中国科学: 数学 2019 年 第 49 卷 第 3 期: 467 ~ 484
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

生灭过程的平稳性与拟平稳性

献给王梓坤教授 90 华诞

毛永华
北京师范大学数学科学学院, 北京 100875
E-mail: maoyh@bnu.edu.cn

收稿日期: 2018-03-04; 接受日期: 2018-05-02; 网络出版日期: 2019-03-07
国家自然科学基金 (批准号: 11571043 和 11771047) 资助项目

摘要 王梓坤先生对生灭过程的构造性理论做出了开创性工作, 这些工作产生了深远的影响. 本文将阐述 4 种无穷边界的生灭过程的平稳性和拟平稳分布的存在唯一性. 特别地, 本文证明了具有流出边界和正则边界的最小生灭过程的拟平稳分布的存在唯一性. 这些结果得益于王梓坤先生和杨向群教授关于生灭过程的构造论. 最后, 本文提出生灭过程的拟平稳分布的一些待解决问题.

关键词 生灭过程 遍历性 拟平稳分布

MSC (2010) 主题分类 60J27, 60J35, 37A30

1 引言

生灭过程是一类具有广泛应用背景和特殊理论作用的 Markov 跳过程. 一方面, 它在人口学和生物学等领域有着广泛应用; 另一方面, 作为一类非平凡的跳过程, 对一般的跳过程的研究有着示范和标杆的作用. 从而在更一般的 Markov 过程研究中可以看到生灭过程的影子.

王梓坤先生在生灭过程的基础研究方面做出了许多开创性和前瞻性的工作, 并影响到一大批人的工作. 王先生以概率方法给出 (非唯一) 生灭过程的完全构造. 不同于几乎同时期 Feller 的分析方法 (只构造部分过程) 以及 Dynkin 和 Reuter 的半群方法, 他使用基于轨道性质的一种函数构造论, 即通过结构较为简单的 Doob 过程来逼近任一个 Q 过程, 不仅完成全部生灭过程的构造, 而且在方法上有极大的创新和突破.

本文将从生灭过程的平稳性和拟平稳性两方面介绍最新进展, 主要是基于作者与合作者最近的工作. 这些工作的出发点是生灭过程的首中时的谱表示, 也就是利用生灭过程的生成元 (Q 矩阵) 的特征值得到首中时的 Laplace 变换的表示. 经典的结论是对于有限状态空间上的生灭过程, 我们将此结论推广到可数状态空间上, 并进一步研究具有不同边界条件下生灭过程的首中时、生命时和强平稳时的谱表示. 特别是非正则的生灭矩阵所生成的最小或最大过程的相关问题, 此时生灭过程的构造理论对于我们的工作起着基础性的作用.

英文引用格式: Mao Y H. Stationarity and quasi-stationarity for birth-death processes (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 467–484, doi: 10.1360/N012018-00047

© 2019《中国科学》杂志社

2 生灭过程

形如

$$Q=\begin{pmatrix} -(a_0+b_0) & b_0 & & & \\ a_1 & -(a_1+b_1) & b_1 & & \\ & a_2 & -(a_2+b_2) & b_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

的 Q 矩阵称为生灭矩阵, 其中生的速率 $\{b_i, i\geqslant 0\}$ 和死的速率 $\{a_i, i\geqslant 1\}$ 为两个正数序列, 但 $a_0\geqslant 0$. 若 $a_0=0$, 则 Q 矩阵不可约; 若 $a_0>0$, 则相应的过程可以从状态 0 跳到吸收态 -1. 记

$$\mu_0=1,\quad \mu_i=\frac{b_0\cdots b_{i-1}}{a_1\cdots a_i},\quad i\geqslant 1;\quad \nu_i=\frac{1}{\mu_i b_i},\quad i\geqslant 0, \tag{2.2}$$

则

$$\mu_{i+1}a_{i+1}=\mu_i b_i,\quad i\geqslant 0,$$

即 Q 关于 (μ_i) 是对称的. 定义

$$A=\sum_{i=0}^{\infty}\nu_i,\quad B=\sum_{i=0}^{\infty}\mu_i,\quad R=\sum_{i=0}^{\infty}\nu_i\sum_{j=0}^{i}\mu_j,\quad S=\sum_{i=0}^{\infty}\nu_i\sum_{j=i+1}^{\infty}\mu_j. \tag{2.3}$$

由文献 [1] 知, ∞ 边界称为自然的, 若 $R=\infty=S$; ∞ 边界称为流入的, 若 $R=\infty$, $S<\infty$; ∞ 边界称为流出的, 若 $R<\infty$, $S=\infty$; ∞ 边界称为正则的, 若 $R<\infty$, $S<\infty$. 相应的 Q 过程是唯一的当且仅当 $R=\infty$ (也可参见文献 [2, 第 8 章]).

首先总结在不同边界条件下生灭过程的遍历性和拟平稳性.

在自然边界条件下, 相应的 Q 过程是唯一的. 如果 $a_0=0$, 那么过程遍历当且仅当

$$\mu:=\sum_{i=0}^{\infty}\mu_i<\infty.$$

在文献 [3] 中, 指数遍历性的显式判别准则已给出. 但是, 此时过程不可能强遍历. 如果 $a_0>0$, 那么过程的生命时 ζ 即为过程击中状态 -1 的时间. 在假定衰减参数:

$$\lambda=-\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log p_{ij}(t)>0$$

的前提下, van Doorn [4] 给出了相应生灭过程的所有拟平稳分布的刻画. 必须指出的是, 在 $a_0>0$ 时, 过程的衰减参数为正的判别准则等同于在 $a_0=0$ 时过程指数遍历性的判别准则.

在流入边界条件下, 相应的 Q 过程仍然是唯一的. 若 $a_0=0$, 则过程是强遍历的 (参见文献 [5–7]), 其最快平稳时间存在且有限 (参见文献 [8]). 若 $a_0>0$, 则存在唯一的拟平稳分布 (参见文献 [4]).

在流出边界条件下, 相应的 Q 过程非唯一. 假设 $a_0\geqslant 0$, 文献 [9] 证明了最小 Q 过程存在唯一的拟平稳分布. 此时, 该最小过程的拟平稳分布的存在唯一性可以转化为讨论一个对偶的具有流入边界的生灭过程的相应问题.

在正则边界条件下, 相应的 Q 过程也非唯一. 若 $a_0=0$, 则最大 Q 过程, 如同流入边界的生灭过程一样, 是强遍历的, 其最快平稳时间存在唯一 [1)]. 若 $a_0\geqslant 0$, 则最小 Q 过程的拟平稳分布存在唯一.

1) Gao W J, Mao Y H, Zhang C. The birth-death processes with regular boundary: Stationarity and quasi-stationarity. Submitted, 2017

这些工作, 特别是非正则生灭过程的研究, 是基于首中时的谱表示. 因此, 我们首先研究 4 种边界条件下生灭过程的首中时的谱表示.

3 击中时的谱表示

下面是一个关于击中时分布的谱表示的经典结论 (参见文献 [10, 定理 1.1]).

定理 3.1 定义

$$G^{(n)}=\begin{pmatrix} -b_0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & -(a_1+b_1) & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -(a_2+b_2) & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -(a_{n-1}+b_{n-1}) \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

令 $\lambda_1^{(n)}<\cdots<\lambda_n^{(n)}$ 是矩阵 $-Q^{(n)}$ 的所有 n 个正的特征值, $T_{0,n}$ 为 $G^{(n)}$ 过程从 0 出发首次击中状态 n 的时刻, 则 $T_{0,n}$ 与 n 个独立的具有指数分布的随机变量之和同分布, 每个指数分布的参数为 $\{\lambda_1^{(n)},\dots,\lambda_n^{(n)}\}$, 即

$$\mathrm{E}\mathrm{e}^{-sT_{0,n}}=\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\lambda_\nu^{(n)}}{s+\lambda_\nu^{(n)}},\quad s\geqslant 0. \tag{3.2}$$

利用 h 变换方法, 上述定理可以推广到 $a_0>0$ 的情形. 令

$$\tilde{G}^{(n)}=\begin{pmatrix} -(a_0+b_0) & b_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -(a_1+b_1) & b_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -(a_{n-1}+b_{n-1}) & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

令 $0=\tilde{\lambda}_0^{(n)}<\tilde{\lambda}_1^{(n)}<\cdots<\tilde{\lambda}_{n-1}^{(n)}<\tilde{\lambda}_n^{(n)}$ 为 $-\tilde{G}^{(n)}$ 的所有 $n+1$ 个特征值. 再令 μ_i 由 (2.2) 给出, 并进一步定义

$$h_i=\sum_{j=0}^{i}\frac{1}{\mu_j a_j}\quad(0\leqslant i\leqslant n-1),\quad h_n=h_{n-1}+\frac{1}{\mu_{n-1}b_{n-1}}. \tag{3.4}$$

定理 3.2 假设 $a_0>0$, 则 $\tilde{G}^{(n)}$ 过程的击中时 $\tilde{T}_{0,n}$ 具有 Laplace 变换:

$$\mathrm{E}\mathrm{e}^{-s\tilde{T}_{0,n}}=\frac{h_0}{h_n}\cdot\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\tilde{\lambda}_\nu^{(n)}}{s+\tilde{\lambda}_\nu^{(n)}},\quad s>0.$$

下面将上述结论推广到无穷状态空间上, 即令 $n\to\infty$. 为此, 先假设 $a_0=0$. 若 $R<\infty$, 我们考虑最小的 Q 过程 $(X_t,t\geqslant 0)$, 其转移概率函数为 $P(t)=(p_{ij}(t))$, 即

$$p_{ij}(t)=\mathrm{P}_i[X_t=j,t<\zeta],$$

其中 $\zeta = \lim_{n\to\infty} \xi_n$ 为生命时:

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_n = \inf\{t : t > \xi_{n-1}, X_t \neq X_{\xi_{n-1}}\}, \quad n \geqslant 1.$$

容易从生灭的非跨越特性 (skip-free) 看到:

命题 3.3 (i) 假设过程从状态 i 出发, 生命时 $\zeta = \lim_{n\to\infty} T_{i,n}$ a.s.;

(ii) 假设 $R < \infty$, 则有 $\mathrm{P}_i[\zeta = \infty] = 0$, $i \in E$, 且 $\mathrm{E}_0\zeta = R$.

我们首先需要如下特征时等式 (参见文献 [11]). 记 $L^2(\mu)$ 为 E 上通常的 Hilbert 空间. 易见 $Q^{(n)}$、Q 和 $P(t)$ 是 $L^2(\mu)$ 上的自伴算子. 对 $L^2(\mu)$ 上自伴算子 A, 记 $\sigma(A)$ 和 $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ 分别为算子 A 的谱和本征谱. 所谓算子的本征谱包含其连续谱和具有无穷重的特征值. 当 $\sigma_{\mathrm{ess}}(Q) = \emptyset$ 时, 记 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ 为 $-Q$ 的所有特征值.

定理 3.4 假设 $R < \infty$, $S = \infty$, 即 ∞ 是流出边界, 则最小过程 $P(t)$ 是一个 Hilbert-Schmidt 算子 ($t > 0$), 且本征谱 $\sigma_{\mathrm{ess}}(Q) = \emptyset$. 进而,

$$\sum_{\nu\geqslant 1} \lambda_\nu^{-1} = R.$$

为刻画无穷状态空间的特征值, 我们使用 Dirichlet 变分公式. 生灭过程的 Dirichlet 型为

$$D(f) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i b_i (f_i - f_{i+1})^2,$$

且 $\mathscr{D}(D) = \{f \in L^2(\mu) : D(f) < \infty\}$. 令

$$\mathscr{K} = \{f : f \text{ 有限支撑}\},$$

则 $(D, \mathscr{D}(D))$ 称为正则的, 若 $\mathscr{K}$ 在范数 $\|\cdot\|_D : \|f\|_D^2 = \mu(f^2) + D(f)$ 下在 $\mathscr{D}(D)$ 是稠的. 参见文献 [12, 第 6.7–6.8 节]. 由文献 [12, 推论 6.62] 知, 对称 Q 过程唯一当且仅当 $(D, \mathscr{D}(D))$ 是正则的. 而文献 [3, 命题 1.3] 证明了 $(D, \mathscr{D}(D))$ 是正则的当且仅当

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\mu_i b_i} + \mu_i\right] = \infty. \tag{3.5}$$

当 ∞ 是流出边界时, $(D, \mathscr{D}(D))$ 是正则的 Dirichlet 型. 因此, 如同文献 [12, 定理 9.11], 当 ∞ 是流出边界时,

$$\lambda_\nu = \sup_{f^{(1)},\ldots,f^{(\nu-1)}\in L^2(\mu)} \inf\{D(f) : f \in \mathscr{K}, \mu(f^2) = 1, \mu(ff^{(i)}) = 0, 1 \leqslant i < \nu\}.$$

注意到 $\lambda_1^{(n)} < \cdots < \lambda_n^{(n)}$ 是矩阵 $-Q^{(n)}$ (由 (3.1)) 的所有 n 个正的特征值, 我们有如下的逼近定理.

定理 3.5 假设 ∞ 是流出边界, 则对任一个 $\nu \geqslant 1$, 有

$$\lambda_\nu^{(n)} \downarrow \lambda_\nu, \quad n \uparrow \infty.$$

这样, 在经典结论 (定理 3.2) 中, 令 $n \to \infty$, 可以得到关于流出边界的最小生灭过程的生命时的谱表示.

定理 3.6 假设 ∞ 是流出边界. 令 ζ 为最小生灭过程的生命时, 则

$$\mathrm{E}_0 \mathrm{e}^{-s\zeta} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu}{s + \lambda_\nu}, \quad s \geqslant 0.$$

证明 注意 $\zeta = \lim_{n\to\infty} T_{0,n}$ $(X_0 = 0)$. 从而,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_0\mathrm{e}^{-s\zeta} &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\mathrm{e}^{-sT_{0,n}} \quad (\text{单调收敛定理})\\ &= \lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\lambda_\nu^{(n)}}{s+\lambda_\nu^{(n)}}.\end{aligned}$$

上式两边取对数, 由单调收敛定理得到

$$-\log \mathrm{E}_0\mathrm{e}^{-s\zeta} = \sum_{\nu=1}^{\infty} -\log \frac{\lambda_\nu}{s+\lambda_\nu},$$

即

$$\mathrm{E}_0\mathrm{e}^{-s\zeta} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu}{s+\lambda_\nu}.$$

证毕. □

下面考虑反向的击中时问题, 即过程出发点在击中状态的右边, 如 $T_{n,0}$. 如果 n 是过程的反射边界, 很容易由已知的经典结论得到: 在状态空间上作变换 $i \to n-i$ 即可. 而我们真正要考虑的是无穷状态空间的反向问题.

假设 ∞ 是流入边界, 即 $R = \infty$, $S < \infty$. 此时相应的 Q 过程是唯一的. 因为 $S < \infty$ 和 $S \geqslant \frac{1}{\mu_0 b_0} \sum_{j\geqslant 1} \mu_j$, 所以,

$$\mu = \sum_{j\geqslant 0} \mu_j < \infty.$$

令 $\pi_i = \mu_i/\mu$, 则 $\pi := (\pi_i, i \geqslant 0)$ 为 E 上概率测度, 从而过程关于 π 可逆. 现在考虑 Hilbert 空间 $L^2(\pi)$ 上的谱理论.

对 $n \geqslant 0$, 令

$$Q_n = \begin{pmatrix} -(a_{n+1}+b_{n+1}) & b_{n+1} & 0 & \cdots \\ a_{n+2} & -(a_{n+2}+b_{n+2}) & b_{n+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

为状态空间 $E_n := \{n+1, n+2, \ldots\}$ 上到达状态 n 之前的生灭过程. 令 $\pi^{(n)} := (\pi_i : i > n)$. 易见 Q_n 关于 $\pi(n)$ 对称, 且 Q_n 是 $L^2(E_n, \pi^{(n)})$ 上的自伴算子. 当 $\sigma_{\mathrm{ess}}(Q_n) = \emptyset$ 时, 记 $\lambda_{n,1} < \lambda_{n,2} < \cdots$ 为 $-Q_n$ 的所有特征值. 当 $n = 0$ 时, 去掉下标 n.

定理 3.7 假设 $R = \infty$, $S < \infty$, 即 ∞ 是流入边界, 则 $\sigma_{\mathrm{ess}}(Q_n) = \emptyset$, 且对任一个 $n \geqslant 0$, 有

$$S_n := \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{\pi_j b_j} \sum_{i=j+1}^{\infty} \pi_i = \sum_{\nu\geqslant 1} \lambda_{n,\nu}^{-1} < \infty. \tag{3.7}$$

因为 ∞ 是流入边界, Dirichlet 型是正则的, 所以,

$$\lambda_{n,\nu} = \max_{f^{(1)},\ldots,f^{(\nu-1)}\in L^2(\mu)} \min\{D(f) : f \in \mathscr{K}_L, \mu(f^2) = 1, \text{且 } \mu(ff^{(i)}) = 0, 1 \leqslant i < \nu\}, \tag{3.8}$$

其中 $\mathscr{K}_L = \{g = f + dI_{[n+1,\infty)} : \text{存在 } N \text{ 使得 } \{f \neq 0\} \subset \{n+1, \ldots, N\}\}$.

类似于定理 3.5 的逼近, 令 $\{\lambda_{n,\nu}^{(N)}\}$ 为下面矩阵的特征值:

$$Q_n^{(N)} = \begin{pmatrix} -(a_{n+1}+b_{n+1}) & b_{n+1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{n+2} & -(a_{n+2}+b_{n+2}) & b_{n+2} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -b_N & b_N \end{pmatrix}.$$

定理 3.8 假设 $R=\infty$, $S<\infty$, 则对任一个 $\nu \geqslant 1$, 当 $N\to\infty$ 时, 有

$$\lambda_{n,\nu}^{(N)} \downarrow \lambda_{n,\nu}.$$

我们有如下类似的结论:

定理 3.9 假设 ∞ 是流入边界.

(i) 对 $n \geqslant 1$, 有

$$\mathrm{E}\mathrm{e}^{-sT_{n,0}} = \frac{\prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\hat{\lambda}_\nu}{s+\hat{\lambda}_\nu}}{\prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\hat{\lambda}_{n,\nu}}{s+\hat{\lambda}_{n,\nu}}}, \quad s \geqslant 0;$$

(ii) 令 $T_{\infty,0} = \lim_{n\to\infty} T_{n,0}$, 则

$$\mathrm{E}\mathrm{e}^{-sT_{\infty,0}} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\hat{\lambda}_\nu}{s+\hat{\lambda}_\nu}, \quad s \geqslant 0.$$

接下来研究具有流入边界的生灭过程的最快强平稳时的分布. 所谓强平稳时 (strong stationary time, SST) 是一个强随机时 τ 使得 X_τ 分布是平稳分布 π, 且 τ 与 X_τ 独立. 而最快强平稳时是强平稳时中最小者.

借助定理 3.6 和文献 [13] 的对偶, 我们可以得到如下结论, 将文献 [10, 定理 1.4(a)] 的有限状态空间推广到无穷状态空间的生灭过程上.

定理 3.10 对具有流入边界的生灭过程 (即 $R=\infty$, $S<\infty$), 从状态 0 出发, 任意最快强平稳时 τ 具有分布

$$\mathrm{E}\mathrm{e}^{-s\tau} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu}{s+\lambda_\nu}, \quad s \geqslant 0,$$

其中 $\{\lambda_\nu : \nu \geqslant 1\}$ 是 $-Q$ 的所有正的特征值.

有关双边吸收边界条件下, 生灭过程的首中时的分布的最新结果参见文献 [14].

4 正则生灭过程的拟平稳分布

本节回顾生灭矩阵正则时 (唯一的) 生灭过程的拟平稳分布. 此时, 假定 $a_0>0$, 即 -1 为吸收点. 首先给出 Markov 过程的拟平稳分布定义.

定义 4.1 状态空间 $(E,\mathscr{E})$ 上的 Markov 过程 X_t 具有生命时 ζ. 其 (拟) 平稳分布 u 定义为

$$\mathrm{P}_u[X_t \in A \mid t<\zeta] = u(A), \quad A \in \mathscr{E}.$$

如果 $\zeta=\infty$ a.e., 则 u 即是平稳分布. 如果 $\zeta<\infty$ a.e., 则 u 称为拟平稳分布, 或者条件平稳分布. 等价地, 存在 $\lambda\geqslant 0$ 使得

$$\sum_i u_i p_{ij}(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}u_j.$$

有关一般 Markov 过程的拟平稳分布, 参见文献 [15] 和综述 [16], 以及 Pollett 对有关拟平稳分布相关研究的文献收集 [17].

我们先从有限 Markov 链了解拟平稳分布, 参见文献 [18,19]. 考虑有限 Markov 链:

$$\tilde{Q}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ a & Q\end{pmatrix},$$

其中 Q 是不可约的, $a\neq 0$.

由 Perron-Frobenius 定理知, 存在 $\lambda>0$ 及正的 u 和 v 使得

$$uQ=-\lambda u,\quad Qv=-\lambda v.$$

于是,

$$Q=-\lambda vu+o(\lambda),$$

从而,

$$P(t)=\mathrm{e}^{-t\lambda}vu+o(\mathrm{e}^{-t\lambda}).$$

我们有 $\forall\, i,j\geqslant 1$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_{ij}(t)}{\sum_k p_{ik}(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t\lambda}v_iu_j+o(\mathrm{e}^{-t\lambda})}{\mathrm{e}^{-t\lambda}\sum_k v_iu_k+o(\mathrm{e}^{-t\lambda})}=\frac{u_j}{\sum_k u_k}$$

与 i 无关. 假定 $\sum_k u_k=1, u$ 为条件极限分布.

另一方面, 从 $uQ=-\lambda u$ 可以得到

$$uP(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}u,\quad \mathrm{P}_u[t<\zeta]=uP(t)1=\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

因此,

$$\mathrm{P}_u[X_t=i\mid t<\zeta]=u.$$

回到生灭过程. 令 λ 是生灭过程的衰减参数:

$$\lambda:=-\lim_{t\to\infty}\frac{\log p_{ij}(t)}{t},\quad i,j\geqslant 0.$$

对于不可约的 Markov 过程, 衰减参数 λ 与状态 i 和 j 无关.

在生灭过程的研究中, Karlin 和 McGregor [20] 引入了正交多项式的方法. 令 $\{g_i(x),i\in\mathbb{Z}_+\}$ 为生灭矩阵 Q 的正交多项式, 即归纳定义: 令 $g_{-1}(x)=0$ 和 $g_0(x)=1$, 以及

$$a_ig_{i-1}(x)-(a_i+b_i)g_i(x)+b_ig_{i+1}(x)=-xg_i(x),\quad i\geqslant 0,$$

则 $g_i(x)$ 有 i 个单重根 x_{ik} $(k=1,\ldots,i)$, 满足

$$0<x_{i+1,k}<x_{ik}<x_{i+1,k+1},\quad k=1,\ldots,i,\quad i\geqslant 1.$$

而且衰减参数满足

$$\lambda = \lim_{i\to\infty} x_{i1}.$$

若 $a_0 > 0$, 则 -1 为吸收态, 且

$$\mathrm{P}_i[T_{-1} < \infty] = 1, \quad \forall\, i \geqslant 0$$

当且仅当 $A = \infty$.

首先给出生灭过程的拟平稳分布存在的判断准则.

定理 4.2 对上述生灭过程, 拟平稳分布 $u = (u_i, i \geqslant 0)$ 存在的充要条件是 u 满足

$$\begin{aligned} -u_j a_0 u_0 &= b_{j-1}u_{j-1} - (a_j + b_j)u_j + a_{j+1}u_{j+1}, \quad j \geqslant 0, \\ -u_0 a_0 u_0 &= (a_0 + b_0)u_0 + a_1 u_1. \end{aligned}$$

由此, van Doorn [4] 利用正交多项式 $\{g_i(x), i \geqslant 0\}$ 给出了 $R = \infty$ (过程唯一) 时拟平稳分布的表示.

定理 4.3 (1) 假设 $R = \infty$, $S = \infty$, 则生灭过程的拟平稳分布存在当且仅当衰减参数 $\lambda > 0$. 进一步, 若 $\lambda > 0$, 则 $\forall\, x \in (0, \lambda]$, $u_i = a_0^{-1}\mu_j x g_j(x)$ 均为拟平稳分布.

(2) 假设 $R = \infty$, $S < \infty$, 则生灭过程存在唯一的拟平稳分布 $u_i = a_0^{-1}\mu_j \lambda g_j(\lambda)$.

注意到, 一个不可约的遍历 Markov 链只有唯一的平稳分布, 与此不同, 即使一个不可约 Markov 链, 其拟平稳分布也可能会有无穷多个. 这一现象最先在经典 d 分支过程中发现, 参见文献 [21].

5 具有流出边界的最小生灭过程的拟平稳分布

假设 $R < \infty$ 和 $S = \infty$, 相应的 Q 过程非唯一. 令 $X = (X_t, t \geqslant 0)$ 是最小 Q 过程, 具有有限的生命时 $T < \infty$, a.s. 若 $a_0 = 0$, 则 T 即为飞跃时 $\zeta := \lim_{i\to\infty} \zeta_i$, 其中 ζ_n 是接续的跳跃时间: $\zeta_0 = 0$, $\zeta_n = \inf\{t : t > \zeta_{n-1}, X_t \neq X_{\zeta_{n-1}}\}$, $n \geqslant 1$. 若 $a_0 > 0$, 则 $T = \zeta \wedge \tau$, 其中 $\tau = \inf\{t > 0 : X_t = -1\}$. 令 $P(t) = (p_{ij}(t), i, j \in \mathbb{Z}_+)$:

$$p_{ij}(t) = \mathrm{P}_i(X_t = j, t < T), \quad i, j \in \mathbb{Z}_+, \quad t \geqslant 0$$

为最小的 Feller 转移概率函数.

1997 年的文献 [22] 提出了一个待解决的问题, 即具有流出边界的最小生灭过程的拟平稳分布是否存在? 我们的答案是肯定的. 我们的方法是建立具有流出边界的最小生灭过程与一个具有流入边界的正则生灭过程的对偶关系, 再利用我们获得的首中时的谱表示得到具有流出边界的最小生灭过程的拟平稳分布. 为此, 首先建立最小生灭过程的拟平稳分布与其生成元 Q 之间的关系.

定理 5.1 假设 $a_0 \geqslant 0$, $R < \infty$, $S = \infty$, 则概率分布 $u = (u_i, i \in \mathbb{Z}_+)$ 是 Q 最小过程的一个拟平稳分布当且仅当存在 $\alpha > 0$, u 是 $uQ = -\alpha u$ 的解并满足 $u_i > 0$, $\sum_{i\in\mathbb{Z}_+} u_i = 1$. 进一步地,

$$\alpha = u_0 a_0 + \lim_{i\to\infty} (u_i b_i - u_{i+1}a_{i+1}).$$

令 $g(\lambda) := (g_i(\lambda), i \in \mathbb{Z}_+)$ 满足 $Qg(\lambda) = -\lambda g(\lambda)$, 则 $g_i(\lambda) > 0$ $(i \in \mathbb{Z}_+)$. 记 $v_i = \mu_i g_i(\lambda)$, 则 $v = (v_i, i \in \mathbb{Z}_+)$ 是 Q 的 λ 不变测度, 即 $vQ = -\lambda v$.

利用对偶方法和击中时的谱表示, 我们可以证明 $\sum_{i\in\mathbb{Z}_+} \mu_i g_i(\lambda) < \infty$.

定理 5.2 假设 $a_0 \geqslant 0$, $R < \infty$, $S = \infty$. 令 λ 为衰减参数. 最小 Q 过程存在唯一的拟平稳分布 $u = (u_i, i \in \mathbb{Z}_+)$, 可表示为

$$u_i = \frac{\mu_i g_i(\lambda)}{\sum_{i\in\mathbb{Z}_+} \mu_i g_i(\lambda)}. \tag{5.1}$$

进一步地, $\lambda = u_0 a_0 + \lim_{i\to\infty}(u_i b_i - u_{i+1}a_{i+1})$.

我们使用对偶方法来证明. 为此, 定义

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} -(\tilde{a}_0 + \tilde{b}_0) & \tilde{b}_0 & & \\ \tilde{a}_1 & -(\tilde{a}_1 + \tilde{b}_1) & \tilde{b}_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

其中

$$\tilde{a}_i = b_i, \quad \tilde{b}_i = a_{i+1}, \quad i \geqslant 0. \tag{5.3}$$

事实上, Q 与 $\tilde{Q}$ 是对偶的. 令

$$M = \begin{pmatrix} \nu_0 & \nu_1 & \nu_2 & \cdots \\ & \nu_1 & \nu_2 & \cdots \\ & & \nu_2 & \cdots \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

容易得到

$$M\tilde{Q} = QM. \tag{5.4}$$

类似可定义 $\tilde{\mu}_i$、$\tilde{\nu}_i$、$\tilde{A}$、$\tilde{B}$、$\tilde{R}$、$\tilde{S}$、$\tilde{\lambda}$ 和 $\tilde{g}_i(x)$. 若 $a_0 = 0$, $R < \infty$, $S = \infty$, 则 $\tilde{R} = \infty$, $\tilde{S} < \infty$. 由文献 [4] 知, $\tilde{Q}$ 过程有唯一的拟平稳分布. 令 $\tilde{u} = (\tilde{u}_i, i \in \mathbb{Z}_+)$ 为 $\tilde{Q}$ 过程的拟平稳分布:

$$\tilde{u}_i = \frac{\tilde{\mu}_i \tilde{g}_i(\lambda)}{\sum_{i\in\mathbb{Z}_+} \tilde{\mu}_i \tilde{g}_i(\lambda)} = \frac{\lambda \tilde{\mu}_i \tilde{g}_i(\lambda)}{\tilde{a}_0}, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{5.5}$$

其中 $\tilde{g}(\lambda) = (\tilde{g}_i(\lambda), i \in \mathbb{Z}_+)$ 满足 $\tilde{Q}\tilde{g}(\lambda) = -\lambda\tilde{g}(\lambda)$ 且 $\tilde{g}_0(\lambda) = 1$. 对 $i \in \mathbb{Z}_+$, 有 $\tilde{g}_i(\lambda) > 0$.

由对偶关系 (5.4), 有

$$\mu_i g_i(\lambda) = \tilde{g}_i(\lambda) - \tilde{g}_{i-1}(\lambda), \quad i \in \mathbb{Z}_+,$$

其中 $\tilde{g}_{-1}(\lambda) = 0$.

为得到 Q 过程的拟平稳分布, 只需证明 $\{\tilde{g}_i(\lambda), i \in \mathbb{Z}_+\}$ 严格递增且有界. 首先, 我们证明

引理 5.3 令 $\tilde{X}_t$ 是 $\tilde{Q}$ 过程, 且过程从状态 0 出发. 再令 $\tilde{\tau}_{i,0} := \inf\{t > 0 : \tilde{X}_0 = i, \tilde{X}_t = 0\}$ 表示状态 i 的击中时, 则 $\tilde{g}_i(\lambda) = \mathrm{E}e^{\lambda\tilde{\tau}_{i,0}}$. 特别地, $\{\tilde{g}_i(\lambda), i \in \mathbb{Z}_+\}$ 严格递增.

证明 因为 $\tilde{Q}\tilde{g} = -\lambda\tilde{g}$, 所以,

$$\tilde{\mu}_k \tilde{b}_k(\tilde{g}_{k+1} - \tilde{g}_k) - \tilde{\mu}_0\tilde{a}_0\tilde{g}_0 = -\lambda\sum_{j=0}^{k} \tilde{\mu}_j\tilde{g}_j.$$

注意到 $\tilde{g}_0 = 1$, $\tilde{\mu}_0 = 1$, $\lambda\sum_{i\in\mathbb{Z}_+} \tilde{\mu}_i\tilde{g}_i = \tilde{a}_0$ (由 (5.5)). 于是,

$$\tilde{g}_{k+1} - \tilde{g}_k = \lambda\tilde{\nu}_k \sum_{j=k+1}^{\infty} \tilde{\mu}_j\tilde{g}_j. \tag{5.6}$$

因为 (5.6) 右边为正, 所以, $\{\tilde{g}_i(\lambda), i \in \mathbb{Z}_+\}$ 是严格递增的.

由 (5.6) 可知, 对 $i \geqslant 1$, 有

$$\tilde{g}_i = \tilde{g}_0 + \lambda \sum_{k=0}^{i-1} \tilde{\nu}_k \sum_{j=k+1}^{\infty} \tilde{\mu}_j \tilde{g}_j.$$

运用第二迭代法, 令 $\tilde{g}_i^{(0)} = \tilde{g}_0 = 1$, 且对 $n \geqslant 1$, 有

$$\tilde{g}_i^{(n)} = \lambda \sum_{k=0}^{i-1} \tilde{\nu}_k \sum_{j=k+1}^{\infty} \tilde{\mu}_j \tilde{g}_j^{(n-1)}. \tag{5.7}$$

我们要证明

$$\tilde{g}_i^{(n)} = \frac{\lambda^n}{n!} \mathrm{E}\tilde{\tau}_{i,0}^n, \quad n \geqslant 0, \quad i \geqslant 1, \tag{5.8}$$

由此易得, 对 $i \geqslant 1$, 有

$$\tilde{g}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{g}_i^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \mathrm{E}\tilde{\tau}_{i,0}^n = \mathrm{E}\mathrm{e}^{\lambda \tilde{\tau}_{i,0}}.$$

使用归纳法, 对 $i \geqslant 1$, $\tilde{g}_i^{(0)} = \mathrm{E}\tilde{\tau}_{i,0}^0 = 1$, 假设 (5.8) 对 $n \geqslant 1$ 成立. 由文献 [23, 定理 4.1] 和 (5.7), 可得

$$\tilde{g}_i^{(n+1)} = \lambda \sum_{k=0}^{i-1} \tilde{\nu}_k \sum_{j=k+1}^{\infty} \tilde{\mu}_j \tilde{g}_j^{(n)} = \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \sum_{k=0}^{i-1} \tilde{\nu}_k \sum_{j=k+1}^{\infty} \tilde{\mu}_j \mathrm{E}\tilde{\tau}_{j,0}^n = \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{E}\tilde{\tau}_{i,0}^{n+1}.$$

这样完成引理 5.3 的证明. □

下面的结论给出了有界性.

引理 5.4 $\tilde{g}_\infty(\lambda) := \lim_{i\to\infty} \tilde{g}_i(\lambda) < \infty$.

证明 由引理 5.3 知, $\tilde{g}_\infty(\lambda) := \lim_{i\to\infty} \tilde{g}_i(\lambda)$ 存在. 下证 $\tilde{g}_\infty(\lambda) < \infty$. 对 $i \geqslant -1$, 定义

$$\tilde{Q}_i = \begin{pmatrix} -(\tilde{a}_{i+1} + \tilde{b}_{i+1}) & \tilde{b}_{i+1} & & \\ \tilde{a}_{i+2} & -(\tilde{a}_{i+2} + \tilde{b}_{i+2}) & \tilde{b}_{i+2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

注意到 $\tilde{Q}_{-1} = \tilde{Q}$. 在 $\tilde{R} = \infty$ 和 $\tilde{S} < \infty$ 条件下, 由文献 [8, 定理 5.1], 可得 $\sigma_{\mathrm{ess}}(\tilde{Q}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\tilde{Q}_i) = \emptyset$, 以及 $\forall i \geqslant 0$, 有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_{i,k}^{-1} < \infty, \tag{5.9}$$

其中 $\sigma_{\mathrm{ess}}(\tilde{Q})$ 表示 $\tilde{Q}$ 的本征谱, $\tilde{\lambda}_{i,1} < \tilde{\lambda}_{i,2} < \cdots$ 表示 $-\tilde{Q}_i$ 的所有正的特征值. 为证明 $\lambda < \tilde{\lambda}_{0,1}$, 而因为 $\lambda = \tilde{\lambda}_{-1,1} \leqslant \tilde{\lambda}_{0,1}$, 所以只需证明 $\tilde{\lambda}_{-1,1} < \tilde{\lambda}_{0,1}$. 证毕. □

下面的引理来自于文献 [24].

引理 5.5 若存在某个 $i > j \geqslant -1$, 有 $\tilde{A} = \infty$ 和 $\tilde{\lambda}_{i,1} = \tilde{\lambda}_{j,1}$, 则 $\tilde{\lambda}_{i,1} = \tilde{\lambda}_{i+1,1}$.

根据引理 5.5, 若 $\tilde{\lambda}_{-1,1} = \tilde{\lambda}_{0,1}$, 则 $\tilde{\lambda}_{i,1} = \tilde{\lambda}_{i+1,1} = \lambda$, $i \geqslant -1$. 然而, $\sigma_{\mathrm{ess}}(\tilde{Q}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\tilde{Q}_i) = \emptyset$, $i \geqslant 0$, 从而 $\lim_{i\to\infty} \tilde{\lambda}_{i,1} = \infty$. 这是不可能的. 因此, $\lambda = \tilde{\lambda}_{-1,1} < \tilde{\lambda}_{0,1}$.

由文献 [8, 定理 5.5], 有

$$\mathrm{E}\mathrm{e}^{r\tilde{\tau}_{\infty,0}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}_{0,k}}{\tilde{\lambda}_{0,k} - r}, \quad r < \tilde{\lambda}_{0,1}, \tag{5.10}$$

其中 $\tilde{\tau}_{\infty,0}=\lim_{i\to\infty}\tilde{\tau}_{i,0}$. 因为 $\lambda<\tilde{\lambda}_{0,1}$, 及

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{\lambda}_{0,k}}{\tilde{\lambda}_{0,k}-\lambda}<\infty\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\lambda}_{0,k}^{-1}<\infty,$$

所以, 由 (5.9) 和 (5.10) 可得

$$\tilde{g}_{\infty}=\lim_{i\to\infty}\mathrm{E}\mathrm{e}^{\lambda\tilde{\tau}_{i,0}}=\mathrm{E}\mathrm{e}^{\lambda\tilde{\tau}_{\infty,0}}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\hat{\lambda}_{0,k}}{\hat{\lambda}_{0,k}-\lambda}<\infty.$$

若 $a_0>0$, 则可以通过 Doob 的 h 变换使得新过程在 0 处是反射边界. 更多细节参见文献 [25]. 令 $h=(h_0,h_1,h_2,\ldots)^{\mathrm{T}}$ 满足方程 $Qh=0$, 即对 $i\in\mathbb{Z}_+$, 有

$$a_ih_{i-1}-(a_i+b_i)h_i+b_ih_{i+1}=0,$$

其中 $h_{-1}=0$. 不失一般性, 假设 $h_0=1$. 解此方程得到

$$h_i=1+a_0\sum_{k=0}^{i-1}\nu_k.$$

从而,

$$h_{\infty}:=\lim_{i\to\infty}h_i=1+a_0\sum_{k=0}^{\infty}\nu_k=1+a_0A<\infty.$$

显然, $h_i<h_{i+1}$, $i\in\mathbb{Z}_+$, 除非 $a_0=0$.

定义

$$\bar{G}=H^{-1}QH,$$

其中 $H=\mathrm{diag}\{h_0,h_1,h_2,\ldots\}$.

类似地, 定义 $\bar{R}$ 和 $\bar{S}$, 则有 $\bar{a}_0=0$, 且 $\bar{R}\leqslant R<\infty$, $\bar{S}\geqslant S=\infty$. 因此, 最小 $\bar{G}$ 过程在 0 处反射而无穷远处吸收.

定理 5.6 假设 $a_0>0$, $R<\infty$, $S=\infty$, 则 u 是最小 Q 过程的拟平稳分布当且仅当 $\bar{u}:=cuH$ 是最小 $\bar{G}$ 过程的拟平稳分布, 其中 c 为正常数.

同时我们可以给出拟平稳分布 $u=(u_i,i\in\mathbb{Z}_+)$ 的谱表示. 为此, 定义

$$G_i=\begin{pmatrix}-b_{i+1} & b_{i+1} & & \\ a_{i+2} & -(a_{i+2}+b_{i+2}) & b_{i+2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots\end{pmatrix},\quad i\geqslant -1.$$

注意 $Q_{-1}=Q$. 在 $R<\infty$ 和 $S=\infty$ 条件下, 我们知道 $\sigma_{\mathrm{ess}}(G_i)=\emptyset$, 且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{i,k}^{-1}<\infty,$$

其中 $\gamma_{i,1}<\gamma_{i,2}<\cdots$ 为 $-G_i$ 的所有正的特征值.

定理 5.7 假设 $a_0=0$, $R<\infty$, $S=\infty$, 则

$$u_0=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\gamma_{0,k}}\right),\quad u_i=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\gamma_{i,k}}\right)-\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\gamma_{i-1,k}}\right),\quad i\geqslant 1.\tag{5.11}$$

6 具有正则边界的最小过程的拟平稳分布

假设 Q 矩阵具有正则边界, 即 $R<\infty, S<\infty$. 当 $a_0=0$ 时, 先给出最小生灭过程的在有限状态空间上截断过程的拟平稳分布的谱表示, 然后通过逼近的方法得到最小过程的拟平稳分布的存在唯一性. 当 $a_0>0$ 时, 使用 Doob 的 h 变换得到其最小过程的拟平稳分布.

定理 6.1 假设 $R<\infty, S<\infty, a_0\geqslant 0$, 则最小 Q 过程存在唯一的拟平稳分布 $u=(u_i: i\in\mathbb{Z}_+)$. 进而, u 的谱表示由下式给出:

$$u_i=c^{-1}\mu_i h_i\prod_{\nu=1}^{i}\frac{\lambda_\nu^{(i)}-\lambda}{\lambda_\nu^{(i)}},$$

其中

$$h_i=1+a_0\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{\mu_k a_k},\quad c=\sum_{i=0}^{\infty}\mu_i h_i\prod_{\nu=1}^{i}\frac{\lambda_\nu^{(i)}-\lambda}{\lambda_\nu^{(i)}}<\infty, \tag{6.1}$$

而 $\{\lambda_\nu^{(i)}: 1\leqslant\nu\leqslant i\}$ 是 $-Q^{(i)}$ 的所有特征值:

$$Q^{(i)}=\begin{pmatrix} -(a_0+b_0) & b_0 & & & \\ a_1 & -(a_1+b_1) & b_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{i-1} & -(a_{i-1}+b_{i-1}) \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

假设 $a_0=0$, 并令 $\tau_n=\inf\{t: X_t=n\}$, 则

$$p_{ij}^{(n)}(t)=\mathrm{P}_i(X_t=j, t<\tau_n).$$

$P^{(n)}(t)$ 的衰减参数即为第一特征值:

$$\lambda^{(n)}:=-\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log p_{ij}^{(n)}(t)=\lambda_1^{(n)}.$$

我们先给出 $P^{(n)}(t)$ 的拟平稳分布的谱表示. 为此, 需要下面的结论:

引理 6.2 令

$$f_i^{(n)}=\mathrm{E}_i\mathrm{e}^{\lambda^{(n)}\tau_{n-1}},\quad i=0,1,\ldots,n-1,$$

则 $f^{(n)}=(f_i^{(n)}, 0\leqslant i\leqslant n-1)$ 是 $-Q^{(n)}$ 的对应于 $\lambda^{(n)}$ 的特征函数.

定理 6.3 令 $(0<)\ \lambda_1^{(n)}<\lambda_2^{(n)}<\cdots<\lambda_n^{(n)}$ 为 $-Q^{(n)}$ 的所有特征值, 则 $Q^{(n)}$ 过程的拟平稳分布由下式给出:

$$u_i^{(n)}=c_n^{-1}\mu_i\prod_{\nu=1}^{i}\frac{\lambda_\nu^{(i)}-\lambda^{(n)}}{\lambda_\nu^{(i)}},\quad i=0,1,\ldots,n-1,$$

其中 c_n^{-1} 是归一化常数, 即

$$c_n=\sum_{i=0}^{n-1}\mu_i\prod_{\nu=1}^{i}\frac{\lambda_\nu^{(i)}-\lambda^{(n)}}{\lambda_\nu^{(i)}}.$$

由此我们使用逼近方法, 证明当 $n\to\infty$ 时, $u^{(n)}$ 的极限存在, 且为最小过程的拟平稳分布.

命题 6.4 令 $u=(u_i)$ 由定理 6.1 给出, 则 u 是 $\mathbb{Z}_+$ 上的概率测度, 即 $u_i>0$, $i\in\mathbb{Z}_+$ 且 $\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}u_i=1$. 进一步地,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}|u_i^{(n)}-u_i|=0.$$

有了这些准备, 我们可以证明定理 6.1.

定理 6.1 的证明 首先证明 u 是最小 Q 过程的拟平稳分布, 即

$$\sum_{i=0}^{\infty}u_ip_{ij}(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}u_j,\quad j\in\mathbb{Z}_+. \tag{6.3}$$

回顾 $Q^{(n)}$ 过程的拟平稳分布 $u^{(n)}$ 满足

$$\sum_{i=0}^{n-1}u_i^{(n)}p_{ij}^{(n)}(t)=\mathrm{e}^{-\lambda^{(n)}t}u_j^{(n)},\quad 0\leqslant j\leqslant n-1.$$

由命题 6.4 并注意到当 $n\to\infty$ 和 $\lambda^{(n)}\downarrow\lambda$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-\lambda^{(n)}t}u_j^{(n)}=\mathrm{e}^{-\lambda t}u_j.$$

为得到 (6.3), 只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}u_i^{(n)}p_{ij}^{(n)}(t)=\sum_{i=0}^{\infty}u_ip_{ij}(t),\quad j\in\mathbb{Z}_+. \tag{6.4}$$

事实上, 因为 $p_{ij}^{(n)}(t)=0$, $i\geqslant n$ 或 $j\geqslant n$, 所以,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\infty}\left|\sum_{i=0}^{n-1}u_i^{(n)}p_{ij}^{(n)}(t)-\sum_{i=0}^{\infty}u_ip_{ij}(t)\right|\\
&\quad=\sum_{j=0}^{\infty}\left|\sum_{i=0}^{n-1}(u_i^{(n)}-u_i)p_{ij}^{(n)}(t)+\sum_{i=0}^{\infty}u_i(p_{ij}^{(n)}(t)-p_{ij}(t))\right|\\
&\quad\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}|u_i^{(n)}-u_i|\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}(t)+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}u_i|p_{ij}^{(n)}(t)-p_{ij}(t)|\\
&\quad\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}|u_i^{(n)}-u_i|+\sum_{i=0}^{\infty}u_i\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{P}_i(X_t=j,\ \tau_n\leqslant t<\zeta)\\
&\quad\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}|u_i^{(n)}-u_i|+\sum_{i=0}^{\infty}u_i\mathrm{P}_i(\tau_n\leqslant t<\zeta).
\end{aligned}$$

再由命题 6.4 和 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}_i(\tau_n<t<\zeta)=0$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\sum_{i=0}^{n-1}u_i^{(n)}p_{ij}^{(n)}(t)-\sum_{i=0}^{\infty}u_ip_{ij}(t)\right|=0,$$

从而得到 (6.4), 进而 (6.3) 成立.

再来证明拟平稳分布的唯一性. 假设 $\tilde{u}$ 是最小过程的另一个拟平稳分布, 则必须存在 $0<\tilde{\lambda}<\lambda$ 使得

$$\mathrm{P}_{\tilde{u}}[\zeta>t]=\sum_{i=0}^{\infty}\tilde{u}_i\mathrm{P}_i[\zeta>t]=\mathrm{e}^{-\tilde{\lambda}t},\quad t\geqslant 0.$$

因为有非跨越性 $\mathrm{P}_i[\zeta > t] \leqslant \mathrm{P}_0[\zeta > t]$, 所以, 对 $s \in (\tilde{\lambda}, \lambda)$, 有

$$\mathrm{e}^{-\tilde{\lambda}t} = \mathrm{P}_{\tilde{u}}[\zeta > t] \leqslant \mathrm{P}_0[\zeta > t] \leqslant \mathrm{e}^{-st}\mathrm{E}_0\mathrm{e}^{s\zeta} < \infty, \quad t \geqslant 0.$$

因此, $\sup_{t\geqslant 0} \mathrm{e}^{(s-\tilde{\lambda})t} < \infty$, 这蕴含着 $\tilde{\lambda} > s$ 且 $s < \lambda$. 这是不可能的.

当 $a_0 > 0$ 时, 我们使用 Doob 的 h 变换技巧. 令 $h = (h_0, h_1, h_2, \ldots)^{\mathrm{T}}$, 其中 h_i 由 (6.1) 给出. 定义

$$G^* = H^{-1}QH,$$

其中 $H = \mathrm{diag}\{h_0, h_1, h_2, \ldots\}$. 容易看到 G^* 为生灭矩阵, 且 $a_0^* = 0$. 类似地定义 R^* 和 S^*, 则 $R^* \leqslant R < \infty$, $S \leqslant S^* < \infty$. 最小 G^* 过程在 0 反射而在 ∞ 吸收. □

这样我们容易得到下面的定理:

定理 6.5 设 $R < \infty$, $S < \infty$, $a_0 > 0$, 则 u 是最小 Q 的 (唯一) 拟平稳分布当且仅当 $\bar{u} := cuH$ 是最小 $\bar{Q}$ 过程的拟平稳分布, 其中 c 为正常数.

7 正则边界最大生灭过程的平稳性

本节讨论 Q 具有 ∞ 正则边界条件下, 最大 Q 过程的遍历性质, 为此假定 $a_0 = 0$.

令 ζ 为最小过程的生命时, 即最小过程的飞跃时. 对 $\lambda > 0$, 令 $X_i(\lambda) = \mathrm{E}_i\mathrm{e}^{-\lambda\zeta}$ 和 $\phi_{ij}^{\min}(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}p_{ij}^{\min}(t)dt$ 为最小转移概率函数 $p_{ij}^{\min}(t)$ 的 Laplace 变换.

由文献 [26, 第 13 章] 知, 当 $R < \infty, S < \infty$ 时, 存在唯一可逆的保守 Q 过程 $P(t) = (p_{ij}(t) : i, j \in E)$, 其 Laplace 变换 $\Psi(\lambda) = (\psi_{ij}(\lambda) : i, j \in E)$ $(\lambda > 0)$ 具有如下形式:

$$\psi_{ij}(\lambda) = \phi_{ij}^{\min}(\lambda) + \frac{X_i(\lambda)X_j(\lambda)\mu_j}{\lambda\sum_{k\in E}\mu_k X_k(\lambda)},$$

其中 μ_i 由 (2.2) 给出. 它同时满足 Kolmogorov 的向前和向后方程.

首先研究此最大过程从状态 n 击中状态 0 的击中时的分布, 并由此讨论最大过程的最快强平稳时的分布.

为此, 我们需要先研究在状态空间 $\hat{E}_n = \{n+1, n+2, \ldots\}$ 上的过程 $\hat{P}^{(n)}(t)$, 即最大过程 $P(t)$ 在到达 n 之前的过程, 此过程以 n 为吸收态. 由 $P(t)$ 的概率构造可知, $\hat{P}^{(n)}(t)$ 是 $\hat{E}_n$ 上的最大过程, 其相应的生成元是由 (3.6) 给出的 $\hat{Q}_n$. 它也同时满足 Kolmogorov 向前和向后方程. 其 Laplace 变换 $\hat{\Psi}^{(n)}(\lambda)$ 具有如下形式:

$$\hat{\psi}_{ij}^{(n)}(\lambda) = \hat{\phi}_{ij}^{(n)}(\lambda) + \frac{\hat{X}_i^{(n)}(\lambda)\hat{X}_j^{(n)}(\lambda)\mu_j}{\lambda\sum_{k\geqslant n+1}\mu_k\hat{X}_k^{(n)}(\lambda) + \mu_{n+1}a_{n+1}\hat{X}_{n+1}^{(n)}(\lambda)}, \quad i, j \geqslant n+1,$$

其中 $\hat{X}_i^{(n)}(\lambda) = 1 - \lambda\sum_{k\geqslant n}\hat{\phi}_{ik}^{(n)}(\lambda)$ 和 $\hat{\Phi}^{(n)}(\lambda) = (\hat{\phi}_{ij}^{(n)}(\lambda) : i, j \geqslant n)$ 是最小 $\hat{Q}_n$ 过程的 Laplace 变换, 并具有两个吸收态 n 和 ∞.

令 $\hat{\pi}_i^{(n)} = \mu_i/\sum_{i=n+1}^\infty \mu_i$, $i \geqslant n+1$, 则 $\hat{P}^{(n)}(t)$ 关于 $\hat{\pi}^{(n)}$ 对称. 记 $\hat{L}_n$ 为 $\hat{P}^{(n)}(t)$ 在 $L^2(\hat{E}_n, \hat{\pi}^{(n)})$ 的生成元. 我们有下面的定理:

定理 7.1 对 $n \geqslant 0$, $\hat{L}_n$ 的本征谱空, 且对 $\nu \geqslant 1$, 有

$$\hat{\lambda}_{n,\nu}^{(N)} \downarrow \hat{\lambda}_{n,\nu}, \quad N \uparrow \infty,$$

其中 $\{\hat{\lambda}_{n,\nu}^{(N)} : 1 \leqslant \nu \leqslant N-n\}$ 和 $\{\hat{\lambda}_{n,\nu} : \nu \geqslant 1\}$ 分别是 $-\hat{Q}_n^{(N)}$ 和 $-\hat{L}_n$ 的特征值, 都以升序的方式排列.

定理 7.2 假设生灭过程具有正则边界. 令 $T_{n,0}$ 为最大过程从 n 出发首中 0 的时刻, 且 $\{\hat{\lambda}_\nu\}$ (相应地, $\{\hat{\lambda}_{n,\nu}\}$) 是最大过程在首中 0 (相应的 n) 之前的过程的特征值, 则对 $n \geqslant 1$, 有

$$\mathrm{E}\mathrm{e}^{-sT_{n,0}} = \frac{\prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\hat{\lambda}_\nu}{s+\hat{\lambda}_\nu}}{\prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\hat{\lambda}_{n,\nu}}{s+\hat{\lambda}_{n,\nu}}}, \quad s \geqslant 0.$$

接下来可以研究最大过程的最快强平稳时. 为此, 我们修改文献 [13] 中的强平稳对偶. 令

$$H_i = \sum_{j=0}^{i} \mu_j, \quad i \geqslant 0.$$

定义对偶生灭矩阵 Q^*, 其生灭速率 (a_i^*, b_i^*) 由下式给出:

$$a_i^* = \frac{H_{i-1}}{H_i} b_i \quad (i \geqslant 1), \quad b_i^* = \frac{H_{i+1}}{H_i} a_{i+1} \quad (i \geqslant 0).$$

它具有不变测度

$$\mu_i^* = \frac{b_0^* \cdots b_{i-1}^*}{a_1^* \cdots a_i^*} = \frac{b_0}{\mu_i b_i} H_i^2, \quad i \geqslant 0.$$

则

$$R^* = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_i^* b_i^*} \sum_{j=0}^{i} \mu_j^* = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu_{i+1}}{b_0 H_i H_{i+1}} \sum_{j=0}^{i} \frac{b_0}{\mu_j b_j} H_j^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{H_j^2}{\mu_j b_j} \sum_{i=j}^{\infty} \frac{\mu_{i+1}}{H_i H_{i+1}} = \eta < \infty,$$

因此, 对应于 Q^* 的生灭过程不唯一.

令 $P^*(t)$ 为 Q^* 最小过程, 并定义关联矩阵 $\Lambda = [\Lambda(i,j)]_{0 \leqslant i,j \leqslant \infty}$:

$$\Lambda(i,j) = \begin{cases} \dfrac{\mu_j}{H_i}, & \text{当 } 0 \leqslant j \leqslant i \neq \infty, \\ \dfrac{\mu_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \mu_j}, & \text{当 } i = \infty, \quad j \neq \infty, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

因而可以建立 $P(t)$ 和 $P^*(t)$ 以 Λ 为关联的对偶关系.

定理 7.3 令 $\hat{P}(t)$ 为 Q 最大过程, 而 $P^*(t)$ 为 Q^* 最小过程. 再令 $E = \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, 则存在乘积状态空间 E^2 上的二维生灭过程 $(\hat{X}_t, X_t^*)$ 满足

(i) $\hat{X}_t \sim \hat{P}(t)$ 且 $X_t^* \sim P^*(t)$;

(ii) $\mathrm{P}[\hat{X}_0 = i \mid X_0^* = i^*] = \Lambda(i^*, i)$;

(iii) X_t^* 的飞跃时 ξ^* 是过程 $\hat{X}_t$ 的一个最快强平稳时.

由此得到 (X_t^*) 的飞跃时 ξ^* 是原过程的一个最快强平稳时.

推论 7.4 令 $(\hat{X}_t)$ 和 (X_t^*) 由定理 7.3 给出, 则当两过程均从状态 0 出发时, (X_t^*) 的飞跃时 ξ^* 是过程 $(\hat{X}_t)$ 的一个强平稳时, 即

$$s(t) = \sup_{j \in \mathbb{Z}_+} \left(1 - \frac{\hat{p}_{0j}(t)}{\pi_j}\right) = \mathrm{P}_0[\xi^* > t], \quad t \geqslant 0. \tag{7.1}$$

因为我们在文献 [8, 定理 7.6] 中得到了有关特征值的逼近, 以及在定理 7.3 得到了强平稳对偶, 所以, 类似于文献 [8, 定理 6.2] 的证明方法, 可以得到强平稳时的 Laplace 变换的表示.

另外, 由 (7.1), 我们可以得到最大过程最快强平稳时的不同表示. 由 (7.1), 有

$$\mathrm{P}[\tau \leqslant t] = \frac{1}{\pi_0} \lim_{j\to\infty} \hat{p}_{j0}(t), \quad t \geqslant 0.$$

对 $s > 0$, 由文献 [8, 定理 4.6], 有

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\mathrm{e}^{-s\tau} &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{P}\{\tau \in dt\} \\
&= s\int_0^\infty \mathrm{e}^{-su}\mathrm{P}[\tau \leqslant u]du \\
&= \frac{\frac{s}{\pi_0}\lim_{j\to\infty}\psi_{j0}(s) = X_0(s)}{\sum_{n=0}^\infty \pi_n X_n(s)} \\
&= \frac{\prod_{\nu=1}^\infty \frac{\lambda_\nu}{s+\lambda_\nu}}{\sum_{n=0}^\infty \pi_n \frac{\prod_{\nu=1}^\infty \frac{\lambda_\nu}{s+\lambda_\nu}}{\prod_{\nu=1}^n \frac{\lambda_\nu^{(n)}}{s+\lambda_\nu^{(n)}}}} \\
&= \Big[\sum_{n=0}^\infty \pi_n \prod_{\nu=1}^n \frac{s+\lambda_\nu^{(n)}}{\lambda_\nu^{(n)}}\Big]^{-1}.
\end{aligned}$$

上述关于具有流入边界的生灭过程和具有正则边界的最大生灭过程的最快强平稳时用于刻画相应过程在一致全变差和一致分离度 (separation) 下的收敛速度, 参见最近的文献 [27].

8 一些待解决的问题

下面简单讨论有关拟平稳分布的有待解决的问题. 首先是有关一般 Markov 过程的拟平稳分布的存在唯一性问题.

(1) 回顾 Reuter 条件: 假设方程

$$\sum_i y_i q_{ij} = \kappa y_j, \quad y_j \geqslant 0, \quad \sum_j y_j < \infty$$

对某个 (所有) $\kappa > 0$ 只有平凡解. 猜测: 若 Reuter 条件不成立, 则恰有一个拟平稳分布. 否则, 要么没有拟平稳分布, 要么有一族拟平稳分布. 注意到 Reuter 条件的猜测对生灭过程成立.

(2) 若 Markov 过程存在拟平稳分布, 则是否一定存在 λ- 拟平稳分布, 其中 λ 是过程的衰减参数?

(3) 若拟平稳分布非唯一, 则是否一定存在一族拟平稳分布? 具体而言, 是否 $\forall\, 0 < x \leqslant \lambda$, 都对应一个 x- 拟平稳分布?

接下来, 关于拟平稳分布的第二个问题: 吸引域问题. 称初始分布 m 在过程 (X_t) 的拟平稳分布 u 的吸引域, 若

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}_m[X_t \in \bullet \mid t < \tau] = u,$$

其中 τ 为过程的生命时.

对于生灭过程的吸引域问题, 三类边界 (流入、流出和正则) 的 (最小) 生灭过程的拟平稳分布是唯一的, 其吸引域为所有的概率分布. 而对于自然边界条件下的生灭过程的拟平稳分布的吸引域问题还有待研究. 有关这方面的研究参见文献 [28, 29].

与吸引域问题紧密关联的是上述吸引域定义中的极限的收敛速度问题, 目前相关文献和研究还很少.

对于一维扩散过程拟平稳分布的最新研究, 参见脚注 2) 和 3).

参考文献

1 Feller W. The birth and death processes as diffusion processes. J Math Pures Appl (9), 1959, 38: 301–345
2 Anderson W J. Continuous-Time Markov Chains. New York: Springer-Verlag, 1991
3 Chen M F. Speed of stability for birth-death processes. Front Math China, 2010, 5: 379–515
4 Van Doorn E A. Quasi-stationary distributions and convergence to quasi-stationarity of birth-death processes. Adv in Appl Probab, 1991, 23: 683–700
5 Mao Y H. The eigentime identity for continuous-time ergodic Markov chains. J Appl Probab, 2004, 41: 1071–1080
6 张汉君, 林祥, 侯振挺. 标准转移函数的多项式一致收敛性. 数学年刊, 2000, 21: 351–356
7 Zhang Y H. Strong ergodicity for single-birth processes. J Appl Probab, 2001, 38: 270–277
8 Gong Y, Mao Y H, Zhang C. Hitting time distributions for denumerable birth and death processes. J Theoret Probab, 2012, 25: 950–980
9 Gao W J, Mao Y H. Quasi-stationary distribution for the birth-death process with exit boundary. J Math Anal Appl, 2015, 427: 114–125
10 Fill J A. The passage time distribution for a birth-and-death chain: Strong stationary duality gives a first stochastic proof. J Theoret Probab, 2009, 22: 543–557
11 Mao Y H. Eigentime identity for transient Markov chains. J Math Anal Appl, 2006, 315: 415–424
12 Chen M F. From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems, 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2004
13 Fill J A. Strong stationary duality for continuous-time Markov chains. Part I: Theory. J Theoret Probab, 1992, 5: 45–70
14 Mao Y, Zhang C. Hitting time distributions for birth-death processes with bilateral absorbing boundaries. Probab Engrg Inform Sci, 2017, 31: 345–356
15 Collet P, Martínez S, San Martín J. Quasi-Stationary Distributions. Heidelberg: Springer, 2013
16 van Doorn E A, Pollett P K. Quasi-stationary distributions for discrete-state models. European J Oper Res, 2013, 230: 1–14
17 Pollett P K. Quasi-stationary distributions: A bibliography. Https://people.smp.uq.edu.au/PhilipPollett/publist.html, 2016
18 Darroch J N, Seneta E. On quasi-stationary distributions in absorbing discrete-time finite Markov chains. J Appl Probab, 1965, 2: 88–100
19 Darroch J N, Seneta E. On quasi-stationary distributions in absorbing continuous-time finite Markov chains. J Appl Probab, 1967, 4: 192–196
20 Karlin S, McGregor J. A characterization of birth and death processes. Proc Natl Acad Sci USA, 1959, 45: 375–379
21 Asmussen S, Hering H. Branching Processes. New York: Springer, 1983
22 Kijima M, Nair M G, Pollett P K, et al. Limiting conditional distributions for birthdeath processes. Adv in Appl Probab, 1997, 29: 185–204
23 Mao Y. Ergodic degrees for continuous-time Markov chains. Sci China Ser A, 2004, 47: 161–174
24 Hart A, Martínez S, San Martín J. The λ-classification of continuous-time birth-and-death processes. Adv in Appl Probab, 2003, 35: 1111–1130
25 Chen M F, Zhang X. Isospectral operators. Commun Math Stat, 2014, 2: 17–32
26 Yang X Q. The Construction Theory of Denumerable Markov Processes. New York: John Wiley & Sons, 1990
27 Mao Y H, Zhang C. Uniform convergence rate for the birth-death processes. Markov Processes Relat Fields, 2017, 23: 467–483
28 Zhang H, Liu W. Domain of attraction of the quasi-stationary distribution for the linear birth and death process. J

2) Mao Y H, Qi B R. Quasi-stationary distribution for diffusion process with exit boundary. Submitted, 2017
3) Mao Y H, Qi B R. Limiting theorems for diffusion process with regular boundary. Preprint, 2018

Math Anal Appl, 2012, 385: 677–682

29 Zhang H, Zhu Y. Domain of attraction of the quasistationary distribution for birth-and-death processes. J Appl Probab, 2013, 50: 114–126

Stationarity and quasi-stationarity for birth-death processes

Yonghua Mao

Abstract Professor Zikun Wang has made pioneering research on the construction theory of birth-death processes, which now has many applications. We review the quasi-stationary distribution for birth-death processes with four types of infinity boundary. In the cases of exit/regular boundaries, we extend the quasi-stationary distributions to the minimal processes, which have finite explosion time. The arguments depend heavily on the construction theory by Professors Zikun Wang and Xiang-Qun Yang. Some open problems are presented for the quasi-stationary distributions of birth-death processes.

Keywords **birth-death process, ergodicity, quasi-stationary distribution**

MSC(2010) **60J27, 60J35, 37A30**

doi: 10.1360/N012018-00047