D|^\epsilon].$$

因为 $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, 所以由文献 [2, 定理 1.1] 可得 $\sup_{n \geq 1} \|A_n\|_{\infty} < \infty$. 由于 $f_n - c_n \rightarrow f$ 在局部 L_1 意义下成立, 从而有

$$A_n \phi \rightarrow A \phi \text{ 于 } (C_c^\infty)' \text{ 成立.}$$

根据文献 [13, 事实 4.12] 和 $S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}$ 的 Fatou 性质 (参见文献 [37]), 可知

$$\|A\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}}.$$

最后, 结合前一段的讨论, 可得

$$\|[M_f, R_j|D|^\epsilon]\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}} \leq c_2 \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\dot{W}_{\frac{d}{1-\epsilon}}^1} = c_2 \|f\|_{\dot{W}_{\frac{d}{1-\epsilon}}^1}.$$

至此证明完成. □

4 逼近公式

为了得到交换子 $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$ 有关奇异值的渐近极限, 我们需要找到一个在模去 $(S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0$ 意义下易于计算的等价公式. 因此, 以下命题成为了本节需要证明的主要内容.

命题 4.1 令 $0 < \epsilon < 1$ 和 $d \geq 2$. 若 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, 则

$$[M_f, R_j(-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}] + M_{\partial_j f}(1 - \Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} + (1 + \epsilon) \sum_{k=1}^d R_j R_k M_{\partial_k f}(1 - \Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \in (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0.$$

该命题表明, 在模去 $(S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0$ 的意义下, 交换子 $[M_f, R_j(-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}]$ 等价于公式 $M_{\partial_j f}(1 - \Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} + (1 + \epsilon) \sum_{k=1}^d R_j R_k M_{\partial_k f}(1 - \Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}$. 后者的主值符号易于计算, 这正是我们所需要的表达式.

本节将频繁使用以下事实, 为方便起见将其列出. 对于 Hilbert 空间上两个良定义的算子 $A, B \in \mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^d))$, 其中 $\ker(A) = \{0\}$, 有

$$[A^{-1}, B] = -A^{-1}[A, B]A^{-1}. \quad (4.1)$$

这是因为 $[A^{-1}, B] = A^{-1}B - BA^{-1} = A^{-1}BAA^{-1} - A^{-1}ABA^{-1} = -A^{-1}[A, B]A^{-1}$.

4.1 交换子的分解

为证明命题 4.1, 首先从交换子的一个积分表示开始.

引理 4.1 令 $0 < \epsilon < 1$ 和 $d \geq 2$. 若 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, 则

$$\begin{aligned} & [M_f, (1 - \Delta)^{\frac{1}{2}}](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \\ &= -\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^d \int_0^\infty \frac{1}{1 + \lambda^2 - \Delta} M_{\partial_k f} \frac{\partial_k(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1 + \lambda^2 - \Delta} \lambda^2 d\lambda + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1 + \lambda^2 - \Delta} M_{\Delta f} \frac{(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1 + \lambda^2 - \Delta} \lambda^2 d\lambda. \end{aligned}$$

证明 利用泛函演算, 有以下积分公式成立:

$$(1 - \Delta)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{1 + \lambda^2 - \Delta}.$$

该积分的收敛性理解为, 当作用在 $\mathbb{R}^d$ 上的 Schwartz 函数时, 相应的积分在 Bochner 积分的意义下成立. 进一步地, 我们得到

$$(1 - \Delta)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \Delta}{1 + \lambda^2 - \Delta} d\lambda.$$

注意到 $[M_f, \frac{1-\Delta}{1+\lambda^2-\Delta}] = [M_f, 1 - \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2-\Delta}] = -[M_f, \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2-\Delta}]$, 有

$$[M_f, (1 - \Delta)^{\frac{1}{2}}] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[M_f, \frac{1 - \Delta}{1 + \lambda^2 - \Delta} \right] d\lambda = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[M_f, \frac{1}{1 + \lambda^2 - \Delta} \right] \lambda^2 d\lambda. \quad (4.2)$$

由 (4.1) 可得

$$\begin{aligned} \left[M_f, \frac{1}{1 + \lambda^2 - \Delta} \right] &= -\frac{1}{1 + \lambda^2 - \Delta} [M_f, 1 + \lambda^2 - \Delta] \frac{1}{1 + \lambda^2 - \Delta} \\ &= \frac{1}{1 + \lambda^2 - \Delta} [M_f, \Delta] \frac{1}{1 + \lambda^2 - \Delta}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

根据 Δ 的定义, 简单计算可知 $[M_f, \Delta] = 2 \sum_{k=1}^d M_{\partial_k f} \partial_k - M_{\Delta f}$. 从而

$$\frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} [M_f, \Delta] \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} = 2 \sum_{k=1}^d \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} M_{\partial_k f} \frac{\partial_k}{1+\lambda^2-\Delta} - \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} M_{\Delta f} \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta}.$$

最后, 结合以上结论以及 (4.2) 和 (4.3), 便得到所需要的结论. $\square$

引理 4.2 令 $0 < \epsilon < 1$ 和 $d \geq 2$. 若 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, 则

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} M_{\partial_k f} \frac{\partial_k (-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda \\ &= \frac{\pi}{4} \partial_k (1-\Delta)^{-\frac{1}{2}} M_{\partial_k f} (-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} + 2 \sum_{j=1}^d \int_0^\infty \frac{\partial_k}{(1+\lambda^2-\Delta)^2} M_{\partial_k \partial_j f} \frac{\partial_j (-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda \\ & \quad - \int_0^\infty \frac{\partial_k}{(1+\lambda^2-\Delta)^2} M_{\partial_k \Delta f} \frac{(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda - \int_0^\infty \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} M_{\partial_k^2 f} \frac{(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda. \end{aligned}$$

证明 首先注意到

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} M_{\partial_k f} \frac{\partial_k (-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial_k}{1+\lambda^2-\Delta} M_{\partial_k f} \frac{(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda - \int_0^\infty \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} M_{\partial_k^2 f} \frac{(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial_k}{(1+\lambda^2-\Delta)^2} M_{\partial_k f} (-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \lambda^2 d\lambda + \int_0^\infty \frac{\partial_k}{1+\lambda^2-\Delta} \left[M_{\partial_k f}, \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} \right] (-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \lambda^2 d\lambda \\ & \quad - \int_0^\infty \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} M_{\partial_k^2 f} \frac{(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda. \end{aligned} \tag{4.4}$$

接下来分别计算第二个等式右边的前两个积分. 对于 (4.4) 第二个等式右边的第一个积分, 有

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\partial_k}{(1+\lambda^2-\Delta)^2} \lambda^2 d\lambda \cdot M_{\partial_k f} (-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} &= \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt \cdot \partial_k (1-\Delta)^{-\frac{1}{2}} M_{\partial_k f} (-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} \partial_k (1-\Delta)^{-\frac{1}{2}} M_{\partial_k f} (-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}. \end{aligned}$$

为了计算 (4.4) 第二个等式右边的第二个积分, 先考虑

$$\begin{aligned} \left[M_{\partial_k f}, \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} \right] &= -\frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} [M_{\partial_k f}, 1+\lambda^2-\Delta] \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} \\ &= \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} [M_{\partial_k f}, \Delta] \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta}, \end{aligned}$$

这里利用了 (4.1). 结合 $[M_{\partial_k f}, \Delta] = 2 \sum_{j=1}^d M_{\partial_k \partial_j f} \partial_j - M_{\partial_k \Delta f}$, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} [M_{\partial_k f}, \Delta] \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} \\ &= 2 \sum_{j=1}^d \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} M_{\partial_k \partial_j f} \frac{\partial_j}{1+\lambda^2-\Delta} - \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} M_{\partial_k \Delta f} \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta}. \end{aligned}$$

从而 (4.4) 第二个等式右边的第二个积分可以表示为

$$\int_0^\infty \frac{\partial_k}{1+\lambda^2-\Delta} \left[M_{\partial_k f}, \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} \right] (-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \lambda^2 d\lambda$$

$$= 2 \sum_{j=1}^d \int_0^\infty \frac{\partial_k}{(1+\lambda^2-\Delta)^2} M_{\partial_k \partial_j f} \frac{\partial_j(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda - \int_0^\infty \frac{\partial_k}{(1+\lambda^2-\Delta)^2} M_{\partial_k \Delta f} \frac{(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda.$$

结合以上分析, 证明完成. $\square$

引理 4.3 令 $0 < \epsilon < 1$ 和 $d \geq 2$. 若 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, 则

$$\int_0^\infty \frac{\partial_k}{(1+\lambda^2-\Delta)^2} M_{\partial_k \partial_j f} \frac{\partial_j(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda \in (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0.$$

证明 取 $0 < \delta < 1$ 使得 $\frac{d}{\delta+1-\epsilon} > 2$. 由 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial_k}{(1+\lambda^2-\Delta)^2} M_{\partial_k \partial_j f} \frac{\partial_j(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \right\|_{S_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}, \infty}} \\ & \leq \left\| \frac{\partial_k}{1+\lambda^2-\Delta} \right\|_\infty \left\| \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} \right\|_\infty \|M_{\partial_k \partial_j f} (-\Delta)^{\frac{\epsilon-1-\delta}{2}}\|_{S_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}, \infty}} \left\| \frac{(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} \partial_j}{1+\lambda^2-\Delta} \right\|_\infty. \end{aligned}$$

接下来分别估计上述第二行的四项. 首先, 由谱理论可知

$$\left\| \frac{\partial_k}{1+\lambda^2-\Delta} \right\|_\infty \leq \|\partial_k(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\|_\infty \left\| \frac{(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \right\|_\infty \leq c_k \sup_{t>0} \frac{t}{1+\lambda^2+t^2} = \frac{c_k}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

同理,

$$\left\| \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} \right\|_\infty \leq \frac{1}{1+\lambda^2}.$$

因为 $\frac{d}{\delta+1-\epsilon} > 2$, 所以由引理 2.1 可得

$$\|M_{\partial_k \partial_j f} (-\Delta)^{\frac{\epsilon-1-\delta}{2}}\|_{S_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}, \infty}} \leq c'_{\delta+1-\epsilon} \|\partial_k \partial_j f\|_{L_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}}} < \infty.$$

对于最后一项, 注意到

$$\left\| \frac{(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} \partial_j}{1+\lambda^2-\Delta} \right\|_\infty \leq \|\partial_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\|_\infty \left\| \frac{(-\Delta)^{\frac{\delta+1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \right\|_\infty \leq c_j \sup_{t>0} \frac{t^{\delta+1}}{1+\lambda^2+t^2}.$$

通过直接计算可知, 当 $0 < \delta < 1$ 时, 函数 $\frac{t^{\delta+1}}{1+\lambda^2+t^2}$ ($t > 0$) 在 $t = \sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}(1+\lambda^2)}$ 处取得最大值. 因此,

$$\left\| \frac{(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} \partial_j}{1+\lambda^2-\Delta} \right\|_\infty \leq c_j \frac{\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^{\frac{\delta+1}{2}}}{\frac{1+\delta}{1-\delta} + 1} \frac{1}{(1+\lambda^2)^{\frac{1-\delta}{2}}}.$$

综上所述, 可得

$$\left\| \frac{\partial_k}{(1+\lambda^2-\Delta)^2} M_{\partial_k \partial_j f} \frac{\partial_j(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \right\|_{S_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}, \infty}} \leq c_{\epsilon, \delta, f} \frac{1}{(1+\lambda^2)^{2-\frac{\delta}{2}}}.$$

这意味着, 当 $0 < \delta < 1$ 时,

$$\frac{\partial_k}{(1+\lambda^2-\Delta)^2} M_{\partial_k \partial_j f} \frac{\partial_j(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \in S_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}, \infty} \subset (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0.$$

因为 $0 < \delta < 1$, 所以 $\frac{3}{2} < 2 - \frac{\delta}{2} < 2$. 由此可得积分 $\int_0^\infty \frac{\partial_k}{(1+\lambda^2-\Delta)^2} M_{\partial_k \partial_j f} \frac{\partial_j(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda$ 于 $S_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}, \infty}$ 绝对可积. 从而

$$\int_0^\infty \frac{\partial_k}{(1+\lambda^2-\Delta)^2} M_{\partial_k \partial_j f} \frac{\partial_j(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda \in S_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}, \infty} \subset (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0.$$

引理证毕. □

引理 4.4 令 $0 < \epsilon < 1$ 和 $d \geq 2$. 若 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, 则

$$\int_0^\infty \frac{\partial_k}{(1+\lambda^2-\Delta)^2} M_{\partial_k \Delta f} \frac{(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda \in (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0.$$

证明 首先, 取 $0 < \delta < 1$ 使得 $\frac{d}{\delta+1-\epsilon} > 2$. 由引理 4.3 的计算可知

$$\left\| \frac{\partial_k}{1+\lambda^2-\Delta} \right\|_\infty \leq \frac{c_k}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \quad \text{和} \quad \left\| \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} \right\|_\infty \leq \frac{1}{1+\lambda^2}.$$

因为 $\frac{d}{\delta+1-\epsilon} > 2$, 所以由引理 2.1 可得

$$\|M_{\partial_k \Delta f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1-\delta}{2}}\|_{S_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}, \infty}} \leq c'_{\delta, \epsilon} \|\partial_k \Delta f\|_{L_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}}}.$$

另外, 由谱定理和简单计算可知

$$\left\| \frac{(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \right\|_\infty \leq \sup_{t>0} \frac{t^\delta}{1+\lambda^2+t^2} = \frac{\delta^{\frac{\delta}{2}}}{\delta+1} \frac{1}{(1+\lambda^2)^{1-\frac{\delta}{2}}}.$$

结合 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial_k}{(1+\lambda^2-\Delta)^2} M_{\partial_k \Delta f} \frac{(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \right\|_{S_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}, \infty}} \\ & \leq \left\| \frac{\partial_k}{1+\lambda^2-\Delta} \right\|_\infty \left\| \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} \right\|_\infty \|M_{\partial_k \Delta f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1-\delta}{2}}\|_{S_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}, \infty}} \left\| \frac{(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \right\|_\infty \\ & \leq c_{k, \delta, \epsilon} \|\partial_k \Delta f\|_{L_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}}} \frac{1}{(1+\lambda^2)^{2+\frac{1-\delta}{2}}}. \end{aligned}$$

这意味着

$$\frac{\partial_k}{(1+\lambda^2-\Delta)^2} M_{\partial_k \Delta f} \frac{(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \in S_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}, \infty} \subset (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0,$$

以及积分 $\int_0^\infty \frac{\partial_k}{(1+\lambda^2-\Delta)^2} M_{\partial_k \Delta f} \frac{(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda$ 于 $S_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}, \infty}$ 绝对可积. 这里绝对可积是因为 $2 < 2 + \frac{1-\delta}{2} < \frac{5}{2}$ (由于 $0 < \delta < 1$) 提供了收敛指标. 从而

$$\int_0^\infty \frac{\partial_k}{(1+\lambda^2-\Delta)^2} M_{\partial_k \Delta f} \frac{(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda \in S_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}, \infty} \subset (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0.$$

至此证明完成. □

引理 4.5 令 $0 < \epsilon < 1$ 和 $d \geq 2$. 若 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, 则

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} M_{\partial_k^2 f} \frac{(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda \in (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0.$$

进一步地,

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} M_{\Delta f} \frac{(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda \in (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0.$$

证明 取 $0 < \delta < 1$ 使得 $\frac{d}{\delta+1-\epsilon} > 2$. 根据引理 2.1, 可得

$$\|M_{\partial_k^2 f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1-\delta}{2}}\|_{S_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}, \infty}} \leq c'_1 \|\partial_k^2 f\|_{L_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}}}.$$

使用 Hölder 不等式并且结合引理 4.4 的证明可得

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} M_{\partial_k^2 f} \frac{(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \right\|_{S_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}, \infty}} \\ & \leq \left\| \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} \right\|_{\infty} \|M_{\partial_k^2 f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1-\delta}{2}}\|_{S_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}, \infty}} \left\| \frac{(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \right\|_{\infty} \\ & \leq c'_{k, \delta, \epsilon} \|\partial_k^2 f\|_{L_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}}} \frac{1}{(1+\lambda^2)^{2-\frac{\delta}{2}}}. \end{aligned}$$

这意味着

$$\frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} M_{\partial_k^2 f} \frac{(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \in S_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}, \infty} \subset (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0.$$

因为 $0 < \delta < 1$, 所以 $\frac{3}{2} < 2 - \frac{\delta}{2} < 2$. 由此可得积分 $\int_0^\infty \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} M_{\partial_k^2 f} \frac{(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda$ 于 $S_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}, \infty}$ 绝对可积. 从而

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} M_{\partial_k^2 f} \frac{(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda \in S_{\frac{d}{\delta+1-\epsilon}, \infty} \subset (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0.$$

至此证明完成. □

结合引理 4.1–4.5, 可以得到以下推论.

推论 4.1 令 $0 < \epsilon < 1$ 和 $d \geq 2$. 若 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, 则

$$[M_f, (1-\Delta)^{\frac{1}{2}}](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} + \sum_{k=1}^d R_k M_{\partial_k f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \in (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0.$$

证明 结合引理 4.1 和 4.2 的结论, 有

$$\begin{aligned} [M_f, (1-\Delta)^{\frac{1}{2}}](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} &= - \sum_{k=1}^d \partial_k (1-\Delta)^{-\frac{1}{2}} M_{\partial_k f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \\ &\quad - \frac{8}{\pi} \sum_{k,j=1}^d \int_0^\infty \frac{\partial_k}{(1+\lambda^2-\Delta)^2} M_{\partial_k \partial_j f} \frac{\partial_j (-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda \\ &\quad + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^d \int_0^\infty \frac{\partial_k}{(1+\lambda^2-\Delta)^2} M_{\partial_k \Delta f} \frac{(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda \\ &\quad + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^d \int_0^\infty \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} M_{\partial_k^2 f} \frac{(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1+\lambda^2-\Delta} M_{\Delta f} \frac{(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{1+\lambda^2-\Delta} \lambda^2 d\lambda. \end{aligned} \tag{4.5}$$

由引理 4.3 可知, (4.5) 中第二行的积分算子属于 $(S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0$; 由引理 4.4 可知, (4.5) 中第三行的积分算子属于 $(S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0$; 由引理 4.5 可知, (4.5) 中第四和五行的积分算子属于 $(S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0$. 因此

$$[M_f, (1-\Delta)^{\frac{1}{2}}](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} + \sum_{k=1}^d \partial_k (1-\Delta)^{-\frac{1}{2}} M_{\partial_k f} (-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \in (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0.$$

因为 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, 所以存在 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 使得 $\partial_k(f) = \partial_k(f)\phi$. 从而有

$$\begin{aligned} & \partial_k((1-\Delta)^{-\frac{1}{2}} - (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}) M_{\partial_k f} (-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \\ &= \frac{-\partial_k}{(-\Delta)^{\frac{1}{2}} (1-\Delta)^{\frac{1}{2}} + (-\Delta)^{\frac{1}{2}}} \cdot (1-\Delta)^{-\frac{1}{2}} M_\phi \cdot M_{\partial_k f} (-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \\ &\in S_\infty \cdot S_{d, \infty} \cdot S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty} \subset S_{\frac{d}{2-\epsilon}, \infty} \subset (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0. \end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned} \partial_k (1-\Delta)^{-\frac{1}{2}} M_{\partial_k f} (-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} &= R_k M_{\partial_k f} (-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} + \partial_k((1-\Delta)^{-\frac{1}{2}} - (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}) M_{\partial_k f} (-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \\ &\in R_k M_{\partial_k f} (-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} + (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0. \end{aligned}$$

最后, 结合此式与前面的分析便得到所需要的结论. $\square$

4.2 命题 4.1 的证明

在推论 4.1 中, 我们得到了一个特殊交换子在模去 $(S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0$ 意义下的等价公式. 由于

$$[M_f, R_j(-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}] = [M_f, R_j](-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}} + R_j[M_f, (-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}],$$

所以接下来将等式右边的交换子与推论 4.1 联系起来, 从而得到所需要的等价公式并完成证明. 首先考察等式右边第一个交换子在模去 $(S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0$ 意义下的等价公式.

引理 4.6 令 $0 < \epsilon < 1$ 和 $d \geq 2$. 若 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, 则

$$[M_f, R_j](-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}} + M_{\partial_j f} (1-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} + \sum_{k=1}^d R_j R_k M_{\partial_k f} (1-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \in (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0.$$

证明 首先, 考虑以下分解:

$$\begin{aligned} [M_f, R_j](-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}} &= [M_f, \partial_j](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} + \partial_j[M_f, (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}](-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}} \\ &= -M_{\partial_j f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} - \partial_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}[M_f, (-\Delta)^{\frac{1}{2}}](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

接下来分别考察第二个等式右边的两项. 对于 (4.6) 第二个等式右边的第一项, 有

$$M_{\partial_j f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} = M_{\partial_j f}((-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} - (1-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}) + M_{\partial_j f}(1-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}.$$

由自伴算子的泛函演算可知

$$(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} - (1-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} = \frac{\epsilon-1}{2} \int_0^1 (s-\Delta)^{-\frac{3-\epsilon}{2}} ds.$$

从而

$$M_{\partial_j f}((-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} - (1-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}) = \frac{\epsilon-1}{2} M_{\partial_j f}(-\Delta)^{-\frac{3-\epsilon}{2}} \cdot \int_0^1 \left(\frac{-\Delta}{s-\Delta} \right)^{\frac{3-\epsilon}{2}} ds.$$

因为 $0 < \epsilon < 1$, 以及当 $0 \leq s \leq 1$ 时有 $\frac{-\Delta}{s-\Delta} \leq 1$, 所以

$$\int_0^1 \left(\frac{-\Delta}{s-\Delta} \right)^{\frac{3-\epsilon}{2}} ds \in \mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^d)).$$

根据引理 2.1, 可得

$$M_{\partial_j f}((-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} - (1-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}) \in S_{\frac{d}{3-\epsilon}, \infty} \cdot S_\infty \subset (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0. \quad (4.7)$$

因此,

$$M_{\partial_j f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \in M_{\partial_j f}(1-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} + (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0.$$

对于 (4.6) 第二个等式右边的第二项, 有

$$R_j[M_f, (-\Delta)^{\frac{1}{2}}](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} = R_j[M_f, (-\Delta)^{\frac{1}{2}} - (1-\Delta)^{\frac{1}{2}}](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} + R_j[M_f, (1-\Delta)^{\frac{1}{2}}](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}. \quad (4.8)$$

接下来考察该式右边的两项. 为了估计等式 (4.8) 右边第一项, 首先由引理 2.1 有

$$\begin{aligned} R_j M_f((-\Delta)^{\frac{1}{2}} - (1-\Delta)^{\frac{1}{2}})(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} &= R_j \cdot M_f(-\Delta)^{\frac{\epsilon-2}{2}} \cdot \frac{(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}{(-\Delta)^{\frac{1}{2}} + (1-\Delta)^{\frac{1}{2}}} \\ &\in S_\infty \cdot S_{\frac{d}{2-\epsilon}, \infty} \cdot S_\infty \subset (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0. \end{aligned}$$

因为 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, 所以存在 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 使得 $f = f\phi$. 应用引理 2.1 和 Hölder 不等式, 得到

$$\begin{aligned} R_j((-\Delta)^{\frac{1}{2}} - (1-\Delta)^{\frac{1}{2}})M_f(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} &= R_j \frac{(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}{(-\Delta)^{\frac{1}{2}} + (1-\Delta)^{\frac{1}{2}}} \cdot (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} M_\phi \cdot M_f(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \\ &\in S_\infty \cdot S_{d, \infty} \cdot S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty} \subset S_{\frac{d}{2-\epsilon}, \infty} \subset (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0. \end{aligned}$$

从而, 等式 (4.8) 右边第一项满足

$$\begin{aligned} &R_j[M_f, (-\Delta)^{\frac{1}{2}} - (1-\Delta)^{\frac{1}{2}}](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \\ &= R_j M_f((-\Delta)^{\frac{1}{2}} - (1-\Delta)^{\frac{1}{2}})(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} - R_j((-\Delta)^{\frac{1}{2}} - (1-\Delta)^{\frac{1}{2}})M_f(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \in (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0. \end{aligned}$$

对于等式 (4.8) 右边第二项, 根据推论 4.1, 得到

$$[M_f, (1-\Delta)^{\frac{1}{2}}](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} + \sum_{k=1}^d R_k M_{\partial_k f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \in (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0.$$

结合该结论和 (4.7) 可知

$$\begin{aligned} R_j[M_f, (1-\Delta)^{\frac{1}{2}}](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} &= R_j[M_f, (1-\Delta)^{\frac{1}{2}}](-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} + \sum_{k=1}^d R_j R_k M_{\partial_k f}(-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \\ &\quad + \sum_{k=1}^d R_j R_k M_{\partial_k f}((1-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} - (-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}) - \sum_{k=1}^d R_j R_k M_{\partial_k f}(1-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \end{aligned}$$

$$\in (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0 + (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0 - \sum_{k=1}^d R_j R_k M_{\partial_k f} (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}.$$

最后, 结合以上分析和 (4.6) 便可以得到想要的结论. $\square$

引理 4.7 令 $0 < \epsilon < 1$ 和 $d \geq 2$. 若 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, 则

$$R_j[M_f, (-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}] + \epsilon \sum_{k=1}^d R_j R_k M_{\partial_k f} (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \in (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0.$$

证明 考虑以下分解:

$$R_j[M_f, (-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}] = R_j[M_f, (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}] + R_j[M_f, (-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}} - (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}]. \quad (4.9)$$

接下来分别考察 (4.9) 等号右边的两项. 首先, 对于 (4.9) 等号右边的第二项, 由自伴算子的泛函演算有

$$(-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}} - (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon}{2}} = -\frac{\epsilon}{2} \int_0^1 (s - \Delta)^{\frac{\epsilon}{2}-1} ds.$$

根据引理 2.1, 可得

$$R_j[M_f, (-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}} - (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}] = -\frac{\epsilon}{2} R_j \cdot \int_0^1 [M_f, (s - \Delta)^{\frac{\epsilon-2}{2}}] ds \in S_\infty \cdot S_{\frac{d}{2-\epsilon}, \infty} \subset (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0.$$

至此, 对 (4.9) 等号右边的第二项的估计完成.

接下来对 (4.9) 等号右边的第一项进行考察. 由文献 [13, 定理 5.1] 可知

$$[M_f, (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}] + \frac{\epsilon}{2} [M_f, \Delta] (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \in (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0.$$

因此可得

$$R_j[M_f, (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}] + \frac{\epsilon}{2} R_j[M_f, \Delta] (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \in R_j \cdot (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0 \subset (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0.$$

注意到 $[M_f, \Delta] = 2 \sum_{k=1}^d M_{\partial_k f} \partial_k - M_{\Delta f}$, 从而

$$R_j[M_f, \Delta] (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon}{2}-1} = 2 \sum_{k=1}^d R_j M_{\partial_k f} \partial_k (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon}{2}-1} - R_j M_{\Delta f} (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon}{2}-1}.$$

根据引理 2.1, 可知

$$R_j M_{\Delta f} (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \in S_\infty \cdot S_{\frac{d}{2-\epsilon}, \infty} \subset (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0.$$

所以

$$R_j[M_f, (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}] + \epsilon \sum_{k=1}^d R_j M_{\partial_k f} \partial_k (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \in (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0. \quad (4.10)$$

为了处理 (4.10) 的求和项, 从以下分解出发:

$$\begin{aligned} & R_j M_{\partial_k f} \partial_k (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon}{2}-1} - R_j R_k M_{\partial_k f} (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \\ &= R_j M_{\partial_k f} \partial_k ((1 - \Delta)^{-\frac{1}{2}} - (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}) (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} + R_j [M_{\partial_k f}, R_k] (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}. \end{aligned}$$

因为

$$R_j[M_{\partial_k f}, R_k](1 - \Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \in S_\infty \cdot S_{d, \infty} \cdot S_\infty \subset (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0$$

和

$$\begin{aligned} & R_j M_{\partial_k f} \partial_k ((1 - \Delta)^{-\frac{1}{2}} - (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}) (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \\ &= -R_j \cdot M_{\partial_k f} (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \cdot \frac{\partial_k}{\sqrt{-\Delta}} \frac{1}{\sqrt{-\Delta} + \sqrt{1 - \Delta}} \\ &\in S_\infty \cdot S_{\frac{d}{2-\epsilon}, \infty} \cdot S_\infty \cdot S_\infty \subset (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0, \end{aligned}$$

所以

$$R_j M_{\partial_k f} \partial_k (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon}{2}-1} - R_j R_k M_{\partial_k f} (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \in (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0.$$

进一步地, 结合 (4.10) 可得

$$\begin{aligned} & R_j[M_f, (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}] + \epsilon \sum_{k=1}^d R_j R_k M_{\partial_k f} (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \\ &\in R_j[M_f, (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}] + \epsilon \sum_{k=1}^d R_j M_{\partial_k f} \partial_k (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \\ &\quad + \epsilon \sum_{k=1}^d (R_j R_k M_{\partial_k f} (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} - R_j M_{\partial_k f} \partial_k (1 - \Delta)^{\frac{\epsilon}{2}-1}) + (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0 \\ &\subset (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0. \end{aligned}$$

最后, 结合 (4.9) 以及对 (4.9) 等号右边第二项的估计便可以推断出我们想要的结论. $\square$

命题 4.1 的证明 注意到

$$[M_f, R_j(-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}] = [M_f, R_j](-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}} + R_j[M_f, (-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}].$$

从而所需结论由引理 4.6 和 4.7 推导出. $\square$

5 奇异值渐近极限和下界估计

本节的主要目的是证明交换子 $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$ 有关奇异值的渐近极限及其 Schatten 刻画的下界估计, 即定理 1.1 和 1.2 的下界估计. 为了证明定理 1.2 的下界估计, 我们需要利用定理 1.1. 为此先证明定理 1.1.

5.1 定理 1.1 的证明

本小节证明定理 1.1, 即 $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$ 关于奇异值的渐近极限. 为此, 首先介绍以下有关 0 阶拟微分算子主值符号映射的内容.

令 Π 是 $\mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^d))$ 的一个 C^* -子代数, 并且由以下代数生成:

$$\{M_f : f \in \mathbb{C} + C_0(\mathbb{R}^d)\} \quad \text{和} \quad \left\{ g \left(\frac{-i\nabla}{\sqrt{-\Delta}} \right) : g \in \mathbb{S}^{d-1} \right\}.$$

这里的 Π 事实上是经典情形下 0- 阶拟微分算子主值符号的推广. 由文献 [40] 可知, 存在一个 $*$ - 同态映射

$$\text{sym} : \Pi \rightarrow C(\mathbb{S}^{d-1}, \mathbb{C} + C_0(\mathbb{R}^d)),$$

使得对任意的 $f \in \mathbb{C} + C_0(\mathbb{R}^d)$ 和 $g \in \mathbb{S}^{d-1}$, 有

$$\text{sym}(M_f) = f \otimes 1 \quad \text{和} \quad \text{sym}\left(g\left(\frac{-i\nabla}{\sqrt{-\Delta}}\right)\right) = 1 \otimes g.$$

称该 $*$ - 同态映射 sym 为主值符号映射. 为了使用该结论, 我们需要用到算子的支撑的概念, 即对于算子 $T \in \mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^d))$, 若存在函数 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 使得 $T = TM_\phi$, 则称算子 T 具有右支撑. 根据文献 [13, 定理 6.1], 可以得到以下有关主值符号映射的结果.

定理 5.1 令 $d \geq 2$ 和 $0 < p < \infty$. 若 $T \in \Pi$ 具有右支撑, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{p}} \mu(t, T(1 - \Delta)^{\frac{d}{2p}}) = d^{-\frac{1}{p}} (2\pi)^{-\frac{d}{p}} \|\text{sym}(T)\|_{L_p(\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1})}.$$

以下引理给出了在模去 $(S_{p,\infty})_0$ 意义下, 两个等价算子的奇异值的渐近极限是相同的.

引理 5.1 (参见文献 [12, 引理 3.1]) 令 $A \in S_{p,\infty}$ 和 $B \in (S_{p,\infty})_0$. 当 $0 < p < \infty$ 时, 有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{p}} \mu(t, A + B) = \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{p}} \mu(t, A) \quad \text{和} \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{p}} \mu(t, A + B) = \liminf_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{p}} \mu(t, A).$$

特别地,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{p}} \mu(t, A + B) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{p}} \mu(t, A),$$

这里均假设右边的极限存在.

定理 1.1 的证明 首先假设 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. 根据命题 4.1, 可得

$$[M_f, R_j(-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}] + M_{\partial_j f}(1 - \Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} + (1 + \epsilon) \sum_{k=1}^d R_j R_k M_{\partial_k f}(1 - \Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} \in (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0.$$

从而由引理 5.1 和奇异值的定义可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1-\epsilon}{d}} \mu(t, [M_f, R_j|D|^\epsilon]) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1-\epsilon}{d}} \mu\left(t, M_{\partial_j f}(1 - \Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} + (1 + \epsilon) \sum_{k=1}^d R_j R_k M_{\partial_k f}(1 - \Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}\right).$$

因为 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, 所以算子 $M_{\partial_j f} + (1 + \epsilon) \sum_{k=1}^d R_j R_k M_{\partial_k f}$ 具有右支撑. 应用定理 5.1, 得到

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1-\epsilon}{d}} \mu\left(t, M_{\partial_j f}(1 - \Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}} + (1 + \epsilon) \sum_{k=1}^d R_j R_k M_{\partial_k f}(1 - \Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}\right) \\ &= d^{\frac{\epsilon-1}{d}} (2\pi)^{\epsilon-1} \left\| \text{sym}\left(M_{\partial_j f} + (1 + \epsilon) \sum_{k=1}^d R_j R_k M_{\partial_k f}\right) \right\|_{L_{\frac{d}{1-\epsilon}}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1})}. \end{aligned}$$

由于

$$\text{sym}\left(M_{\partial_j f} + (1 + \epsilon) \sum_{k=1}^d R_j R_k M_{\partial_k f}\right)(x, \xi) = \partial_j f(x) - (1 + \epsilon) \sum_{k=1}^d \xi_j \xi_k \cdot \partial_k f(x),$$

进而得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1-\epsilon}{d}} \mu(t, [M_f, R_j|D|^\epsilon]) = c_{d,\epsilon} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left| \partial_j f(x) - (1 + \epsilon) \sum_{k=1}^d \xi_j \xi_k \cdot \partial_k f(x) \right|^{\frac{d}{1-\epsilon}} d\sigma(\xi) dx \right)^{\frac{1-\epsilon}{d}},$$

其中 $c_{d,\epsilon} = d^{\frac{\epsilon-1}{d}} (2\pi)^{\epsilon-1}$. 最后, 结合命题 3.1 和引理 3.5, 可知定理 1.1 成立. 至此证明完成. $\square$

5.2 定理 1.2 的下界估计

本小节证明定理 1.2 中的下界估计. 为此, 需要以下引理 (参见文献 [24, 引理 19]).

引理 5.2 令 $0 < \epsilon < 1$ 和 $d \geq 2$. 若 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ 和 $\eta \in C_c(\mathbb{R}^d)$, 则

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1-\epsilon}{d}} \mu(t, M_{\bar{\eta}}[M_f, R_j | D|^\epsilon] M_\eta) \\ &= d^{\frac{\epsilon-1}{d}} (2\pi)^{\epsilon-1} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\eta(x)|^{\frac{2d}{1-\epsilon}} \left| \partial_j f(x) - (1+\epsilon) \sum_{k=1}^d \xi_j \xi_k \cdot \partial_k f(x) \right|^{\frac{d}{1-\epsilon}} d\sigma(\xi) dx \right)^{\frac{1-\epsilon}{d}}. \end{aligned}$$

证明 由于 $\eta \in C_c(\mathbb{R}^d)$, 取函数 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 使得, 当 $x \in 2\text{supp}(\eta)$ 时, 有 $\phi(x) = 1$. 因此,

$$M_{\bar{\eta}}[M_f, R_j | D|^\epsilon] M_\eta = M_{\bar{\eta}}[M_{f\phi}, R_j | D|^\epsilon] M_\eta.$$

结合命题 4.1、Cwikel 估计 $[M_\eta, (1-\Delta)^{\frac{\epsilon-1}{2}}] \in (S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty})_0$ 以及定理 1.1 的证明, 可得

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1-\epsilon}{d}} \mu(t, M_{\bar{\eta}}[M_f, R_j | D|^\epsilon] M_\eta) \\ &= d^{\frac{\epsilon-1}{d}} (2\pi)^{\epsilon-1} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\eta(x)|^{\frac{2d}{1-\epsilon}} \left| \partial_j (f\phi)(x) - (1+\epsilon) \sum_{k=1}^d \xi_j \xi_k \cdot \partial_k (f\phi)(x) \right|^{\frac{d}{1-\epsilon}} d\sigma(\xi) dx \right)^{\frac{1-\epsilon}{d}}. \end{aligned}$$

最后, 由 $x \in \text{supp}(\eta)$ 有 $\phi(x) = 1$ 和 $\partial_k \phi(x) = 0$ ($k = 1, \dots, d$), 可知结论成立. $\square$

引理 5.3 令 $1 \leq p < \infty$ 和 $0 < \epsilon < 1$. 若 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ 以及非负 $\eta \in C_c(\mathbb{R}^d)$, 则存在非零正常数 $c_{p,d,\epsilon}$ 使得下式成立:

$$\left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left\| \eta \left(\partial_j f - (1+\epsilon) \sum_{k=1}^d \xi_j \xi_k \cdot \partial_k f \right) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^p d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{p}} \geq c_{p,d,\epsilon} \|\eta(\nabla f)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}.$$

证明 为了方便, 简记 $d\omega(x) = |\eta(x)|^p dx$. 考虑分解

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{\vec{v} \in \{+, -\}^d} W_{\vec{v}},$$

其中集合 $W_{\vec{v}} \subset \mathbb{R}^d$ 定义如下: 对于 $\vec{v} = (v_1, \dots, v_d)$, 点 $x \in W_{\vec{v}}$ 当且仅当对每个 $m = 1, \dots, d$, 有如下结论成立:

(1) 若 $v_m = +$, 则 $\partial_m f(x) \geq 0$;

(2) 若 $v_m = -$, 则 $\partial_m f(x) \leq 0$,

并且在交集处 (偏导为零) 可任意划分归属, 使得 $\bigcup_{\vec{v} \in \{+, -\}^d} W_{\vec{v}}$ 成为互不相交的并集. 因为 $\partial_1 f, \dots, \partial_d f$ 有 d 个, 所以这样的集合 $W_{\vec{v}}$ 总共有 2^d 个.

对于 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{S}^{d-1}$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$, 有

$$\partial_j f(x) - (1+\epsilon) \sum_{k=1}^d \xi_j \xi_k \cdot \partial_k f(x) = (1 - (1+\epsilon)\xi_j^2) \partial_j f(x) - (1+\epsilon) \sum_{k:k \neq j} \xi_j \xi_k \cdot \partial_k f(x).$$

对于固定的 $\vec{v}$, 定义 $\Omega_{\vec{v}} \subset \mathbb{S}^{d-1}$ 为满足以下条件的 $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ 构成的集合:

$$\text{sgn}((1+\epsilon)\xi_j^2 - 1) = v_j, \quad \text{sgn}(\xi_j \xi_k) = v_k, \quad \forall k \neq j,$$

其中约定当 $v_j = +$ 时要求 $(1 + \epsilon)\xi_j^2 - 1 \geq 0$, 即 $|\xi_j| \geq \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}}$; 当 $v_j = -$ 时要求 $(1 + \epsilon)\xi_j^2 - 1 \leq 0$, 即 $|\xi_j| \leq \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}}$. 这样的 $\Omega_{\vec{v}}$ 是一定存在的, 例如,

(1) 若 $\vec{v} = (+, \dots, +)$ 均非负, 则取 $\Omega_{\vec{v}} = \{\xi \in \mathbb{S}^{d-1} : \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} \leq \xi_j \leq 1, \xi_k \geq 0, k \neq j\}$;

(2) 若 $\vec{v} = (-, +, \dots, +)$, 则取 $\Omega_{\vec{v}} = \{\xi \in \mathbb{S}^{d-1} : \xi_1 \leq 0, \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} \leq \xi_j \leq 1, \xi_k \geq 0, k \neq j, 1\}$ (考虑 $j \neq 1$).

对于其他情形, 类似地可取相应的 $\Omega_{\vec{v}}$. 从而有

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left\| \partial_j f - (1 + \epsilon) \sum_{k=1}^d \xi_j \xi_k \cdot \partial_k f \right\|_{L_p(W_{\vec{v}}, d\omega)}^p d\sigma(\xi) \\ & \geq \int_{W_{\vec{v}}} \int_{\Omega_{\vec{v}}} \left(|(1 + \epsilon)\xi_j^2 - 1| |\partial_j f(x)| + (1 + \epsilon) \sum_{k:k \neq j} |\xi_j \xi_k| |\partial_k f(x)| \right)^p d\sigma(\xi) d\omega(x). \end{aligned}$$

接下来, 令

$$\Omega_+ = \left\{ \xi \in \mathbb{S}^{d-1} : \sqrt{\frac{1+\frac{\epsilon}{2}}{1+\epsilon}} \leq |\xi_j| \leq 1, 1 \geq |\xi_k| \geq \frac{1}{N} \sqrt{\frac{\epsilon}{2(1+\epsilon)}}, k \neq j \right\}$$

和

$$\Omega_- = \left\{ \xi \in \mathbb{S}^{d-1} : \frac{1}{N} \sqrt{\frac{\epsilon}{2(1+\epsilon)}} \leq |\xi_j| \leq \sqrt{\frac{1-\frac{\epsilon}{2}}{1+\epsilon}}, 1 \geq |\xi_k| \geq \frac{1}{N} \sqrt{\frac{\epsilon}{2(1+\epsilon)}}, k \neq j \right\},$$

这里取充分大的 $N \geq d^2$ 使得 $\xi_1^2 + \dots + \xi_d^2 = 1$ 有意义, 并且 Ω_+ , Ω_- , $\Omega_+ \cap \Omega_{\vec{v}}$ ($v_j = +$) 和 $\Omega_- \cap \Omega_{\vec{v}}$ ($v_j = -$) 是非空的. 进而, 在 Ω_+ 上有

$$(1 + \epsilon)\xi_j^2 - 1 \geq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{和} \quad (1 + \epsilon)|\xi_j \xi_k| \geq \frac{1}{N} \sqrt{\frac{\epsilon(1+\frac{\epsilon}{2})(1+\epsilon)}{2}}.$$

在 Ω_- 上有

$$1 - (1 + \epsilon)\xi_j^2 \geq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{和} \quad (1 + \epsilon)|\xi_j \xi_k| \geq \frac{1}{N^2} \frac{\epsilon(1+\epsilon)}{2}.$$

因此, 取

$$c_{\epsilon, N} = \min \left\{ \frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{N} \sqrt{\frac{\epsilon(1+\frac{\epsilon}{2})(1+\epsilon)}{2}}, \frac{1}{N^2} \frac{\epsilon(1+\epsilon)}{2} \right\}.$$

同时, 因为 Ω_+ 和 Ω_- 是球面上有正测度的区域, 且与每个“象限”的交集也有正测度, 所以可取

$$c_0 = \min \left\{ \min_{\vec{v}: v_j = +} \sigma(\Omega_+ \cap \Omega_{\vec{v}}), \min_{\vec{v}: v_j = -} \sigma(\Omega_- \cap \Omega_{\vec{v}}) \right\} > 0.$$

当 $\vec{v} \in \{+, -\}^d$ 满足 $v_j = +$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left\| \partial_j f - (1 + \epsilon) \sum_{k=1}^d \xi_j \xi_k \cdot \partial_k f \right\|_{L_p(W_{\vec{v}}, d\omega)}^p d\sigma(\xi) \\ & \geq \int_{W_{\vec{v}}} \int_{\Omega_+ \cap \Omega_{\vec{v}}} \left(((1 + \epsilon)\xi_j^2 - 1) |\partial_j f(x)| + (1 + \epsilon) \sum_{k:k \neq j} |\xi_j \xi_k| |\partial_k f(x)| \right)^p d\sigma(\xi) d\omega(x) \\ & \geq \sigma(\Omega_+ \cap \Omega_{\vec{v}}) c_{\epsilon, N}^p \left\| \sum_{k=1}^d |\partial_k f| \right\|_{L_p(W_{\vec{v}}, d\omega)}^p \\ & \geq c_0 c_{\epsilon, N}^p \|\eta(\nabla f)\|_{L_p(W_{\vec{v}})}^p. \end{aligned}$$

同理, 当 $\vec{v} \in \{+, -\}^d$ 满足 $v_j = -$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left\| \partial_j f - (1 + \epsilon) \sum_{k=1}^d \xi_j \xi_k \cdot \partial_k f \right\|_{L_p(W_{\vec{v}}, d\omega)}^p d\sigma(\xi) \\ & \geq \int_{W_{\vec{v}}} \int_{\Omega_- \cap \Omega_{\vec{v}}} \left((1 - (1 + \epsilon)\xi_j^2) |\partial_j f(x)| + (1 + \epsilon) \sum_{k: k \neq j} |\xi_j \xi_k| |\partial_k f(x)| \right)^p d\sigma(\xi) d\omega(x) \\ & \geq c_0 c_{\epsilon, N}^p \|\eta(\nabla f)\|_{L_p(W_{\vec{v}})}^p. \end{aligned}$$

综上所述, 可得

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left\| \eta \left(\partial_j f - (1 + \epsilon) \sum_{k=1}^d \xi_j \xi_k \cdot \partial_k f \right) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^p d\sigma(\xi) \\ & = \left(\sum_{\vec{v} \in \{+, -\}^d, v_j = +} + \sum_{\vec{v} \in \{+, -\}^d, v_j = -} \right) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left\| \partial_j f - (1 + \epsilon) \sum_{k=1}^d \xi_j \xi_k \cdot \partial_k f \right\|_{L_p(W_{\vec{v}}, d\omega)}^p d\sigma(\xi) \\ & \geq c_0 c_{\epsilon, N}^p \sum_{\vec{v} \in \{+, -\}^d} \|\eta(\nabla f)\|_{L_p(W_{\vec{v}})}^p \\ & = c_0 c_{\epsilon, N}^p \|\eta(\nabla f)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^p. \end{aligned}$$

最后, 令 $c_{p, d, \epsilon}^p = c_0 c_{\epsilon, N}^p$. 至此证明完成. $\square$

引理 5.4 令 $0 < \epsilon < 1$ 和 $d \geq 2$. 令 $f \in L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ 使得 $[M_f, R_j |D|^\epsilon]$ 是 $L_2(\mathbb{R}^d)$ 上的紧算子. 若非负函数 $\Phi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ 满足 $\|\Phi\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} = 1$, 则 $[M_{f*\Phi}, R_j |D|^\epsilon]$ 是 $L_2(\mathbb{R}^d)$ 上的紧算子, 并且

$$\int_0^t \mu(s, [M_{f*\Phi}, R_j |D|^\epsilon]) ds \leq \int_0^t \mu(s, [M_f, R_j |D|^\epsilon]) ds, \quad \forall t > 0.$$

证明 仿照文献 [13, 引理 8.2] 的证明可直接得到该结论. $\square$

现在开始定理 1.2 下界估计的证明.

命题 5.1 令 $0 < \epsilon < 1$ 和 $d \geq 2$. 若 $f \in (-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}} \text{BMO}(\mathbb{R}^d)$ 使得 $\|[M_f, R_j |D|^\epsilon]\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}} < \infty$, 则存在依赖于 ϵ 和 d 的常数 c 满足

$$c \|f\|_{\dot{W}_{\frac{d}{1-\epsilon}}} \leq \|[M_f, R_j |D|^\epsilon]\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}}.$$

证明 令 $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 是一个非负函数且满足 $\|\Phi\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} = 1$. 因为 $S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}$ 是一个强对称算子空间 [26], 由引理 5.4 可得

$$\|[M_{f*\Phi}, R_j |D|^\epsilon]\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}} \leq \|[M_f, R_j |D|^\epsilon]\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}}.$$

若 $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 满足 $\|\eta\|_\infty = 1$, 有

$$\|M_{\bar{\eta}}[M_{f*\Phi}, R_j |D|^\epsilon] M_{\bar{\eta}}\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}} \leq \|\eta\|_\infty^2 \|[M_{f*\Phi}, R_j |D|^\epsilon]\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}}.$$

而对于 $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 和 $f * \Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, 根据引理 5.2 和 5.3, 可以得到

$$\|M_{\bar{\eta}}[M_{f*\Phi}, R_j |D|^\epsilon] M_{\bar{\eta}}\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1-\epsilon}{d}} \mu(t, M_{\bar{\eta}}[M_{f*\Phi}, R_j |D|^\epsilon] M_{\bar{\eta}}) \geq c'_{d, \epsilon} \|\eta^2 \nabla(f * \Phi)\|_{L_{\frac{d}{1-\epsilon}}}.$$

综上所述, 可得

$$c'_{d,\epsilon} \|\eta^2 \nabla(f * \Phi)\|_{L_{\frac{d}{1-\epsilon}}} \leq \|[M_f, R_j |D|^\epsilon]\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}}.$$

进一步地, 对于任意满足 $\|\eta\|_\infty = 1$ 且 $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 的函数 η , 在不等式左端取上确界, 即得

$$c'_{d,\epsilon} \|\nabla(f * \Phi)\|_{L_{\frac{d}{1-\epsilon}}} \leq \|[M_f, R_j |D|^\epsilon]\|_{S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}}.$$

最后, 根据文献 [13, 引理 8.3], 当 $1 < p \leq \infty$ 时, 对满足 $\|\Phi\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} = 1$ 的任意非负函数 $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, 若 $\|\nabla(f * \Phi)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leq 1$, 则 $f \in \dot{W}_p^1(\mathbb{R}^d)$ 且 $\|f\|_{\dot{W}_p^1} \leq 1$. 结合该事实以及前面的推断, 即可得到结论成立. $\square$

最终, 根据命题 3.1 和 5.1, 即可得到定理 1.2 的结论.

致谢 作者衷心感谢审稿人提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Caspers M, Sukochev F, Zanin D. Weak type operator Lipschitz and commutator estimates for commuting tuples. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 2018, 68: 1643–1669
- 2 Chen Y P, Ding Y, Hong G X. Commutators with fractional differentiation and new characterizations of BMO-Sobolev spaces. *Anal PDE*, 2016, 9: 1497–1522
- 3 Coifman R R, Rochberg R, Weiss G. Factorization theorems for Hardy spaces in several variables. *Ann of Math* (2), 1976, 103: 611–635
- 4 Connes A. The action functional in non-commutative geometry. *Comm Math Phys*, 1988, 117: 673–683
- 5 Connes A. Noncommutative Geometry. San Diego: Academic Press, 1994
- 6 Fan Z, Lacey M, Li J. Schatten classes and commutators of Riesz transform on Heisenberg group and applications. *J Fourier Anal Appl*, 2023, 29: 17
- 7 Fan Z, Lacey M, Li J, et al. Besov space, Schatten classes and commutators of Riesz transforms associated with the Neumann Laplacian. *Michigan Math J*, 2025, 75: 199–224
- 8 Fan Z, Lacey M, Li J, et al. Schatten-Lorentz characterization of Riesz transform commutator associated with Bessel operators. *J Funct Anal*, 2026, 290: 2
- 9 Fan Z, Li J, McDonald E, et al. Endpoint weak Schatten class estimates and trace formula for commutators of Riesz transforms with multipliers on Heisenberg groups. *J Funct Anal*, 2024, 286: 1
- 10 Fan Z, Li J, Sukochev F, et al. Spectral asymptotic formula of Bessel-Riesz commutator. *arXiv:2411.14928*, 2024
- 11 Frank R L. A characterization of $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. *Pure Appl Funct Anal*, 2024, 9: 53–68
- 12 Frank R L, Sukochev F, Zanin D. Asymptotics of singular values for quantum derivatives. *Trans Amer Math Soc*, 2023, 376: 2047–2088
- 13 Frank R L, Sukochev F, Zanin D. Endpoint Schatten class properties of commutators. *Adv Math*, 2024, 450: 109738
- 14 Gong Z, Li J, Wick B D. Besov spaces, Schatten classes and weighted versions of the quantised derivative. *Anal Math*, 2023, 49: 971–1006
- 15 Hytönen T, Korte R. Schatten properties of commutators and equivalent Sobolev norms on metric spaces. *arXiv:2411.02613*, 2024
- 16 Janson S, Peetre J. Paracommutators-boundedness and Schatten-von Neumann properties. *Trans Amer Math Soc*, 1988, 305: 467–504
- 17 Janson S, Wolff T H. Schatten classes and commutators of singular integral operators. *Ark Mat*, 1982, 20: 301–310
- 18 Kissin E, Potapov D, Shulman V, et al. Operator smoothness in Schatten norms for functions of several variables: Lipschitz conditions, differentiability and unbounded derivations. *Proc Lond Math Soc* (3), 2012, 105: 661–702
- 19 Lacey M, Li J, Wick B D. Schatten class estimates for paraproducts in multi-parameter setting and applications. *arXiv:2303.15657*, 2023
- 20 Lacey M, Li J, Wick B D. Schatten classes and commutator in the two weight setting, I. Hilbert transform. *Potential Anal*, 2024, 60: 875–894
- 21 Lacey M, Li J, Wick B D, et al. Schatten classes and commutators in the two weight setting, II. Riesz transforms. *arXiv:2404.00329*, 2024
- 22 Leoni G. A First Course in Sobolev Spaces. Graduate Studies in Mathematics, vol. 105. Providence: Amer Math Soc, 2009

- 23 Li J, Xiong X, Yang F. Schatten properties of Calderón-Zygmund singular integral commutator on stratified Lie groups. [J Math Pures Appl](#), 2024, 188: 73–113
- 24 Lord S, McDonald E, Sukochev F, et al. Quantum differentiability of essentially bounded functions on Euclidean space. [J Funct Anal](#), 2017, 273: 2353–2387
- 25 Lord S, McDonald E, Sukochev F, et al. Singular Traces, Volume 2. Trace Formulas. Berlin: Walter de Gruyter, 2023
- 26 Lord S, Sukochev F, Zanin D. Singular Traces: Theory and Applications. Berlin: Walter de Gruyter, 2012
- 27 McDonald E, Sukochev F, Xiong X. Quantum differentiability on quantum tori. [Comm Math Phys](#), 2019, 371: 1231–1260
- 28 McDonald E, Sukochev F, Xiong X. Quantum differentiability on noncommutative Euclidean spaces. [Comm Math Phys](#), 2020, 379: 491–542
- 29 Murray M. Commutators with fractional differentiation and BMO Sobolev spaces. [Indiana Univ Math J](#), 1985, 34: 205–215
- 30 Peller V V. Hankel operators of class $\mathfrak{S}_p$ and their applications (rational approximation, Gaussian processes, the problem of majorizing operators). [Math USSR Sb](#), 1982, 41: 443–479
- 31 Peller V V. Description of Hankel operators of the class S_p for $p > 0$, investigation of the rate of rational approximation and other applications. [Math USSR Sb](#), 1983, 122: 481–510
- 32 Peller V V. Hankel Operators and Their Applications. New York: Springer-Verlag, 2003
- 33 Potapov D, Sukochev F. Unbounded Fredholm modules and double operator integrals. [J Reine Angew Math](#), 2009, 626: 159–185
- 34 Rochberg R, Semmes S. Nearly weakly orthonormal sequences, singular value estimates, and Calderon-Zygmund operators. [J Funct Anal](#), 1989, 86: 237–306
- 35 Segovia C, Wheeden R L. Fractional differentiation of the commutator of the Hilbert transform. [J Funct Anal](#), 1971, 8: 341–359
- 36 Semmes S. Trace ideal criteria for Hankel operators, and applications to Besov spaces. [Integral Equations Operator Theory](#), 1984, 7: 241–281
- 37 Simon B. Trace Ideals and Their Applications, 2nd ed. Providence: Amer Math Soc, 2005
- 38 Strichartz R S. Bounded mean oscillation and Sobolev spaces. [Indiana Univ Math J](#), 1980, 29: 539–558
- 39 Sukochev F, Xiong X, Zanin D. Asymptotics of singular values for quantised derivatives on noncommutative tori. [J Funct Anal](#), 2023, 285: 110021
- 40 Sukochev F, Zanin D. A C^* -algebraic approach to the principal symbol. I. [J Operator Theory](#), 2018, 80: 481–522
- 41 Uchiyama A. On the compactness of operators of Hankel type. [Tohoku Math J \(2\)](#), 1978, 30: 163–171
- 42 Wang S. Compactness of commutators of fractional integrals (in Chinese). [Chinese Ann Math Ser A](#), 1987, 8: 475–482 [王世林. 分数次积分交换子的紧致性. [数学年刊 A 辑 \(中文版\)](#), 1987, 8: 475–482]
- 43 Wei Z, Zhang H. Complex median method and Schatten class membership of commutators. [arXiv:2411.05810](#), 2024
- 44 Wei Z, Zhang H. On the boundedness and Schatten class property of noncommutative martingale para-products and operator-valued commutators. [arXiv:2407.14988](#), 2024
- 45 Youssfi A. Regularity properties of commutators and BMO-Triebel-Lizorkin spaces. [Ann Inst Fourier \(Grenoble\)](#), 1995, 45: 795–807

Spectral estimates for commutators of fractional derivatives

Songqing Chen & Fulin Yang

Abstract In this paper, we investigate the asymptotic limitation with respect to the singular value and the estimates in Schatten class $S_{\frac{d}{1-\epsilon}, \infty}$ for the commutator $[M_f, R_j|D|^\epsilon]$, $0 < \epsilon < 1$, where M_f is the multiplication operator of $f \in L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $\{R_j\}_{j=1}^d$ are Riesz transforms on $\mathbb{R}^d$ and the fractional derivative $|D|^\epsilon$ is defined via Fourier transform $|D|^\epsilon \phi(x) = |x|^\epsilon \widehat{\phi}(x)$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Keywords spectral estimate, asymptotic limit, singular value, commutator, fractional derivative

MSC(2020) 47L20, 46L51, 46L52, 35P20, 35P15

doi: 10.1360/SSM-2025-0214