



流形上椭圆型传输问题的精细化非局部方法

乔雨¹, 张雅杰^{2*}

1. 陕西师范大学数学与统计学院, 西安 710119;

2. 中南财经政法大学统计与数学学院, 武汉 430073

E-mail: yqiao@snnu.edu.cn, Z0005149@zuel.edu.cn

收稿日期: 2026-02-27; 接受日期: 2026-06-09; 网络出版日期: 2026-07-22; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11971282) 资助项目

摘要 本文提出一类用于精确逼近流形上的椭圆型传输问题的非局部模型. 这类问题涉及 Laplace-Beltrami 算子 (LBO) 和经典的传输条件, 其中 LBO 的系数在光滑界面处间断. 为此, 本文发展一种非局部建模方法, 通过强制性积分逼近界面 LBO 算子, 并借助非局部平均机制重构传输条件. 该方法的一个关键优势在于提供了二阶截断精度, 同时无需引入二阶法向导数. 本文建立该非局部模型的稳定性, 并证明其以二阶精度收敛至相应的局部解. 最后, 通过点云积分法实现的数值算例, 验证本文所证明的理论收敛速率.

关键词 椭圆传输问题 带界面的流形 非局部界面模型 稳定性 对局部解的二阶收敛速率

MSC (2020) 主题分类 45P05, 45A05, 35A23, 46E35

1 引言

流形上的偏微分方程分析是一个成熟的研究领域, 在材料科学 [7, 12]、流体力学 [15, 17] 与生物物理学 [5, 13] 等学科中具有广泛应用. 随着其对复杂高维数据结构表征能力的不断提升, 这类模型的影响力已进一步扩展到机器学习 [6, 11, 20, 24, 27] 与图像处理 [10, 16, 18, 19, 25, 26, 31] 等领域.

流形偏微分方程 (PDE) 研究的一个重要分支—流形上的界面问题, 已成为众多物理现象建模的核心工具. 这类问题包括具有曲面结构及中空内部的复合材料热传导、介电常数变化的曲面介质电磁散射, 以及薄层多孔介质中的流体输运等. 其中椭圆传输问题因其解在界面处的特殊行为, 构成了极具价值的数学挑战. 尽管 Euclid 域中的界面偏微分方程已得到深入研究 (参见文献 [1–4, 14]), 但其向流形的推广—尽管具有重要实践意义—却鲜有关注. 鉴于界面问题的闭式解通常难以获得, 构建其理论基础并发展稳健的数值方法显得尤为重要.

英文引用格式: Qiao Y, Zhang Y J. A refined nonlocal approach to elliptic transmission problems on manifolds (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 1–34, doi: [10.1360/SSM-2026-0051](https://doi.org/10.1360/SSM-2026-0051)

1.1 将研究的问题

本研究致力于为如下两相椭圆传输问题建立精确的非局部近似模型:

$$\begin{cases} -\lambda_1 \Delta_{\mathcal{M}} u(x) = f_1(x), & x \in \mathcal{M}_1, \\ -\lambda_2 \Delta_{\mathcal{M}} u(x) = f_2(x), & x \in \mathcal{M}_2, \\ u^+(x) - u^-(x) = 0, & x \in \Gamma, \\ \lambda_1 \frac{\partial u^+}{\partial n}(x) = \lambda_2 \frac{\partial u^-}{\partial n}(x), & x \in \Gamma, \\ \int_{\mathcal{M}} u(x) d\mu_x = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

此处, $\mathcal{M}$ 是一个嵌入在 $\mathbb{R}^d$ (其中 $d > m$) 中的、封闭 (即边界 $\partial\mathcal{M} = \emptyset$) 的 C^5 光滑 m 维流形. 该流形被一个 C^5 光滑的 $m-1$ 维界面 Γ 分割成两个互不相交的子区域 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$. 算子 $\Delta_{\mathcal{M}}$ 表示 $\mathcal{M}$ 上的 Laplace-Beltrami 算子 (LBO), 其定义参见文献 [29].

在点 $x \in \Gamma$ 处的单位法向量 $n(x)$ 定义为指向 $\mathcal{M}_1$ 外侧的法向量, 因此 $-n(x)$ 是指向 $\mathcal{M}_2$ 外侧的法向量. 记号 u^+ 和 $(\frac{\partial u}{\partial n})^+$ 表示从 $\mathcal{M}_1$ 内部取定的解及其外法向导数的迹, 而 u^- 和 $(\frac{\partial u}{\partial n})^-$ 则表示从 $\mathcal{M}_2$ 内部取定的相应迹. 这里, $(\frac{\partial u}{\partial n})^-$ 特指相对于 $\mathcal{M}_2$ 的内法向导数. (1.1) 中的第三和第四个方程即为传输条件. $d\mu_x$ 为 $\mathcal{M}$ 的体积形式.

假定源函数 f_i 属于 $H^3(\mathcal{M}_i)$ ($i = 1, 2$), 并满足如下的相容性条件:

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{M}_i} f_i(x) d\mu_x = 0. \quad (1.2)$$

依据常规的变分方法, (1.1) 的弱形式由下式给出:

$$\begin{aligned} \lambda_1 (\nabla_{\mathcal{M}} u, \nabla_{\mathcal{M}} v)_{\mathcal{M}_1} + \lambda_2 (\nabla_{\mathcal{M}} u, \nabla_{\mathcal{M}} v)_{\mathcal{M}_2} &= (f_1, v)_{\mathcal{M}_1} + (f_2, v)_{\mathcal{M}_2}, \\ \forall v \in H^1(\mathcal{M}), \quad \text{且} \quad \int_{\mathcal{M}} v d\mu_x &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

其中 $\nabla_{\mathcal{M}}$ 是 $\mathcal{M}$ 上的表面梯度. 根据标准理论, 弱形式 (1.3) 是适定的, 并且存在唯一解 $u \in H^1(\mathcal{M}) \cap H^5(\mathcal{M}_i)$ ($i = 1, 2$).

1.2 以往相关研究

据我们所知, 除了我们之前的工作 [34] 之外, 目前仅有文献 [2, 3, 8, 9, 28] 涉及非局部界面模型, 但这些工作主要聚焦于模型推导, 缺乏对适定性与收敛性的严格分析. 虽然文献 [3, 28] 给出了所提非局部模型的截断误差估计, 但未建立其与对应局部 PDE 的收敛关系; 文献 [8] 中的收敛结果仅依靠数值实验支撑, 缺乏理论证明.

文献 [34] 首次提出了对问题 (1.1) 的原始非局部逼近方法. 其核心思想是利用文献 [29] 中证明的 LBO 的如下积分逼近公式:

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{M}} \Delta_{\mathcal{M}} u(y) \bar{R}_{\delta}(x, y) d\mu_y \\ & \approx \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{\delta^2} R_{\delta}(x, y) (u(x) - u(y)) d\mu_y - 2 \int_{\partial\mathcal{M}} \bar{R}_{\delta}(x, y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) d\tau_y, \quad x \in \mathcal{M}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

此处 $\mathcal{M}$ 和 $\partial\mathcal{M}$ 是嵌入在 $\mathbb{R}^d$ 中的 C^3 光滑流形, $d\mu_y$ 和 $d\tau_y$ 分别表示 $\mathcal{M}$ 和 $\partial\mathcal{M}$ 的体积形式. 核函数 $R_\delta(x, y)$ 与 $\bar{R}_\delta(x, y)$ 分别定义为

$$R_\delta(x, y) = C_\delta R\left(\frac{|x-y|^2}{4\delta^2}\right), \quad \bar{R}_\delta(x, y) = C_\delta \bar{R}\left(\frac{|x-y|^2}{4\delta^2}\right), \quad (1.5)$$

其中 $R \in C^2(\mathbb{R}^+)$ 是满足特定结构假设的非负函数, 且 $\bar{R}(r) = \int_r^{+\infty} R(s)ds$. 归一化因子 $C_\delta = \frac{1}{(4\pi\delta^2)^{m/2}}$.

通过应用近似 (1.4), 自然导出如下非局部传输模型:

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta^2} \int_{\mathcal{M}_1} \lambda_1(u_{1\delta}(x) - u_{1\delta}(y)) R_\delta(x, y) d\mu_y - \int_{\Gamma} 2\lambda_1 \gamma_\delta(y) v_\delta(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_y = f_{1\delta}, & x \in \mathcal{M}_1, \\ \frac{1}{\delta^2} \int_{\mathcal{M}_2} \lambda_2(u_{2\delta}(x) - u_{2\delta}(y)) R_\delta(x, y) d\mu_y + \int_{\Gamma} 2\lambda_1 v_\delta(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_y = f_{2\delta}, & x \in \mathcal{M}_2, \\ \lambda_1 \gamma_\delta(x) \int_{\mathcal{M}_1} 2u_{1\delta}(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_y - \lambda_1 \int_{\mathcal{M}_2} 2u_{2\delta}(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_y + \beta_\delta(x) v_\delta(x) = 0, & x \in \Gamma, \\ \int_{\mathcal{M}_1} u_{1\delta}(x) d\mu_x + \int_{\mathcal{M}_2} u_{2\delta}(x) d\mu_x = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

其中第三个方程为非局部传输条件, 其构造与前两个方程严格相容. 此处 γ_δ 和 β_δ 是仅依赖于相互作用核 $\bar{R}_\delta$ 的 $C^2(\Gamma)$ 函数, 而 $f_{1\delta}$ 和 $f_{2\delta}$ 是由原始源项 f_1, f_2 与 $\bar{R}_\delta$ 导出的函数.

文献 [34] 证明了方程组 (1.6) 存在唯一解三元组 $(u_{1\delta}, u_{2\delta}, v_\delta)$, 且该解收敛于局部问题 (1.1) 的解 u , 并满足以下误差估计:

$$\|u - u_{1\delta}\|_{H^1(\mathcal{M}_1)} + \|u - u_{2\delta}\|_{H^1(\mathcal{M}_2)} + \delta^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial u}{\partial n} - v_\delta \right\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\delta \sum_{i=1}^2 \|f_i\|_{H^1(\mathcal{M}_i)}. \quad (1.7)$$

1.3 主要工作概述

本文对文献 [34] 中提出的界面传输问题非局部模型进行了改进, 在保持模型适定性的同时将精度从一阶提升至二阶. 核心思路是采用更精确的近似方法 [33, 35] 替代原文献 [34] 中使用的近似方案. 借鉴 Euclid 域中的处理方法 [22, 23], 我们保留界面上的共法向导数作为辅助变量以最小化截断误差. 本方法的创新点在于: 通过构建 LBO 与经特殊选择的界面限制非局部算子之间的差分, 实现了对二阶共法向导数的精确逼近. 通过严格的理论分析, 我们证明了所提出的非局部椭圆传输模型的适定性, 并进一步证实当非局部作用域 $\delta \rightarrow 0$ 时, 其在 H^1 范数下的局部化收敛速率达到 $\mathcal{O}(\delta^2)$ 量级.

据我们所知, 本文实现的 $\mathcal{O}(\delta^2)$ 收敛速率是当前文献中的最高水平. 虽然先前研究文献 [21, 30, 32] 在纯 Poisson 模型中达到了相同阶数的收敛速率, 但其分析仅限于不超过二维的 Euclid 空间. 建立具有严格理论保证的高维流形方程的非局部近似模型, 对于推进非局部建模框架的深入理解和实际应用至关重要. 本方法特别设计了适用于标准求积准则的数值计算方案, 为求解这类复杂问题提供了兼具精确性与理论可靠性的实现框架.

本文余下内容的结构安排如下. 第 2 节阐述非局部模型构建的数学直觉. 第 3 节完整分析所提模型与局部模型间的截断误差. 第 4 节探究模型源项对非局部解的影响. 第 5 节证明模型适定性及其向局部极限的收敛性 (主定理). 第 6 节通过两个代表性算例进行数值验证, 结果证实了理论收敛速率. 第 7 节给出结论性评述, 并探讨未来研究的潜在方向. 为保持行文清晰完整, 部分复杂证明过程已移至附录.

2 非局部传输模型的推导

由于先前构建的非局部逼近模型 (1.6) 仅能达到一阶收敛精度, 为了增强非局部方法相较于其他类型逼近模型的竞争力, 有必要进一步提升其精确度. 实现这一目标的关键在于获得比 (1.4) 更为精确的 LBO 估计. 本节致力于推导该高精度 LBO 估计, 并基于此构造相应的非局部传输模型.

2.1 更高精确度的 LBO 逼近方法

在我们先前的工作 [35] 中, 已经建立了如下形式的估计:

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{M}} \Delta_{\mathcal{M}} u(y) \bar{R}_{\delta}(x, y) d\mu_y \\ & = \frac{1}{\delta^2} \int_{\mathcal{M}} (u(x) - u(y)) R_{\delta}(x, y) d\mu_y - 2 \int_{\partial\mathcal{M}} \frac{\partial u}{\partial n}(y) \bar{R}_{\delta}(x, y) d\tau_y \\ & \quad - \int_{\partial\mathcal{M}} (x - y) \cdot n(y) \nabla_{\mathcal{M}}^2 u(n, n)(y) \bar{R}_{\delta}(x, y) d\tau_y - r_1(x), \quad x \in \mathcal{M}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中 $u \in H^5(\mathcal{M})$, R_{δ} 与 $\bar{R}_{\delta}$ 为 (1.5) 中定义的核函数. 误差项 r_1 (即文献 [35] 中的 r_{in}) 的完整估计由文献 [35, 定理 3.1] 给出.

为了在非局部模型构建中应用该估计, 一个自然产生的问题是, 如何处理 Hessian 项 $\nabla_{\mathcal{M}}^2 u(n, n)$? 事实上, Riemann 几何中成立如下标准恒等式:

$$\nabla_{\mathcal{M}}^2 u(n, n)(y) = \Delta_{\mathcal{M}} u(y) - \Delta_{\partial\mathcal{M}} u(y) - \kappa(y) \frac{\partial u}{\partial n}(y), \quad y \in \partial\mathcal{M}, \quad (2.2)$$

其中 $\kappa: \partial\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ 表示 $\partial\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{M}$ 中的外蕴平均曲率 (第二基本形式). 其证明见附录 B.

将等式 (2.2) 代入 (2.1) 后, 待分析的未知项变为 $\int_{\partial\mathcal{M}} \Delta_{\partial\mathcal{M}} u(y) (x - y) \cdot n(y) \bar{R}_{\delta}(x, y) d\mu_y$. 接下来应用文献 [33, (2.18), (4.3) 和 (4.4)], 则对所有 $x \in \mathcal{M}$, 有

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \Delta_{\partial\mathcal{M}} u(y) (x - y) \cdot n(y) \bar{R}_{\delta}(x, y) d\tau_y = - \int_{\partial\mathcal{M}} \Delta_{\partial\mathcal{M}} \hat{u}(y) \frac{\delta C_R \zeta_{\delta}(x, y)}{\int_{\mathcal{M}} \zeta_{\delta}(z, y) d\mu_z} d\tau_y - r_2(x), \quad (2.3)$$

其中

$$\hat{u}(y) = \frac{\int_{\mathcal{M}} u(x) \zeta_{\delta}(x, y) d\mu_x}{\int_{\mathcal{M}} \zeta_{\delta}(x, y) d\mu_x}, \quad y \in \partial\mathcal{M}, \quad (2.4)$$

辅助函数 $\zeta_{\delta}: \mathcal{M} \times \partial\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$\zeta_{\delta}(x, y) = 2\delta^2 n(y) \cdot \nabla_{\mathcal{M}}^x \bar{R}_{\delta}(x, y) = -n(y) \cdot \mathcal{T}_{\mathcal{M}}^x(x - y) \bar{R}_{\delta}(x, y), \quad x \in \mathcal{M}, \quad y \in \partial\mathcal{M}. \quad (2.5)$$

(2.5) 中涉及的核函数为 $\bar{R}_{\delta}(x, y) = C_{\delta} \bar{R}(\frac{|x-y|^2}{4\delta^2})$, 其中 $\bar{R}(r) = \int_r^{+\infty} \bar{R}(s) ds$. $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}^x(x - y)$ 是 $x - y$ 在 $\mathcal{M}$ 的 x 点切空间上的正交投影向量. 此外, 常数

$$C_R = 2\delta \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \bar{R}_{\delta}(\xi, \mathbf{0}) d\xi = \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \bar{R}(|\xi|) d\xi. \quad (2.6)$$

(2.3) 中的余项 r_2 (即文献 [33] 中的 $r_2 + r_3$) 已在文献 [33, (4.7) 和 (4.8)] 中得到控制.

最后, 结合 (2.1)–(2.3) 可得如下结果:

$$\frac{1}{\delta^2} \int_{\mathcal{M}} (u(x) - u(y)) R_{\delta}(x, y) d\mu_y - \int_{\partial\mathcal{M}} \Delta_{\partial\mathcal{M}} \hat{u}(y) \frac{\delta C_R \zeta_{\delta}(x, y)}{\int_{\mathcal{M}} \zeta_{\delta}(z, y) d\mu_z} d\tau_y$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\partial\mathcal{M}} (2 - \kappa(y)(x - y) \cdot n(y)) \bar{R}_\delta(x, y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) d\tau_y - r_1(x) - r_2(x) \\
& = - \int_{\mathcal{M}} \Delta_{\mathcal{M}} u(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_y + \int_{\partial\mathcal{M}} (x - y) \cdot n(y) \Delta_{\mathcal{M}} u(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_y, \quad x \in \mathcal{M}. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

所得表达式 (2.7) 提供了比 (1.4) 更精确的近似, 然而由于非局部边界 LBO 的出现, 其复杂度也更高. 为消除 (2.7) 中未知量之间的交叉耦合, 对 $y \in \partial\mathcal{M}$, 引入如下有效的辅助逼近:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{M}} (u(x) - u(y))(2 - \kappa(y)(x - y) \cdot n(y)) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x \\
& + 2\delta^2 \left(2 \int_{\partial\mathcal{M}} \bar{\bar{R}}_\delta(x, y) d\tau_x - \kappa(y) \int_{\mathcal{M}} \bar{\bar{R}}_\delta(x, y) d\mu_x \right) \frac{\partial u}{\partial n}(y) \\
& = 2\delta^2 \int_{\mathcal{M}} \Delta_{\mathcal{M}} u(y) \bar{\bar{R}}_\delta(x, y) d\mu_x + r_0(y). \quad (2.8)
\end{aligned}$$

方程 (2.8) 将法向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 与 u 在 $\partial\mathcal{M}$ 的 2δ 邻域内的值联系起来. 其余项满足估计式 $\|r_0\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\delta^{\frac{5}{2}} \|u\|_{H^5(\mathcal{M})}$, 该估计式的证明见附录 A.

2.2 非局部传输模型的构造

本小节采用新的 LBO 逼近 (2.7) 以及辅助边界逼近 (2.8), 在非局部框架下重新表述原始传输问题 (1.1). 为确保所得非局部模型的收敛性, 要求由 (1.5) 定义的核函数 $R(r)$ 具备特定性质. 现将这些要求正式陈述为如下假设.

- 假设 2.1** (1) 光滑性 ($R \in C^2$): 对所有 $r \geq 0$ 满足 $|\frac{d^2}{dr^2} R(r)| \leq C$ (用于一致性误差分析);
 (2) 非负性: 对所有 $r \geq 0$ 满足 $R(r) > 0$ (确保算子正定性);
 (3) 紧支集: 对所有 $r > 1$ 满足 $R(r) = 0$ (保证逼近的局部性);
 (4) 非退化性: 存在 $\delta_0 > 0$ 使得当 $0 \leq r \leq 1/2$ 时 $R(r) \geq \delta_0$ (确保核在核心区域不消失).

这些温和假设在非局部逼近文献中较为常见. 相关核函数 $\bar{R}$ 和 $\bar{\bar{R}}$ 继承类似性质, 其中非退化半径调整为 $1/8$.

为简明起见, 引入如下非局部算子. 对于 $i = 1, 2$, 定义 $\mathcal{L}_{i\delta} : L^2(\mathcal{M}_i) \rightarrow L^2(\mathcal{M}_i)$ 如下:

$$\mathcal{L}_{i\delta} u_\delta(x) = \frac{1}{\delta^2} \int_{\mathcal{M}_i} (u_\delta(x) - u_\delta(y)) R_\delta(x, y) d\mu_y - \int_{\Gamma} (\Delta_\Gamma^y \hat{u}_{i\delta}(y)) \zeta_{i\delta}(x, y) d\tau_y, \quad \forall u_\delta \in L^2(\mathcal{M}_i), \quad (2.9)$$

其中函数

$$\hat{u}_{i\delta}(y) = \frac{\int_{\mathcal{M}_i} u_\delta(x) \zeta_\delta(x, y) d\mu_x}{\int_{\mathcal{M}_i} \zeta_\delta(x, y) d\mu_x}, \quad \zeta_{i\delta}(x, y) = \frac{\delta C_R \zeta_\delta(x, y)}{\int_{\mathcal{M}_i} \zeta_\delta(z, y) d\mu_z}, \quad \forall y \in \Gamma, \quad (2.10)$$

这里 C_R 是由 (2.6) 定义的常数, 且

$$\zeta_\delta(x, y) = (-1)^i n(y) \cdot \mathcal{T}_{\mathcal{M}}^x(x - y) \bar{R}_\delta(x, y), \quad \forall y \in \Gamma, \quad (2.11)$$

$n(y)$ 是 $\mathcal{M}_1$ 在 $y \in \Gamma$ 处的外向单位法向量, 其定义见 (1.1) 后的说明.

其次, 对于 $i = 1, 2$, 定义 $\mathcal{G}_{i\delta} : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\mathcal{M}_i)$:

$$\mathcal{G}_{i\delta} v_\delta(x) = \int_{\Gamma} (2 - \kappa(y)(x - y) \cdot n(y)) \bar{R}_\delta(x, y) v_\delta(y) d\tau_y, \quad \forall v_\delta \in L^2(\Gamma), \quad (2.12)$$

其中 $\kappa: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ 表示 Γ 在 $\mathcal{M}_1$ 中的外蕴平均曲率. 相应地, $-\kappa$ 即为 Γ 在 $\mathcal{M}_2$ 中的外蕴平均曲率.

接下来, 定义修正后的强迫项. 对于 $i = 1, 2$, 有

$$f_{i\delta}(x) = \int_{\mathcal{M}_i} f_i(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_y + (-1)^i \int_{\Gamma} (x - y) \cdot n(y) f_i(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_y - \bar{f}_\delta, \quad \forall x \in \mathcal{M}_i, \quad (2.13)$$

这里 $\bar{f}_\delta$ 是确保可解性条件 $\sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{M}_i} f_{i\delta}(x) d\mu_x = 0$ 成立的常数, 其显式定义为

$$\bar{f}_\delta = \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{M})} \sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{M}_i} \left(\int_{\mathcal{M}_i} f_i(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_y + (-1)^i \int_{\Gamma} (x - y) \cdot n(y) f_i(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_y \right) d\mu_x. \quad (2.14)$$

针对原始系统 (1.1) 的第一和第二个方程, 直接在每个子区域 $\mathcal{M}_i$ 上应用估计式 (2.7), 并用 $-f/\lambda_i$ 替换 $\Delta_{\mathcal{M}_i} u$, 从而得到其非局部形式:

$$\begin{cases} \lambda_1 \mathcal{L}_{1\delta} u(x) - \lambda_1 \mathcal{G}_{1\delta} \frac{\partial u^+}{\partial n}(x) = f_{1\delta}(x) + \lambda_1 r_{1\mathcal{M}_1}(x) + \lambda_1 r_{2\mathcal{M}_1}(x) + \bar{f}_\delta, & x \in \mathcal{M}_1, \\ \lambda_2 \mathcal{L}_{2\delta} u(x) + \lambda_2 \mathcal{G}_{2\delta} \frac{\partial u^-}{\partial n}(x) = f_{2\delta}(x) + \lambda_2 r_{1\mathcal{M}_2}(x) + \lambda_2 r_{2\mathcal{M}_2}(x) + \bar{f}_\delta, & x \in \mathcal{M}_2, \end{cases} \quad (2.15)$$

其中 $(r_{1\mathcal{M}_i} + r_{2\mathcal{M}_i})|_{\mathcal{M}_i}$ ($i = 1, 2$) 为 (2.7) 中与 $(r_1 + r_2)|_{\mathcal{M}}$ 对应的余项.

接下来, 为保证所建非局部模型的适定性, 对于原始系统 (1.1) 的第三和第四个方程, 保持第四个方程不变, 并应用估计式 (2.8) 对第三个方程进行非局部化处理. 为简明起见, 对于 $i = 1, 2$, 引入 $\mathcal{G}_{i\delta}$ 的伴随算子 $\mathcal{D}_{i\delta}: L^2(\mathcal{M}_i) \rightarrow L^2(\Gamma)$, 其定义为

$$\mathcal{D}_{i\delta} u_\delta(y) = \int_{\mathcal{M}_i} u_\delta(x) (2 - \kappa(y)(x - y) \cdot n(y)) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x, \quad \forall u_\delta \in L^2(\mathcal{M}_i). \quad (2.16)$$

此外, 定义两个辅助函数 $\gamma_\delta, \beta_\delta: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, 满足

$$\gamma_\delta(y) = \frac{\mathcal{D}_{2\delta} 1(y)}{\mathcal{D}_{1\delta} 1(y)} = \frac{\int_{\mathcal{M}_2} (2 - \kappa(y)(x - y) \cdot n(y)) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x}{\int_{\mathcal{M}_1} (2 - \kappa(y)(x - y) \cdot n(y)) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x}, \quad y \in \Gamma, \quad (2.17)$$

$$\beta_\delta(y) = 2\delta^2 \left(2 \int_{\Gamma} \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_x - \kappa(y) \int_{\mathcal{M}_1} \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x \right), \quad y \in \Gamma. \quad (2.18)$$

显然, γ_δ 近似等于 1, 而 β_δ 满足一致有界性估计: 存在常数 $0 < C_1 < C_2$, 使得 $C_1 \delta < \beta_\delta(y) < C_2 \delta$.

分别在 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 上代入估计式 (2.8), 并将两者之差与 γ_δ 相乘, 则对每个 $y \in \Gamma$, 得到如下等式:

$$\begin{aligned} & \gamma_\delta(y) \left((\mathcal{D}_{1\delta} u(y) - \mathcal{D}_{1\delta} 1(y) u^+(y)) + 2\delta^2 \left(2 \int_{\Gamma} \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_x - \kappa(y) \int_{\mathcal{M}_1} \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x \right) \frac{\partial u^+}{\partial n}(y) \right) \\ & - \left((\mathcal{D}_{2\delta} u(y) - \mathcal{D}_{2\delta} 1(y) u^-(y)) - 2\delta^2 \left(2 \int_{\Gamma} \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_x - \kappa(y) \int_{\mathcal{M}_2} \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x \right) \frac{\partial u^-}{\partial n}(y) \right) \\ & = \gamma_\delta(y) \left(2\delta^2 \int_{\mathcal{M}_1} \Delta_{\mathcal{M}_1} u(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x + r_{0\mathcal{M}_1}(y) \right) \\ & - \left(2\delta^2 \int_{\mathcal{M}_2} \Delta_{\mathcal{M}_2} u(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x + r_{0\mathcal{M}_2}(y) \right), \end{aligned} \quad (2.19)$$

其中 $r_{0\mathcal{M}_i}$ ($i = 1, 2$) 为 (2.8) 中 r_0 对应的余项.

由于 $\gamma_\delta \mathcal{D}_{1\delta} 1 = \mathcal{D}_{2\delta} 1$, 代入 $u^+ = u^-$ 并将 $\Delta_{\mathcal{M}_i} u$ 替换为 $-f/\lambda_i$ 后, 可得传输条件 (即 (1.1) 的第三个方程) 的如下非局部形式:

$$\gamma_\delta(y) \mathcal{D}_{1\delta} u(y) - \mathcal{D}_{2\delta} u(y) + \beta_\delta(y) \left(\frac{\partial u^+}{\partial n}(y) + \frac{\partial u^-}{\partial n}(y) \right) = g_\delta(y) + r_\Gamma(y), \quad y \in \Gamma, \quad (2.20)$$

这里 r_Γ 为 (2.20) 中的余项, 并且

$$g_\delta(y) = -2\delta^2 \left(\frac{1}{\lambda_1} f_1(y) - \frac{1}{\lambda_2} f_2(y) \right) \int_{\mathcal{M}_1} \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_x, \quad y \in \Gamma. \quad (2.21)$$

如此构造的第三个方程消除了待求未知量间的交叉耦合项, 确保了该非局部系统的解耦可解性.

最后, 通过联立 (2.15) 和 (2.20), 并忽略误差项 r_1, r_2, r_{bd} 和 $\bar{f}_\delta$, 同时将 $u|_{\mathcal{M}_1}$ 和 $u|_{\mathcal{M}_2}$ 分别替换为 $u_{1\delta}$ 和 $u_{2\delta}$, 将 $\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial n}^+$ 和 $\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial n}^-$ 替换为 v_δ , 得到最终的非局部传输问题:

$$\begin{cases} \lambda_1 \mathcal{L}_{1\delta} u_{1\delta}(x) - \mathcal{G}_{1\delta}(\gamma_\delta v_\delta)(x) = f_{1\delta}(x), & x \in \mathcal{M}_1, \\ \lambda_2 \mathcal{L}_{2\delta} u_{2\delta}(x) + \mathcal{G}_{2\delta} v_\delta(x) = f_{2\delta}(x), & x \in \mathcal{M}_2, \\ \gamma_\delta(x) \mathcal{D}_{1\delta} u_{1\delta}(x) - \mathcal{D}_{2\delta} u_{2\delta}(x) + \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \beta_\delta(x) v_\delta(x) = g_\delta(x), & x \in \Gamma, \\ \int_{\mathcal{M}_1} u_{1\delta}(x) d\mu_x + \int_{\mathcal{M}_2} u_{2\delta}(x) d\mu_x = 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

其中涉及的相关算子及函数由 (2.9), (2.12)–(2.14), (2.16)–(2.18) 和 (2.21) 定义.

2.3 主要结果

定理 2.1 (1) (适定性) 对任意 $f_i \in H^1(\mathcal{M}_i)$, $i = 1, 2$, 非局部系统 (2.22) 存在唯一解

$$(u_{1\delta}, u_{2\delta}, v_\delta) \in L^2(\mathcal{M}_1) \times L^2(\mathcal{M}_2) \times L^2(\Gamma),$$

且成立如下估计:

$$\|u_{1\delta}\|_{H^1(\mathcal{M}_1)} + \|u_{2\delta}\|_{H^1(\mathcal{M}_2)} + \delta^{\frac{1}{2}} \|v_\delta\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \sum_{i=1}^2 \|f_i\|_{H^1(\mathcal{M}_i)}, \quad (2.23)$$

其中常数 C 仅依赖于区域 $\mathcal{M}$ 及核函数 R .

(2) (非局部性消失) 若 $f_i \in H^3(\mathcal{M}_i)$, $i = 1, 2$, 且 (1.1) 的局部解 u 满足 $H^5(\mathcal{M}_i)$, $i = 1, 2$, 则非局部解收敛:

$$\|u - u_{1\delta}\|_{H^1(\mathcal{M}_1)} + \|u - u_{2\delta}\|_{H^1(\mathcal{M}_2)} + \delta^{\frac{1}{2}} \left\| \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial n}^+ - v_\delta \right\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \delta^2 \sum_{i=1}^2 \|f_i\|_{H^3(\mathcal{M}_i)}, \quad (2.24)$$

其中常数 C 仅依赖于 $\mathcal{M}, \Gamma$ 及核函数 R .

定理 2.1 的证明将在第 5 节给出.

3 截断误差分析

本节重点分析非局部模型的截断误差, 相应的估计由以下定理给出.

定理 3.1 设 $u \in H^5(\mathcal{M}_i)$, $i = 1, 2$ 为系统 (1.1) 的解. 定义在 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ 和 Γ 上的函数 $r_{\mathcal{M}_1}, r_{\mathcal{M}_2}$ 及 r_Γ 分别由下式给出:

$$\begin{cases} r_{\mathcal{M}_1}(x) = \lambda_1 \mathcal{L}_{1\delta} u(x) - \lambda_1 \mathcal{G}_{1\delta} \left(\gamma_\delta \frac{\partial u}{\partial n}^+ \right)(x) - f_{1\delta}(x), & x \in \mathcal{M}_1, \\ r_{\mathcal{M}_2}(x) = \lambda_2 \mathcal{L}_{2\delta} u(x) + \lambda_2 \mathcal{G}_{2\delta} \frac{\partial u}{\partial n}^-(x) - f_{2\delta}(x), & x \in \mathcal{M}_2, \\ r_\Gamma(x) = \gamma_\delta(x) \mathcal{D}_{1\delta} u(x) - \mathcal{D}_{2\delta} u(x) + \beta_\delta(x) \left(\frac{\partial u}{\partial n}^+(x) + \frac{\partial u}{\partial n}^-(x) \right) - g_\delta(x), & x \in \Gamma, \end{cases} \quad (3.1)$$

则对 $i = 1, 2$, 截断误差 $r_{\mathcal{M}_i}$ 可分解为 $r_{\mathcal{M}_i} = r_{i \text{ it}} + r_{i \text{ bl}}$, 其中 $r_{i \text{ it}} \in H^1(\mathcal{M}_i)$ 满足估计

$$\|r_{i \text{ it}}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)} + \delta \|\nabla r_{i \text{ it}}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)} \leq C\delta^2 \sum_{i=1}^2 \|f_i\|_{H^3(\mathcal{M}_i)}, \quad (3.2)$$

而 $r_{i \text{ bl}} \in H^1(\mathcal{M}_i)$ 的支集位于距离界面 2δ 的边界层内, 且满足如下估计. 对任意 $h_i \in H^1(\mathcal{M}_i)$, 有

$$\begin{aligned} \|r_{i \text{ bl}}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)} + \delta \|\nabla r_{i \text{ bl}}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)} &\leq C\delta^{3/2} \|f_i\|_{H^3(\mathcal{M}_i)}, \\ \int_{\mathcal{M}_i} r_{i \text{ bl}}(x) h_i(x) dx &\leq C\delta^2 \|f_i\|_{H^3(\mathcal{M}_i)} (\|h_i\|_{H^1(\mathcal{M}_i)} + \|\bar{h}_i\|_{H^1(\mathcal{M}_i)} + \|\bar{\bar{h}}_i\|_{H^1(\mathcal{M}_i)}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

其中 $\bar{h}_i$ 和 $\bar{\bar{h}}_i$ 是由下式定义的 $H^1(\mathcal{M}_i)$ 函数:

$$\bar{h}_i(x) = \frac{1}{\bar{\omega}_i(x)} \int_{\mathcal{M}_i} h_i(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_y, \quad \bar{\bar{h}}_i(x) = \frac{1}{\bar{\bar{\omega}}_i(x)} \int_{\mathcal{M}_i} h_i(y) \bar{\bar{R}}_\delta(x, y) d\mu_y \quad x \in \mathcal{M}_i, \quad (3.4)$$

且

$$\bar{\omega}_i(x) = \int_{\mathcal{M}_i} \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_y, \quad \bar{\bar{\omega}}_i(x) = \int_{\mathcal{M}_i} \bar{\bar{R}}_\delta(x, y) d\mu_y, \quad i = 1, 2.$$

最后, $r_\Gamma \in L^2(\Gamma)$ 满足估计

$$\|r_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\delta^{\frac{5}{2}} \sum_{i=1}^2 \|f_i\|_{H^3(\mathcal{M}_i)}. \quad (3.5)$$

为建立截断误差 r_1 , r_2 和 r_{bd} 的估计, 需要借助以下两个引理.

引理 3.1 设 $\mathcal{M}$ 是 m 维、具有有界曲率的 C^3 光滑流形, Γ 是 $\mathcal{M}$ 中一个 $m-1$ 维、具有有界曲率的 C^3 光滑子流形, 它将 $\mathcal{M}$ 分割为 $\mathcal{M}_i$ ($i = 1, 2$) 两部分. 定义

$$\epsilon(y) = \int_{\mathcal{M}_1} \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x - \int_{\mathcal{M}_2} \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x + 2\delta^2 \kappa(y) \int_\Gamma \bar{\bar{R}}_\delta(x, y) d\tau_x, \quad (3.6)$$

则对所有 $y \in \partial\mathcal{M}$ 及 $\delta \in (0, \delta_0)$, 成立 $|\epsilon(y)| \leq C\delta^2$, 其中 $\delta_0 = \delta_0(\mathcal{M}, \Gamma) > 0$ 是一个仅依赖于 $\mathcal{M}$ 和 Γ 的最小到达半径 (minimum reach) 的常数.

引理 3.2 设 $\mathcal{M}$ 是 m 维 C^3 光滑流形, $\delta \in (0, \delta_0)$, 函数 $f \in H^2(\mathcal{M})$ 满足 $\int_{\mathcal{M}} f(x) d\mu_x = 0$. 定义

$$\hat{f}_\delta = \int_{\mathcal{M}} \left(\int_{\mathcal{M}} f(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_y - \int_{\partial\mathcal{M}} (x - y) \cdot n(y) f(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_y \right) d\mu_x. \quad (3.7)$$

则成立

$$|\hat{f}_\delta| \leq C\delta^2 \|f\|_{H^2(\mathcal{M})}. \quad (3.8)$$

具体而言, 引理 3.1 表明 Γ 附近的测度差异受 Γ 在 $\mathcal{M}$ 中的外蕴平均曲率影响, 而引理 3.2 则给出了平均函数 $\bar{f}_\delta$ 的估计. 引理 3.2 指出, 积分 $\int_{\mathcal{M}} \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_y$ 在 $\mathcal{M}$ 内部近似为常数, 但在宽度为 2δ 的边界层附近会出现损失, 而 (3.7) 中的第二项正是为了补偿这一损失. 引理 3.2 的证明见文献 [33, 附录 D]. 为保持行文连贯, 引理 3.1 的证明安排在附录 C 中给出.

定理 3.1 的证明 首先分析 $r_{\mathcal{M}_2}$. 为建立 $r_{\mathcal{M}_2}$ 的估计, 注意到其可分解为

$$r_{\mathcal{M}_2}(x) = \lambda_2 r_{1\mathcal{M}_2}(x) + \lambda_2 r_{2\mathcal{M}_2}(x) + \bar{f}_\delta, \quad x \in \mathcal{M}_2. \quad (3.9)$$

该分解由比较 (2.15) 和 (3.1) 中的第二个方程得到. 其中 $r_{1\mathcal{M}_2}$ 的估计由文献 [35, 定理 3.1] 给出; $r_{2\mathcal{M}_2}$ 满足 (3.3) 的结论已在文献 [33, (4.7) 和 (4.8)] 中证明; 而估计式 $|\bar{f}_\delta| \leq C\delta^2$ 是引理 3.2 从流形 $\mathcal{M}$ 至 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 的直接推论. 综合以上三点即证 $r_{\mathcal{M}_2}$ 具备所需性质.

接下来分析 $r_{\mathcal{M}_1}$. 同样地, 通过比较 (2.15) 和 (3.1) 中的第一个方程, 可得

$$r_{\mathcal{M}_1}(x) = \lambda_1 r_{1\mathcal{M}_1}(x) + \lambda_1 r_{2\mathcal{M}_1}(x) + \bar{f}_\delta - \lambda_1 r_{3\mathcal{M}_1}(x), \quad x \in \mathcal{M}_1, \quad (3.10)$$

其中

$$r_{3\mathcal{M}_1}(x) = \mathcal{G}_{1\delta} \left((\gamma_\delta - 1) \frac{\partial u^+}{\partial n} \right) (x), \quad x \in \mathcal{M}_1. \quad (3.11)$$

这里, $r_{1\mathcal{M}_1}$, $r_{2\mathcal{M}_1}$ 及 $\bar{f}_\delta$ 的估计可沿用分析 $r_{\mathcal{M}_2}$ 时的相同论证得到. 余下的任务是对 $r_{3\mathcal{M}_1}$ 建立控制. 为此, 考察由 (2.17) 定义的 γ_δ . 对每个 $y \in \Gamma$, 计算可得

$$\begin{aligned} - \int_{\mathcal{M}_1} (x-y) \cdot n(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x &= 2\delta^2 \int_{\mathcal{M}_1} \nabla_{\mathcal{M}}^x \bar{\bar{R}}_\delta(x, y) \cdot n(y) d\mu_x + \mathcal{O}(\delta^2) \\ &= 2\delta^2 \int_{\Gamma} \bar{\bar{R}}(x, y) d\tau_x + \mathcal{O}(\delta^2), \end{aligned}$$

类似地,

$$- \int_{\mathcal{M}_2} (x-y) \cdot n(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x = -2\delta^2 \int_{\Gamma} \bar{\bar{R}}(x, y) d\tau_x + \mathcal{O}(\delta^2).$$

上述计算表明

$$\gamma_\delta(y) = \frac{\int_{\mathcal{M}_2} 2\bar{\bar{R}}_\delta(x, y) d\mu_x - 2\delta^2 \kappa(y) \int_{\Gamma} \bar{\bar{R}}(x, y) d\tau_x}{\int_{\mathcal{M}_1} 2\bar{\bar{R}}_\delta(x, y) d\mu_x + 2\delta^2 \kappa(y) \int_{\Gamma} \bar{\bar{R}}(x, y) d\tau_x} + \mathcal{O}(\delta^2) = 1 + \mathcal{O}(\delta^2), \quad y \in \Gamma, \quad (3.12)$$

其中最后一个等式由引理 3.1 推导出.

回顾 (2.12) 中给出的 $\mathcal{G}_{i\delta}$ 定义. 对每个 $x \in \mathcal{M}_1$, 观察到

$$r_{3\mathcal{M}_1}(x) = \int_{\Gamma} (2 - \kappa(y)(x-y) \cdot n(y)) (\gamma_\delta(y) - 1) \frac{\partial u^+}{\partial n}(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_y. \quad (3.13)$$

显然, $r_{3\mathcal{M}_1}$ 的支集位于 Γ 的 2δ 邻域内. 下面验证 $r_{3\mathcal{M}_1}$ 满足 (3.3) 中的两个条件.

(1) 验证 (3.3) 的第二个条件. 将 $r_{3\mathcal{M}_1}(x)$ 分解为 $r_{3\mathcal{M}_1} = r_{31} + r_{32}$, 其中

$$r_{31}(x) = \int_{\Gamma} 2(\gamma_\delta(y) - 1) \frac{\partial u^+}{\partial n}(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_y, \quad \forall x \in \mathcal{M}_1, \quad (3.14)$$

而 r_{32} 为来自 (3.13) 的剩余部分. 应用估计式 (3.12), 可得如下界:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{M}_1} r_{31}(x) h_1(x) d\mu_x \right| &= 2 \left| \int_{\Gamma} (\gamma_\delta(y) - 1) \frac{\partial u^+}{\partial n}(y) \left(\int_{\mathcal{M}_1} h_1(x) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x \right) d\tau_y \right| \\ &\leq C\delta^2 \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u^+}{\partial n}(y) \bar{h}_1(y) \right| d\tau_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C\delta^2 \|\bar{h}_1\|_{L^2(\Gamma)} \left\| \frac{\partial u^+}{\partial n} \right\|_{L^2(\Gamma)} \\
 &\leq C\delta^2 \|\bar{h}_1\|_{H^1(\mathcal{M}_1)} \|f_1\|_{L^2(\mathcal{M}_1)}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

对于低阶余项 r_{32} , 可进行如下估计:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\mathcal{M}_1} r_{32}(x) h_1(x) d\mu_x \right| &\leq C \|h_1\|_{L^2(\mathcal{M}_1)} \|r_{32}\|_{L^2(\mathcal{M}_1)} \\
 &\leq C\delta^3 \|h_1\|_{L^2(\mathcal{M}_1)} \left(\int_{\mathcal{M}_1} \left(\int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u^+}{\partial n}(y) \right| \bar{R}_{\delta}(x, y) d\tau_y \right)^2 d\mu_x \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C\delta^3 \|h_1\|_{L^2(\mathcal{M}_1)} \left(\int_{\mathcal{M}_1} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u^+}{\partial n}(y) \right|^2 \bar{R}_{\delta}(x, y) d\tau_y \int_{\Gamma} \bar{R}_{\delta}(x, y) d\tau_y d\mu_x \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C\delta^{\frac{5}{2}} \|h_1\|_{L^2(\mathcal{M}_1)} \left(\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u^+}{\partial n}(y) \right)^2 \left(\int_{\mathcal{M}_1} \bar{R}_{\delta}(x, y) d\mu_x \right) d\tau_y \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C\delta^{\frac{5}{2}} \|h_1\|_{H^1(\mathcal{M}_1)} \left\| \frac{\partial u^+}{\partial n} \right\|_{L^2(\Gamma)} \\
 &\leq C\delta^{\frac{5}{2}} \|h_1\|_{H^1(\mathcal{M}_1)} \|f_1\|_{L^2(\mathcal{M}_1)}.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

(3.16) 所采用的策略同样适用于控制其他具有类似结构的项.

(2) 验证 (3.3) 的第一个条件. 由 (3.13) 给出的表达式可知, 对每个 $x \in \mathcal{M}_1$ 有

$$|r_{3\mathcal{M}_1}(x)| \leq C\delta^2 \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u^+}{\partial n}(y) \right| \bar{R}_{\delta}(x, y) d\tau_y, \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
 |\nabla_{\mathcal{M}_1} r_{3\mathcal{M}_1}(x)| &= \left| \int_{\Gamma} (\gamma_{\delta}(y) - 1) \frac{\partial u^+}{\partial n}(y) \left(-\kappa(y) \mathcal{T}_{\mathcal{M}}^x n(y) \bar{R}_{\delta}(x, y) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2\delta^2} (2 - \kappa(y)(x - y) \cdot n(y)) \mathcal{T}_{\mathcal{M}}^x(x - y) R_{\delta}(x, y) \right) d\tau_y \right| \\
 &\leq C\delta \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u^+}{\partial n}(y) \right| (\delta \bar{R}_{\delta}(x, y) + R_{\delta}(x, y)) d\tau_y.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

采用推导 (3.16) 时的相同论证, 可得如下估计:

$$\|r_{3\mathcal{M}_1}\|_{L^2(\mathcal{M})} \leq C\delta^{\frac{3}{2}} \|f_i\|_{L^2(\mathcal{M}_1)}, \quad \|\nabla_{\mathcal{M}_1} r_{3\mathcal{M}_1}\|_{L^2(\mathcal{M})} \leq C\delta^{\frac{1}{2}} \|f_i\|_{L^2(\mathcal{M}_1)}. \tag{3.19}$$

结合 (3.15), (3.16) 和 (3.19) 中已建立的 $r_{3\mathcal{M}_1}$ 的界, 即完成了对 $r_{\mathcal{M}_1}$ 的估计.

最后, 还需要对 r_{Γ} 进行控制. 通过比较 (2.19) 与 (2.20), 写出 r_{Γ} 的如下显式表达式:

$$\begin{aligned}
 r_{\Gamma}(y) &= \gamma_{\delta}(y) r_{0\mathcal{M}_1}(y) - r_{0\mathcal{M}_2}(y) - (\gamma_{\delta}(y) - 1) \left(\beta_{\delta}(y) + 2\delta^2 f_1(y) \int_{\mathcal{M}_1} \bar{\bar{R}}_{\delta}(x, y) d\mu_x \right) \\
 &\quad + 2\delta^2 \kappa(y) \left(\int_{\mathcal{M}_1} \bar{\bar{R}}_{\delta}(x, y) d\mu_x - \int_{\mathcal{M}_2} \bar{\bar{R}}_{\delta}(x, y) d\mu_x \right) \frac{\partial u^-}{\partial n}(y), \quad y \in \Gamma,
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

其中项 $r_{0\mathcal{M}_i}$, $i = 1, 2$ 可按照附录 A 中控制 r_0 的相同方式处理, 而 (3.20) 中的剩余项则可利用 (2.18), (3.12) 的结论以及引理 3.1 进行估计. 综合以上估计, 即得 r_{Γ} 所需之界. $\square$

4 源项与解间的映射

本节分析非局部模型 (2.22) 的解关于源数据扰动的敏感性. 考虑扰动源三元组 $(p_{1\delta}, p_{2\delta}, q_\delta) \in L^2(\mathcal{M}_1) \times L^2(\mathcal{M}_2) \times L^2(\Gamma)$, 满足约束条件 $\int_{\mathcal{M}_1} p_{1\delta}(x) d\mu_x + \int_{\mathcal{M}_2} p_{2\delta}(x) d\mu_x = 0$. 设 $(m_{1\delta}, m_{2\delta}, n_\delta) \in L^2(\mathcal{M}_1) \times L^2(\mathcal{M}_2) \times L^2(\Gamma)$ 为对应于系统

$$\begin{cases} \lambda_1 \mathcal{L}_{1\delta} m_{1\delta}(x) - \mathcal{G}_{1\delta}(\gamma_\delta n_\delta)(x) = p_{1\delta}(x), & x \in \mathcal{M}_1, \\ \lambda_2 \mathcal{L}_{2\delta} m_{2\delta}(x) + \mathcal{G}_{2\delta} n_\delta(x) = p_{2\delta}(x), & x \in \mathcal{M}_2, \\ \gamma_\delta(x) \mathcal{D}_{1\delta} m_{1\delta}(x) - \mathcal{D}_{2\delta} m_{2\delta}(x) + \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \beta_\delta(x) n_\delta(x) = q_\delta(x), & x \in \Gamma, \\ \int_{\mathcal{M}_1} m_{1\delta}(x) d\mu_x + \int_{\mathcal{M}_2} m_{2\delta}(x) d\mu_x = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

的解, 其中算子和函数定义于 (2.9), (2.12)–(2.14), (2.16)–(2.18) 和 (2.21). 现在建立系统 (4.1) 的适定性.

4.1 双线性形式的引入

本小节介绍系统 (4.1) 的双线性形式. 首先利用 (4.1) 的第三个方程消去变量 n_δ . 定义 Hilbert 空间

$$X = \left\{ (v_1, v_2) \in L^2(\mathcal{M}_1) \times L^2(\mathcal{M}_2) \mid \int_{\mathcal{M}_1} v_1(x) d\mu_x + \int_{\mathcal{M}_2} v_2(x) d\mu_x = 0 \right\}. \quad (4.2)$$

接着, 定义算子 $T: X \rightarrow L^2(\Gamma)$ 为

$$T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta})(x) = -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2) \beta_\delta(x)} (\gamma_\delta(x) \mathcal{D}_{1\delta} m_{1\delta}(x) - \mathcal{D}_{2\delta} m_{2\delta}(x)), \quad x \in \Gamma. \quad (4.3)$$

通过 (4.1) 的第三个方程, 可得

$$n_\delta(x) = T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta})(x) + \frac{\lambda_1 \lambda_2 q_\delta(x)}{(\lambda_1 + \lambda_2) \beta_\delta(x)}, \quad \forall x \in \Gamma. \quad (4.4)$$

将 (4.4) 代入 (4.1) 的前两个方程, 得到

$$\begin{cases} \lambda_1 \mathcal{L}_{1\delta} m_{1\delta}(x) - \mathcal{G}_{1\delta}(\gamma_\delta T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta}))(x) = p_{1\delta}(x) - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \mathcal{G}_{1\delta} \left(\gamma_\delta \frac{q_\delta}{\beta_\delta} \right)(x), & x \in \mathcal{M}_1, \\ \lambda_2 \mathcal{L}_{2\delta} m_{2\delta}(x) + \mathcal{G}_{2\delta}(T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta}))(x) = p_{2\delta}(x) + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \mathcal{G}_{2\delta} \left(\frac{q_\delta}{\beta_\delta} \right)(x), & x \in \mathcal{M}_2. \end{cases} \quad (4.5)$$

结合 (4.1) 的第四个方程, 得到相应的变分形式: 寻找 $(m_{1\delta}, m_{2\delta}) \in X$, 使得

$$B_\delta[m_{1\delta}, m_{2\delta}; s_{1\delta}, s_{2\delta}] = F_\delta(p_{1\delta}, p_{2\delta}, q_\delta, s_{1\delta}, s_{2\delta}), \quad \forall (s_{1\delta}, s_{2\delta}) \in X, \quad (4.6)$$

此处, 双线性形式 B_δ 定义为

$$\begin{aligned} B_\delta[m_{1\delta}, m_{2\delta}; s_{1\delta}, s_{2\delta}] \\ = \int_{\mathcal{M}_1} \lambda_1 s_{1\delta}(x) \mathcal{L}_{1\delta} m_{1\delta}(x) d\mu_x + \int_{\mathcal{M}_2} \lambda_2 s_{2\delta}(x) \mathcal{L}_{2\delta} m_{2\delta}(x) d\mu_x \end{aligned}$$

$$- \int_{\mathcal{M}_1} s_{1\delta}(x) \mathcal{G}_{1\delta}(\gamma_\delta T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta}))(x) d\mu_x + \int_{\mathcal{M}_2} s_{2\delta}(x) \mathcal{G}_{2\delta}(T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta}))(x) d\mu_x; \quad (4.7)$$

线性泛函 F_δ 定义为

$$\begin{aligned} & F_\delta(p_{1\delta}, p_{2\delta}, q_\delta, s_{1\delta}, s_{2\delta}) \\ &= \int_{\mathcal{M}_1} p_{1\delta}(x) s_{1\delta}(x) d\mu_x + \int_{\mathcal{M}_2} p_{2\delta}(x) s_{2\delta}(x) d\mu_x \\ & \quad - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\int_{\mathcal{M}_1} \mathcal{G}_{1\delta} \left(\gamma_\delta \frac{q_\delta}{\beta_\delta} \right) (x) s_{1\delta}(x) d\mu_x - \int_{\mathcal{M}_2} \mathcal{G}_{2\delta} \left(\frac{q_\delta}{\beta_\delta} \right) (x) s_{2\delta}(x) d\mu_x \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

以下引理建立了系统 (4.1) 与弱形式 (4.6) 之间的等价性.

引理 4.1 (弱形式) 函数三元组 $(m_{1\delta}, m_{2\delta}, n_\delta) \in L^2(\mathcal{M}_1) \times L^2(\mathcal{M}_2) \times L^2(\Gamma)$ 几乎处处求解 (4.1), 当且仅当 $(m_{1\delta}, m_{2\delta}) \in X$ 求解变分形式 (4.6) 且 n_δ 由 (4.4) 计算得到.

证明 由于 (4.5) 是通过在条件 $(m_{1\delta}, m_{2\delta}) \in X$ 下消去 n_δ 而从 (4.1) 推导得出, 因此只需要证明 (4.5) 与 (4.6) 之间的等价性.

首先, 假设 (4.5) 成立. 将 (4.5) 中第 i 个方程与检验函数 $s_{i\delta}$ 在 $\mathcal{M}_i$ ($i = 1, 2$) 上取内积并将结果相加, 即得 (4.6).

反之, 假设 (4.6) 对所有 $(s_{1\delta}, s_{2\delta}) \in X$ 成立. 为了恢复强形式, 必须证明

$$B_\delta[m_{1\delta}, m_{2\delta}; s_{1\delta}, s_{2\delta}] = F_\delta(p_{1\delta}, p_{2\delta}, q_\delta, s_{1\delta}, s_{2\delta}), \quad \forall (s_{1\delta}, s_{2\delta}) \in L^2(\mathcal{M}_1) \times L^2(\mathcal{M}_2). \quad (4.9)$$

一旦此式得证, 根据变分法基本引理, 由于检验函数的任意性, (4.5) 的点态有效性即得成立. 这些陈述之间的逻辑关系总结于图 1.

通过直接计算, X 在 $L^2(\mathcal{M}_1) \times L^2(\mathcal{M}_2)$ 中的正交补为一维空间

$$X^\perp = \{(s_{1\delta}, s_{2\delta}) \mid s_{1\delta} \equiv C_0, \mathcal{M}_1 \text{ 中 a.e. 且 } s_{2\delta} \equiv C_0, \mathcal{M}_2 \text{ 中 a.e., } C_0 \in \mathbb{R}\}. \quad (4.10)$$

为了验证 (4.9) 对所有检验函数成立, 只需要在 $X^\perp$ 的一组基上验证即可, 因为根据 (4.6), 其在 X 上已成立. 考虑 $X^\perp$ 中的单位常值函数, 即 $(s_{1\delta}, s_{2\delta}) \equiv (1, 1)$. 对此函数对, 计算

$$\begin{aligned} & B_\delta[m_{1\delta}, m_{2\delta}; 1, 1] \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{M}_i} \lambda_i \mathcal{L}_{i\delta} m_{i\delta}(x) d\mu_x - \int_{\mathcal{M}_1} \mathcal{G}_{1\delta}(\gamma_\delta T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta}))(x) d\mu_x + \int_{\mathcal{M}_2} \mathcal{G}_{2\delta}(T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta}))(x) d\mu_x \end{aligned}$$

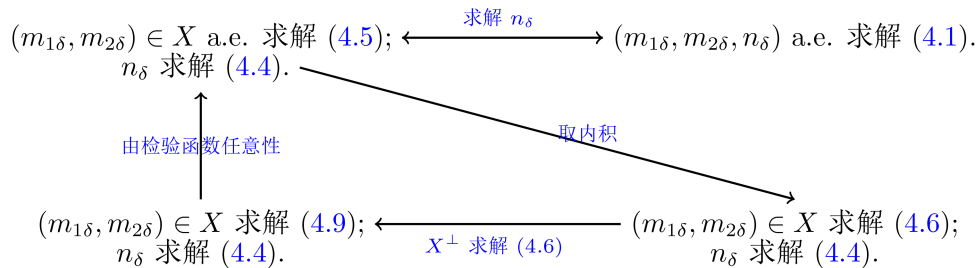


图 1 (4.1) 与弱形式 (4.6) 的等价性

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{M}_i} \lambda_i \frac{1}{\delta^2} \int_{\mathcal{M}_i} (m_{i\delta}(x) - m_{i\delta}(y)) R_\delta(x, y) d\mu_y d\mu_x - \sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{M}_i} \int_{\Gamma} (\Delta_\Gamma^y \hat{m}_{i\delta}(y)) \zeta_{i\delta}(x, y) d\tau_y d\mu_x \\
&\quad - \int_{\Gamma} \gamma_\delta(y) (T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta}))(y) \mathcal{D}_{1\delta} 1(y) d\tau_y + \int_{\Gamma} (T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta}))(y) \mathcal{D}_{2\delta} 1(y) d\tau_y \\
&= \sum_{i=1}^2 \frac{\lambda_i}{\delta^2} \left(\int_{\mathcal{M}_i} \int_{\mathcal{M}_i} (m_{i\delta}(x) - m_{i\delta}(x)) R_\delta(x, y) d\mu_x d\mu_y \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^2 \delta C_R \int_{\Gamma} (\nabla_\Gamma^y \hat{m}_{i\delta}(y)) \left(\nabla_\Gamma^y \int_{\mathcal{M}_i} \zeta_{i\delta}(x, y) d\mu_x \right) d\tau_y \\
&\quad - \int_{\Gamma} (\gamma_\delta(y) \mathcal{D}_{1\delta} 1(y) - \mathcal{D}_{2\delta} 1(y)) (T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta}))(y) d\tau_y \\
&= 0 + 0 + 0 = 0,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

其中 $\hat{m}_{i\delta}$ 和 $\zeta_{i\delta}$ 由 (2.10) 定义. 该结果依赖于恒等式 $\gamma_\delta(y) \mathcal{D}_{1\delta} 1(y) = \mathcal{D}_{2\delta} 1(y)$ 及 $\int_{\mathcal{M}_i} \zeta_{i\delta}(x, y) d\mu_x \equiv \delta C_R$. 类似地, 对于线性泛函有

$$\begin{aligned}
F_\delta(p_{1\delta}, p_{2\delta}, q_\delta, 1, 1) &= \sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{M}_i} p_{i\delta}(x) d\mu_x - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\int_{\mathcal{M}_1} \mathcal{G}_{1\delta} \left(\gamma_\delta \frac{q_\delta}{\beta_\delta} \right) (x) d\mu_x \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathcal{M}_2} \mathcal{G}_{2\delta} \left(\frac{q_\delta}{\beta_\delta} \right) (x) d\mu_x \right) \\
&= 0 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\int_{\Gamma} \gamma_\delta(y) \frac{q_\delta(y)}{\beta_\delta(y)} \mathcal{D}_{1\delta} 1(y) d\tau_y - \int_{\Gamma} \frac{q_\delta(y)}{\beta_\delta(y)} \mathcal{D}_{2\delta} 1(y) d\tau_y \right) \\
&= 0 + 0 = 0.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

因此, $B_\delta[m_{1\delta}, m_{2\delta}; 1, 1] = F_\delta(p_{1\delta}, p_{2\delta}, q_\delta, 1, 1) = 0$. 由线性性可知, 该等式可推广至整个 $X^\perp$ 空间. 由于 (4.6) 在 X 上成立, 且我们已证其在 $X^\perp$ 上也成立, 因此 (4.9) 对所有 $(s_{1\delta}, s_{2\delta}) \in L^2(\mathcal{M}_1) \times L^2(\mathcal{M}_2)$ 均有效. 证毕. $\square$

4.2 双线性形式的性质

双线性形式 B_δ 具有几个关键性质. 我们在以下引理中建立其中三个.

引理 4.2 (有界性) 对于任意函数对 $(m_{1\delta}, m_{2\delta}), (s_{1\delta}, s_{2\delta}) \in X$, 有

$$B_\delta[m_{1\delta}, m_{2\delta}; s_{1\delta}, s_{2\delta}] \leq C'_\delta (\|m_{1\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_1)} + \|m_{2\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_2)}) (\|s_{1\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_1)} + \|s_{2\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_2)}), \tag{4.13}$$

其中 C'_δ 是与 $m_{i\delta}$ 和 $s_{i\delta}$ ($i = 1, 2$) 无关的常数.

证明 根据 (2.9), (2.12), (2.16) 中算子 $\mathcal{L}_{i\delta}, \mathcal{G}_{i\delta}$ 和 $\mathcal{D}_{i\delta}$ 的定义, 推导出以下界:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}_{i\delta} m_{i\delta}(x)| &\leq C'_\delta (|m_{i\delta}(x)| + \|m_{i\delta}\|_{L^1(\mathcal{M}_i)}), \quad |\mathcal{D}_{i\delta} m_{i\delta}(x)| \leq C'_\delta \|m_{i\delta}\|_{L^1(\mathcal{M}_i)}, \quad \forall x \in \mathcal{M}_i, \\
|\mathcal{G}_{i\delta}(T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta}))(x)| &\leq C'_\delta \|T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta})\|_{L^1(\Gamma)} \leq C'_\delta \sum_{i=1}^2 \|m_{i\delta}\|_{L^1(\mathcal{M}_i)}, \quad \forall x \in \Gamma.
\end{aligned}$$

对于 $\mathcal{G}_{i\delta}(\gamma_\delta T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta}))$ 有类似的界. 将这些估计代入 (4.7) 中 B_δ 的表达式并应用 Cauchy-Schwarz 不等式, 即得所需要结果 (4.13). $\square$

引理 4.3 (非负性) 对于任意 $(m_{1\delta}, m_{2\delta}) \in X$, 有

$$\begin{aligned} B_\delta[m_{1\delta}, m_{2\delta}; m_{1\delta}, m_{2\delta}] &= \sum_{i=1}^2 \frac{\lambda_i}{2\delta^2} \int_{\mathcal{M}_i} \int_{\mathcal{M}_i} (m_{i\delta}(x) - m_{i\delta}(y))^2 R_\delta(x, y) d\mu_x d\mu_y \\ &\quad + \delta C_R \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int_{\Gamma} \left(\nabla_{\Gamma}^y \int_{\mathcal{M}_i} \hat{m}_{i\delta}(z) \zeta_{i\delta}(z, y) d\mu_z \right)^2 d\tau_y \\ &\quad + \int_{\Gamma} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) \beta_\delta(y)}{\lambda_1 \lambda_2} (T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta})(y))^2 d\tau_y. \end{aligned} \quad (4.14)$$

证明 根据 (2.9) 中 $\mathcal{L}_{i\delta}$ 的定义, 有

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{M}_i} m_{i\delta}(x) \mathcal{L}_{1\delta} m_{1\delta}(x) d\mu_x \\ &= \frac{1}{\delta^2} \int_{\mathcal{M}_i} \int_{\mathcal{M}_i} m_{i\delta}(x) (m_{i\delta}(x) - m_{i\delta}(y)) R_\delta(x, y) d\mu_x d\mu_y \\ &\quad - \delta C_R \int_{\Gamma} \left(\int_{\mathcal{M}_i} m_{i\delta}(x) \zeta_{i\delta}(x, y) d\mu_x \right) (\Delta_{\Gamma}^y \hat{m}_{i\delta}(y)) d\tau_y \\ &= \frac{1}{2\delta^2} \int_{\mathcal{M}_i} \int_{\mathcal{M}_i} (m_{i\delta}(x) - m_{i\delta}(y))^2 R_\delta(x, y) d\mu_x d\mu_y + \delta C_R \int_{\Gamma} (\nabla_{\Gamma}^y \hat{m}_{i\delta}(y))^2 d\tau_y. \end{aligned} \quad (4.15)$$

此外, 由 (2.12) 中 $\mathcal{G}_{i\delta}$ 的定义及其伴随算子 $\mathcal{D}_{i\delta}$ 的定义 (2.16) 可得

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{M}_1} m_{1\delta}(x) \mathcal{G}_{1\delta}(\gamma_\delta T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta}))(x) d\mu_x - \int_{\mathcal{M}_2} m_{2\delta}(x) \mathcal{G}_{2\delta}(T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta}))(x) d\mu_x \\ &= \int_{\Gamma} (\mathcal{D}_{1\delta} m_{1\delta}(y)) \gamma_\delta(y) T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta})(y) d\tau_y - \int_{\Gamma} \mathcal{D}_{2\delta} m_{2\delta}(y) T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta})(y) d\tau_y \\ &= \int_{\Gamma} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) \beta_\delta(y)}{\lambda_1 \lambda_2} (T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta})(y))^2 d\tau_y. \end{aligned} \quad (4.16)$$

将 (4.15) 和 (4.16) 代入双线性型 (4.7) 即得所需要的结果. $\square$

引理 4.4 (强制性) 双线性形式 B_δ 是强制的, 满足

$$B_\delta[m_{1\delta}, m_{2\delta}; m_{1\delta}, m_{2\delta}] \geq C(\|m_{1\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_1)}^2 + \|m_{2\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_2)}^2) \quad (4.17)$$

对所有 $(m_{1\delta}, m_{2\delta}) \in X$ 及某个常数 $C > 0$ 成立.

证明 对于 $i = 1, 2$, 定义加权函数

$$\bar{m}_{i\delta}(x) = \frac{1}{\bar{\omega}_{i\delta}(x)} \int_{\mathcal{M}_i} m_{i\delta}(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_y, \quad \bar{\omega}_{i\delta}(x) = \int_{\mathcal{M}_i} \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_y, \quad x \in \mathcal{M}_i. \quad (4.18)$$

注意权函数 $\bar{\omega}_{i\delta}$ 是一致有界的, 在 $\mathcal{M}_i$ 上满足 $C_3 < \bar{\omega}_{i\delta} < C_4$, 其中 $0 < C_3 < C_4$ 为常数.

根据引理 4.3 中 B_δ 的表达式, 强制性估计 (4.17) 直接由以下五个不等式推导出:

(1)

$$\frac{1}{2\delta^2} \sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{M}_i} \int_{\mathcal{M}_i} (m_{i\delta}(x) - m_{i\delta}(y))^2 R_\delta(x, y) d\mu_x d\mu_y \geq C \sum_{i=1}^2 \|\nabla \bar{m}_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)}^2, \quad (4.19)$$

(2)

$$\int_{\Gamma} \beta_{\delta}(y) (T_{\delta}(m_{1\delta}, m_{2\delta})(y))^2 d\tau_y \geq C \left[\|\bar{m}_{1\delta} - \bar{m}_{2\delta}\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \delta \sum_{i=1}^2 \|m_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)}^2 \right], \quad (4.20)$$

(3)

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{M}_i} \int_{\mathcal{M}_i} (m_{i\delta}(x) - m_{i\delta}(y))^2 R_{\delta}(x, y) d\mu_x d\mu_y \geq C \left(\sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{M}_i} \bar{m}_{i\delta}(x) d\mu_x \right)^2, \quad (4.21)$$

(4)

$$\|\bar{m}_{1\delta} - \bar{m}_{2\delta}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \sum_{i=1}^2 \|\nabla \bar{m}_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)}^2 + \left(\sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{M}_i} \bar{m}_{i\delta}(x) d\mu_x \right)^2 \geq C \sum_{i=1}^2 \|\bar{m}_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)}^2, \quad (4.22)$$

(5)

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{M}_i} \int_{\mathcal{M}_i} (m_{i\delta}(x) - m_{i\delta}(y))^2 R_{\delta}(x, y) d\mu_x d\mu_y \geq C \sum_{i=1}^2 \|\bar{m}_{i\delta} - m_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)}^2. \quad (4.23)$$

这是因为将前四个不等式相加可得

$$B_{\delta}[m_{1\delta}, m_{2\delta}; m_{1\delta}, m_{2\delta}] \geq C \sum_{i=1}^2 (\|\bar{m}_{i\delta}\|_{H^1(\mathcal{M}_i)}^2 - \delta \|m_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)}^2), \quad (4.24)$$

然后将第五个不等式应用于 (4.24) 的右边, 得到

$$B_{\delta}[m_{1\delta}, m_{2\delta}; m_{1\delta}, m_{2\delta}] \geq C \sum_{i=1}^2 (\|\bar{m}_{i\delta}\|_{H^1(\mathcal{M}_i)}^2 + \|m_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)}^2). \quad (4.25)$$

这足以证明引理 4.4.

由于不等式 (1) 和 (3)–(5) 对应于文献 [34] 中已建立的结果 (具体为引理 5.3 中的方程 (5.24) 和 (5.26)–(5.28)), 因此只需要证明不等式 (2), 即 (4.20).

回顾 (2.16)–(2.18), (4.3) 和 (4.18) 中 $D_{i\delta}, \gamma_{\delta}, \beta_{\delta}, T_{\delta}$ 和 $\omega_{i\delta}$ 的定义. 在所述假设 $C_1\delta < \beta_{\delta}(y) < C_2\delta$ 和 $C_3 < \omega_{2\delta}(y) < C_4$ (其中 C_1 – C_4 为正常数) 下, 以下估计成立:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \beta_{\delta}(y) (T_{\delta}(m_{1\delta}, m_{2\delta})(y))^2 d\tau_y &\geq \frac{C}{\delta} \int_{\Gamma} (\gamma_{\delta}(y) \mathcal{D}_{1\delta} m_{1\delta}(y) - \mathcal{D}_{2\delta} m_{2\delta}(y))^2 d\tau_y \\ &\geq C \int_{\Gamma} \left(\frac{\gamma_{\delta}(y)}{2\bar{\omega}_{2\delta}(y)} \mathcal{D}_{1\delta} m_{1\delta}(y) - \frac{1}{2\bar{\omega}_{2\delta}(y)} \mathcal{D}_{2\delta} m_{2\delta}(y) \right)^2 d\tau_y. \end{aligned} \quad (4.26)$$

此外, 推导出以下界:

$$\begin{aligned} \left| \bar{m}_{2\delta}(y) - \frac{1}{2\bar{\omega}_{2\delta}(y)} \mathcal{D}_{2\delta} m_{2\delta}(y) \right| &= \left| \frac{1}{2\bar{\omega}_{2\delta}(y)} \int_{\mathcal{M}_2} m_{2\delta}(x) \kappa(y)(x-y) \cdot n(y) \bar{R}_{\delta}(x, y) d\mu_x \right| \\ &\leq C\delta \int_{\mathcal{M}_2} |m_{2\delta}(x)| \bar{R}_{\delta}(x, y) d\mu_x. \end{aligned} \quad (4.27)$$

类似地, 有

$$\left| \bar{m}_{1\delta}(y) - \frac{\gamma_{\delta}(y)}{2\bar{\omega}_{2\delta}(y)} \mathcal{D}_{1\delta} m_{1\delta}(y) \right| \leq \left| \left(\frac{\gamma_{\delta}(y)}{2\bar{\omega}_{2\delta}(y)} - \frac{1}{2\bar{\omega}_{1\delta}(y)} \right) \mathcal{D}_{1\delta} m_{1\delta}(y) \right| + \left| \bar{m}_{1\delta}(y) - \frac{1}{2\bar{\omega}_{1\delta}(y)} \mathcal{D}_{1\delta} m_{1\delta}(y) \right|$$

$$\leq C\delta \int_{\mathcal{M}_1} |m_{1\delta}(x)| \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x. \quad (4.28)$$

在得到 (4.28) 时, 我们使用了引理 3.1, 该引理指出, 对于所有 $y \in \Gamma$ 有 $\bar{\omega}_{1\delta}(y) - \bar{\omega}_{2\delta}(y) = \mathcal{O}(\delta)$. 结合 (4.27) 和 (4.28) 可得

$$\begin{aligned} & \left| (\bar{m}_{1\delta}(y) - \bar{m}_{2\delta}(y)) - \left(\frac{\gamma_\delta(y)}{2\bar{\omega}_{2\delta}(y)} \mathcal{D}_{1\delta} m_{1\delta}(y) - \frac{1}{2\bar{\omega}_{2\delta}(y)} \mathcal{D}_{2\delta} m_{2\delta}(y) \right) \right| \\ & \leq C\delta \sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{M}_i} |m_{i\delta}(x)| \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x, \end{aligned} \quad (4.29)$$

这意味着

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\bar{m}_{1\delta} - \bar{m}_{2\delta}\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \left\| \frac{\gamma_\delta}{2\bar{\omega}_{2\delta}} \mathcal{D}_{1\delta} m_{1\delta} - \frac{1}{2\bar{\omega}_{2\delta}} \mathcal{D}_{2\delta} m_{2\delta} \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ & \leq C\delta^2 \left\| \sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{M}_i} |m_{i\delta}(x)| \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x \right\|_{L_y^2(\Gamma)}^2. \end{aligned} \quad (4.30)$$

另外, 采用与推导 (3.16) 类似的论证可得

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{M}_i} |m_{i\delta}(x)| \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x \right\|_{L_y^2(\Gamma)}^2 & \leq \sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{M}_i} m_{i\delta}^2(x) \left(\int_{\Gamma} \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_y \right) d\mu_x \\ & \leq \frac{C}{\delta} \sum_{i=1}^2 \|m_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)}^2. \end{aligned} \quad (4.31)$$

现在结合 (4.30) 和 (4.31) 得到

$$\left\| \frac{\gamma_\delta}{2\bar{\omega}_{2\delta}} \mathcal{D}_{1\delta} m_{1\delta} - \frac{1}{2\bar{\omega}_{2\delta}} \mathcal{D}_{2\delta} m_{2\delta} \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 \geq C \left(\|\bar{m}_{1\delta} - \bar{m}_{2\delta}\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \delta \sum_{i=1}^2 \|m_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)}^2 \right). \quad (4.32)$$

最后, 将不等式 (4.26) 和 (4.32) 相加即得所需结果 (4.20). $\square$

4.3 弱解的存在性

引理 4.5 (存在性与估计) 弱形式 (4.6) 存在唯一的弱解 $(u_{1\delta}, u_{2\delta}) \in X$, 且满足估计

$$\sum_{i=1}^2 \|m_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)} \leq C \left(\sum_{i=1}^2 \|p_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|q_\delta\|_{L^2(\Gamma)} \right). \quad (4.33)$$

证明 首先证明唯一解的存在性. 根据 (4.8) 中 F_δ 的定义, 应用 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得

$$\begin{aligned} & F_\delta(p_{1\delta}, p_{2\delta}, q_\delta, s_{1\delta}, s_{2\delta}) \\ & \leq C \left(\sum_{i=1}^2 \|s_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)} \right) \left(\sum_{i=1}^2 \|p_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)} + \left\| \mathcal{G}_{1\delta} \left(\gamma_\delta \frac{q_\delta}{\beta_\delta} \right) \right\|_{L^2(\mathcal{M}_1)} + \left\| \mathcal{G}_{2\delta} \left(\frac{q_\delta}{\beta_\delta} \right) \right\|_{L^2(\mathcal{M}_2)} \right). \end{aligned} \quad (4.34)$$

这确认了 F_δ 是 X 上的有界线性泛函. 由于双线性形式 B_δ 是有界的 (引理 4.2) 且是强制的 (引理 4.4), Lax-Milgram 定理保证了 (4.6) 存在唯一解 $(m_{1\delta}, m_{2\delta}) \in X$.

现在证明稳定性估计 (4.33). 由于 $(m_{1\delta}, m_{2\delta})$ 是解, 它满足

$$B_\delta[m_{1\delta}, m_{2\delta}; m_{1\delta}, m_{2\delta}] = F_\delta(p_{1\delta}, p_{2\delta}, q_\delta, m_{1\delta}, m_{2\delta}). \quad (4.35)$$

根据 (4.8) 中 F_δ 的定义和 (4.3) 中的算子 T_δ , 我们发现

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{M}_1} \mathcal{G}_{1\delta} \left(\gamma_\delta \frac{q_\delta}{\beta_\delta} \right) (x) m_{1\delta}(x) d\mu_x + \int_{\mathcal{M}_2} \mathcal{G}_{2\delta} \left(\frac{q_\delta}{\beta_\delta} \right) (x) m_{2\delta}(x) d\mu_x \\ & = - \int_{\Gamma} \gamma_\delta(y) \frac{q_\delta(y)}{\beta_\delta(y)} D_{1\delta} m_{1\delta}(y) d\mu_y + \int_{\Gamma} \frac{q_\delta(y)}{\beta_\delta(y)} D_{2\delta} m_{2\delta}(y) d\mu_y \\ & = \int_{\Gamma} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) q_\delta(y)}{\lambda_1 \lambda_2} T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta})(y) d\tau_y, \end{aligned} \quad (4.36)$$

这导致 (4.35) 右边的表达式如下:

$$\begin{aligned} & F_\delta(p_{1\delta}, p_{2\delta}, q_\delta, m_{1\delta}, m_{2\delta}) \\ & = \int_{\mathcal{M}_1} p_{1\delta}(x) m_{1\delta}(x) d\mu_x + \int_{\mathcal{M}_2} p_{2\delta}(x) m_{2\delta}(x) d\mu_x + \int_{\Gamma} q_\delta(y) T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta})(y) d\tau_y. \end{aligned} \quad (4.37)$$

反之, B_δ 的强制性 (引理 4.3 和 4.4) 提供了下界

$$B_\delta[m_{1\delta}, m_{2\delta}; m_{1\delta}, m_{2\delta}] \geq C(\delta \|T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta})\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|m_{1\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_1)}^2 + \|m_{2\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_2)}^2). \quad (4.38)$$

将估计 (4.37) 和 (4.38) 代入等式 (4.35) 并简化, 得到

$$\delta^{\frac{1}{2}} \|T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta})\|_{L^2(\Gamma)} + \sum_{i=1}^2 \|m_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)} \leq C \left(\delta^{-\frac{1}{2}} \|q_\delta\|_{L^2(\Gamma)} + \sum_{i=1}^2 \|p_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)} \right). \quad (4.39)$$

这就是所需要的结果 (4.33). $\square$

由于弱形式 (4.6) 等价于系统 (4.1), 引理 4.5 表明 (4.1) 同样存在唯一解三元组 $(m_{1\delta}, m_{2\delta}, n_\delta) \in L^2(\mathcal{M}_1) \times L^2(\mathcal{M}_2) \times L^2(\Gamma)$, 其中 $(m_{1\delta}, m_{2\delta})$ 是 (4.6) 的唯一解, 而 n_δ 随后通过 (4.4) 定义.

4.4 更高的正则性

现在研究源函数正则性的提升是否会导致解具有相应更高的正则性.

引理 4.6 (正则性提升) 设 $(m_{1\delta}, m_{2\delta}, n_\delta)$ 是 (4.1) 的解. 假设源项满足 $p_{i\delta} \in H^1(\mathcal{M}_i)$ ($i = 1, 2$), 且有以下估计: 对某个 $k \in \mathbb{N}^+$ 和 $r_{i\delta} \in H^m(\mathcal{M}_i)$, 有

$$(p_{i\delta}, s_{i\delta}) \leq C \|r_{i\delta}\|_{H^k(\mathcal{M}_i)} (\|s_{i\delta}\|_{H^1(\mathcal{M}_i)} + \|\bar{s}_{i\delta}\|_{H^1(\mathcal{M}_i)} + \|\bar{\bar{s}}_{i\delta}\|_{H^1(\mathcal{M}_i)}), \quad \forall s_{i\delta} \in H^1(\mathcal{M}_i) \quad (4.40)$$

成立, 其中

$$\bar{s}_{i\delta}(x) = \frac{1}{\bar{\omega}_{i\delta}(x)} \int_{\mathcal{M}} s_{i\delta}(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_y, \quad \bar{\omega}_{i\delta}(x) = \int_{\mathcal{M}} \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_y, \quad (4.41)$$

$$\bar{\bar{s}}_{i\delta}(x) = \frac{1}{\bar{\bar{\omega}}_{i\delta}(x)} \int_{\mathcal{M}} s_{i\delta}(y) \bar{\bar{R}}_\delta(x, y) d\mu_y, \quad \bar{\bar{\omega}}_{i\delta}(x) = \int_{\mathcal{M}_i} \bar{\bar{R}}_\delta(x, y) d\mu_y. \quad (4.42)$$

则 $m_{i\delta} \in H^1(\mathcal{M}_i)$, $i = 1, 2$, 并且以下估计成立:

$$\sum_{i=1}^2 \|m_{i\delta}\|_{H^1(\mathcal{M}_i)} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|n_\delta\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \sum_{i=1}^2 (\|r_{i\delta}\|_{H^k(\mathcal{M}_i)} + \delta^2 \|\nabla_{\mathcal{M}_i} p_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|q_\delta\|_{L^2(\Gamma)}). \quad (4.43)$$

证明 我们从系统 (4.1) 的第一个方程开始:

$$\lambda_1 \mathcal{L}_{1\delta} m_{1\delta}(x) - \mathcal{G}_{1\delta}(\gamma_\delta n_\delta)(x) = p_{1\delta}(x), \quad x \in \mathcal{M}_1. \quad (4.44)$$

为了估计 $\nabla_{\mathcal{M}_1} m_{1\delta}$, 对此方程进行微分. 除了 (4.18) 中的加权函数 $\tilde{m}_{i\delta}$, 我们为 $x \in \mathcal{M}_i$ 定义另外两个加权平均:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{i\delta}(x) &= \frac{1}{\tilde{\omega}_{i\delta}(x)} \int_{\mathcal{M}_i} m_{i\delta}(y) R_\delta(x, y) d\mu_y, \quad \tilde{\omega}_{i\delta}(x) = \int_{\mathcal{M}_i} R_\delta(x, y) d\mu_y, \\ \bar{\bar{m}}_{i\delta}(x) &= \frac{1}{\bar{\bar{\omega}}_{i\delta}(x)} \int_{\mathcal{M}} m_{i\delta}(y) \bar{\bar{R}}_\delta(x, y) d\mu_x, \quad \bar{\bar{\omega}}_{i\delta}(x) = \int_{\mathcal{M}_i} \bar{\bar{R}}_\delta(x, y) d\mu_x. \end{aligned} \quad (4.45)$$

回顾 (2.9) 中 $L_{1\delta}$ 的定义:

$$\mathcal{L}_{1\delta} m_{1\delta}(x) = \frac{1}{\delta^2} \int_{\mathcal{M}_1} (m_{1\delta}(x) - m_{1\delta}(y)) R_\delta(x, y) d\mu_y - \int_{\Gamma} (\Delta_\Gamma^y \hat{m}_{1\delta}(y)) \zeta_{1\delta}(x, y) d\tau_y, \quad (4.46)$$

将 (4.44) 乘以 δ^2 并对 x 求导, 得到

$$\begin{aligned} &\nabla_{\mathcal{M}_1} (\tilde{\omega}_{1\delta}(x) (m_{1\delta}(x) - \tilde{m}_{1\delta}(x))) - \delta^2 \nabla_{\mathcal{M}_1} \mathcal{G}_{1\delta}(\gamma_\delta n_\delta)(x) - \delta^2 \nabla_{\mathcal{M}_1} p_{1\delta}(x) \\ &\quad - \delta^3 C_R \int_{\Gamma} (\nabla_\Gamma^y \hat{m}_{1\delta}(y)) (\nabla_\Gamma^y \nabla_{\mathcal{M}_1}^x \zeta_{1\delta}(x, y)) d\tau_y \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

由 (4.45) 中 $\tilde{\omega}_{1\delta}$ 的定义可知, 对所有 $x \in \mathcal{M}_1$, 存在正常数 C, C_5 和 C_6 使得 $|\nabla_{\mathcal{M}_1} \tilde{\omega}_{1\delta}(x)| \leq C\delta^{-1}$ 且 $C_5 \leq \tilde{\omega}_{1\delta}(x) \leq C_6$. 将 (4.47) 中的 $\nabla_{\mathcal{M}_1} m_{1\delta}$ 分离出来, 可得如下估计:

$$\begin{aligned} &\|\nabla_{\mathcal{M}_1} m_{1\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_1)} \\ &\leq C \left(\|\nabla_{\mathcal{M}_1} \tilde{m}_{1\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_1)} + \frac{1}{\delta} \|m_{1\delta} - \tilde{m}_{1\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_1)} + \delta^2 \|\nabla_{\mathcal{M}_1} \mathcal{G}_{1\delta}(\gamma_\delta n_\delta)\|_{L^2(\mathcal{M}_1)} \right. \\ &\quad \left. + \delta^2 \|\nabla_{\mathcal{M}_1} p_{1\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_1)} + \delta^3 \left\{ \int_{\mathcal{M}_1} \left[\int_{\Gamma} (\nabla_\Gamma^y \hat{m}_{1\delta}(y)) (\nabla_\Gamma^y \nabla_{\mathcal{M}_1}^x \zeta_{1\delta}(x, y)) d\tau_y \right]^2 d\mu_x \right\}^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (4.48)$$

现分析 (4.48) 右端各项. 对于前两项, 采用与推导 (4.19) 和 (4.23) 时类似的论证, 可得如下界:

$$\begin{aligned} &\|\nabla_{\mathcal{M}_1} \tilde{m}_{1\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_1)} + \frac{1}{\delta} \|m_{1\delta} - \tilde{m}_{1\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_1)} \\ &\leq C \left(\frac{1}{2\delta^2} \sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{M}_i} \int_{\mathcal{M}_i} (m_{i\delta}(x) - m_{i\delta}(y))^2 R_\delta(x, y) d\mu_x d\mu_y \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

对于第三项, 使用 (2.12) 中 $\mathcal{G}_{1\delta}$ 的定义来计算:

$$|\nabla_{\mathcal{M}_1} \mathcal{G}_{1\delta}(\gamma_\delta n_\delta)(x)| \leq C \int_{\Gamma} |n_\delta(y)| (\bar{R}_\delta(x, y) + \delta^{-1} R_\delta(x, y)) d\tau_y. \quad (4.50)$$

随后, 采用与 (3.16) 类似的论证表明

$$\|\nabla_{\mathcal{M}_1} \mathcal{G}_{1\delta}(\gamma_\delta n_\delta)\|_{L^2(\mathcal{M}_1)} \leq C\delta^{-\frac{3}{2}} \|n_\delta\|_{L^2(\Gamma)}. \quad (4.51)$$

通过应用 (4.4) 中 n_δ 的分解, 得到

$$\delta^2 \|\nabla_{\mathcal{M}_1} \mathcal{G}_{1\delta}(\gamma_\delta n_\delta)\|_{L^2(\mathcal{M}_1)} \leq C\delta^{\frac{1}{2}} \|n_\delta\|_{L^2(\Gamma)} \leq C(\delta^{\frac{1}{2}} \|T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta})\|_{L^2(\Gamma)} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|q_\delta\|_{L^2(\Gamma)}). \quad (4.52)$$

最后, 估计 (4.48) 中的末项, 记作 $P_\delta(\hat{m}_{1\delta})$. 遵循与文献 [33, (A.7)] 类似的计算, 可得

$$|\nabla_\Gamma^y \nabla_{\mathcal{M}_1}^x \zeta_{1\delta}(x, y)| \leq \frac{C}{\delta^2} (\bar{R}_\delta(x, y) + R_\delta(x, y) + \underline{R}_\delta(x, y)). \quad (4.53)$$

这里, 第四个核函数 $\underline{R}_\delta$ 定义为 $\underline{R}_\delta(x, y) = C_\delta \underline{R}(\frac{|x-y|^2}{4\delta^2})$, 其中 $\underline{R}(r) = \frac{dR(r)}{dr}$. 应用与 (3.16) 所用工具类似的工具, 得到

$$P_\delta(\hat{m}_{1\delta}) \leq C\delta^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Gamma (\nabla_\Gamma^y \hat{m}_{1\delta}(y))^2 d\tau_y \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.54)$$

参照引理 4.3 中 $B_\delta[m_{1\delta}, m_{2\delta}; m_{1\delta}, m_{2\delta}]$ 的表达式, 将估计式 (4.49), (4.52) 和 (4.54) 代入 (4.48), 可得

$$\|\nabla_{\mathcal{M}_1} m_{1\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_1)} \leq C((B_\delta[m_{1\delta}, m_{2\delta}; m_{1\delta}, m_{2\delta}])^{\frac{1}{2}} + \delta^2 \|\nabla_{\mathcal{M}_1} p_{1\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_1)} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|q_\delta\|_{L^2(\Gamma)}). \quad (4.55)$$

在 $\mathcal{M}_2$ 上对 $\|\nabla_{\mathcal{M}_2} m_{2\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_2)}$ 进行类似论证, 得到相应估计:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \|\nabla_{\mathcal{M}_i} m_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)} \\ & \leq C \left((B_\delta[m_{1\delta}, m_{2\delta}; m_{1\delta}, m_{2\delta}])^{\frac{1}{2}} + \delta^2 \sum_{i=1}^2 \|\nabla_{\mathcal{M}_i} p_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|q_\delta\|_{L^2(\Gamma)} \right). \end{aligned} \quad (4.56)$$

另外, 从文献 [34, 引理 5.2 和推论 5.1] 的证明中可以发现, $\tilde{m}_{i\delta}$ 和 $\bar{\bar{m}}_{i\delta}$ 与 (4.25) 中的 $\bar{m}_{i\delta}$ 具有相同的界, 即

$$(B_\delta[m_{1\delta}, m_{2\delta}; m_{1\delta}, m_{2\delta}])^{\frac{1}{2}} \geq C(\|\tilde{m}_{i\delta}\|_{H^1(\mathcal{M}_i)} + \|\bar{m}_{i\delta}\|_{H^1(\mathcal{M}_i)} + \|\bar{\bar{m}}_{i\delta}\|_{H^1(\mathcal{M}_i)}). \quad (4.57)$$

由于 $(m_{1\delta}, m_{2\delta})$ 是系统 (4.1) 的解, 因此它也满足双线性型 (4.35). 将正则性假设 (4.40) 应用于 F_δ 的表达式, 即从 (4.40) 到 (4.37), 可推导出

$$\begin{aligned} B_\delta[m_{1\delta}, m_{2\delta}; m_{1\delta}, m_{2\delta}] &= F_\delta(p_{1\delta}, p_{2\delta}, q_\delta, m_{1\delta}, m_{2\delta}) \\ &= \int_\Gamma q_\delta(y) T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta})(y) d\tau_y + \sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{M}_i} p_{i\delta}(x) m_{i\delta}(x) d\mu_x \\ &\leq C \int_\Gamma (\delta^{-\frac{1}{2}} q_\delta(y)) (\delta^{\frac{1}{2}} T_\delta(m_{1\delta}, m_{2\delta})(y)) d\tau_y \\ &\quad + C \sum_{i=1}^2 \|r_{i\delta}\|_{H^k(\mathcal{M}_i)} (\|m_{i\delta}\|_{H^1(\mathcal{M}_i)} + \|\bar{m}_{i\delta}\|_{H^1(\mathcal{M}_i)} + \|\bar{\bar{m}}_{i\delta}\|_{H^1(\mathcal{M}_i)}) \\ &\leq C\delta^{-1} \|q_\delta\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{4} B_\delta[m_{1\delta}, m_{2\delta}; m_{1\delta}, m_{2\delta}] \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \left(C \|r_{i\delta}\|_{H^k(\mathcal{M}_i)}^2 + \frac{1}{4} B_\delta[m_{1\delta}, m_{2\delta}; m_{1\delta}, m_{2\delta}] \right), \end{aligned} \quad (4.58)$$

其中最后一个不等式来自 (4.57). 简化 (4.58) 得到

$$(B_\delta[m_{1\delta}, m_{2\delta}; m_{1\delta}, m_{2\delta}])^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\delta^{-\frac{1}{2}} \|q_\delta\|_{L^2(\Gamma)} + \sum_{i=1}^2 \|r_{i\delta}\|_{H^k(\mathcal{M}_i)} \right). \quad (4.59)$$

将此估计代入 (4.56) 得到

$$\sum_{i=1}^2 \|\nabla_{\mathcal{M}_i} m_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)} \leq C \sum_{i=1}^2 (\|r_{i\delta}\|_{H^k(\mathcal{M}_i)} + \delta^2 \|\nabla_{\mathcal{M}_i} p_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|q_\delta\|_{L^2(\Gamma)}). \quad (4.60)$$

最后, 将 (4.60) 与 L^2 估计 (4.39) 以及 (4.4) 中 n_δ 的定义相结合, 得到了所需要的高正则性界 (4.43). $\square$

5 主定理的证明

在前面的章节中, 已在第 3 节建立了截断误差的控制, 并在第 4 节分析了解对源项的依赖性. 基于此, 本节证明非局部模型 (2.22) 的主要性质, 即给出定理 2.1 的证明.

定理 2.1 的证明 首先证明非局部模型的适定性. 回顾 (2.13), (2.14) 和 (2.21) 中给出的 (2.22) 源项定义. 给定 $(f_{1\delta}, f_{2\delta}, g_\delta) \in L^2(\mathcal{M}_1) \times L^2(\mathcal{M}_2) \times L^2(\Gamma)$ 且满足相容性条件 $\sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{M}_i} f_{i\delta}(x) d\mu_x = 0$, 由引理 4.1 可将 (2.22) 化为如下弱形式: 求 $(u_{1\delta}, u_{2\delta}) \in X$ 使得

$$B_\delta[u_{1\delta}, u_{2\delta}; s_{1\delta}, s_{2\delta}] = F_\delta(f_{1\delta}, f_{2\delta}, g_\delta, s_{1\delta}, s_{2\delta}), \quad \forall (s_{1\delta}, s_{2\delta}) \in X. \quad (5.1)$$

根据引理 4.5, 变分问题 (5.1) 存在唯一解 $(u_{1\delta}, u_{2\delta}) \in X$. 现在讨论此解的正则性. 使用与 (3.16) 类似的论证, 计算

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \|f_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)} \\ & \leq C \sum_{i=1}^2 \left(\left\| \int_{\mathcal{M}_i} |f_i(y)| \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_y \right\|_{L_x^2(\mathcal{M}_i)} + \delta \left\| \int_{\Gamma} |f_i(y)| \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_y \right\|_{L_x^2(\mathcal{M}_i)} \right) \\ & \leq C \left(\sum_{i=1}^2 \|f_i\|_{L^2(\mathcal{M}_i)} + \delta^{\frac{1}{2}} \|f_i\|_{L^2(\Gamma)} \right) \\ & \leq C \sum_{i=1}^2 \|f_i\|_{H^1(\mathcal{M}_i)}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \|\nabla_{\mathcal{M}_i} f_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)} \\ & \leq C \sum_{i=1}^2 \left(\delta^{-1} \left\| \int_{\mathcal{M}_i} |f_i(y)| R_\delta(x, y) d\mu_y \right\|_{L_x^2(\mathcal{M}_i)} + \left\| \int_{\Gamma} |f_i(y)| \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_y \right\|_{L_x^2(\mathcal{M}_i)} \right. \\ & \quad \left. + \left\| \int_{\Gamma} |f_i(y)| R_\delta(x, y) d\tau_y \right\|_{L_x^2(\mathcal{M}_i)} \right) \\ & \leq C \left(\sum_{i=1}^2 \delta^{-1} \|f_i\|_{L^2(\mathcal{M}_i)} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|f_i\|_{L^2(\Gamma)} \right) \end{aligned}$$

$$\leq C\delta^{-1} \sum_{i=1}^2 \|f_i\|_{H^1(\mathcal{M}_i)}. \quad (5.3)$$

此外, 由 (2.21) 有

$$\|g_\delta\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\delta^2 \sum_{i=1}^2 \|f_i\|_{H^1(\mathcal{M}_i)}. \quad (5.4)$$

将引理 4.6 应用于这些估计, 得到所需要的正则性:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \|u_{i\delta}\|_{H^1(\mathcal{M}_i)} + \delta^{\frac{1}{2}} \|v_\delta\|_{L^2(\Gamma)} &\leq C \sum_{i=1}^2 (\|f_i\|_{H^1(\mathcal{M}_i)} + \delta^2 \|\nabla_{\mathcal{M}_i} f_{i\delta}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|g_\delta\|_{L^2(\Gamma)}) \\ &\leq C \sum_{i=1}^2 \|f_i\|_{H^1(\mathcal{M}_i)}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

至此完成了定理 2.1 第一部分的证明.

对于定理 2.1 的第二部分, 定义误差函数

$$\begin{cases} e_{1\delta} = u - u_{1\delta} & \text{在 } \mathcal{M}_1 \text{ 内,} \\ e_{2\delta} = u - u_{2\delta} & \text{在 } \mathcal{M}_2 \text{ 内,} \\ e_{n\delta} = \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}^+ - v_{1\delta} & \text{在 } \Gamma \text{ 内.} \end{cases} \quad (5.6)$$

从局部系统 (3.1) 减去非局部模型 (2.22) 得到误差方程

$$\begin{cases} \lambda_1 \mathcal{L}_{1\delta} e_{1\delta}(x) - \mathcal{G}_{1\delta}(\gamma_\delta e_{n\delta})(x) = r_{\mathcal{M}_1}(x), & x \in \mathcal{M}_1, \\ \lambda_2 \mathcal{L}_{2\delta} e_{2\delta}(x) + \mathcal{G}_{2\delta} e_{n\delta}(x) = r_{\mathcal{M}_2}(x), & x \in \mathcal{M}_2, \\ \gamma_\delta(x) \mathcal{D}_{1\delta} e_{1\delta}(x) - \mathcal{D}_{2\delta} e_{2\delta}(x) + \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) \beta_\delta(x) e_{n\delta}(x) = r_\Gamma(x), & x \in \Gamma, \\ \int_{\mathcal{M}_1} e_{1\delta}(x) d\mu_x + \int_{\mathcal{M}_2} e_{2\delta}(x) d\mu_x = 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

经过与 (4.11) 类似的计算, 可以发现 (5.7) 中的源项满足必要的兼容性条件:

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{M}_i} r_{\mathcal{M}_i}(x) d\mu_x = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int_{\mathcal{M}_i} \mathcal{L}_{i\delta} e_{i\delta}(x) d\mu_x - \int_\Gamma (\gamma_\delta(y) \mathcal{D}_{1\delta} 1(y) - \mathcal{D}_{2\delta} 1(y)) e_{n\delta}(y) d\tau_y = 0. \quad (5.8)$$

此外, 定理 3.1 为这些源项提供了以下估计:

$$\|\nabla_{\mathcal{M}_i} r_{\mathcal{M}_i}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)} \leq C\delta^{\frac{1}{2}} \|f_i\|_{H^3(\mathcal{M}_i)}, \quad \|r_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\delta^{\frac{5}{2}} \sum_{i=1}^2 \|f_i\|_{H^3(\mathcal{M}_i)}, \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{M}_i} r_{\mathcal{M}_i}(x) h_i(x) dx \\ &\leq C\delta^2 \|f_i\|_{H^3(\mathcal{M}_i)} (\|h_i\|_{H^1(\mathcal{M}_i)} + \|\bar{h}_i\|_{H^1(\mathcal{M}_i)} + \|\bar{\bar{h}}_i\|_{H^1(\mathcal{M}_i)}), \quad \forall h_i \in H^1(\mathcal{M}_i), \end{aligned} \quad (5.10)$$

将引理 4.6 应用于误差方程 (5.7), 得到

$$\sum_{i=1}^2 \|e_{i\delta}\|_{H^1(\mathcal{M}_i)} + \delta^{\frac{1}{2}} \|e_{n\delta}\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \sum_{i=1}^2 (\delta^2 \|f_i\|_{H^2(\mathcal{M}_i)} + \delta^2 \|\nabla_{\mathcal{M}_i} r_{\mathcal{M}_i}\|_{L^2(\mathcal{M}_i)} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|r_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)})$$

$$\leq C\delta^2 \sum_{i=1}^2 \|f_i\|_{H^3(\mathcal{M}_i)}. \quad (5.11)$$

至此完成了定理 2.1 的证明. $\square$

6 数值算例

本节通过数值实验验证非局部模型 (2.22) 收敛至对应局部模型的性能. 假设给定输入参数 δ 、核函数 $R(r)$ 、采样点集 $\mathbf{P} = \{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^{n_1}$ (采样自 $\mathcal{M}_1$)、 $\mathbf{Q} = \{\mathbf{q}_i\}_{i=1}^{n_2}$ (采样自 $\mathcal{M}_2$)、 $\mathbf{O} = \{\mathbf{o}_k\}_{k=1}^{m_0}$ (采样自 Γ), 以及每个 $\mathbf{p}_i \in \mathcal{M}_1$ 对应的体积权重 $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^{n_1}$ 、每个 $\mathbf{q}_i \in \mathcal{M}_2$ 对应的体积权重 $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i=1}^{n_2}$ 、每个 $\mathbf{o}_k \in \Gamma$ 对应的超曲面权重 $\mathcal{L} = \{L_k\}_{k=1}^{m_0}$, 同时给定 $\{n(\mathbf{o}_k)\}_{k=1}^{m_0}$ 和 $\{\kappa(\mathbf{o}_k)\}_{k=1}^{m_0}$ (分别表示 $\mathbf{o}_k$ 处 Γ 在 $\mathcal{M}_1$ 中的外向单位法向量和外蕴平均曲率).

然后, 采用最直接的方式对 (2.22) 进行离散:

$$\begin{cases} \lambda_1(\tilde{\mathcal{L}}_{1\delta}U_1)^i - (\tilde{\mathcal{G}}_{1\delta}V)^i = f_{1\delta}^i - \tilde{f}_\delta^0, & i \in [1, n_1], \\ \lambda_2(\tilde{\mathcal{L}}_{2\delta}U_2)^i + (\tilde{\mathcal{G}}_{2\delta}V)^i = f_{2\delta}^i - \tilde{f}_\delta^0, & i \in [1, n_2], \\ (\tilde{\mathcal{D}}_{1\delta}U_1)^k - (\tilde{\mathcal{D}}_{2\delta}U_2)^k + \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)\beta_\delta(\mathbf{o}_k)v_k = g_\delta^k, & k \in [1, m_0], \\ \sum_{i=1}^{n_1} u_{1\delta}^i A_i + \sum_{i=1}^{n_2} u_{2\delta}^i B_i = 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

其中左侧离散算子分别定义为

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{L}}_{1\delta}U_1)^i &= \sum_{j=1}^{n_1} \frac{1}{\delta^2} R_\delta(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)(u_{1i} - u_{1j})A_j - \delta C_R \sum_{k=1}^{m_0} \left(\Delta_\Gamma^0 \left(\sum_{j=1}^{n_1} u_{1j} \frac{\zeta_\delta(\mathbf{p}_j, \mathbf{o}_k)}{\hat{\omega}_\delta(\mathbf{o}_k)} A_j \right) \right) \frac{\zeta_{1\delta}(\mathbf{p}_i, \mathbf{o}_k)}{\hat{\omega}_{1\delta}(\mathbf{o}_k)} L_k, \\ (\tilde{\mathcal{L}}_{2\delta}U_2)^i &= \sum_{j=1}^{n_2} \frac{1}{\delta^2} R_\delta(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)(u_{2i} - u_{2j})B_j - \delta C_R \sum_{k=1}^{m_0} \left(\Delta_\Gamma^0 \left(\sum_{j=1}^{n_2} u_{2j} \frac{\zeta_\delta(\mathbf{q}_j, \mathbf{o}_k)}{\hat{\omega}_\delta(\mathbf{o}_k)} B_j \right) \right) \frac{\zeta_{1\delta}(\mathbf{q}_i, \mathbf{o}_k)}{\hat{\omega}_{1\delta}(\mathbf{o}_k)} L_k, \\ (\tilde{\mathcal{G}}_{1\delta}V)^i &= \sum_{k=1}^{m_0} (2 - \kappa(\mathbf{o}_k)(\mathbf{p}_i - \mathbf{o}_k) \cdot n(\mathbf{o}_k)) \bar{R}_\delta(\mathbf{p}_i, \mathbf{o}_k) \gamma_\delta(\mathbf{o}_k) v_k L_k, \\ (\tilde{\mathcal{G}}_{2\delta}V)^i &= \sum_{k=1}^{m_0} (2 - \kappa(\mathbf{o}_k)(\mathbf{q}_i - \mathbf{o}_k) \cdot n(\mathbf{o}_k)) \bar{R}_\delta(\mathbf{q}_i, \mathbf{o}_k) v_k L_k, \\ (\tilde{\mathcal{D}}_{1\delta}U_1)^k &= \sum_{i=1}^{n_1} (2 - \kappa(\mathbf{o}_k)(\mathbf{p}_i - \mathbf{o}_k) \cdot n(\mathbf{o}_k)) \bar{R}_\delta(\mathbf{p}_i, \mathbf{o}_k) \gamma_\delta(\mathbf{o}_k) u_{1i} A_i, \\ (\tilde{\mathcal{D}}_{2\delta}U_2)^k &= \sum_{i=1}^{n_2} (2 - \kappa(\mathbf{o}_k)(\mathbf{q}_i - \mathbf{o}_k) \cdot n(\mathbf{o}_k)) \bar{R}_\delta(\mathbf{q}_i, \mathbf{o}_k) u_{2i} B_i, \end{aligned}$$

源项函数分别定义为

$$\begin{aligned} f_{1\delta}^i &= \sum_{j=1}^{n_1} f_1(\mathbf{p}_j) \bar{R}_\delta(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) A_j + \sum_{k=1}^{m_0} f_1(\mathbf{o}_k) \zeta_\delta(\mathbf{p}_i, \mathbf{o}_k) L_k, \\ f_{2\delta}^i &= \sum_{j=1}^{n_2} f_2(\mathbf{q}_j) \bar{R}_\delta(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) B_j + \sum_{k=1}^{m_0} f_2(\mathbf{o}_k) \zeta_\delta(\mathbf{q}_i, \mathbf{o}_k) L_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}_\delta^0 &= \left(\sum_{i=1}^{n_1} f_{1\delta}^i A_i + \sum_{i=1}^{n_2} f_{2\delta}^i B_i \right) / \left(\sum_{i=1}^{n_1} A_i + \sum_{i=1}^{n_2} B_i \right), \\ g_\delta(\mathbf{o}_k) &= -2\delta^2 \left(\frac{1}{\lambda_1} f_1(\mathbf{o}_k) - \frac{1}{\lambda_2} f_2(\mathbf{o}_k) \right) \sum_{i=1}^{n_1} \bar{R}_\delta(\mathbf{p}_i, \mathbf{o}_k) A_i,\end{aligned}$$

这里 R_δ 和 $\bar{R}_\delta$ 是由 (1.5) 定义的核函数. $\Delta_\Gamma^0: \mathbb{R}^{m_0} \rightarrow \mathbb{R}^{m_0}$ 是 Δ_Γ 的离散形式, 基于 (2.1), 将其构造为 $\Delta_\Gamma^0 s_k = -\frac{2}{\delta C_R} \sum_{l=1}^{m_0} (s_k - s_l) \bar{R}_\delta(\mathbf{o}_k, \mathbf{o}_l) L_l$, $\forall S = \{s_l\}_{l=1}^{m_0} \in \mathbb{R}^{m_0}$, 从而避免直接计算模型中的常数 C_R . 此外, 上述表达式中出现的其余函数定义为

$$\begin{aligned}\zeta_{1\delta}(\mathbf{p}_r, \mathbf{o}_k) &= -(\mathbf{p}_r - \mathbf{o}_k) \cdot n(\mathbf{o}_k) \bar{R}_\delta(\mathbf{p}_r, \mathbf{o}_k), \quad \hat{\omega}_{1\delta}(\mathbf{o}_k) = \sum_{r=1}^{n_1} \zeta_{1\delta}(\mathbf{p}_r, \mathbf{o}_k) A_r, \\ \zeta_{2\delta}(\mathbf{q}_r, \mathbf{o}_k) &= -(\mathbf{q}_r - \mathbf{o}_k) \cdot n(\mathbf{o}_k) \bar{R}_\delta(\mathbf{q}_r, \mathbf{o}_k), \quad \hat{\omega}_{2\delta}(\mathbf{o}_k) = \sum_{r=1}^{n_2} \zeta_{2\delta}(\mathbf{q}_r, \mathbf{o}_k) B_r, \\ \gamma_\delta(\mathbf{o}_k) &= \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (2 - \kappa(\mathbf{o}_k)(\mathbf{q}_i - \mathbf{o}_k) \cdot n(\mathbf{o}_k)) \bar{R}_\delta(\mathbf{q}_i, \mathbf{o}_k) B_i}{\sum_{i=1}^{n_1} (2 - \kappa(\mathbf{o}_k)(\mathbf{p}_i - \mathbf{o}_k) \cdot n(\mathbf{o}_k)) \bar{R}_\delta(\mathbf{p}_i, \mathbf{o}_k) A_i}, \\ \beta_\delta(\mathbf{o}_k) &= 2\delta^2 \left(2 \sum_{l=1}^{m_0} \bar{R}_\delta(\mathbf{o}_k, \mathbf{o}_l) L_l - \kappa(\mathbf{o}_k) \sum_{i=1}^{n_1} \bar{R}_\delta(\mathbf{p}_i, \mathbf{o}_k) A_i \right),\end{aligned}$$

其中 $\bar{R}_\delta$ 是由 (2.5) 定义的核函数.

首先证明线性系统 (6.1) 解的存在唯一性. 将 (6.1) 的第一行乘以 A_i ($i = 1, \dots, n_1$), 第二行乘以 B_i ($i = 1, \dots, n_2$), 第三行乘以 L_k ($k = 1, \dots, m_0$), 然后联立所有方程, 得到 $n_1 + n_2 + m_0$ 个方程的矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\delta^2} R_A + 2A\zeta_1 \bar{R}_L \zeta_1^T A^T & 0 & -\tilde{D}_{1\delta}^T \\ 0 & \frac{1}{\delta^2} R_B + 2B\zeta_2 \bar{R}_L \zeta_2^T B^T & \tilde{D}_{2\delta}^T \\ \tilde{D}_{1\delta} & -\tilde{D}_{2\delta} & \beta_\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ G \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

其中 $A = \text{diag}\{A_1, \dots, A_{n_1}\}$, $B = \text{diag}\{B_1, \dots, B_{n_2}\}$, $L = \text{diag}\{L_1, \dots, L_{m_0}\}$, $\zeta_i = \{\frac{\zeta_{i\delta}(\mathbf{p}_r, \mathbf{q}_k)}{\hat{\omega}_\delta(\mathbf{q}_k)}\}_{n_i \times m_0}$, $\beta_\delta = (\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}) \text{diag}\{\beta_\delta(\mathbf{o}_1), \dots, \beta_\delta(\mathbf{o}_{m_0})\}$, $i = 1, 2$; R_A 和 $\bar{R}_L$ 分别由下式给出:

$$R_{Aij} = \begin{cases} R_\delta(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) A_i A_j, & i \neq j, \\ \sum_{j' \neq i} R_\delta(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{j'}) A_i A_{j'}, & i = j, \end{cases} \quad \bar{R}_{Lkl} = \begin{cases} \bar{R}_\delta(\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_l) L_k L_l, & k \neq l, \\ \sum_{l' \neq k} \bar{R}_\delta(\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_{l'}) L_k L_{l'}, & k = l, \end{cases} \quad (6.3)$$

这里 $1 \leq i, j \leq n_0$, $1 \leq k, l \leq m_0$. (6.2) 中的其他项如 R_B 同样由 (6.1) 相应定义. (6.2) 中的刚度矩阵是半正定的, 其左零空间和右零空间均为 $S = \{c\mathbf{v} \mid c \in \mathbb{R}\}$, 其中 $\mathbf{v} = (\mathbf{1}_{n_1+n_2}, \mathbf{0}_{m_0}) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2+m_0}$, 这里 $\mathbf{1}_{n_1+n_2}$ 表示所有分量均为 1 的 n_1+n_2 维向量, $\mathbf{0}_{m_0}$ 表示 m_0 维零向量. 对源向量 (AF_1, BF_2) 施加均值为零的假设保证了 (6.2) 解的存在性. 结合 (6.1) 的最后一个约束条件, 即可确保解向量 (U_1, U_2, V) 的唯一性.

接下来将 U 与局部问题 (1.1) 的精确解 u 进行对比. 由于 H^1 误差难以计算, 此处仅展示 L_2 误差

$$e_2 = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n_1} (u_{1j} - u(\mathbf{p}_j))^2 A_j + \sum_{j=1}^{n_2} (u_{2j} - u(\mathbf{q}_j))^2 B_j}{\sum_{j=1}^{n_1} u^2(\mathbf{p}_j) A_j + \sum_{j=1}^{n_2} u^2(\mathbf{q}_j) B_j}}. \quad (6.4)$$

此外, 为简便起见, 本节数值算例选取如下核函数:

$$R(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos \pi r), & 0 \leq r \leq 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases} \quad (6.5)$$

与非局部模型中常用的紧支撑核函数 (如 Wendland 函数和 Bump 函数) 相比, 本文选取的核函数 $R(r)$ 能够显著降低算法中另外两个核函数 $\bar{R}$ 和 $\bar{\bar{R}}$ 的计算复杂度与显式表达成本.

6.1 算例一: 嵌入 $\mathbb{R}^3$ 的二维椭球面

在第一个算例中, 取流形 $\mathcal{M}$ 为如下方程定义的椭球面:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1, \quad (6.6)$$

其界面 Γ 取为 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, z = 0$, $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 分别为 $\mathcal{M}$ 的上半部分和下半部分. 设定 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. 在局部 Poisson 问题 (1.1) 中, 令精确解 u 为

$$u(x, y, z) = \begin{cases} x + z + 0.56315, & (x, y, z) \in \mathcal{M}_1, \\ x + 2z + 0.56315, & (x, y, z) \in \mathcal{M}_2. \end{cases} \quad (6.7)$$

根据 $\nabla_{\mathcal{M}}$ 和 $\Delta_{\mathcal{M}}$ 的定义, 对 $\mathcal{M}$ 进行参数化并计算得到

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= \frac{49(z + 9x)}{81(4x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{4z^2}{81})} - \frac{2(z + 9x)(8x^2 + \frac{y^2}{8} + \frac{8z^2}{729})}{9(4x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{4z^2}{81})^2}, & (x, y, z) \in \mathcal{M}_1, \\ f_2(x, y, z) &= \frac{98(z + 9x)}{81(4x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{4z^2}{81})} - \frac{4(z + 9x)(8x^2 + \frac{y^2}{8} + \frac{8z^2}{729})}{9(4x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{4z^2}{81})^2}, & (x, y, z) \in \mathcal{M}_2, \\ u(x, y, 0^+) &= u(x, y, 0^-), \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x, y, 0^+) = 2 \frac{\partial u}{\partial n}(x, y, 0^-), & (x, y, 0) \in \Gamma, \\ \int_{\mathcal{M}} u \, d\mu_x &= 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

在本算例中, 对每个 $(x, y, 0) \in \Gamma$ 取 $n(x, y, 0) = (0, 0, -1)$, $\kappa(x, y, 0) = 0$. 此外, 体积权重 $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{L})$ 按以下步骤计算. 对于 $t = 5 : 5 : 100$,

- (1) $\delta = \sqrt{1/t}$, $n_1 = n_2 = 7t^2 + 5t$, $m_0 = 5t$;
- (2) 生成随机矩阵 $R_1 = \text{rand}(n_1 - m_0, 2)$, $R_2 = \text{rand}(n_2 - m_0, 2)$, $R_3 = \text{rand}(m_0, 1)$, 对于 $i \in [1, n_1 - m_0]$ 和 $j \in [1, n_2 - m_0]$ 有

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i &= \left(\sqrt{1 - R_1(i, 2)^2} \cos(2\pi R_1(i, 1)), \sqrt{1 - R_1(i, 2)^2} \sin(2\pi R_1(i, 1)), 3R_1(i, 2) \right), \\ \mathbf{q}_i &= \left(\sqrt{1 - R_2(i, 2)^2} \cos(2\pi R_2(i, 1)), \sqrt{1 - R_2(i, 2)^2} \sin(2\pi R_2(i, 1)), -3R_2(i, 2) \right), \end{aligned} \quad (6.9)$$

对于 $k \in [1 : m_0]$ 有

$$\mathbf{o}_k = (\cos(2\pi R_3(k, 1)), 2 \sin(2\pi R_3(k, 1)), 0), \quad (6.10)$$

$$\mathbf{p}_{k+n_1-m_0} = \mathbf{q}_{k+n_2-m_0} = \mathbf{o}_k, \quad k = 1, 2, \dots, m_0;$$

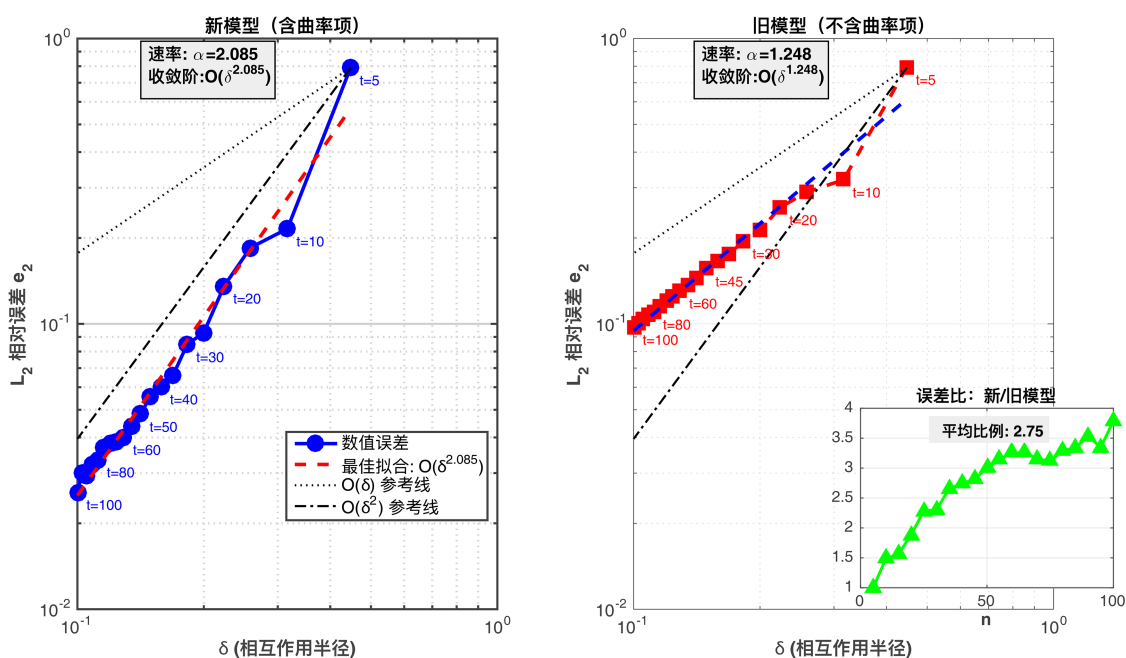


图 2 (网络版彩图) 算例 6.1

(3) 对每个 $i \in [1, n_1]$, 在 $\mathbf{P}$ 中寻找 $\mathbf{p}_i$ 的 20 个最近邻点, 将其投影到 $\mathcal{M}_1$ 在 $\mathbf{p}_i$ 处的切平面上, 利用这 21 个点进行二维 Delaunay 三角剖分;

(4) 令 A_i 等于以 $\mathbf{p}_i$ 为顶点的三角形面积之和的 $1/3$;

(5) 采用步骤 (3) 和 (4) 相同的方法计算 $B_i, i \in [1, n_2]$;

(6) $L_k = \frac{1}{2}(|\mathbf{o}_{k_1} - \mathbf{o}_k| + |\mathbf{o}_k - \mathbf{o}_{k_2}|), k \in [1, m_0]$, 其中 $\mathbf{o}_{k_1}$ 和 $\mathbf{o}_{k_2}$ 是 $\mathbf{o}_k$ 在边界点中的两个最近邻点.

该算法的核心框架如下. 对循环中的每个正整数 t , 分别在流形 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ 和 Γ 上利用随机函数进行等概率均匀取点, 点云规模依据相邻点平均间距 $h \approx 1.9/t$ 设定. 同时, 设定非局部地平线参数 $\delta \approx 0.75\sqrt{h}$, 实践表明该配置可使点云积分法 (point integral method, PIM) 达到最优收敛效率. 随后, 对每个点采用局部三角剖分 (KNN) 计算其积分权重, 计算结果如图 2 所示. 可以看出, e_2 对 δ^2 近似呈线性依赖关系—相较于未引入曲率项的旧模型 ((1.6) 的离散形式), 精度提升了近一个数量级. 需要指出的是, 为评估点云分布随机性带来的影响, 我们进行了多轮重复实验 (共 7–8 轮). 结果表明, 随着点云规模增大, 数值解的 L_2 误差关于 δ 的收敛阶均稳定在 1.9–2.5 之间, 且较旧模型平均提升约 0.8. 因此, 点云随机性虽引入一定偏差, 但不会影响整体收敛性的稳健表现.

6.2 算例二: 嵌入 $\mathbb{R}^4$ 中的三维半球面 S^3

在第二个算例中, 取 $\mathcal{M}$ 为嵌入 $\mathbb{R}^4$ 的流形:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1, \quad w \geq 0, \quad (6.11)$$

其界面 Γ 取为单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4}, w = \frac{1}{2}$. $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 分别为 $\mathcal{M}$ 的上半部分和下半部分. 设

定 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$. 类似地, 令 (1.1) 的精确解为

$$u(x, y, z, w) = \begin{cases} w^2 + 0.77848, & w > \frac{1}{2}, \\ 2w + 0.02848, & w < \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (6.12)$$

则有

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z, w) &= 16w^2 - 4, \quad (x, y, z, w) \in \mathcal{M}_1, \\ f_2(x, y, z, w) &= 6w, \quad (x, y, z, w) \in \mathcal{M}_2, \\ u\left(x, y, z, \frac{1}{2}^+\right) &= u\left(x, y, z, \frac{1}{2}^-\right), \quad 2\frac{\partial u}{\partial n}\left(x, y, z, \frac{1}{2}^+\right) = \frac{\partial u}{\partial n}\left(x, y, z, \frac{1}{2}^-\right), \quad (x, y, 0) \in \Gamma, \\ \int_{\mathcal{M}} u \, d\mu_x &= 0. \end{aligned} \quad (6.13)$$

在本算例中, 对每个 $(x, y, z, \frac{1}{2}) \in \Gamma$, 取 $n(x, y, z, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{\sqrt{3}}x, \frac{1}{\sqrt{3}}y, \frac{1}{\sqrt{3}}z, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\kappa(x, y, z, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 此外, 体积权重按以下步骤计算. 对于 $t = 4 : 2 : 22$,

- (1) $\delta = \sqrt{1/t}$, $n_1 = t^3 + 2t^2$, $n_2 = 4t^3 + 2t^2$, $m_0 = 2t^2$;
- (2) 生成 $R_1 = \text{rand}(n_1 - m_0, 3)$, $R_2 = \text{rand}(n_2 - m_0, 3)$, $R_3 = \text{rand}(m_0, 2)$, 对于 $i \in [1, n_1 - m_0]$ 有

$$p_i = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \left(\frac{1 + R_1(i, 1)}{2}\right)^2} \sqrt{1 - (2R_1(i, 3) - 1)^2} \cos(2\pi R_1(i, 2)) \\ \sqrt{1 - \left(\frac{1 + R_1(i, 1)}{2}\right)^2} \sqrt{1 - (2R_1(i, 3) - 1)^2} \sin(2\pi R_1(i, 2)) \\ \sqrt{1 - \left(\frac{1 + R_1(i, 1)}{2}\right)^2} (2R_1(i, 3) - 1) \\ \frac{1 + R_1(i, 1)}{2} \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

对于 $i \in [1, n_2 - m_0]$ 有

$$q_i = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \left(\frac{3}{2}R_2(i, 1) - 1\right)^2} \sqrt{1 - (2R_2(i, 3) - 1)^2} \cos(2\pi R_2(i, 2)) \\ \sqrt{1 - \left(\frac{3}{2}R_2(i, 1) - 1\right)^2} \sqrt{1 - (2R_2(i, 3) - 1)^2} \sin(2\pi R_2(i, 2)) \\ \sqrt{1 - \left(\frac{3}{2}R_2(i, 1) - 1\right)^2} (2R_2(i, 3) - 1) \\ \frac{3}{2}R_2(i, 1) - 1 \end{pmatrix}, \quad (6.15)$$

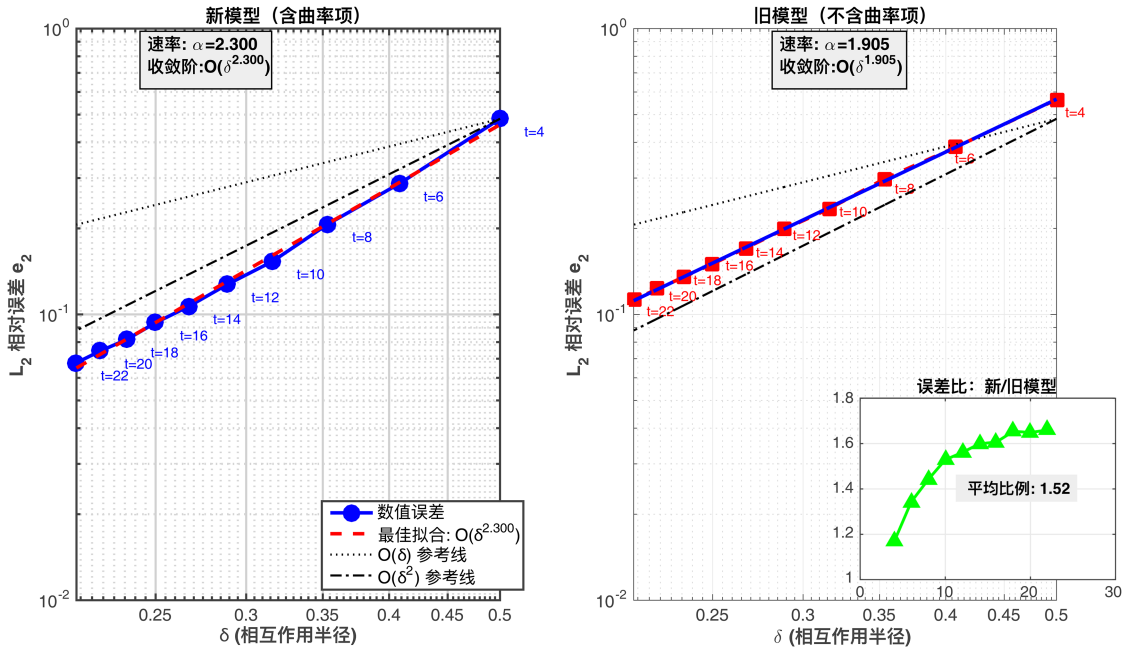


图 3 (网络版彩图) 算例 6.2

对于 $k \in [1, m_0]$ 有

$$\mathbf{o}_i = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - (2R_3(k, 2) - 1)^2} \cos(2\pi R_3(k, 1)) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - (2R_3(k, 2) - 1)^2} \sin(2\pi R_3(k, 1)) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} (2R_3(k, 2) - 1) \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (6.16)$$

$\mathbf{p}_{k+n_1-m_0} = \mathbf{q}_{k+n_2-m_0} = \mathbf{o}_k, k = 1, 2, \dots, m_0$;

(4) 对每个 $i \in [1, n_0]$, 在 $\mathbf{P}$ 中寻找 $\mathbf{p}_i$ 的 50 个最近邻点, 将其投影到 $\mathcal{M}$ 在 $\mathbf{p}_i$ 处的三维切超平面上, 利用这 51 个点进行 Delaunay 四面体分割;

(5) 令 A_i 等于以 $\mathbf{p}_i$ 为顶点的四面体体积之和的 $1/4$;

(6) 采用步骤 (3) 和 (4) 相同的方法计算 $B_i, i \in [1, n_2]$;

(7) $L_k, k \in [1, m_0]$ 的计算方式与前一个算例中 A_i 的计算方法相同.

该算法框架与上一实验一致. 图 3 表明, 三维算例的收敛阶超过二阶, 在效率上优于从 (1.6) 离散得到的旧模型.

7 讨论与未来的展望

本文提出了一类新型非局部模型, 用于逼近流形上具有间断系数的椭圆问题. 我们建立了该模型的适定性, 并证明了其以二阶收敛速度趋于局部极限. 该框架的一个显著优势在于, 它能自然地与 PIM

等无网格数值方法兼容, 通过避免全局网格剖分而简化了离散过程. 上述数值算例验证了该方法的有效性, 结果显示非局部解能够收敛至相应的局部解.

未来工作将致力于将该框架推广至其他偏微分方程, 包括双调和方程、Stokes 方程、扩散 - 反应系统, 以及多边形区域上的问题.

致谢 在本文的撰写过程中, 清华大学丘成桐数学科学中心的史作强教授针对本文给出了许多建设性的意见和建议, 对此我们深表感谢.

参考文献

- 1 Abdesslem A, Anass O. On a nonlocal elliptic system with transmission conditions. *Adv Pure Appl Math*, 2017, 8: 33–41
- 2 Adalsteinsson D, Sethian J A. Transport and diffusion of material quantities on propagating interfaces via level set methods. *J Comput Phys*, 2023, 185: 271–288
- 3 Alali B, Gunzburger M. Peridynamics and material interfaces. *J Elast*, 2015, 120: 225–248
- 4 Barreira R, Elliott C M, Madzvamuse A. Modelling and simulations of multi-component lipid membranes and open membranes via diffuse interface approaches. *J Math Biol*, 2008, 56: 347–371
- 5 Barreira R, Elliott C M, Madzvamuse A. The surface finite element method for pattern formation on evolving biological surfaces. *J Math Biol*, 2011, 63: 1095–1119
- 6 Belkin M, Niyogi P. Laplacian eigenmaps for dimensionality reduction and data representation. *Neural Comput*, 2003, 15: 1373–1396
- 7 Cahn J W, Fife P, Penrose O. A phase-field model for diffusion-induced grain-boundary motion. *Ann Statist*, 2008, 36: 555–586
- 8 Capodaglio G, D’Elia M, Bochev P, et al. An energy-based coupling approach to nonlocal interface problems. *Comput & Fluids*, 2020, 207: 104593
- 9 Cekic B, Mashiyyev R A. Nontrivial solution for a nonlocal elliptic transmission problem in variable exponent Sobolev spaces. *Abstr Appl Anal*, 2010, 266: 385048
- 10 Choi P T, Lam K C, Lui L M. Flash: Fast landmark aligned spherical harmonic parameterization for genus-0 closed brain surfaces. *SIAM J Imag Sci*, 2015, 8: 67–94
- 11 Coifman R R, Lafon S, Lee A B, et al. Geometric diffusions as a tool for harmonic analysis and structure definition of data: Diffusion maps. *Proc Nat Acad Sci*, 2005, 102: 7426–7431
- 12 Eilks C, Elliott C M. Numerical simulation of dealloying by surface dissolution via the evolving surface finite element method. *J Comput Phys*, 2008, 227: 9727–9741
- 13 Elliott C M, Stinner B. Modeling and computation of two phase geometric biomembranes using surface finite elements. *J Comput Phys*, 2010, 229: 6585–6612
- 14 Elliott C M, Stinner B, Styles V, et al. Numerical computation of advection and diffusion on evolving diffuse interfaces. *IMA J Numer Anal*, 2011, 31: 786–812
- 15 Ganesan S, Tobiska L. A coupled arbitrary Lagrangian-Eulerian and Lagrangian method for computation of free surface flows with insoluble surfactants. *J Comput Phys*, 2009, 228: 2859–2873
- 16 Gu X, Wang Y, Chan T F, et al. Genus zero surface conformal mapping and its application to brain surface mapping. *IEEE Trans Med Imag*, 2004, 23: 949–958
- 17 James A J, Lowengrub J. A surfactant-conserving volume-of-fluid method for interfacial flows with insoluble surfactant. *J Comput Phys*, 2004, 201: 685–722
- 18 Kao C Y, Lai R, Osting B. Maximization of Laplace-Beltrami eigenvalues on closed Riemannian surfaces. *ESAIM Control Optim Calc Var*, 2017, 23: 685–720
- 19 Lai R, Wen Z, Yin W, et al. Folding-free global conformal mapping for genus-0 surfaces by harmonic energy minimization. *J Sci Comput*, 2014, 58: 705–725
- 20 Lai R, Zhao H. Multiscale nonrigid point cloud registration using rotation-invariant sliced-Wasserstein distance via Laplace-Beltrami eigenmap. *SIAM J Imag Sci*, 2017, 10: 449–483
- 21 Lee H, Du Q. Second order accurate Dirichlet boundary conditions for linear nonlocal diffusion problems. *Commun Math Sci*, 2022, 20: 1815–1837
- 22 Li Z. A note on immersed interface method for three-dimensional elliptic equations (English summary). *Comput Math Appl*, 1996, 31: 9–17
- 23 Li Z. The immersed interface method using a finite element formulation. *Appl Numer Math*, 1998, 27: 253–267

- 24 Meng T W, Choi P T, Lui L M. Tempo: Feature-endowed Teichmüller extremal mappings of point clouds. *SIAM J Imaging Sci*, 2016, 9: 1582–1618
- 25 Osher S, Shi Z, Zhu W. Low dimensional manifold model for image processing. *SIAM J Imaging Sci*, 2017, 10: 4
- 26 Peyré G. Manifold models for signals and images. *Comput Vision Image Underst*, 2009, 113: 248–260
- 27 Reuter M, Wolter F E, Peinecke N. Laplace-Beltrami spectra as “Shape-DNA” of surfaces and solids. *Comput-Aided Des*, 2006, 38: 342–366
- 28 Seleson P, Gunzburger M, Parks M L. Interface problems in nonlocal diffusion and sharp transitions between local and nonlocal domains. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2013, 266: 185–204
- 29 Shi Z, Sun J. Convergence of the point integral method for Poisson equation on point cloud. *Res Math Sci*, 2017, 4: 1
- 30 Tao Y, Tian X, Du Q. Nonlocal diffusion and peridynamic models with Neumann type constraints and their numerical approximations. *Appl Math Appl*, 2017, 305: 282–298
- 31 Wong T W, Lui L M, Gu X, et al. Intrinsic feature extraction and hippocampal surface registration using harmonic eigenmap. Technical Report, UCLA CAM Report, 2011, 11–65
- 32 You H, Lu X, Trask N, et al. An asymptotically compatible approach for Neumann-type boundary condition on nonlocal problems. *ESAIM Math Model Numer Anal*, 2020, 54: 4
- 33 Zhang Y, Meng Y, Shi Z. A second-order nonlocal approximation to manifold Poisson models with Neumann boundary. [arXiv:2403.05888v5](https://arxiv.org/abs/2403.05888v5), 2026
- 34 Zhang Y, Shi Z. A nonlocal model of elliptic equation with jump coefficients on manifold. *Commun Math Sci*, 2021, 19: 7
- 35 Zhang Y, Shi Z. Truncation error analysis for an accurate nonlocal approximation to manifold Poisson models with Dirichlet boundary. *Commun Math Sci*, 2023, 22: 7

附录 A (2.8) 估计式的证明

将 (2.8) 的第一项分解为以下两部分:

$$2 \int_{\mathcal{M}} (u(x) - u(y)) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x - \kappa(y) \int_{\mathcal{M}} (u(x) - u(y)) (x - y) \cdot n(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x. \quad (\text{A.1})$$

首先分析 (A.1) 的第一部分. 基于逼近式 (2.1), 进行如下分解:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta^2} \int_{\mathcal{M}} (u(x) - u(y)) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x \\ &= \int_{\mathcal{M}} \Delta_{\mathcal{M}} u(x) \bar{\bar{R}}_\delta(x, y) d\mu_x - 2 \int_{\partial\mathcal{M}} \frac{\partial u}{\partial n}(x) \bar{\bar{R}}_\delta(x, y) d\tau_x \\ & \quad + \int_{\partial\mathcal{M}} (y - x) \cdot n(x) \nabla_{\mathcal{M}}^2 u(n, n)(x) \bar{\bar{R}}_\delta(x, y) d\tau_x - \bar{r}_1(y), \quad y \in \mathcal{M}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

根据文献 [35, 定理 3.1], 误差项 $\bar{r}_1$ 满足 $\|\bar{r}_1\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|\bar{r}_1\|_{H^1(\mathcal{M}_1)} \leq C \delta^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^4(\mathcal{M}_1)}$. 现在限制 (A.2) 中的 $y \in \partial\mathcal{M}$, 并分别对 $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\mathcal{M}}$ 和 $\Delta_{\mathcal{M}} u|_{\mathcal{M}}$ 再次应用 (2.1) 的论证, 可得

$$\left\| \int_{\partial\mathcal{M}} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(x) - \frac{\partial u}{\partial n}(y) \right) \bar{\bar{R}}_\delta(x, y) d\tau_x \right\|_{L_y^2(\partial\mathcal{M})} \leq C \delta^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^4(\mathcal{M})}, \quad (\text{A.3})$$

$$\left\| \int_{\mathcal{M}} (f(x) - f(y)) \bar{\bar{R}}_\delta(x, y) d\tau_x \right\|_{L_y^2(\partial\mathcal{M})} \leq C \delta^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^4(\mathcal{M})}. \quad (\text{A.4})$$

此外, 由于对所有满足 $|x - y| \leq 2\delta$ 的 $x, y \in \partial\mathcal{M}$ 有 $(y - x) \cdot n(x) = \mathcal{O}(\delta^2)$, 采用类似于 (3.16) 的方法得到

$$\left\| \int_{\partial\mathcal{M}} (y - x) \cdot n(x) \nabla_{\mathcal{M}}^2 u(n, n)(x) \bar{\bar{R}}_\delta(x, y) d\tau_x \right\|_{L_y^2(\partial\mathcal{M})}$$

$$\leq C\delta^2 \left\| \int_{\partial\mathcal{M}} |\nabla_{\mathcal{M}}^2 u(n, n)(x)| \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_x \right\|_{L_y^2(\partial\mathcal{M})} \leq C\delta \|u\|_{H^4(\mathcal{M})}. \quad (\text{A.5})$$

将上述估计代入 (A.2), 可得

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\delta^2} \int_{\mathcal{M}} (u(x) - u(y)) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x - 2 \int_{\partial\mathcal{M}} \frac{\partial u}{\partial n}(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_x - \int_{\mathcal{M}} \Delta_{\mathcal{M}} u(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x \right\|_{L_y^2(\partial\mathcal{M})} \\ & \leq C\delta^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^4(\mathcal{M})}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

接下来分析 (A.1) 的第二部分. 对 $y \in \Gamma$, 引用文献 [33, (4.23)] 得到如下分解:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathcal{M}} (u(x) - u(y))(x - y) \cdot n(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x + 2\delta^2 \frac{\partial u}{\partial n}(y) \int_{\mathcal{M}} \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_x \right| \\ & = 2\delta^2 \int_{\partial\mathcal{M}} (u(x) - u(y)) \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_x - 2\delta^2 \int_{\mathcal{M}} (\nabla_{\mathcal{M}} u(x) - \nabla_{\mathcal{M}} u(y)) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x \cdot n(y) \\ & \quad - 2\delta^2 \int_{\partial\mathcal{M}} (u(x) - u(y))(1 - n(x) \cdot n(y)) \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_x \\ & \quad + \int_{\mathcal{M}} (u(x) - u(y))((x - y) - \mathcal{T}_{\mathcal{M}}^x(x - y)) \cdot (n(y) - \mathcal{T}_{\mathcal{M}}^x n(y)) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x \\ & \leq 2\delta^2 \left| \int_{\partial\mathcal{M}} (u(x) - u(y)) \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_x \right| + 2\delta^2 \left| \int_{\mathcal{M}} (\nabla_{\mathcal{M}} u(x) - \nabla_{\mathcal{M}} u(y)) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x \cdot n(y) \right| \\ & \quad + C\delta^4 \int_{\partial\mathcal{M}} (|u(x)| + |u(y)|) \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_x + C\delta^3 \int_{\mathcal{M}} (|u(x)| + |u(y)|) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

对于 (A.7) 的前两项, 采用与 (A.3) 和 (A.4) 类似的方法处理. 对于 (A.7) 的最后一项, 则应用与 (3.16) 相同的论证. 从而得到 (A.7) 的估计

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\mathcal{M}} (u(x) - u(y))(x - y) \cdot n(y) \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x + 2\delta^2 \frac{\partial u}{\partial n}(y) \int_{\mathcal{M}} \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_x \right\|_{L_y^2(\partial\mathcal{M})} \\ & \leq C\delta^{\frac{5}{2}} \|u\|_{H^5(\mathcal{M})}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

至此完成了对 (A.1) 第二部分的控制.

根据假设, κ 在 $\partial\mathcal{M}$ 上一致有界. 将 (A.6) 乘以 δ^2 , (A.8) 乘以 $\kappa(y)$, 并将结果相加, 得到

$$\|r_0\|_{L^2(\partial\mathcal{M})} \leq C(\delta^2 \delta^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^4(\mathcal{M})} + \delta^{\frac{5}{2}} \|u\|_{H^5(\mathcal{M})} \|\kappa\|_{L^\infty(\partial\mathcal{M})}) \leq C\delta^{\frac{5}{2}} \|u\|_{H^5(\mathcal{M})}. \quad (\text{A.9})$$

这就完成了 (2.8) 的证明.

附录 B 等式 (2.2) 证明方法

首先引入必要的记号.

- $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}^y$: 流形 $\mathcal{M}$ 在点 y 处的切空间;
- $\mathcal{T}_{\partial\mathcal{M}}^y$: 边界 $\partial\mathcal{M}$ 在点 y 处的切空间;
- $\mathcal{B}_{2\delta}(y)$: 以 y 为中心、半径为 2δ 的 d 维球体.

固定 $y \in \partial\mathcal{M}$ 并取充分小的 $\delta > 0$. 在 $\mathcal{M} \cap \mathcal{B}_{2\delta}(y)$ 上构造局部参数化, 将 $\mathcal{M}$ 表示为定义在其切空间 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}^y$ 上的 $d - m$ 维向量值函数的图像. 选取坐标系使得 $y = \mathbf{0}$ 且 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}^y = \mathbb{R}^m \times \{0\}^{d-m}$. 则有

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{B}_{2\delta}(y) = \{\Phi(\xi) = (\xi, \mathbf{h}(\xi)) \mid \xi \in U \subset \mathbb{R}^m\}, \quad (\text{B.1})$$

其中 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$, U 是 $\mathcal{M} \cap \mathcal{B}_{2\delta}(y)$ 到 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}^y$ 上的正交投影. 函数 $\mathbf{h}: U \rightarrow \mathbb{R}^{d-m}$ 光滑, 满足 $\mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 和 $D\mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 刻画了 $\mathcal{M}$ 在其切平面附近的局部偏离.

在此坐标系下, 根据 $\operatorname{div}_{\mathcal{M}}$ 和 $\nabla_{\mathcal{M}}$ 的定义, 我们写出

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{M}} u(y) &= \operatorname{div}_{\mathcal{M}} \nabla_{\mathcal{M}} u(y) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(g^{ij} \sqrt{\det g} \left(\nabla_{\mathcal{M}} u \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_j} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\nabla_{\mathcal{M}} u \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \right) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \right) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u(\Phi(\xi))}{\partial \xi_i^2} \Big|_{\xi=\mathbf{0}}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

这里应用了: 在点 y 处对每个 $i, j \in [1, m]$ 有 $g^{ij} = \delta^{ij}$ 且 $\frac{\partial}{\partial \xi_i} g^{ij} = 0$.

接下来分析 $\partial \mathcal{M}$ 的作用. 将 $\mathcal{M}$ 的坐标系 (B.1) 与 $\partial \mathcal{M}$ 对齐. 令 ξ_m 表示切空间内 $\mathcal{M}$ 的外法向, 从而 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}^y = \mathcal{T}_{\partial \mathcal{M}}^y \oplus \operatorname{span}\{\xi_m\}$, 其中 $\mathcal{T}_{\partial \mathcal{M}}^y$ 表示 $\partial \mathcal{M}$ 在 y 处的切空间. 基于 (B.1), $\partial \mathcal{M}$ 具有局部参数化 ϕ :

$$\partial \mathcal{M} \cap \mathcal{B}_{2\delta}(y) = \{\phi(\xi') = (\xi', P(\xi'), \mathbf{h}(\xi', P(\xi')))\} \mid \xi' \in V \subset \mathbb{R}^{m-1}\}, \quad (\text{B.3})$$

这里 $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{m-1})$, V 是 $\partial \mathcal{M} \cap \mathcal{B}_{2\delta}(y)$ 到 $\mathcal{T}_{\partial \mathcal{M}}^y$ 上的正交投影, $P: \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ 描述了 $\partial \mathcal{M}$ 在点 y 处沿方向 $n(y)$ 的弯曲程度. 显然 $P(\mathbf{0}) = 0$ 且 $\nabla P(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. 采用与 (B.2) 相同的论证, 可得

$$\Delta_{\partial \mathcal{M}} u(y) = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial^2 u(\phi(\xi'))}{\partial \xi_i^2} \Big|_{\xi'=\mathbf{0}}. \quad (\text{B.4})$$

由于 $\phi(\xi') = \Phi(\xi', P(\xi'))$, 应用链式法则推导出

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\phi(\xi'))}{\partial \xi_i} &= \frac{\partial u(\Phi(\xi', P(\xi')))}{\partial \xi_i} = \frac{\partial u(\Phi(\xi))}{\partial \xi_i} + \frac{\partial u(\Phi(\xi))}{\partial \xi_m} \frac{\partial P(\xi')}{\partial \xi_i}, \\ \frac{\partial^2 u(\phi(\xi'))}{\partial \xi_i^2} &= \frac{\partial^2 u(\Phi(\xi))}{\partial \xi_i^2} + \left(2 \frac{\partial^2 u(\Phi(\xi))}{\partial \xi_m \partial \xi_i} + \frac{\partial^2 u(\Phi(\xi))}{\partial \xi_m^2} \frac{\partial P(\xi')}{\partial \xi_i} \right) \frac{\partial P(\xi')}{\partial \xi_i} + \frac{\partial u(\Phi(\xi))}{\partial \xi_m} \frac{\partial^2 P(\xi')}{\partial \xi_i^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

接着联立 (B.2), (B.4) 和 (B.5), 得到

$$\Delta_{\mathcal{M}} u(y) - \Delta_{\partial \mathcal{M}} u(y) = \frac{\partial^2 u(\Phi(\xi))}{\partial \xi_m^2} \Big|_{\xi=\mathbf{0}} - \frac{\partial u(\Phi(\xi))}{\partial \xi_m} \Big|_{\xi=\mathbf{0}} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial^2 P(\xi')}{\partial \xi_i^2} \Big|_{\xi'=\mathbf{0}}. \quad (\text{B.6})$$

采用与 (B.2) 相同的计算, 有

$$\frac{\partial^2 u(\Phi(\xi))}{\partial \xi_m^2} \Big|_{\xi=\mathbf{0}} = \nabla^2 u(n, n)(y), \quad \frac{\partial u(\Phi(\xi))}{\partial \xi_m} \Big|_{\xi=\mathbf{0}} = \frac{\partial u}{\partial n}(y), \quad (\text{B.7})$$

将其代入 (B.6), 可得

$$\Delta_{\mathcal{M}} u(y) - \Delta_{\partial \mathcal{M}} u(y) = \nabla^2 u(n, n)(y) - \Delta P(\mathbf{0}) \frac{\partial u}{\partial n}(y). \quad (\text{B.8})$$

根据 (B.3) 有 $-\Delta P(\mathbf{0}) = -n(y) \cdot \sum_{i=1}^{m-1} \phi_{\xi_i \xi_i}(\mathbf{0}) = \kappa(y)$, 即完成了 (2.2) 的证明.

附录 C 引理 3.1 证明方法

我们继续采用附录 B 中的设定. 固定 $y \in \Gamma$, 令 $\mathcal{M}$ 具有局部参数化 (B.1). 利用 (B.1) 对 $\mathcal{M} \cap \mathcal{B}_{2\delta}(y)$ 的参数化, 可得

$$\int_{\mathcal{M}} \bar{R}_{\delta}(x, y) d\mu_x = \int_{\mathcal{M}} C_{\delta} \bar{R} \left(\frac{|x-y|^2}{4\delta^2} \right) d\mu_x = \int_U C_{\delta} \bar{R} \left(\frac{|\xi|^2 + |\mathbf{h}(\xi)|^2}{4\delta^2} \right) \sqrt{\det(g_{ij}(\xi))} d\xi. \quad (\text{C.1})$$

此处, 诱导度量 $(g_{ij}(\boldsymbol{\xi}))_{m \times m}$ 由下式给出:

$$g_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = \delta_{ij} + \partial_i \mathbf{h}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \partial_j \mathbf{h}(\boldsymbol{\xi}), \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

接下来, 逼近 (C.1) 中被积函数的各分量和积分区域 U . 由于 $\partial_i \mathbf{h}(\mathbf{0}) = 0$, 所以由 $\mathcal{M}$ 的光滑性可知, 对 $\boldsymbol{\xi} \in U$ 有

$$\partial_i \mathbf{h}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{O}(\delta).$$

因此,

$$\begin{aligned} \sqrt{\det(g_{ij}(\boldsymbol{\xi}))} &= \sqrt{\det(\delta_{ij} + \partial_i \mathbf{h}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \partial_j \mathbf{h}(\boldsymbol{\xi}))} \\ &= \sqrt{1 + \mathcal{O}(\delta^2)} = 1 + \mathcal{O}(\delta^2). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

接着考虑核函数 $\bar{R}$. 将 $\mathbf{h}$ 在 $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ 附近进行 Taylor 展开, 得到

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{h}(\mathbf{0}) + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{h}(\mathbf{0}) + \mathcal{O}(\delta^2) = \mathcal{O}(\delta^2),$$

因此, 核函数的自变量满足 $|\mathbf{h}(\boldsymbol{\xi})|^2 = \mathcal{O}(\delta^4)$, 于是有

$$\bar{R}\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2 + |\mathbf{h}(\boldsymbol{\xi})|^2}{4\delta^2}\right) = \bar{R}\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{4\delta^2}\right) - \int_{\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{4\delta^2}}^{\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2 + |\mathbf{h}(\boldsymbol{\xi})|^2}{4\delta^2}} R(s) ds = \bar{R}\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{4\delta^2}\right) + \mathcal{O}(\delta^2).$$

将估计式 (C.2) 和核函数的展开式代入 (C.1), 得到

$$\int_{\mathcal{M}} \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x = \int_U C_\delta \bar{R}\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{4\delta^2}\right) d\boldsymbol{\xi} + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (\text{C.3})$$

最后, 由于 U 是 $\mathcal{M} \cap \mathcal{B}_{2\delta}(y)$ 到切空间的正交投影, 所以有

$$\begin{aligned} \int_{|\boldsymbol{\xi}| < 2\delta} C_\delta \bar{R}\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{4\delta^2}\right) d\boldsymbol{\xi} &\geq \int_U C_\delta \bar{R}\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{4\delta^2}\right) d\boldsymbol{\xi} \\ &= \int_{|\boldsymbol{\xi}|^2 + |\mathbf{h}(\boldsymbol{\xi})|^2 < 4\delta^2} C_\delta \bar{R}\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{4\delta^2}\right) d\boldsymbol{\xi} \\ &\geq \int_{2\delta - \mathcal{O}(\delta^3) < |\boldsymbol{\xi}| < 2\delta} C_\delta \bar{R}\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{4\delta^2}\right) d\boldsymbol{\xi} \\ &= \int_{|\boldsymbol{\xi}| < 2\delta} C_\delta \bar{R}\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{4\delta^2}\right) d\boldsymbol{\xi} - \mathcal{O}(\delta^2). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

结合结果 (C.3) 和 (C.4), 得到所需要的逼近式

$$\int_{\mathcal{M}} \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x = \int_{|\boldsymbol{\xi}| < 2\delta} C_\delta \bar{R}\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{4\delta^2}\right) d\boldsymbol{\xi} + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (\text{C.5})$$

至此完成了对 (C.1) 的估计.

接下来分析界面 Γ 的作用, 它将 (C.5) 中的积分区域 $\mathcal{M}$ 进行了分割. 我们仍将 $\mathcal{M}$ 的坐标系 (B.1) 与 Γ 对齐. 令 ξ_m 表示 Γ 的法方向, 该方向对于 $\mathcal{M}_1$ 是外向的, 从而

$$\mathcal{T}_{\mathcal{M}}^y = \mathcal{T}_{\Gamma}^y \oplus \text{span}\{\xi_m\},$$

其中 $\mathcal{T}_\Gamma^y$ 表示 Γ 在点 y 处的切空间. 类似于 (B.3), 界面局部上由参数化 ϕ 给出:

$$\Gamma \cap \mathcal{B}_{2\delta}(y) = \{\phi(\xi') = (\xi', P(\xi'), \mathbf{h}(\xi', P(\xi')))) \mid \xi' \in V \subset \mathbb{R}^{m-1}\}, \quad (\text{C.6})$$

其中 $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{m-1})$. 通过将 P 在 $\mathbf{0}$ 附近进行 Taylor 展开, 得到

$$\begin{aligned} P(\xi') &= P(\mathbf{0}) + \xi' \cdot \nabla P(\mathbf{0}) + \frac{1}{2} \xi'^T \nabla^2 P(\mathbf{0}) \xi' + \mathcal{O}(\delta^3) \\ &= \frac{1}{2} \xi'^T \nabla^2 P(\mathbf{0}) \xi' + \mathcal{O}(\delta^3), \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

这里利用了 $P(\mathbf{0}) = 0$ 和 $\nabla P(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 的事实. 相应地, 两个子区域在局部上可定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{B}_{2\delta}(y) &= \{(\xi, \mathbf{h}(\xi)) \mid \xi \in U, \xi_m < P(\xi')\}, \\ \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{B}_{2\delta}(y) &= \{(\xi, \mathbf{h}(\xi)) \mid \xi \in U, \xi_m > P(\xi')\}. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

采用与推导 (C.5) 相类似的论证, 对 (C.8) 中区域上的积分得到如下逼近:

$$\int_{\mathcal{M}_1} \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x = \int_{|\xi| < 2\delta, \xi_m < P(\xi')} C_\delta \bar{R} \left(\frac{|\xi|^2}{4\delta^2} \right) d\xi + \mathcal{O}(\delta^2), \quad (\text{C.9})$$

$$\int_{\mathcal{M}_2} \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x = \int_{|\xi| < 2\delta, \xi_m > P(\xi')} C_\delta \bar{R} \left(\frac{|\xi|^2}{4\delta^2} \right) d\xi + \mathcal{O}(\delta^2); \quad (\text{C.10})$$

同时, 对 Γ 上的积分逼近为

$$\int_\Gamma \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_x = \int_{|\xi'| < 2\delta} C_\delta \bar{R} \left(\frac{|\xi'|^2}{4\delta^2} \right) d\xi' + \mathcal{O}(\delta). \quad (\text{C.11})$$

现在回到原始表达式 (3.6). 将上述三个逼近式代入, 得到

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}_1} \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x - \int_{\mathcal{M}_2} \bar{R}_\delta(x, y) d\mu_x &= \int_{|\xi'| < 2\delta} \int_{-P(\xi')}^{P(\xi')} C_\delta \bar{R} \left(\frac{|\xi|^2}{4\delta^2} \right) d\xi_m d\xi' + \mathcal{O}(\delta^2) \\ &= 2 \int_{|\xi'| < 2\delta} C_\delta \bar{R} \left(\frac{|\xi'|^2 + P^2(\xi')}{4\delta^2} \right) P(\xi') d\xi' + \mathcal{O}(\delta^2) \\ &= 2 \int_{|\xi'| < 2\delta} C_\delta \bar{R} \left(\frac{|\xi'|^2}{4\delta^2} \right) P(\xi') d\xi' + \mathcal{O}(\delta^2) \\ &= \int_{|\xi'| < 2\delta} C_\delta \bar{R} \left(\frac{|\xi'|^2}{4\delta^2} \right) \nabla^2 P(\mathbf{0})(\xi', \xi') d\xi' + \mathcal{O}(\delta^2) \\ &= 2\delta^2 \int_{|\xi'| < 2\delta} C_\delta \nabla^2 P(\mathbf{0}) \left(\xi', \nabla \bar{R} \left(\frac{|\xi'|^2}{4\delta^2} \right) \right) d\xi' + \mathcal{O}(\delta^2) \\ &= 2\delta^2 \int_{|\xi'| < 2\delta} \text{tr}(\nabla^2 P(\mathbf{0})) C_\delta \bar{R} \left(\frac{|\xi'|^2}{4\delta^2} \right) d\xi' + \mathcal{O}(\delta^2) \\ &= 2\delta^2 \Delta P(\mathbf{0}) \int_\Gamma \bar{R}_\delta(x, y) d\tau_x + \mathcal{O}(\delta^2), \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

根据 (C.6) 有

$$-\Delta P(\mathbf{0}) = -n(y) \cdot \sum_{i=1}^{m-1} \phi_{\xi_i \xi_i}(\mathbf{0}) = \kappa(y),$$

即完成了引理 3.1 的证明.

A refined nonlocal approach to elliptic transmission problems on manifolds

Yu Qiao & Yajie Zhang

Abstract In this paper, we propose a class of nonlocal models to accurately approximate elliptic transmission problems on manifolds. Such problems involve the Laplace-Beltrami operator (LBO) with coefficients discontinuous across smooth interfaces, supplemented by classical transmission conditions. To address this, we develop a nonlocal modeling approach that approximates the interfacial LBO via coercive integrals and enforces transmission conditions through a nonlocal averaging mechanism. A key advantage of the method is its avoidance of second-order normal derivatives while maintaining second-order truncation accuracy. We establish the well-posedness of the nonlocal model and prove its second-order convergence to the corresponding local solution. Numerical examples, implemented via a point cloud integration method (PIM), are provided to validate the theoretical convergence rates.

Keywords elliptic transmission problem, manifolds with interface, nonlocal interface model, well-posedness, second-order localization rate

MSC(2020) 45P05, 45A05, 35A23, 46E35

doi: 10.1360/SSM-2026-0051