



带有大外力的稳态可压缩磁流体动力学方程边值问题强解的存在性和小 Mach 数极限

窦昌胜^{1*}, 琚强昌²

1. 首都经济贸易大学统计与数据科学学院, 北京 100070;

2. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088

E-mail: douchangsheng@cueb.edu.cn, ju-qiangchang@iapcm.ac.cn

收稿日期: 2025-09-13; 接受日期: 2026-04-09; 网络出版日期: 2026-05-06; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12131007)、国家社会科学基金 (批准号: 22CTJ019) 和首都经济贸易大学重大专项 (批准号: ZD202301) 资助项目

摘要 本文证明当 Mach 数适当小时有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) 内带有大外力的稳态可压缩磁流体动力学方程边值问题强解的存在性, 并且严格证明当 Mach 数趋于零时稳态可压缩磁流体动力学方程边值问题的强解收敛到稳态不可压缩磁流体动力学方程边值问题的强解, 其中流体速度和温度满足 Dirichlet 边界条件, 磁场满足完全传导边界条件. 为了证明强解的存在性, 本文将方程分解成带有大外力的稳态不可压缩磁流体动力学方程和带有小外力的稳态可压缩 Navier-Stokes 方程, 并建立强解关于 Mach 数的一致先验估计.

关键词 稳态可压磁流体方程 大外力 Dirichlet 边界条件 强解的存在性 小 Mach 数极限

MSC (2020) 主题分类 35Q30, 76D05

1 引言

本文主要考虑有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) 内稳态可压缩磁流体动力学方程

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0, \\ \varrho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \operatorname{div} \mathbb{S}(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} + \varrho \mathbf{f} + \mathbf{g}, \\ -\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H}) = -\nu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}), \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ c_v \varrho \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta + p \operatorname{div} \mathbf{u} = \kappa \Delta \Theta + \Psi_1 + \Psi_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中, $\varrho, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^d$ 和 Θ 分别表示密度、速度、磁场和温度, $p = R\varrho\Theta$ 为压力 ($R > 0$ 为物理常数), $c_v > 0$ 是等容热容, $\mathbf{f}$ 是流体所受的外力密度函数, $\mathbf{g}$ 是给定的外力. 黏性应力张量 $\mathbb{S}$ 和耗散函

英文引用格式: Dou C S, Ju Q C. Existence of strong solutions and low Mach number limit for boundary value problems of steady compressible magnetohydrodynamic equations with large external forces (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 1–36, doi: [10.1360/SSM-2025-0228](https://doi.org/10.1360/SSM-2025-0228)

数 Ψ_1 分别定义为

$$\mathbb{S} = 2\mu D(\mathbf{u}) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbb{I}, \quad \Psi_1 = 2\mu D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{u}) + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \geq 0, \quad (1.2)$$

其中, $D(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t)/2$ 为应变张量, 黏性系数 μ 和 λ 满足 $2\mu + d\lambda \geq 0$ 且 $\mu > 0, \kappa > 0$ 是热传导系数. 另外, $\Psi_2 = \nu(\nabla \times \mathbf{H})^2 \geq 0$, 其中 ν 为磁扩散系数. 流体的总质量为

$$\int_{\Omega} \varrho dx = M > 0.$$

流体的速度 $\mathbf{u}$ 和温度 Θ 满足 Dirichlet 边界条件, 而磁场 $\mathbf{H}$ 满足完全传导边界条件:

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{n} = 0, \quad \Theta = \vartheta_0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad (1.3)$$

其中 ϑ_0 为正常数.

当 $\mathbf{H} = 0$ 时, 方程组即为稳态可压缩热传导 Navier-Stokes 方程, 对其解的存在性有很多研究, 在此仅回顾与本文相关的研究结果, 更多的研究内容可参见文献 [1, 2, 6, 12–14, 22, 26, 39]. 对于充分小外力情形, Valli [48] 利用全局非稳态解的存在性证明了当 $t \rightarrow \infty$ 时等熵可压缩 Navier-Stokes 方程稳态解的存在性, 随后在文献 [49] 中通过将方程组分解成 Stokes 方程和输运方程 (参见文献 [41]) 也得到了一般外力下稳态解的存在性. da Veiga [5] 通过将方程组分解为 Stokes 方程、传输方程和 Laplace 方程三部分得到更广泛的 L^p 存在性结果, 其他的分解方式可参见文献 [36]. 1989 年, Farwig [11] 证明了带有小外力的稳态可压缩热传导 Navier-Stokes 方程滑移边值问题解的存在性.

对于任意大外力, 文献 [34, 35] 在位势力情形下证明了等熵可压缩 Navier-Stokes 方程强解的存在性. 当状态方程和黏性系数满足一定增长性条件, Novotný 和 Pokorný [37, 38] 得到了稳态可压热传导 Navier-Stokes 方程弱解或强解的存在性. 利用不可压缩 Navier-Stokes 方程解的存在性结果, Choe 和 Jin [4] 得到了当 Mach 数适当小时强解的存在性. 2015 年, Dou 等 [7] 得到了带有大外力和满足 Dirichlet 边界条件的多方理想气体稳态可压缩热传导方程强解的存在性并证明了小 Mach 数极限.

另外, 大外力等熵流体方程的弱解的存在性得到了充分考虑. Lions [32] 首次证明了当二维情形的绝热指数 $\gamma > 1$ 和三维情形 $\gamma > 5/3$ 时 Dirichlet 边界条件下弱解的存在性. 对 γ 的严格限制实际上来源于密度函数 ϱ 在 L^p 中的可积性. 而 ϱ 的更高可积性, 可允许有更小的 γ . Novotný 和 Straškraba [39] 在 $\mathbf{f}$ 是位势力和 $\mathbf{g} = 0$ 假设下证明了当 $\gamma > 3/2$ 时弱解的存在性. Frehse 等 [15] 以及 Plotnikov 和 Sokolowski [43] 在 $\varrho \mathbf{u}^2$ 的 L^1 有界性假设下通过压力的加权估计得到密度的可积性, 但并未证明此假设成立. Plotnikov 和 Sokolowski [45] 证明了当 $\gamma > 4/3$ 时可压缩 Navier-Stokes 方程 Dirichlet 边值问题重整化解的存在性. Březina 和 Novotný [3] 证明了当 $\mathbf{f}$ 为位势力并且 $\mathbf{g} = 0$ 时 $\gamma > (3 + \sqrt{41})/8$ 或当 $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^\infty$ 时 $\gamma > (3 + \sqrt{41})/8$ 假设下空间周期问题弱解的存在性, 此时不需要 $\varrho \mathbf{u}^2$ 的 L^1 有界性, 而是通过结合一般能量中 $\Delta^{-1}P$ 的 L^∞ 估计和密度有界性得到证明. 在文献 [44] 的框架下, Frehse 等 [16, 17] 得到了 $\gamma > 4/3$ 时三维 Dirichlet 边值问题弱解的存在性和 $\gamma = 1$ 时二维等温流体的空间周期问题和混合边值问题弱解的存在性. Jiang 和 Zhou [29] 利用新的加权估计证明了任意 $\gamma > 1$ 时三维空间周期问题弱解的存在性. 随后, Jesslé 和 Novotný [25] 以及 Plotnikov 和 Weigant [46] 分别得到了 $\gamma > 1$ 时滑移边界条件和 Dirichlet 边界条件下弱解的存在性.

当 $\mathbf{H} \neq 0$ 时, 方程组 (1.1) 将 Maxwell 电磁方程与流体动力学方程耦合来描述导电流体的宏观行为, 具有重要的物理背景. 关于非定常可压缩磁流体动力学方程解的适定性和小 Mach 数极限, 已有大量的研究. 等熵磁流体动力学方程在特殊始值条件下局部光滑解的不可压缩极限可参见文献 [21, 33].

Hu 和 Wang [23,24] 证明了三维有界域中具有一般初始值的完全或等熵可压缩磁流体动力学方程弱解的全局存在性. Jiang 等 [27] 针对理想流体证明了在全空间一般初始值的非等熵磁流体动力学系统的局部经典解的小 Mach 数极限. 最近, Ou 和 Yang [40] 在一般初始值条件下, 当 $\nu = 0$ 或 ν 是非零常数时得到了等熵可压缩磁流体动力学方程的局部强解的小 Mach 数极限. 关于非稳态可压缩磁流体动力学方程更多的解的存在性和奇异极限结果, 可参见文献 [8–10, 30, 31].

然而, 与非稳态系统相比, 关于稳态可压缩磁流体动力学方程边值问题的研究较少. Yang 等 [51] 建立了带有小外力的稳态等熵可压缩磁流体动力学方程在常态附近解的存在性和局部唯一性. 当具有大外力时, Zhou [52] 证明了当 $\gamma > 1$ 时周期区域内稳态等熵可压缩磁流体方程弱解的存在性. Yan [50] 采用了近似 - 弱收敛方法得到 Navier 滑移边界的三维稳态全 MHD (magnetohydrodynamics) 方程弱解存在性, 但却排除了理想多变气体的某些真实情况. 最近, Gu 和 Ou [20] 得到了多方理想气体带有大外力的稳态完全磁流体动力学方程在速度满足 Navier 滑移边界条件下强解的存在性和小 Mach 数极限, 但其中在分解磁场函数时需要磁场的可压部分的估计随着 Mach 数的减少而减少的人为假设条件.

本文考虑速度满足 Dirichlet 边界条件下带有大外力的稳态完全可压磁流体动力学方程强解的存在性和小 Mach 数极限问题.

通过尺度变化和直接计算, (1.1) 变为如下无量纲的稳态可压缩磁流体动力学方程组:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\varrho^\epsilon \mathbf{u}^\epsilon) = 0, \\ \varrho^\epsilon \mathbf{u}^\epsilon \cdot \nabla \mathbf{u}^\epsilon + \frac{\nabla p^\epsilon}{\epsilon^2} = \operatorname{div} \mathbb{S}(\nabla \mathbf{u}^\epsilon) + (\nabla \times \mathbf{H}^\epsilon) \times \mathbf{H}^\epsilon + \varrho^\epsilon \mathbf{f} + \mathbf{g}, \\ -\nabla \times (\mathbf{u}^\epsilon \times \mathbf{H}^\epsilon) = -\nu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}^\epsilon), \quad \operatorname{div} \mathbf{H}^\epsilon = 0, \\ \varrho^\epsilon \mathbf{u}^\epsilon \cdot \nabla \Theta^\epsilon + p \operatorname{div} \mathbf{u}^\epsilon = \kappa \Delta \Theta^\epsilon + \epsilon^2 (\Psi_1^\epsilon + \Psi_2^\epsilon), \end{cases} \quad (1.4)$$

其中 ϵ 是 Mach 数.

既然流体的总质量是给定的, 可令

$$\bar{\varrho}^\epsilon := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varrho^\epsilon(x) dx > 0,$$

不失一般性, 可将其单位化 $\bar{\varrho}^\epsilon = 1$. 类似地, 可假设 $\bar{\Theta}^\epsilon = 1$, $R = c_v = 1$ 和 $\Theta_0^\epsilon = 1$.

为证明强解的存在性, 作如下变换:

$$\varrho^\epsilon = 1 + \epsilon \rho, \quad \Theta^\epsilon = 1 + \epsilon \theta, \quad (1.5)$$

则系统 (1.4) 可转化为

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u} + \epsilon \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ (1 + \epsilon \rho)(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \frac{(1 + \epsilon \theta) \nabla \rho}{\epsilon} + \frac{(1 + \epsilon \rho) \nabla \theta}{\epsilon} = \operatorname{div} \mathbb{S}(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} + (1 + \epsilon \rho) \mathbf{f} + \mathbf{g}, \\ -\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H}) = \nu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}), \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \epsilon(1 + \epsilon \rho) \mathbf{u} \cdot \nabla \theta + \operatorname{div} \mathbf{u} + (\epsilon \rho + \epsilon \theta + \epsilon^2 \rho \theta) \operatorname{div} \mathbf{u} = \epsilon \kappa \Delta \theta + \epsilon^2 (\Psi_1 + \Psi_2), \end{cases} \quad (1.6)$$

其边界条件为

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{n} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \quad (1.7)$$

本文的主要定理如下:

定理 1.1 设 Ω 是具有光滑边界的有界域. 令 $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in H^2(\Omega)$, 则存在依赖于 $\|(\mathbf{f}, \mathbf{g})\|_{H^2}$ 和 Ω 的 ϵ_0 , 使得对任意的 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, 边值问题 (1.6) 和 (1.7) 存在一个强解 $(\rho^\epsilon, \mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{H}^\epsilon, \theta^\epsilon) \in \bar{H}^2 \times (H^3 \cap H_0^1) \times (H^3 \cap H_0^1) \times (H^3 \cap H_0^1)$ 满足

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_{U, \mathbf{H}, P \in \mathbf{L}} \|\mathbf{u}^\epsilon - U\|_3 + \|\mathbf{H}^\epsilon - \mathbf{H}\|_3 + \|\rho^\epsilon\|_2 + \|\theta^\epsilon\|_3 + \left\| \frac{\rho^\epsilon + \theta^\epsilon}{\epsilon} - P \right\|_2 = 0,$$

其中 $(U, \mathbf{H}, P) \in \mathbf{L} := \{(U, \mathbf{H}, P) \in (H^4 \cap H_0^1) \times (H^4 \cap H_0^1) \times \bar{H}^3 \mid (U, \mathbf{H}, P) \text{ 是带有外力 } \mathbf{f} + \mathbf{g} \text{ 的稳态不可压磁流体方程 (1.8) 的解}\}$, 即

$$\begin{cases} U \cdot \nabla U + \nabla P = \mu \Delta U + (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} + \mathbf{f} + \mathbf{g}, \\ \operatorname{div} U = 0, \\ -\nabla \times (U \times \mathbf{H}) = -\nu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}), \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ U = 0, \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad \int_{\Omega} P dx = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

注 1.1 若令速度 $\mathbf{u}$ 满足 Navier 滑移边界条件, 则可得到如同定理 1.1 的类似结论, 并且不需要文献 [20] 对磁场可压部分的先验估计限制. 考虑周期区域内 (1.6) 的空间周期解的存在性, 也可得到如同定理 1.1 的类似结论.

注 1.2 一般而言, 稳态可压磁流体方程 (1.1) 的边值问题解的唯一性无法得到, 因为缺少稳态不可压磁流体方程 (1.8) 强解的唯一性. 不可压流体动力学方程的结果, 可参见文献 [19, 第 IX 章].

本文余下内容的结构安排如下. 第 2 节证明线性不可压缩方程和可压缩方程弱解的存在性和正则性. 第 3 节建立非线性方程强解的存在性. 第 4 节得到稳态可压缩磁流体动力学方程解的小 Mach 数极限.

令 L^2 是 Lebesgue 空间 $L^2(\Omega)$, 带有范数 $\|\cdot\|_0$; H^m 是 Sobolev 空间 $H^m(\Omega)$, 带有范数 $\|\cdot\|_m$. 定义

$$\bar{H}^m = \left\{ \rho \in H^m \mid \int_{\Omega} \rho(x) dx = 0 \right\}, \quad H_{0,\sigma}^1 = \{\mathbf{u} \in H_0^1 \mid \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}, \quad H_{0,\sigma}^m := H^m \cap H_{0,\sigma}^1.$$

令 H^{-1} 为 H_0^1 的对偶空间, 带有对偶积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和范数 $\|\cdot\|_{-1} = \sup_{\|h\|_1=1} |\langle \cdot, h \rangle|$. 并将积分简写为

$$\int \cdot dx := \int_{\Omega} \cdot dx.$$

2 线性问题解的存在性

首先, 将系统 (1.6) 分成两部分: 一部分类似不可压磁流体动力学方程, 另一部分类似可压 Navier-Stokes 方程. 更确切地, 令 $(U, \mathbf{H}, P)$ 和 $(\mathbf{v}, \theta, \zeta)$ 分别为下述系统的解:

$$\begin{cases} U \cdot \nabla U + \mathbf{v} \cdot \nabla U + \nabla P = \mu \Delta U + (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} + \mathbf{f} + \mathbf{g}, \\ \operatorname{div} U = 0, \\ -\nabla \times (U \times \mathbf{H}) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = -\nu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}), \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ U = 0, \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad \int_{\Omega} P dx = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

和

$$\begin{cases} U \cdot \nabla \zeta + \frac{\operatorname{div} \mathbf{v}}{\epsilon} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \zeta - \zeta \operatorname{div} \mathbf{v} - \epsilon \operatorname{div}(P(U + \mathbf{v})), \\ U \cdot \nabla \mathbf{v} - \mu \Delta \mathbf{v} - (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\nabla \zeta + \nabla \theta}{\epsilon} \\ \quad = \epsilon F - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \theta \nabla \zeta - \zeta \nabla \theta, \\ U \cdot \nabla \theta - \kappa \Delta \theta + \frac{\operatorname{div} \mathbf{v}}{\epsilon} = \epsilon G - \mathbf{v} \cdot \nabla \theta - \zeta \operatorname{div} \mathbf{v} - \theta \operatorname{div} \mathbf{v}, \\ \mathbf{v} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad \int_{\Omega} \zeta dx = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

其中, 新外力 F 和新热源 G 分别定义为

$$\begin{aligned} F &= (\epsilon P + \zeta) \mathbf{f} - (\epsilon P + \zeta)(U + \mathbf{v}) \cdot \nabla(U + \mathbf{v}) - \theta \nabla P - P \nabla \theta, \\ G &= \Psi_1 + \Psi_2 - (\epsilon P + \zeta)(U + \mathbf{v}) \cdot \nabla \theta - (\epsilon P + \zeta) \theta \operatorname{div} \mathbf{v} - P \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

显然, $\mathbf{u} := U + \mathbf{v}$, $\mathbf{H}$, $\rho := \epsilon P + \zeta$ 和 θ 是系统 (1.6) 的解. 因此, 如果系统 (2.1) 和 (2.2) 能被解, 则系统 (1.6) 的解即可得到. 首先, 给出线性不可压系统 (2.1) 弱解的存在性, 并推导出关于未知函数 $(U, \mathbf{H}, P)$ 高阶导数的一致估计. 然后, 得到线性可压问题 (2.2) 的弱解存在性, 并建立未知函数 $(\zeta, \mathbf{v}, \theta)$ 的高阶导数的一致估计.

不失一般性, 假设 $\operatorname{meas}(\Omega) = 1$, 即 Ω 的测度为 1. 为方便起见, 给出下面的引理和推论.

引理 2.1 (插值不等式, 参见文献 [18, 定理 10.1]) 令 $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, N 为具有 C^k 光滑边界的有界区域, 并且 $u \in W^{k,r}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ ($1 \leq r, q \leq \infty$). 对任意的整数 j ($0 \leq j < k$) 和任意的数 $\alpha \in [\frac{j}{k}, 1]$, 令 $\frac{1}{p} = \frac{j}{N} + \alpha(\frac{1}{r} - \frac{j}{N}) + (1 - \alpha)\frac{1}{q}$. 如果 $k - j - N/r$ 不是非负整数, 则

$$\|D_j u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{k,r}(\Omega)}^\alpha \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha}. \quad (2.3)$$

若 $k - j - N/r$ 是非负整数, 则 (2.3) 只在 $\alpha = j/k$ 时成立. 常数 C 只依赖于 Ω, r, q, k, j 和 α .

引理 2.2 令 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是带有 C^3 光滑边界的有界开区域, 则下面不等式成立:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^3(\Omega)} &\leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \quad \|\nabla^2 u\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^3(\Omega)}^{\frac{3}{4}} \|u\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}}, \\ \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C \|u\|_{W^{2,4}(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^3(\Omega)}^{\frac{3}{4}} \|u\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

2.1 线性不可压方程组

给定 $\tilde{U}, \tilde{\mathbf{H}}$ 和 $\tilde{\mathbf{v}}$ 满足 $\tilde{U} \in H_{0,\sigma}^4$, $\tilde{\mathbf{H}} \in H_{0,\sigma}^4$ 和 $\tilde{\mathbf{v}} \in H^3 \cap H_0^1$. 首先考虑如下给定 $\tilde{U}$ 和 $\tilde{\mathbf{v}}$ 的 (2.1) 的线性方程组:

$$\begin{cases} (\tilde{U} + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla U - \mu \Delta U + \nabla P = \mathbf{h} + (\nabla \times \mathbf{H}) \times \tilde{\mathbf{H}}, \\ \operatorname{div} U = 0, \\ \nu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \times (U \times \tilde{\mathbf{H}}) + \nabla \times (\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{H}), \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ U = 0, \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad \int_{\Omega} P dx = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

其中 $\mathbf{h} = \mathbf{f} + \mathbf{g}$.

问题 (2.4) 是一个带有任意大外力的 Stokes- 椭圆方程混合问题. 事实上, 当 $\tilde{\mathbf{v}}$ 小时, (2.4) 可利用 Lax-Milgram 定理得到如下存在性结果. 对于 Stokes 问题的求解也可参见文献 [4].

引理 2.3 令 $\mathbf{h} \in H^{-1}$, $\tilde{U} \in H_{0,\sigma}^1$, 并且 $\tilde{\mathbf{v}} \in H^3 \cap H_0^1$. 假设存在一个常数 a_0 只依赖于 μ, ν 和 Ω , 使得 $\|\tilde{\mathbf{v}}\|_3 < a_0$, 则 (2.4) 存在弱解 $(U, P) \in H_0^1 \times \bar{H}^0$ 满足

$$\|U\|_1 + \|\mathbf{H}\|_1 \leq C_0 \|\mathbf{h}\|_{-1}, \quad (2.5)$$

$$\|P\|_0 \leq C_1 \|\mathbf{h}\|_{-1} (1 + \|\mathbf{h}\|_{-1}), \quad (2.6)$$

其中 $C_0 > 0$ 和 $C_1 > 0$ 是常数, 只依赖于 Ω, μ, ν 和 a_0 .

证明 首先, 定义双线性型算子 $A : (H_{0,\sigma}^1 \times H_{0,\sigma}^1) \times (H_{0,\sigma}^1 \times H_{0,\sigma}^1) \rightarrow \mathbb{R}$ 如下:

$$\begin{aligned} A((U, \mathbf{H}), (V, \Phi)) &= \int ((\tilde{U} + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla U) \cdot V dx - \mu \int \Delta U \cdot V dx - \int \nabla \times \mathbf{H} \times \tilde{\mathbf{H}} \cdot V dx \\ &\quad + \nu \int \nabla \times \mathbf{H} \cdot \nabla \times \Phi dx - \int \nabla \times (U \times \tilde{\mathbf{H}}) \cdot \Phi dx \\ &\quad - \int \nabla \times (\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{H}}) \cdot \Phi dx, \end{aligned} \quad (2.7)$$

对给定的 $(V, \Phi) \in H_{0,\sigma}^1 \times H_{0,\sigma}^1$. 由 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式可知

$$\begin{aligned} A((U, \mathbf{H}), (V, \Phi)) &\leq \|\tilde{U} + \tilde{\mathbf{v}}\|_{L^3} \|\nabla U\|_0 \|V\|_1 + \mu \|\nabla U\|_0 \|\nabla V\|_0 + C(\Omega) \|\mathbf{H}\|_1 \|\tilde{\mathbf{H}}\|_1 \|V\|_1 \\ &\quad + \nu \|\nabla \times \mathbf{H}\|_0 \|\nabla \times \Phi\|_0 + C(\Omega) \|U\|_1 \|\tilde{\mathbf{H}}\|_1 \|\Phi\|_1 + C(\Omega) \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1 \|\tilde{\mathbf{H}}\|_1 \|\Phi\|_1 \\ &\leq C(\Omega) (\mu + \nu + \|\tilde{\mathbf{H}}\|_1 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1) \cdot (\|U\|_1 + \|\mathbf{H}\|_1) \cdot (\|V\|_1 + \|\Phi\|_1), \end{aligned} \quad (2.8)$$

则 A 是连续的. 利用等式 $\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$ 、分布积分和边界条件, 可知

$$\begin{aligned} &\int ((\nabla \times \mathbf{H}) \times \tilde{\mathbf{H}}) \cdot U dx + \int \nabla \times (U \times \tilde{\mathbf{H}}) \cdot \mathbf{H} dx \\ &= \int \operatorname{div}[(U \times \tilde{\mathbf{H}}) \times \mathbf{H}] dx \\ &= \int_{\partial\Omega} [(U \times \tilde{\mathbf{H}}) \times \mathbf{H}] \cdot \mathbf{n} ds \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

进而有

$$\begin{aligned} &A((U, \mathbf{H}), (U, \mathbf{H})) \\ &= -\frac{1}{2} \int \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} |U|^2 dx + \mu \int |\nabla U|^2 dx + \nu \int |\nabla \times \mathbf{H}|^2 dx - \int \nabla \times (\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} dx \\ &\geq -\frac{\alpha_1}{2} \|\operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}\|_0 \|U\|_1^2 + \mu \|\nabla U\|_0^2 + \nu \|\nabla \times \mathbf{H}\|_0^2 - \alpha_2 \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1 \|\mathbf{H}\|_1^2 \\ &\geq [w(\mu, \nu, \Omega) - a_0(\alpha_1 + \alpha_2)] (\|U\|_1^2 + \|\mathbf{H}\|_1^2), \end{aligned} \quad (2.10)$$

其中 α_1 和 α_2 依赖于 Ω .

取 $a_0 < \frac{w(\mu, \nu, \Omega)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)}$, 可得

$$\mu \|\nabla U\|_0^2 + \nu \|\nabla \times \mathbf{H}\|_0^2 \geq w(\mu, \nu, \Omega) (\|U\|_1^2 + \|\mathbf{H}\|_1^2), \quad (2.11)$$

即得到了算子 A 的强制性.

给定 $\mathbf{h} \in H^{-1}$, 对算子 A 利用 Lax-Milgram 定理, 可得存在 $(U, \mathbf{H}) \in H_{0,\sigma}^1 \times H_{0,\sigma}^1$, 满足对所有的 $(V, \Phi) \in H_{0,\sigma}^1 \times H_{0,\sigma}^1$, 有

$$A((U, \mathbf{H}), (V, \Phi)) = \langle (\mathbf{h}, 0), (V, \Phi) \rangle. \quad (2.12)$$

如果令 $(V, \Phi) = (U, \mathbf{H})$, 则

$$\frac{w}{2}(\|U\|_1^2 + \|\mathbf{H}\|_1^2) \leq A((U, \mathbf{H}), (U, \mathbf{H})) = \langle (\mathbf{h}, 0), (U, \mathbf{H}) \rangle \leq \|\mathbf{h}\|_{-1}(\|U\|_1 + \|\mathbf{H}\|_1).$$

进而有

$$\|U\|_1 + \|\mathbf{H}\|_1 \leq C_0 \|\mathbf{h}\|_{-1}, \quad (2.13)$$

其中 $C_0 = \frac{2}{w}$.

由文献 [47, 性质 1.1 和 1.2] 知, 对上述的 $(U, \mathbf{H}) \in H_{0,\sigma}^1 \times H_{0,\sigma}^1$, 存在 $P \in L_0^2$, 使得对任意的 $(V, \Phi) \in C_\sigma^\infty \times C_\sigma^\infty$, 有

$$\langle (\nabla P, 0)(V, \Phi) \rangle = \int_\Omega \nabla P \cdot V dx = 0.$$

进一步由 (2.12) 可得

$$\langle (\nabla P, 0)(V, \Phi) \rangle = -A((U, \mathbf{H}), (V, \Phi)) + \langle (\mathbf{h}, 0), (V, \Phi) \rangle,$$

即

$$A((U, \mathbf{H}), (V, \Phi)) + \langle (\nabla P, 0)(V, \Phi) \rangle = \langle (\mathbf{h}, 0), (V, \Phi) \rangle.$$

因此, $(U, P, \mathbf{H})$ 为 (2.4) 的一个弱解, 且 $(U, \mathbf{H})$ 满足 (2.13). 下面利用 L_0^2 的对偶基定义

$$\|P\|_0 = \sup_{\{\Psi \in L_0^2: \|\Psi\|_0=1\}} |\langle P, \Psi \rangle|.$$

由 Bogovskii 问题的解存在性定理 (参见文献 [19, 引理 3.17]) 可知, 存在 $\phi \in H_0^1$ 满足

$$\operatorname{div} \phi = \Psi \quad \text{并且} \quad \|\phi\|_1 \leq C(\Omega) \|\Psi\|_0.$$

利用分部积分可得

$$\|P\|_0 = \sup_{\{\phi \in H_0^1: \|\phi\|_1 \leq C(\Omega)\}} |\langle P, \operatorname{div} \phi \rangle| = \sup_{\{\phi \in H_0^1: \|\phi\|_1 \leq C(\Omega)\}} |\langle \nabla P, \phi \rangle|,$$

又因为

$$\begin{aligned} |\langle \nabla P, \phi \rangle| &= \left| \int_\Omega [-(\tilde{U} + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla U + \mu \Delta U + \mathbf{h} + (\nabla \times \mathbf{H}) \times \tilde{\mathbf{H}}] \cdot \phi dx \right| \\ &= \left| \int_\Omega (\tilde{U} + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla U \cdot \phi dx + \int_\Omega \mu \nabla U \times \nabla \phi dx \right. \\ &\quad \left. - \int_\Omega \mathbf{h} \times \nabla \phi dx - \int_\Omega (\nabla \times \mathbf{H}) \times \tilde{\mathbf{H}} \cdot \phi dx \right| \\ &\leq C \|\mathbf{h}\|_{-1} (1 + \|\mathbf{h}\|_{-1}) \|\phi\|_1, \end{aligned}$$

所以

$$\|P\|_0 \leq C_1 \|\mathbf{h}\|_{-1} (1 + \|\mathbf{h}\|_{-1}),$$

这里用到了估计 (2.13), 并且常数 $C_1 > 0$ 依赖于 Ω, μ, ν 和 C_0 . 证毕. $\square$

对于解的正则性, 需要分别考虑 Stokes 问题

$$\begin{cases} -\mu\Delta U + \nabla P = \mathbf{h} - (\tilde{U} + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla U + (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}, \\ \operatorname{div} U = 0, \\ U = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{cases} \quad (2.14)$$

和椭圆方程边值问题

$$\begin{cases} -\mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\nabla \times (U \times \tilde{\mathbf{H}}) - \nabla \times (\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{H}), \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \quad (2.15)$$

则利用类似于文献 [4] 中的靴带引理可得解的正则性定理.

引理 2.4 如果 $\mathbf{h} \in H^0$, $(\tilde{U}, \tilde{\mathbf{H}}) \in H_{0,\sigma}^1$, $\tilde{\mathbf{v}} \in H_\sigma^1$ 满足引理 2.3, 则

$$\|U\|_2 + \|\mathbf{H}\|_2 + \|\nabla P\|_0 \leq C_2 \|\mathbf{h}\|_0 (\|\mathbf{h}\|_0 + 1)^4. \quad (2.16)$$

如果 $\mathbf{h} \in H^1$, $(\tilde{U}, \tilde{\mathbf{H}}) \in (H_{0,\sigma}^2)^2$, $\tilde{\mathbf{v}} \in H^2 \cap H_\sigma^1$ 满足 (2.16), 则

$$\|U\|_3 + \|\mathbf{H}\|_3 + \|\nabla P\|_1 \leq C_3 \|\mathbf{h}\|_1 (\|\mathbf{h}\|_1 + 1)^8. \quad (2.17)$$

如果 $\mathbf{h} \in H^2$, $(\tilde{U}, \tilde{\mathbf{H}}) \in (H_{0,\sigma}^3)^2$, $\tilde{\mathbf{v}} \in H^3 \cap H_\sigma^1$ 满足 (2.17), 则

$$\|U\|_4 + \|\mathbf{H}\|_4 + \|\nabla P\|_2 \leq C_4 \|\mathbf{h}\|_2 (\|\mathbf{h}\|_2 + 1)^{12}. \quad (2.18)$$

证明 由 Stokes 问题和椭圆方程边值问题标准的正则性理论可得, 当 $m = 0, 1, 2$ 时,

$$\|U\|_{m+2} + \|\nabla P\|_m \leq C \|\nabla^m (\mathbf{h} + (\nabla \times \mathbf{H}) \times \tilde{\mathbf{H}} - (\tilde{U} + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla U)\|_0, \quad (2.19)$$

并且

$$\|\mathbf{H}\|_{m+2} \leq C \|\nabla^m (\nabla \times (U \times \tilde{\mathbf{H}}) + \nabla \times (\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{H}))\|_0, \quad (2.20)$$

其中 C 依赖于 μ, ν 和 Ω .

由 Sobolev 嵌入不等式、Cauchy 不等式和 Young 不等式可得, 当 $m = 0, 1, 2$ 时,

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla^{m+1} w\|_0 &\leq \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{L^6} \|\nabla^{m+1} w\|_{L^3} \leq C \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1 \|w\|_{m+1}^{\frac{1}{2}} \|w\|_{m+2}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{8} \|w\|_{m+2}^2 + C \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1^2 \|w\|_{m+1}^2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

当 $m = 0$ 时, 根据不等式 (2.21), 可得不等式

$$\|(\tilde{U} + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla U\|_0 \leq \frac{1}{8} \|U\|_2^2 + C \|U + \tilde{\mathbf{v}}\|_1^2 \|U\|_1 \quad (2.22)$$

和

$$\|\nabla \times \mathbf{H} \times \tilde{\mathbf{H}}\|_0 \leq \frac{1}{8} \|\mathbf{H}\|_2^2 + C \|\tilde{\mathbf{H}}\|_1^2 \|\mathbf{H}\|_1, \quad (2.23)$$

继续估计可得

$$\begin{aligned}\|\nabla \times (\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{H}})\|_0 &\leq \|\mathbf{H} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}\|_0 + \|\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{H}}\|_0 \leq C\|\mathbf{H}\|_{L^\infty} \|\nabla \tilde{\mathbf{v}}\|_{L^2} + \|\nabla \mathbf{H}\|_{L^3} \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{L^6} \\ &\leq \frac{1}{4}\|\mathbf{H}\|_2 + C(\|\mathbf{H}\|_1 \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1^4 + \|H\|_1 \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1^2),\end{aligned}\quad (2.24)$$

并且

$$\begin{aligned}\|\nabla \times (U \times \tilde{\mathbf{H}})\|_0 &\leq \|\mathbf{H} \cdot \nabla U\|_0 + \|U \cdot \nabla \tilde{\mathbf{H}}\|_0 \leq C\|\mathbf{H}\|_{L^\infty} \|\nabla U\|_{L^2} + \|\nabla \mathbf{H}\|_{L^3} \|U\|_{L^6} \\ &\leq \frac{1}{4}\|\mathbf{H}\|_2 + C(\|\mathbf{H}\|_1 \|U\|_1^4 + \|H\|_1 \|U\|_1^2).\end{aligned}\quad (2.25)$$

因此, (2.16) 可由 (2.5) 和估计式 (2.22)–(2.25) 得到.

当 $m = 1$ 时, 由 (2.16), (2.21) 和引理 2.2 中的插值不等式, 可得

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^3} &\leq C\|u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \\ \|\nabla^2 u\|_{L^4} &\leq C\|u\|_{H^3}^{\frac{3}{4}} \|u\|_{H^2}^{\frac{1}{4}}, \\ \|\nabla u\|_{L^\infty} &\leq C\|u\|_{W^{2,4}} \leq C\|u\|_{H^3}^{\frac{3}{4}} \|u\|_{H^2}^{\frac{1}{4}},\end{aligned}$$

并且可估计

$$\begin{aligned}\|\nabla(\nabla \times (U \times \tilde{\mathbf{H}}))\|_0 &\leq \|\nabla(\mathbf{H} \cdot \nabla U)\|_0 + \|\nabla(U \cdot \nabla \tilde{\mathbf{H}})\|_0 \\ &\leq C(\|\mathbf{H}\|_{L^6} \|\nabla^2 U\|_{L^3} + \|\nabla \mathbf{H}\|_{L^6} \|\nabla U\|_{L^3} + \|\nabla^2 \mathbf{H}\|_{L^2} \|U\|_{L^\infty}) \\ &\leq \frac{1}{8}\|U\|_3 + C(\|\mathbf{H}\|_1^2 \|U\|_2 + \|\mathbf{H}\|_2 \|U\|_2^{\frac{1}{2}} \|U\|_1^{\frac{1}{2}} + \|U\|_2^{\frac{3}{4}} \|U\|_1^{\frac{1}{4}} \|\tilde{\mathbf{H}}\|_2) \\ &\leq \frac{1}{8}\|U\|_3 + C\|\mathbf{h}\|_1 (\|\mathbf{h}\|_1 + 1)^8.\end{aligned}\quad (2.26)$$

对 $\nabla(\nabla \times \mathbf{H} \times \tilde{\mathbf{H}})$ 估计如下:

$$\begin{aligned}\|\nabla(\nabla \times \mathbf{H} \times \tilde{\mathbf{H}})\|_0 &\leq C(\|\mathbf{H}\|_2 \|\tilde{\mathbf{H}}\|_1 + \|\nabla \mathbf{H}\|_{L^2} \|\nabla \tilde{\mathbf{H}}\|_{L^2}) \\ &\leq \frac{1}{8}\|\mathbf{H}\|_3 + C\|\mathbf{h}\|_1 (\|\mathbf{h}\|_1 + 1)^8.\end{aligned}\quad (2.27)$$

当 $m = 2$ 时, 由 (2.17), (2.21) 和引理 2.2 的插值不等式, 可得

$$\begin{aligned}\|\nabla^2(\nabla \times (U \times \tilde{\mathbf{H}}))\|_0 &\leq \|\nabla^2(\mathbf{H} \cdot \nabla U)\|_0 + \|\nabla^2(U \cdot \nabla \tilde{\mathbf{H}})\|_0 \\ &\leq C(\|\mathbf{H}\|_{L^6} \|\nabla^3 U\|_{L^3} + \|\nabla \mathbf{H}\|_{L^6} \|\nabla^2 U\|_{L^3} + \|\nabla^2 \mathbf{H}\|_{L^6} \|\nabla U\|_{L^3} + \|\nabla^3 \mathbf{H}\|_{L^2} \|U\|_{L^\infty}) \\ &\leq \frac{1}{8}\|U\|_4 + C(\|\mathbf{H}\|_1^2 \|U\|_3 + \|\mathbf{H}\|_2 \|U\|_3^{\frac{1}{2}} \|U\|_2^{\frac{1}{2}} + \|\mathbf{H}\|_3 \|U\|_2^{\frac{1}{2}} \|U\|_1^{\frac{1}{2}} + \|U\|_2^{\frac{3}{4}} \|U\|_1^{\frac{1}{4}} \|\tilde{\mathbf{H}}\|_3) \\ &\leq \frac{1}{8}\|U\|_4 + C\|\mathbf{h}\|_2 (\|\mathbf{h}\|_2 + 1)^{12},\end{aligned}\quad (2.28)$$

并且对 $\nabla^2(\nabla \times \mathbf{H} \times \tilde{\mathbf{H}})$ 的估计如下:

$$\begin{aligned}\|\nabla^2(\nabla \times \mathbf{H} \times \tilde{\mathbf{H}})\|_0 &\leq C(\|\mathbf{H}\|_3 \|\tilde{\mathbf{H}}\|_1 + \|\nabla \mathbf{H}\|_{L^2} \|\nabla^2 \tilde{\mathbf{H}}\|_{L^2}) \\ &\leq \frac{1}{8}\|\mathbf{H}\|_4 + C\|\mathbf{h}\|_2 (\|\mathbf{h}\|_2 + 1)^{12},\end{aligned}\quad (2.29)$$

其他的项可类似估计. 因此, (2.17) 和 (2.18) 可由上述不等式得到. $\square$

令 $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in H^2(\Omega)$, 显然 $\mathbf{h} \in H^2(\Omega)$. 定义空间 K_0 为

$$K_0 := \{(U, \mathbf{H}) \in H_{0,\sigma}^4(\Omega) \times H_{0,\sigma}^4(\Omega) : \|U\|_1 + \|\mathbf{H}\|_1 \leq C_1 \|\mathbf{h}\|_1, \|U\|_2 + \|\mathbf{H}\|_2 \leq C_2 \|\mathbf{h}\|_0 (\|\mathbf{h}\|_0 + 1)^4, \\ \|U\|_3 + \|\mathbf{H}\|_3 \leq C_3 \|\mathbf{h}\|_1 (\|\mathbf{h}\|_1 + 1)^8, \|U\|_4 + \|\mathbf{H}\|_4 \leq C_4 \|\mathbf{h}\|_2 (\|\mathbf{h}\|_2 + 1)^{12}\}. \quad (2.30)$$

因此, 由引理 2.4 可知, 既然常数 $C_1, \dots, C_4$ 不依赖于 $\tilde{U}$, 则对给定的 $\tilde{U} \in K_0$, 系统 (2.4) 的解 U 仍然属于 K_0 .

2.2 线性可压缩方程组

给定 $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\theta}) \in (H^3 \cap H_0^1) \times (H^3 \cap H_0^1)$, 并给定线性不可压缩方程组 (2.4) 得到的 $(U, \mathbf{H}) \in H_{0,\sigma}^4 \times H_{0,\sigma}^4$, 本小节给出三维系统 (2.2) 的线性方程组弱解的存在性和正则性估计, 二维情形下可完全类似得到. 利用 Tikhonov 不动点定理, 可进一步得到带有边界条件 (1.7) 的方程组 (1.6) 的强解存在性. 为此, 对给定的 $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\theta}) \in (H^3 \cap H_0^1) \times (H^3 \cap H_0^1)$, 令 $(\zeta, \mathbf{v}, \theta)$ 为下面线性系统 (2.31) 的唯一解, 其存在性在后面给出:

$$\begin{cases} U \cdot \nabla \zeta + \frac{\operatorname{div} \mathbf{v}}{\epsilon} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \zeta + \zeta \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = -\epsilon \operatorname{div}(P(U + \tilde{\mathbf{v}})), \\ U \cdot \nabla \mathbf{v} - \mu \Delta \mathbf{v} - (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\nabla \zeta + \nabla \theta}{\epsilon} + \tilde{\theta} \nabla \zeta + \zeta \nabla \tilde{\theta} = \epsilon \tilde{F} - \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}, \\ U \cdot \nabla \theta - \kappa \Delta \theta + \frac{\operatorname{div} \mathbf{v}}{\epsilon} + \zeta \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = \epsilon \tilde{G} - \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\theta} - \tilde{\theta} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}, \\ \mathbf{v} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad \int_{\Omega} \zeta = 0, \end{cases} \quad (2.31)$$

其中 $(U, P, \mathbf{H})$ 是第 2.1 小节中系统 (2.4) 的解, 新外力 $\tilde{F}$ 和热源 $\tilde{G}$ 分别为

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= (\epsilon P + \zeta) \mathbf{f} - (\epsilon P + \zeta)(U + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla(U + \tilde{\mathbf{v}}) - \tilde{\theta} \nabla P - P \nabla \tilde{\theta}, \\ \tilde{G} &= \tilde{\Psi}_1 + \Psi_2 - (\epsilon P + \zeta)(U + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla \tilde{\theta} - (\epsilon P + \zeta) \tilde{\theta} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} - P \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}, \end{aligned}$$

并且 $\tilde{\Psi}_1 = 2\mu D(U + \tilde{\mathbf{v}}) : D(U + \tilde{\mathbf{v}}) + \lambda(\operatorname{div}(U + \tilde{\mathbf{v}}))^2$, $\Psi_2 = \mu(\nabla \times \mathbf{H})^2$.

因此, 对给定的 $\tilde{\mathbf{v}}$ 和 $\tilde{\theta}$, 构造映射 N :

$$N(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\theta}) := (\mathbf{v}, \theta).$$

为得到映射 N 存在不动点, 需要展示两点: 一是 N 需要将空间映射到自身, 二是映射 N 的弱连续性.

由不动点的存在性进而得到系统 (2.31) 弱解的存在性. 为此, 令

$$\begin{aligned} \tilde{F}' &= \epsilon P \mathbf{f} - \epsilon P(U + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla(U + \tilde{\mathbf{v}}) - \tilde{\theta} \nabla P - P \nabla \tilde{\theta}, \\ \tilde{G}' &= \tilde{\Psi}_1 + \Psi_2 - \epsilon P(U + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla \tilde{\theta} - \epsilon P \tilde{\theta} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} - P \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}, \end{aligned}$$

则

$$\tilde{F} = \tilde{F}' + \zeta \mathbf{f} + \zeta(U + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla(U + \tilde{\mathbf{v}}), \quad \tilde{G} = \tilde{G}' - \zeta(U + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla \tilde{\theta} - \zeta \tilde{\theta} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}.$$

2.2.1 弱解的存在性

线性稳态可压 Navier-Stokes 方程组边值问题弱解的存在性引理如下 (参见文献 [7]).

引理 2.5 令 $\tilde{F}', \tilde{G}' \in H^{-1}$, $\mathbf{f} \in H^2$, 并且 (U, P) 是引理 2.3 确定的系统 (2.4) 的解. 若 $\|\tilde{\mathbf{v}}\|_3 + \|\tilde{\theta}\|_3$ 充分小, 则边值问题 (2.31) 存在唯一的弱解 $(\zeta, \mathbf{v}, \theta) \in \bar{H}^0 \times H_0^1 \times H_0^1$.

注 2.1 系统 (2.31) 的弱解是通过利用 $\phi \in H^1$, $\mathbf{V} \in H_0^1$ 和 $\Theta \in H_0^1$ 来测试系统 (2.31)₁–(2.31)₃ 得到的.

注 2.2 文献 [42] 利用 Bergman 投影将线性问题简化为传输算子方程的边值问题, 然后证明了强解的存在性以及当 $\omega = \text{Re}/(\gamma \text{Ma}^2)$ 趋于 ∞ 时的不可压极限. 本文利用逼近理论、Leray-Schauder 不动点定理、紧性讨论和磨光方法, 得到了弱解的存在唯一性.

证明 证明分为 3 步.

第 1 步 逼近系统强解的构造.

首先假设 $\tilde{F}', \tilde{G}' \in L^2$ ($\tilde{F}', \tilde{G}' \in H^{-1}$ 可利用稠密性进行处理). 定义截断函数

$$1_\alpha(\zeta) = \begin{cases} 1/\alpha, & \text{如果 } \zeta > 1/\alpha, \\ \zeta, & \text{如果 } \zeta \leq 1/\alpha. \end{cases}$$

对任意固定的正数 β 和 α , 考虑 (2.31) 的逼近系统

$$\begin{cases} -\beta \Delta \zeta = -\text{div}(U\zeta) - \frac{\text{div} \mathbf{v}}{\epsilon} - \text{div}[1_\alpha(\zeta)\tilde{\mathbf{v}}] - \epsilon \text{div}(P(U + \tilde{\mathbf{v}})) =: \text{div} R_1(\zeta, \mathbf{v}), \\ -\mu \Delta \mathbf{v} - (\mu + \lambda) \nabla \text{div} \mathbf{v} = -\frac{\nabla(\zeta + \theta)}{\epsilon} - U \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla[\tilde{\theta} 1_\alpha(\zeta)] + \epsilon[\tilde{F}' + 1_\alpha(\zeta)\mathbf{f} \\ + 1_\alpha(\zeta)(U + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla(U + \tilde{\mathbf{v}})] - \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} \\ =: R_2(\zeta, \mathbf{v}, \theta), \\ -\kappa \Delta \theta = -U \cdot \nabla \theta - \frac{\text{div} \mathbf{v}}{\epsilon} - 1_\alpha(\zeta) \text{div} \tilde{\mathbf{v}} + \epsilon\{\tilde{G}' - 1_\alpha(\zeta)[(U + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla \tilde{\theta} \\ + \tilde{\theta} \text{div} \tilde{\mathbf{v}}]\} - \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\theta} - \tilde{\theta} \text{div} \tilde{\mathbf{v}} \\ =: R_3(\zeta, \mathbf{v}, \theta), \\ \mathbf{v} = 0, \quad \theta = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad \int_\Omega \zeta dx = 0, \end{cases} \quad (2.32)$$

其中 $\mathbf{n}$ 为边界 $\partial\Omega$ 的外法线向量. 需要指出截断函数的引进使得下面的重要估计 (2.39) 成立.

接下来, 利用 Leray-Schauder 不动点定理得到 (2.32) 的强可解性. 为此, 首先考虑当 $t \in [0, 1]$, $(\chi, \mathbf{u}, \vartheta) \in \bar{H}^1 \times H_0^1 \times H_0^1$ 时以下方程组的边值问题:

$$\begin{cases} -\beta \Delta \zeta = \text{div} R_1(t\chi, t\mathbf{u}), \\ -\mu \Delta \mathbf{v} - (\mu + \lambda) \nabla \text{div} \mathbf{v} = R_2(t\chi, t\mathbf{u}, t\vartheta), \\ -\kappa \Delta \theta = R_3(t\chi, t\mathbf{u}, t\vartheta), \\ \mathbf{v} = 0, \quad \theta = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad \int_\Omega \zeta = 0. \end{cases} \quad (2.33)$$

已知由椭圆理论得到的 $(\tilde{U}, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\theta}) \in (H_{0,\sigma}^4) \times (H^3 \cap H_0^1) \times (H^3 \cap H_0^1)$ 和 $1_\alpha(\zeta) \in H^1$ (参见文献 [39, 引理 4.32 和 4.27]) 可得, 存在唯一的强解 $(\zeta, \mathbf{v}, \theta) \in H^2$ 满足 (2.33) 并且

$$\|(\zeta, \theta, \mathbf{v})\|_2 \leq C(\|\text{div} R_1(t\chi, t\mathbf{u})\|_0 + \|(R_1(t\chi, t\mathbf{u}), R_2(t\chi, t\mathbf{u}, t\vartheta), R_3(t\chi, t\mathbf{u}, t\vartheta))\|_0). \quad (2.34)$$

然后, 推导出问题强解 $(\zeta, \mathbf{v}, \theta)$ 的估计:

$$\begin{cases} -\beta\Delta\zeta = \operatorname{div}R_1(t\zeta, t\mathbf{v}), \\ -\mu\Delta\mathbf{v} - (\mu + \lambda)\nabla\operatorname{div}\mathbf{v} = R_2(t\zeta, t\mathbf{v}, t\theta), \\ -\kappa\Delta\theta = R_3(t\zeta, t\mathbf{v}, t\theta), \\ \mathbf{v} = 0, \quad \theta = 0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial\mathbf{n}} = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad \int_{\Omega}\zeta = 0, \quad t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (2.35)$$

利用 L^2 能量估计, 易得关于 $(\zeta, \mathbf{v}, \theta)$ 的不等式

$$\begin{aligned} & \int (\mu|\nabla\mathbf{v}|^2 + (\mu + \lambda)(\operatorname{div}\mathbf{v})^2)dx \\ &= \frac{1}{\epsilon} \int t(\zeta + \theta)\operatorname{div}\mathbf{v}dx + \int 1_{\alpha}(t\zeta)\tilde{\theta}\operatorname{div}\mathbf{v}dx \\ & \quad + \int \{\epsilon[\tilde{F}' + 1_{\alpha}(t\zeta)\mathbf{f} + 1_{\alpha}(t\zeta)(U + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla(U + \tilde{\mathbf{v}})] - \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla\tilde{\mathbf{v}}\}\mathbf{v}dx, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\beta \int |\nabla\zeta|^2 dx + \frac{1}{\epsilon} \int \zeta \operatorname{div}\mathbf{v}dx = -\epsilon \int \operatorname{div}(P(U + \tilde{\mathbf{v}}))\zeta dx - \frac{1}{2} \int \zeta 1_{\alpha}(t\zeta)\operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}}dx, \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} & \int \kappa|\nabla\theta|^2 dx + \frac{1}{\epsilon} \int \theta \operatorname{div}\mathbf{v}dx \\ &= \epsilon \int \tilde{G}'\theta dx - \epsilon \int (1_{\alpha}(t\zeta)(U + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla\tilde{\theta} + 1_{\alpha}(t\zeta)\tilde{\theta}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}})\theta dx \\ & \quad - \int (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla\tilde{\theta} + \tilde{\theta}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}})\theta dx - \int 1_{\alpha}(t\zeta)\theta\operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}}dx. \end{aligned} \quad (2.38)$$

因为 $t \leq 1$, $\|1_{\alpha}(\zeta)\|_0^2 \leq |\Omega|/\alpha$ 和 $\|\zeta\|_0 \leq C\|\nabla\zeta\|_0$, 对等式 (2.36)–(2.38) 求和, 可得到如下估计:

$$\|(\zeta, \mathbf{v}, \theta)\|_1 < K \equiv K(1 + \|(\tilde{F}', \tilde{G}')\|_0 + \|\mathbf{f}\|_1 + \|(U, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\theta}, P)\|_2^2), \quad (2.39)$$

其中常数 K 依赖于已知量, 但不依赖于 t .

对给定的 $(\chi, \mathbf{u}, \vartheta) \in \bar{H}^1 \times H_0^1 \times H_0^1$, 定义算子 T_t 如下:

$$T_t(\chi, \mathbf{u}, \vartheta) := (\zeta_t, \mathbf{v}_t, \theta_t) \text{ 为 (2.33) 的强解.}$$

则解算子 T_t 满足以下性质 (C 为不依赖于 t 的常数):

- 由 (2.39), 可得

$$0 \notin (I - T_t)(\partial B_K), \quad (2.40)$$

其中

$$B_K = \left\{ (\zeta, \mathbf{v}, \theta) \in H^1 \times H_0^1 \times H_0^1 \mid \|(\zeta, \mathbf{v}, \theta)\|_1 < K, \int_{\Omega}\zeta = 0 \right\}.$$

• 令 B 是 $\bar{H}^1 \times H_0^1 \times H_0^1$ 中以 0 为中心的球, 则对任意的 $t \in [0, 1]$, $T_t B$ 是 $\bar{H}^1 \times H_0^1 \times H_0^1$ 的预紧集, 因为由 (2.34) 可得

$$\|T_t(\chi, \mathbf{u}, \vartheta)\|_2 \leq C(\|(\chi, \mathbf{u}, \vartheta)\|_1 + 1)(1 + \|(\tilde{F}', \tilde{G}')\|_0 + \|\mathbf{f}\|_1 + \|(U, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\theta}, P)\|_2^2).$$

- 对任意的 $t, s \in [0, 1]$, 由椭圆正则性定理 (参见文献 [39, 引理 4.32 和 4.27]) 可得

$$\|T_t(\chi, \mathbf{u}, \vartheta) - T_s(\chi, \mathbf{u}, \vartheta)\|_1 \leq C(\|R_1(t\chi, t\mathbf{u}) - R_1(s\chi, s\mathbf{u})\|_0)$$

$$\begin{aligned}
& + \|(R_2(t\chi, t\mathbf{u}, t\vartheta), R_3(t\chi, t\mathbf{u}, t\vartheta)) - (R_2(s\chi, s\mathbf{u}, s\vartheta), R_3(s\chi, s\mathbf{u}, s\vartheta))\|_{-1}) \\
& \leq C|t-s| \|(\xi, \mathbf{u}, \vartheta)\|_1 (1 + \|(U, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\theta}, P)\|_2^2).
\end{aligned} \tag{2.41}$$

相应地, 在 (2.33) 上利用 Leray-Schauder 不动点定理 (参见文献 [39, 第 1.4.11.7 小节]) 得到逼近系统 (2.32) 的强解 $(\zeta, \mathbf{v}, \theta)$. 下文中记这样的强解为 $(\zeta_\beta^\alpha, \mathbf{v}_\beta^\alpha, \theta_\beta^\alpha)$, 用以标记其依赖于 $\alpha, \beta > 0$.

第 2 步 关于 (α, β) 的一致估计和极限过程.

因上面构造的强解 $(\zeta_\beta^\alpha, \mathbf{v}_\beta^\alpha, \theta_\beta^\alpha)$ 满足 (2.36)–(2.38) (当 $t = 1$ 时), 并且 $|1_\alpha(\zeta_\beta^\alpha)| \leq |\zeta_\beta^\alpha|$, 所以当 $\|\tilde{\mathbf{v}}\|_3 + \|\tilde{\theta}\|_3$ 和 ϵ 足够小时, 有

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}_\beta^\alpha\|_1^2 + \|\theta_\beta^\alpha\|_1^2 + \beta \|\nabla \zeta_\beta^\alpha\|_0^2 & \leq C \|\zeta_\beta^\alpha\|_0^2 [\|\tilde{\theta}\|_2 + \epsilon (\|\mathbf{f}\|_1 + \|U + \tilde{\mathbf{v}}\|_2^4) \\
& + \epsilon \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3 + \epsilon \|\tilde{\theta}\|_2^2 (\|U + \tilde{\mathbf{v}}\|_{H^1}^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^2) + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^2] + C\epsilon \|\zeta_\beta^\alpha\|_0 \|P\|_2 \|U + \tilde{\mathbf{v}}\|_2 \\
& + C\epsilon (\|\tilde{F}'\|_{-1}^2 + \|\tilde{G}'\|_{-1}^2) + C\|\tilde{\mathbf{v}}\|_1^4 + C\|\tilde{\mathbf{v}}\|_1^2 \|\tilde{\theta}\|_1^2.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

需注意的是, 在引理 2.3 的证明中, $\|\tilde{\mathbf{v}}\|_3 + \|\tilde{\theta}\|_3$ 和 ϵ 的小性不依赖于 α 和 β .

下面估计 $\|\zeta_\beta^\alpha\|_0$. 根据文献 [42, 第 123 页] 的内容, 当函数 $\xi \in L^2(\Omega)$ 且满足 $\int \xi dx = 0$ 时, 可得到函数 $q \in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$\operatorname{div} q = \xi, \quad \|q\|_1 \leq C(\Omega) \|\xi\|_0.$$

用此函数 q 乘以 (2.31)₂, 将得到的方程在 Ω 上积分, 可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon} \int (\zeta_\beta^\alpha + \theta_\beta^\alpha) \operatorname{div} q dx & = - \int (\zeta_\beta^\alpha \tilde{\theta}) \operatorname{div} q dx - \epsilon \int [\tilde{F}' + \zeta_\beta^\alpha f + \zeta_\beta^\alpha (U + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla (U + \tilde{\mathbf{v}})] \cdot q dx \\
& + \int \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} \cdot q dx + \int (U \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot q dx + \int \mu \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla q + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} q dx.
\end{aligned}$$

取 $\xi = \zeta_\beta^\alpha + \theta_\beta^\alpha - \frac{1}{|\Omega|} \int \theta_\beta^\alpha dx$ 并利用 Young 不等式, 得到

$$\begin{aligned}
\left\| \zeta_\beta^\alpha + \theta_\beta^\alpha - \frac{1}{|\Omega|} \int \theta_\beta^\alpha dx \right\|_0^2 & \leq C\epsilon (\|\mathbf{v}_\beta^\alpha\|_{H_0^1}^2 \|U\|_1^2 + \|\zeta_\beta^\alpha\|_0^2 \|\tilde{\theta}\|_2^2 + \|\mathbf{v}_\beta^\alpha\|_2^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^4) \\
& + C\epsilon^2 [\|\tilde{F}'\|_{-1}^2 + \|\zeta_\beta^\alpha\|_0^2 (\|\mathbf{f}\|_1^2 + \|U + \tilde{\mathbf{v}}\|_2^4)].
\end{aligned} \tag{2.43}$$

易得

$$\left\| \frac{1}{|\Omega|} \int \theta_\beta^\alpha dx \right\|_0^2 = \frac{1}{|\Omega|} \left(\int \theta_\beta^\alpha dx \right)^2 \leq \|\theta_\beta^\alpha\|_0^2. \tag{2.44}$$

因此, 由 (2.42)–(2.44) 和 Poincaré 不等式可得

$$\begin{aligned}
\|\zeta_\beta^\alpha\|_0^2 & \leq 2\|\zeta_\beta^\alpha + \theta_\beta^\alpha\|_0^2 + 2\|\theta_\beta^\alpha\|_0^2 \\
& \leq \left\| \zeta_\beta^\alpha + \theta_\beta^\alpha - \frac{1}{|\Omega|} \int \theta_\beta^\alpha dx \right\|_0^2 + \left\| \frac{1}{|\Omega|} \int \theta_\beta^\alpha dx \right\|_0^2 + 2\|\theta_\beta^\alpha\|_0^2 \\
& \leq C\epsilon (\|\mathbf{v}_\beta^\alpha\|_0^2 \|U\|_1^2 + \|\zeta_\beta^\alpha\|_0^2 \|\tilde{\theta}\|_2^2 + \|\mathbf{v}_\beta^\alpha\|_1^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1^4) \\
& + C\epsilon^2 [\|\tilde{F}'\|_{-1}^2 + \|\zeta_\beta^\alpha\|_0^2 (\|\mathbf{f}\|_1^2 + \|U + \tilde{\mathbf{v}}\|_2^4)] \\
& + \|\zeta_\beta^\alpha\|_0^2 C [\|\tilde{\theta}\|_2 + \epsilon (\|\mathbf{f}\|_1 + \|U + \tilde{\mathbf{v}}\|_2^4) + \epsilon \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3] \\
& + \epsilon \|\tilde{\theta}\|_2^2 (\|U + \tilde{\mathbf{v}}\|_1^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^2) + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^2 + C\epsilon \|\zeta_\beta^\alpha\|_0 \|P\|_2 \|U + \tilde{\mathbf{v}}\|_2
\end{aligned}$$

$$+ C\epsilon(\|\tilde{F}'\|_{-1}^2 + \|\tilde{G}'\|_{-1}^2) + C\|\tilde{\mathbf{v}}\|_1^4 + C\|\tilde{\mathbf{v}}\|_1^2\|\tilde{\theta}\|_1^2. \quad (2.45)$$

结合 (2.42) 和 (2.45), 可知存在一个小的常数 $\epsilon_1 > 0$, 使得对任意的 $\epsilon \leq \epsilon_1$ 和充分小的 $\|(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\theta})\|_3$, 有

$$\|\zeta_\beta^\alpha\|_{H^0}^2 + \|\mathbf{v}_\beta^\alpha\|_0^2 + \|\theta_\beta^\alpha\|_1^2 + \beta\|\nabla\zeta_\beta^\alpha\|_0 \leq C_1, \quad (2.46)$$

其中 C_1 是不依赖于 ϵ, α 和 β 的正常数. 利用 (2.32)₁ 的椭圆正则性理论, 可知

$$\|\zeta_\beta^\alpha\|_2 \leq C(\beta)\|(\operatorname{div} R_1(\zeta_\beta^\alpha, \mathbf{v}_\beta^\alpha), R_1(\zeta_\beta^\alpha, \mathbf{v}_\beta^\alpha))\|_0 \leq C \equiv C(\beta, C_1),$$

其中常数 C 不依赖于 α . 因此, 如果 α 充分小且固定 β , 则由嵌入定理 $H^2 \hookrightarrow L^\infty$, 可得

$$1_\alpha(\zeta_\beta^\alpha) = \zeta_\beta^\alpha.$$

基于此和一致估计 (2.46), 可取 (2.32) 当 $\alpha \rightarrow 0$ 时的极限 (同时保持 β 固定) 并利用标准的弱收敛得到问题 (2.32) 将 1_α 换为 1 的一个弱解 $(\zeta_\beta, \mathbf{v}_\beta, \theta_\beta)$, 并且由 (2.46) 可知

$$\|\zeta_\beta\|_0^2 + \|\mathbf{v}_\beta\|_1^2 + \|\theta_\beta\|_1^2 + \beta\|\nabla\zeta_\beta\|_0 \leq C_1.$$

利用上述关于 β 的一致估计, 用 1 来替代 (2.32) 中的 1_α , 并取 $\beta \rightarrow 0$, 得到原始问题 (2.31) 的一个弱解 $(\zeta, \mathbf{v}, \theta)$ ($(\zeta_\beta, \mathbf{v}_\beta, \theta_\beta)$ 的弱极限), 并满足 (2.46) 的极限估计

$$\|\zeta\|_0^2 + \|\mathbf{v}\|_1^2 + \|\theta\|_1^2 \leq C_1. \quad (2.47)$$

注意 (2.47) 中的常数 C_1 只依赖于 $\|(\tilde{F}', \tilde{G}')\|_{-1}$ (见 (2.46)) 并且 L^2 在 H^{-1} 中稠密, 则通过稠密性定理可得, 当 $\tilde{F}', \tilde{G}' \in H^{-1}$ 时 (2.31) 存在一个弱解 $(\zeta, \mathbf{v}, \theta)$, 并且所得到的解 $(\zeta, \mathbf{v}, \theta)$ 满足 (2.31)₁ 的弱形式, 即

$$\int_{\Omega} \left[-\operatorname{div}(\varphi U)\zeta + \left(\frac{\operatorname{div} \mathbf{v}}{\epsilon} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \zeta + \zeta \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} \right) \varphi \right] dx = - \int_{\Omega} \epsilon \operatorname{div}(P(U + \tilde{\mathbf{v}})) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H^1.$$

进而, 在 Ω 之外将 $(\zeta, P, U, \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}})$ 延拓为 0, 仍定义延拓函数为 $(\zeta, P, U, \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}})$, 可知在 $\mathbb{R}^3$ 中上述等式仍然成立, 即对任意的 $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[-\operatorname{div}(\varphi U)\zeta + \left(\frac{\operatorname{div} \mathbf{v}}{\epsilon} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \zeta + \zeta \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} \right) \varphi \right] dx = - \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon \operatorname{div}(P(U + \tilde{\mathbf{v}})) \varphi dx. \quad (2.48)$$

此为证明解的唯一性重要的一步.

第 3 步 系统 (2.31) 弱解的唯一性.

令 $(\zeta_1, \mathbf{v}_1, \theta_1), (\zeta_2, \mathbf{v}_2, \theta_2) \in \bar{H}^0 \times H_0^1 \times H_0^1$ 是系统 (2.31) 的两个弱解, 并且令 $\bar{\zeta} = \zeta_1 - \zeta_2, \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \bar{\theta} = \theta_1 - \theta_2$, 可知 $(\bar{\zeta}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\theta})$ 是下面边值问题的解:

$$\begin{cases} U \cdot \nabla \bar{\zeta} + \frac{\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}}{\epsilon} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\zeta} + \bar{\zeta} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = 0, \\ U \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} - \mu \Delta \bar{\mathbf{v}} - (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} + \frac{\nabla \bar{\zeta} + \nabla \bar{\theta}}{\epsilon} + \tilde{\theta} \nabla \bar{\zeta} + \bar{\zeta} \nabla \tilde{\theta} = \epsilon(\bar{\zeta} \mathbf{f} + \bar{\zeta}(U + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla(U + \tilde{\mathbf{v}})), \\ U \cdot \nabla \bar{\theta} - \kappa \Delta \bar{\theta} + \frac{\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}}{\epsilon} + \bar{\zeta} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = \epsilon(-\bar{\zeta}(U + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla \tilde{\theta} - \bar{\zeta} \tilde{\theta} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}), \\ \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad \bar{\theta} = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad \int_{\Omega} \bar{\zeta} = 0. \end{cases} \quad (2.49)$$

用 $\bar{\zeta}$ 测试 (2.49) 并不属于 H^1 . 为克服此困难, 我们利用磨光技巧, 定义

$$(w)_\delta(x) = \int_{\Omega} \zeta_\delta(x-y)w(y)dy, \quad x \in \Omega,$$

其中 ζ_δ 是 Friedrichs 磨光核.

现在, 取 (2.48) 中的测试函数 φ 作为磨光核光滑化 (2.49)₁, 可得

$$\begin{aligned} U \cdot \nabla(\bar{\zeta})_\delta + \frac{(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}})_\delta}{\epsilon} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla(\bar{\zeta})_\delta + (\bar{\zeta} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}})_\delta \\ = (U \cdot \nabla(\bar{\zeta})_\delta - (U \cdot \nabla \bar{\zeta})_\delta) + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla(\bar{\zeta})_\delta - (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\zeta})_\delta) \quad \text{a.e. 在 } \Omega \text{ 内,} \end{aligned} \quad (2.50)$$

其中 $U \cdot \nabla \bar{\zeta} = \operatorname{div}(U \bar{\zeta}) - \bar{\zeta} \operatorname{div} U$ 并且 $\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\zeta} = \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{v}} \bar{\zeta}) - \bar{\zeta} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}$.

既然由 Sobolev 嵌入定理知 $\zeta \in L^2$, 并且 $U, \tilde{\mathbf{v}} \in H_0^1 \cap W^{1,\infty}$, 则根据文献 [39, 引理 3.1] 中交换子的 Friedrichs 不等式, 可得

$$U \cdot \nabla(\bar{\zeta})_\delta - (U \cdot \nabla \bar{\zeta})_\delta, \quad \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla(\bar{\zeta})_\delta - (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\zeta})_\delta \rightarrow 0 \quad \text{在 } L^2(\Omega) \text{ 中强收敛.} \quad (2.51)$$

这里需指出 (2.51) 在全空间 $\mathbb{R}^3$ 中也可得到, 即如果将 $U, \tilde{\mathbf{v}}$ 和 ζ 在 Ω 的外部延拓为零, 则仍然可得 $\zeta \in L^2(\mathbb{R}^3)$ 并且 $U, \tilde{\mathbf{v}} \in H_0^1(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$, 利用文献 [39, 引理 3.1] 进而得到 (2.51).

接着, 分别用 $(\bar{\zeta})_\delta, \bar{\mathbf{v}}$ 和 $\bar{\theta}$ 试验 (2.50), (2.49)₂ 和 (2.49)₃, 得到

$$\begin{aligned} & \int (\mu |\nabla \bar{\mathbf{v}}|^2 + (\mu + \lambda) |\nabla \bar{\mathbf{v}}|^2 + \kappa |\nabla \bar{\theta}|^2) dx \\ &= \epsilon \int \bar{\zeta} \bar{\mathbf{v}} [\mathbf{f} + (U + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla (U + \tilde{\mathbf{v}})] - \bar{\zeta} \bar{\theta} [(U + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla \tilde{\theta} + \tilde{\theta} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}] dx \\ &+ \int \left[\frac{1}{2} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} |(\bar{\zeta})_\delta|^2 + \bar{\zeta} \bar{\theta} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} - (\bar{\zeta} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}})_\delta (\zeta)_\delta - \bar{\zeta} \bar{\theta} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} \right] dx \\ &+ \int \left\{ \left(\frac{\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}}{\epsilon} \zeta - \frac{(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}})_\delta}{\epsilon} (\zeta)_\delta \right) + [(U \cdot \nabla(\bar{\zeta})_\delta - (U \cdot \nabla \bar{\zeta})_\delta) + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla(\bar{\zeta})_\delta - (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\zeta})_\delta)] (\zeta)_\delta \right\} dx. \end{aligned}$$

在上述等式两边取 $\delta \rightarrow 0$, 利用 (2.51) 并注意到 (参见 (2.51))

$$\int \left(\frac{1}{2} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} |(\bar{\zeta})_\delta|^2 - (\bar{\zeta} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}})_\delta (\zeta)_\delta + \frac{\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}}{\epsilon} \zeta - \frac{(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}})_\delta}{\epsilon} (\zeta)_\delta \right) dx \rightarrow 0,$$

可有

$$\begin{aligned} \int (\mu |\nabla \bar{\mathbf{v}}|^2 + (\mu + \lambda) |\nabla \bar{\mathbf{v}}|^2 + \kappa |\nabla \bar{\theta}|^2) dx &\leq C(\|\bar{\zeta}\|_0^2 + \|\bar{\theta}\|_0^2) [(\|U\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2) \|\tilde{\theta}\|_3 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3 (1 + \|\tilde{\theta}\|_2)] \\ &+ \epsilon C(\|\bar{\zeta}\|_0^2 + \|\bar{\mathbf{v}}\|_0^2) (\|\mathbf{f}\|_2 + \|U\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2). \end{aligned} \quad (2.52)$$

另外, 对非齐次 Stokes 问题

$$\begin{cases} -\mu \Delta \bar{\mathbf{v}} + \frac{\nabla \bar{\zeta} + \nabla \bar{\theta}}{\epsilon} = -U \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} + \epsilon [\bar{\zeta} \mathbf{f} + \bar{\zeta} (U + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla (U + \tilde{\mathbf{v}})] - (\tilde{\theta} \nabla \bar{\zeta} + \bar{\zeta} \nabla \tilde{\theta}), \\ \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}, \\ \bar{\mathbf{v}} = 0, \end{cases}$$

得到估计

$$\epsilon \|\bar{\mathbf{v}}\|_1 + \|\bar{\zeta} + \bar{\theta}\|_0 \leq \epsilon C \{ (\|U\|_2 + 1) \|\bar{\mathbf{v}}\|_1 + \|\bar{\mathbf{v}}\|_1 + \epsilon \|\bar{\zeta}\|_0 [\|\mathbf{f}\|_2 + (\|U\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2)^2] + \|\bar{\zeta}\|_0 \|\tilde{\theta}\|_2 \}. \quad (2.53)$$

结合 (2.52) 和 (2.53), 利用 Poincaré 不等式, 以及 ϵ , $\|\tilde{\mathbf{v}}\|_3$ 和 $\|\tilde{\theta}\|_3$ 的小性, 得到

$$\|\bar{\zeta}\|_0 + \|\bar{\mathbf{v}}\|_1 + \|\bar{\theta}\|_1 \leq 0, \quad (2.54)$$

其蕴涵着 $\zeta_1 = \zeta_2$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ 和 $\theta_1 = \theta_2$. 引理 2.3 得证. $\square$

为得到 $(\zeta, \mathbf{v}, \theta)$ 关于 ϵ 的一致高阶估计, 需要得到 $\|\mathbf{v}\|_1$ 和 $\|\theta\|_1$ 的有界性, 如下面定理所示.

引理 2.6 令 (U, P) 是引理 2.3 给出的 (2.4) 的解, 且 $\tilde{F}, \tilde{G} \in H^{-1}$, 则可得关于 ϵ 的一致估计:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_1^2 + \|\theta\|_1^2 &\leq C_5 \left[\|\tilde{\mathbf{v}}\|_3 \|\zeta\|_0^2 + \epsilon^2 (\|\tilde{F}\|_{-1}^2 + \|\tilde{G}\|_{-1}^2) + \epsilon \|P\|_2 (\|U\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2) \|\zeta\|_0 \right. \\ &\quad \left. + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1^4 + \|\zeta\|_1^2 \|\tilde{\theta}\|_1^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1^2 (\|\tilde{\theta}\|_1^2 + \|\zeta\|_1^2) \right], \end{aligned} \quad (2.55)$$

其中常数 $C_5 > 0$ 不依赖于 ϵ .

证明 分别用 $\zeta, \mathbf{v}$ 和 θ 乘以 (2.31)₁, (2.31)₂ 和 (2.31)₃ 并积分求和, 得到

$$\begin{aligned} &C'(\|\mathbf{v}\|_1^2 + \|\theta\|_1^2) \\ &= -\frac{1}{\epsilon} \int (\operatorname{div} \mathbf{v} (\zeta + \theta) + \mathbf{v} \cdot (\nabla \zeta + \nabla \theta)) dx - \int [(U + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla \zeta \cdot \zeta + \zeta^2 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} + \epsilon \operatorname{div} (P(U + \tilde{\mathbf{v}})) \zeta] dx \\ &\quad + \int (\epsilon \tilde{F} - \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\theta} \nabla \zeta - \zeta \nabla \tilde{\theta}) \cdot \mathbf{v} dx + \int (\epsilon \tilde{G} - \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\theta} - (\zeta + \tilde{\theta}) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}) \theta dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3 \|\zeta\|_0^2 + \delta (\|\mathbf{v}\|_1^2 + \|\theta\|_1^2) + C_\delta [\epsilon^2 (\|\tilde{F}\|_{-1}^2 + \|\tilde{G}\|_{-1}^2) + \epsilon \|P\|_2 (\|U\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2) \|\zeta\|_0 \\ &\quad + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1^4 + \|\zeta\|_1^2 \|\tilde{\theta}\|_1^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1^2 (\|\tilde{\theta}\|_1^2 + \|\zeta\|_1^2)], \end{aligned} \quad (2.56)$$

其中需要用到分部积分、Sobolev 不等式和

$$-\frac{1}{\epsilon} \int ((\zeta + \theta) \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \zeta + \nabla \theta)) dx = \frac{1}{\epsilon} \int [(\zeta + \theta) \operatorname{div} \mathbf{v} - (\zeta + \theta) \operatorname{div} \mathbf{v}] dx = 0.$$

最后, 取 δ 适当小并利用 Poincaré 不等式, 则由 (2.56) 得到估计 (2.55). $\square$

2.2.2 Stokes 问题

本小节将动量方程 (2.31)₂ 重写为如下非齐次 Stokes 问题:

$$\begin{cases} -\mu \Delta \mathbf{v} + \frac{\nabla \zeta + \nabla \theta}{\epsilon} = \epsilon \tilde{F} - \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\theta} \nabla \zeta - \zeta \nabla \tilde{\theta} - U \cdot \nabla \mathbf{v} + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{v}, \\ \mathbf{v} = 0 \text{ 在 } \Omega \text{ 上}, \end{cases} \quad (2.57)$$

进而得到 $\|\mathbf{v}\|_3$ 和 $\|\frac{\nabla(\zeta+\theta)}{\epsilon}\|_1$ 的有界性.

由稳态 Stokes 问题的一般估计 (参见文献 [19, 第 IV 章])、Sobolev 嵌入公式 $H^2 \hookrightarrow L^\infty$ 和

$$\|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_1^2 \leq \delta \|\mathbf{v}\|_3^2 + C_\delta \|\mathbf{v}\|_1^2, \quad (2.58)$$

可得

$$\|\mathbf{v}\|_2 + \left\| \frac{\nabla \zeta + \nabla \theta}{\epsilon} \right\|_0 \leq C(\|\epsilon \tilde{F}\|_0 + \|\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}\|_0 + \|\tilde{\theta} \nabla \zeta\|_0 + \|\zeta \nabla \tilde{\theta}\|_0 + \|U \cdot \nabla \mathbf{v}\|_0 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_1), \quad (2.59)$$

并且

$$\|\mathbf{v}\|_3 + \left\| \frac{\nabla \zeta + \nabla \theta}{\epsilon} \right\|_1 \leq C(\|\epsilon \tilde{F}\|_1 + \|\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}\|_1 + \|\tilde{\theta} \nabla \zeta\|_1 + \|\zeta \nabla \tilde{\theta}\|_1 + \|U \cdot \nabla \mathbf{v}\|_1 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_2). \quad (2.60)$$

结合 (2.55) 和 (2.58)–(2.61), 可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_3 + \left\| \frac{\nabla \zeta + \nabla \theta}{\epsilon} \right\|_1 &\leq C_6(1 + \|U\|_2^2)\{\epsilon(\|\tilde{F}\|_1 + \|\tilde{G}\|_{-1}) + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3^2 + \|\tilde{\theta}\|_3\|\zeta\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3^{1/2}\|\zeta\|_0 \\ &\quad + [\epsilon\|P\|_2(\|U\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2)\|\zeta\|_0]^{1/2} + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1(\|\tilde{\theta}\|_1 + \|\zeta\|_1)\} + \|\nabla^2 \operatorname{div} \mathbf{v}\|_0, \end{aligned} \quad (2.61)$$

其中 C_6 是不依赖于 ϵ 的正常数.

2.2.3 $\|\nabla^2 \operatorname{div} \mathbf{v}\|_0$ 的估计

类似文献 [7, 28, 48] 中的证明, 为了控制 $\|\nabla^2 \operatorname{div} \mathbf{v}\|_0$, 分别考虑其内部估计和近边界估计. 为此, 需要仔细考虑 (2.31) 中含有大参数 $1/\epsilon$ 的项的估计.

2.2.3.1 内部估计

首先, 利用 (2.59) 估计式得到 $\nabla^2 \operatorname{div} \mathbf{v}$ 的内部估计. 令 χ_0 是 C_0^∞ 函数, 则有如下引理:

引理 2.7 存在一个正常数 C_7 不依赖于 ϵ , 使得

$$\begin{aligned} &\mu\|\chi_0 \nabla^2 \mathbf{v}\|_0^2 + (\mu + \lambda)\|\chi_0 \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}\|_0^2 + \kappa\|\chi_0 \nabla^2 \theta\|_0^2 \\ &\leq C_7[(\|U\|_3 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3)\|\zeta\|_1^2 + \epsilon^2(\|\tilde{F}\|_0^2 + \|\tilde{G}\|_0^2) + \epsilon\|P\|_2(\|U\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2)\|\zeta\|_1 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^4 \\ &\quad + \|\zeta\|_2^2\|\tilde{\theta}\|_2^2 + \|U\|_3(\|\mathbf{v}\|_1^2 + \|\theta\|_1^2) + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^2(\|\tilde{\theta}\|_1^2 + \|\zeta\|_1^2) + \|\mathbf{v}\|_1^2] + \delta \left\| \frac{\nabla \zeta + \nabla \theta}{\epsilon} \right\|_0^2. \end{aligned} \quad (2.62)$$

证明 将方程 (2.31) 关于 x 求微分, 可得

$$\begin{cases} U^j \partial_{ij}^2 \zeta + \frac{\partial_i \operatorname{div} \mathbf{v}}{\epsilon} = -\tilde{v}^j \partial_{ij}^2 \zeta - \partial_i(U^j + \tilde{v}^j) \partial_j \zeta - \tilde{v}^j \partial_{ij}^2 \zeta - \partial_i(\zeta \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}) - \epsilon \partial_i \operatorname{div}(P(U + \tilde{\mathbf{v}})), \\ U^j \partial_{ij}^2 v^k + \partial_i U^j \partial_j v^k - \mu \partial_{ijj}^3 v^k - (\mu + \lambda) \partial_{ik}^2 \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\partial_{ik}^2 \zeta + \partial_{ik}^2 \theta}{\epsilon} \\ \quad = \epsilon \partial_i \tilde{F}^k - \partial_i(\tilde{v}^j \partial_j \tilde{v}^k) - \partial_{ik}^2(\tilde{\theta} \zeta), \\ U^j \partial_{ij}^2 \theta + \partial_i U^j \partial_j \theta - \kappa \partial_{ijj}^3 \theta + \frac{\partial_i \operatorname{div} \mathbf{v}}{\epsilon} = \epsilon \partial_i \tilde{G} - \partial_i(\tilde{v}^j \partial_j \tilde{\theta}) - \partial_i((\zeta + \tilde{\theta}) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}). \end{cases} \quad (2.63)$$

将 (2.63)₁, (2.63)₂ 和 (2.63)₃ 分别乘以 $\chi_0^2 \partial_i \zeta$, $\chi_0^2 \partial_i v^k$ 和 $\chi_0^2 \partial_i \theta$, 并积分求和, 可得

$$\begin{aligned} &\mu\|\chi_0 \partial_{ij}^2 v^k\|_0^2 + (\mu + \lambda)\|\chi_0 \partial_i \operatorname{div} \mathbf{v}\|_0^2 + \kappa\|\chi_0 \partial_{ij}^2 \theta\|_0^2 \\ &= -\frac{1}{\epsilon} \int [\chi_0^2 \partial_i \operatorname{div} \mathbf{v}(\partial_i \zeta + \partial_i \theta) + \chi_0^2 \partial_i v^k \partial_k(\partial_i \zeta + \partial_i \theta)] dx \\ &\quad - \int (2\mu \chi_0 \partial_j \chi_0 \partial_{ij}^2 v^k \partial_i v^k + 2(\mu + \lambda) \chi_0 \partial_k \chi_0 \partial_i \operatorname{div} \mathbf{v} \partial_i v^k + 2\kappa \chi_0 \partial_j \chi_0 \partial_{ij}^2 \theta \partial_i \theta) dx \\ &\quad - \int \chi_0^2 [\partial_i(U^j + \tilde{v}^j) \partial_j \zeta + (U^j + \tilde{v}^j) \partial_{ji}^2 \zeta + \partial_i \zeta \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} + \zeta \partial_i \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} + \epsilon \partial_i \operatorname{div}(P(U + \tilde{\mathbf{v}}))] \partial_i \zeta dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int \chi_0^2 (\epsilon \partial_i \tilde{F}^k - \partial_i (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{v}^k) - \partial_{ik}^2 (\tilde{\theta} \zeta)) \partial_i v^k dx \\
 & + \int \chi_0^2 (\epsilon \partial_i \tilde{G} - \partial_i (\tilde{v}^j \partial_j \tilde{\theta}) - \partial_i ((\zeta + \tilde{\theta}) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}})) \partial_i \theta dx.
 \end{aligned}$$

利用 Sobolev 不等式和 Young 不等式, 以及

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{\epsilon} \int [\chi_0^2 \partial_i \operatorname{div} \mathbf{v} (\partial_i \zeta + \partial_i \theta) + \chi_0^2 \partial_i v^k \partial_k (\partial_i \zeta + \partial_i \theta)] dx \\
 & = \frac{1}{\epsilon} \int 2 \chi_0 \partial_k \chi_0 \partial_i v^k (\partial_i \zeta + \partial_i \theta) dx + \frac{1}{\epsilon} \int [\chi_0^2 \partial_i v^k \partial_k (\partial_i \zeta + \partial_i \theta) - \chi_0^2 \partial_i v^k \partial_k (\partial_i \zeta + \partial_i \theta)] dx \\
 & = \frac{1}{\epsilon} \int 2 \chi_0 \partial_k \chi_0 \partial_i v^k (\partial_i \zeta + \partial_i \theta) dx \\
 & \leq \delta \left\| \frac{\nabla \zeta + \nabla \theta}{\epsilon} \right\|_0^2 + C_\delta \|\mathbf{v}\|_1^2,
 \end{aligned}$$

对 i, j 和 k 求和, 得到

$$\begin{aligned}
 & \mu \|\chi_0 \nabla^2 \mathbf{v}\|_0^2 + (\mu + \lambda) \|\chi_0 \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}\|_0^2 + \kappa \|\chi_0 \nabla^2 \theta\|_0^2 \\
 & \leq (\|U\|_3 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3) \|\zeta\|_1^2 + \delta \left(\|\mathbf{v}\|_2^2 + \|\theta\|_2^2 + \left\| \frac{\nabla \zeta + \nabla \theta}{\epsilon} \right\|_0^2 \right) \\
 & \quad + C_\delta [\epsilon^2 (\|\tilde{F}\|_0^2 + \|\tilde{G}\|_0^2) + \epsilon \|P\|_2 (\|U\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2) \|\zeta\|_1 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^4 + \|\zeta\|_2^2 \|\tilde{\theta}\|_2^2 \\
 & \quad + \|U\|_3 (\|\mathbf{v}\|_1^2 + \|\theta\|_1^2) + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^2 (\|\tilde{\theta}\|_1^2 + \|\zeta\|_1^2) + \|\mathbf{v}\|_1^2].
 \end{aligned}$$

将上式利用 Poincaré 不等式, 并选择适当小的 δ , 则引理得证. $\square$

引理 2.8 存在一个正常数 C_8 不依赖于 ϵ , 使得

$$\begin{aligned}
 & \mu \|\chi_0 \nabla^3 \mathbf{v}\|_0^2 + (\mu + \lambda) \|\chi_0 \nabla^2 \operatorname{div} \mathbf{v}\|_0^2 + \kappa \|\chi_0 \nabla^3 \theta\|_0^2 \\
 & \leq C_8 [(\|U\|_3 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3) \|\zeta\|_2^2 + \epsilon^2 (\|\tilde{F}\|_1^2 + \|\tilde{G}\|_1^2) + \epsilon \|P\|_3 (\|U\|_3 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3) \|\zeta\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3^4 \\
 & \quad + \|\zeta\|_2^2 \|\tilde{\theta}\|_2^2 + \|U\|_3 (\|\mathbf{v}\|_2^2 + \|\theta\|_2^2) + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^2 (\|\tilde{\theta}\|_2^2 + \|\zeta\|_2^2) + \|\mathbf{v}\|_2^2] + \delta \left\| \frac{\nabla \zeta + \nabla \theta}{\epsilon} \right\|_1^2. \tag{2.64}
 \end{aligned}$$

证明 对 (2.31) 关于 x 两次微分, 可得

$$\left\{ \begin{aligned}
 & U^j \partial_{ilj}^3 \zeta + \frac{\partial_i \operatorname{div} \mathbf{v}}{\epsilon} = -\tilde{v}^j \partial_{ilj}^3 \zeta - \partial_{il}^2 (U^j + \tilde{v}^j) \partial_j \zeta - \partial_i (U^j + \tilde{v}^j) \partial_{jl}^2 \zeta \\
 & \quad - \partial_l (U^j + \tilde{v}^j) \partial_{ij}^2 \zeta - \partial_{il}^2 (\zeta \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}) - \epsilon \partial_{il}^2 \operatorname{div} (P(U + \tilde{\mathbf{v}})), \\
 & U^j \partial_{ijl}^3 v^k + \partial_l U^j \partial_{ij}^2 v^k + \partial_{il}^2 U^j \partial_j v^k + \partial_i U^j \partial_{lj}^2 v^k - \mu \partial_{iljj}^4 v^k - (\mu + \lambda) \partial_{ilk}^3 \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\partial_{ilk}^3 \zeta + \partial_{ilk}^3 \theta}{\epsilon} \\
 & \quad = \epsilon \partial_{il}^2 \tilde{F}^k - \partial_{il}^2 (\tilde{v}^j \partial_j \tilde{v}^k) - \partial_{ilk}^3 (\tilde{\theta} \zeta), \\
 & U^j \partial_{ijl}^3 \theta + \partial_l U^j \partial_{ij}^2 \theta + \partial_{il}^2 U^j \partial_j \theta + \partial_i U^j \partial_{lj}^2 \theta - \kappa \partial_{iljj}^4 \theta + \frac{\partial_{il}^2 \operatorname{div} \mathbf{v}}{\epsilon} \\
 & \quad = \epsilon \partial_{il}^2 \tilde{G} - \partial_{il}^2 (\tilde{v}^j \partial_j \tilde{\theta}) - \partial_{il}^2 ((\zeta + \tilde{\theta}) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}).
 \end{aligned} \right. \tag{2.65}$$

将 (2.65)₁, (2.65)₂ 和 (2.65)₃ 分别乘以 $\chi_0^2 \partial_{il}^2 \zeta$, $\chi_0^2 \partial_{il}^2 v^k$ 和 $\chi_0^2 \partial_{il}^2 \theta$, 并积分求和, 得到

$$\mu \|\chi_0 \partial_{ilj}^3 v^k\|_0^2 + (\mu + \lambda) \|\chi_0 \partial_{il}^2 \operatorname{div} \mathbf{v}\|_0^2 + \kappa \|\chi_0 \partial_{ilk}^3 \theta\|_0^2$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\epsilon} \int [\chi_0^2 \partial_{il} \operatorname{div} \mathbf{v} (\partial_{il} \zeta + \partial_{il}^2 \theta) + \chi_0^2 \partial_{il}^2 v^k \partial_k (\partial_{il}^2 \zeta + \partial_{il}^2 \theta)] dx \\
&\quad - \int [2\chi_0 \partial_j \chi_0 (\mu \partial_{ilj}^3 v^k \partial_{il}^2 v^k + \kappa \partial_{ilj}^3 \theta \partial_{il}^2 \theta) + 2(\mu + \lambda) \chi_0 \partial_k \chi_0 \partial_{il} \operatorname{div} v \partial_{il} v^k] dx \\
&\quad - \int [U^j \partial_{ilj}^3 \zeta + \tilde{v}^j \partial_{ilj}^3 \zeta + \partial_{il}^2 (U^j + \tilde{v}^j) \partial_j \zeta + \partial_i (U^j + \tilde{v}^j) \partial_{jl}^2 \zeta \\
&\quad + \partial_l (U^j + \tilde{v}^j) \partial_{ij}^2 \zeta + \partial_{il}^2 (\zeta \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}) + \epsilon \partial_{il}^2 \operatorname{div} (P(U + \tilde{\mathbf{v}}))] \chi_0^2 \partial_{il}^2 \zeta dx \\
&\quad + \int [\epsilon \partial_{il}^2 \tilde{F}^k - \partial_{il}^2 (\tilde{v}^j \partial_j \tilde{v}^k) - \partial_{ilk}^3 (\tilde{\theta} \zeta) - (U^j \partial_{ijl}^3 v^k + \partial_l U^j \partial_{ij}^2 v^k \\
&\quad + \partial_{il}^2 U^j \partial_j v^k + \partial_i U^j \partial_{lj}^2 v^k)] \chi_0^2 \partial_{il}^2 v^k dx \\
&\quad + \int [\epsilon \partial_{il}^2 \tilde{G} - \partial_{il}^2 (\tilde{v}^j \partial_j \tilde{\theta}) - \partial_{il}^2 ((\zeta + \tilde{\theta}) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}) - (U^j \partial_{ijl}^3 \theta + \partial_l U^j \partial_{ij}^2 \theta \\
&\quad + \partial_{il}^2 U^j \partial_j \theta + \partial_i U^j \partial_{lj}^2 \theta)] \chi_0^2 \partial_{il}^2 \theta dx.
\end{aligned}$$

利用分部积分和 Sobolev 不等式, 以及

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\epsilon} \int [\chi_0^2 \partial_{il}^2 \operatorname{div} \mathbf{v} (\partial_{il}^2 \zeta + \partial_{il}^2 \theta) + \chi_0^2 \partial_{il}^2 v^k \partial_k (\partial_{il}^2 \zeta + \partial_{il}^2 \theta)] dx \\
&= \frac{1}{\epsilon} \int [\chi_0^2 \partial_{il}^2 v^k \partial_k (\partial_{il}^2 \zeta + \partial_{il}^2 \theta) - \chi_0^2 \partial_{il}^2 v^k \partial_k (\partial_{il}^2 \zeta + \partial_{il}^2 \theta)] dx + \frac{1}{\epsilon} \int 2\chi_0 \partial_k \chi_0 \partial_{il}^2 v^k (\partial_{il}^2 \zeta + \partial_{il}^2 \theta) dx \\
&= \frac{1}{\epsilon} \int 2\chi_0 \partial_k \chi_0 \partial_{il}^2 v^k (\partial_{il}^2 \zeta + \partial_{il}^2 \theta) dx \\
&\leq \delta \left\| \frac{\nabla \zeta + \nabla \theta}{\epsilon} \right\|_1^2 + C_\delta \|\mathbf{v}\|_2^2,
\end{aligned}$$

并对 i, j 和 k 求和推导出

$$\begin{aligned}
&\mu \|\chi_0 \nabla^3 \mathbf{v}\|_0^2 + (\mu + \lambda) \|\chi_0 \nabla^2 \operatorname{div} \mathbf{v}\|_0^2 + \kappa \|\chi_0 \nabla^3 \theta\|_0^2 \\
&\leq (\|U\|_3 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3) \|\zeta\|_2^2 + \delta \left(\|\mathbf{v}\|_3^2 + \|\theta\|_3^2 + \left\| \frac{\nabla \zeta + \nabla \theta}{\epsilon} \right\|_1^2 \right) \\
&\quad + C_\delta [\epsilon^2 (\|\tilde{F}\|_1^2 + \|\tilde{G}\|_1^2) + \epsilon \|P\|_3 (\|U\|_3 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3) \|\zeta\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3^4 + \|\zeta\|_2^2 \|\tilde{\theta}\|_2^2 \\
&\quad + \|U\|_3 (\|\mathbf{v}\|_2^2 + \|\theta\|_2^2) + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^2 (\|\tilde{\theta}\|_2^2 + \|\zeta\|_2^2) + \|\mathbf{v}\|_2^2].
\end{aligned}$$

取适当小的 δ 并利用 Poincaré 不等式, 则定理得证. $\square$

2.2.3.2 边界估计

利用局部坐标系方法来得到边界附近的 $\nabla^2 \operatorname{div} \mathbf{v}$ 估计 (参见文献 [7, 28, 48, 49]). 为完整起见, 引入局部坐标系. 首先, 利用等温坐标 $\lambda(\varphi, \phi)$ 来构建局部坐标系得到边界估计 (参见文献 [7, 48, 49]), 其中

$$\lambda_\varphi \cdot \lambda_\varphi > 0, \quad \lambda_\phi \cdot \lambda_\phi > 0, \quad \lambda_\varphi \cdot \lambda_\phi = 0.$$

边界 $\partial\Omega$ 可由有限个有界开集覆盖 $W^k \subset \mathbb{R}^3$, $k = 1, 2, \dots, L$, 使得对任意的 $x \in W^k \cap \Omega$, 有

$$x = \Lambda^k(\varphi, \phi, r) \equiv \lambda^k(\varphi, \phi) + r \mathbf{n}(\lambda^k(\varphi, \phi)), \quad (2.66)$$

其中 $\lambda^k(\varphi, \phi)$ 是等温坐标, 并且 $\mathbf{n}$ 是边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.

在无混淆的情况下, 将忽略每个 W^k 的上指标 k . 构建局部坐标系下的正交系统

$$e_1 := \frac{\lambda_\varphi}{|\lambda_\varphi|}, \quad e_2 := \frac{\lambda_\phi}{|\lambda_\phi|}, \quad e_3 := e_1 \times e_2 \equiv \mathbf{n}(\lambda). \quad (2.67)$$

直接计算可得, 对足够小的 r , 有

$$\begin{aligned} C^2 \ni J &:= \det \text{Jac} \Lambda = \det \frac{\partial x}{\partial(\varphi, \phi, r)} = \Lambda_\varphi \times \Lambda_\phi \cdot e_3 \\ &= |\lambda_\varphi| |\lambda_\phi| + r(|\lambda_\varphi| \mathbf{n}_\phi \cdot e_2 + |\lambda_\phi| \mathbf{n}_\varphi \cdot e_1) + r^2[(\mathbf{n}_\varphi \cdot e_1)(\mathbf{n}_\phi \cdot e_2) - (\mathbf{n}_\varphi \cdot e_2)(\mathbf{n}_\phi \cdot e_1)] \\ &> 0. \end{aligned}$$

并且易推得如下关系: $(\text{Jac} \Lambda^{-1}) \circ \Lambda = (\text{Jac} \Lambda)^{-1}$ (参见文献 [48]) 给出性质

$$[\nabla(\Lambda^{-1})^1] \circ \Lambda = J^{-1}(\Lambda_\phi \times e_3), \quad (2.68)$$

$$[\nabla(\Lambda^{-1})^2] \circ \Lambda = J^{-1}(e_3 \times \Lambda_\varphi), \quad (2.69)$$

$$[\nabla(\Lambda^{-1})^3] \circ \Lambda = J^{-1}(\Lambda_\varphi \times \Lambda_\phi) = e_3, \quad (2.70)$$

其中符号 $\circ$ 表示算子的复合. 设定 $y := (\varphi, \phi, r)$, 并定义 D_i 为局部坐标系中关于 y_i 的偏导数. 局部坐标系中的未知量为

$$\hat{\zeta}(t, y) := \zeta(t, \Lambda(y)), \quad \hat{\mathbf{v}}(t, y) := \mathbf{v}(t, \Lambda(y)), \quad \hat{\theta}(t, y) := \theta(t, \Lambda(y)),$$

已知量为

$$\hat{U}(t, y) := U(t, \Lambda(y)), \quad \hat{\mathbf{v}}(t, y) := \hat{\mathbf{v}}(t, \Lambda(y)), \quad \hat{\theta}(t, y) := \tilde{\theta}(t, \Lambda(y)).$$

则系统 (2.31) 在区域 $[0, T] \times \tilde{\Omega}$ ($\tilde{\Omega} := \Lambda^{-1}(W \cap \Omega)$) 上可重写为

$$\begin{cases} \hat{U}^j a_{kj} D_k \hat{\zeta} + \frac{a_{kj} D_k \hat{v}^j}{\epsilon} = -\hat{v}^j a_{kj} D_k \hat{\zeta} - \hat{\zeta} a_{kj} D_k \hat{v}^j - \epsilon a_{kj} D_k (\hat{P}(\hat{U}^j + \hat{v}^j)), \\ \hat{U}^j a_{kj} D_k \hat{v}^i - \mu a_{kj} D_k (a_{lj} D_l \hat{v}^i) - (\mu + \lambda) a_{ki} D_k (a_{lj} D_l \hat{v}^j) + \frac{a_{ki} D_k (\hat{\zeta} + \hat{\theta})}{\epsilon} \\ \quad = \epsilon \hat{F}^i - \hat{v}^j a_{kj} D_k \hat{v}^i - \hat{\theta} a_{ki} D_k \hat{\zeta} - \hat{\zeta} a_{ki} D_k \hat{\theta}, \\ \hat{U}^j a_{kj} D_k \hat{\theta} - \kappa a_{kj} D_k (a_{lj} D_l \hat{\theta}) + \frac{a_{kj} D_k \hat{v}^j}{\epsilon} = \epsilon \hat{G} - \hat{v}^j a_{kj} D_k \hat{\theta} - \hat{\zeta} a_{kj} D_k \hat{v}^j - \hat{\theta} a_{kj} D_k \hat{v}^j, \end{cases} \quad (2.71)$$

并带有边界条件

$$\hat{\mathbf{v}}(t, y) = 0, \quad \hat{\theta}(t, y) = 0 \quad \text{在 } \partial \tilde{\Omega} \text{ 上}, \quad (2.72)$$

其中 a_{ij} 是矩阵 $\text{Jac}(\Lambda^{-1}) = \frac{\partial y}{\partial x}$ 的第 (i, j) 个分量. 显然, a_{ij} 是 C^2 函数, 并且由 (2.68)–(2.70) 可知

$$\sum_{j=1}^3 a_{3j} a_{3j} = |\mathbf{n}|^2 = 1, \quad \sum_{j=1}^3 a_{1j} a_{3j} = \sum_{j=1}^3 a_{2j} a_{3j} = 0. \quad (2.73)$$

进而, 局部化系统有如下性质 (参见文献 [7, 48]):

命题 2.1 对 $j = 1, 2, 3$, 有 $D_i(Ja_{ij}) = 0$; 在 $\partial \tilde{\Omega}$ 上, 有 ${}_\varsigma D_\tau \hat{\mathbf{v}} = 0$, ${}_\varsigma D_\tau D_\xi \hat{\mathbf{v}} = 0$, 其中 $\tau, \xi = 1, 2$ 为切线方向, $\varsigma \in C_0^\infty(\Lambda^{-1}(W))$. 类似地, 在 $\partial \tilde{\Omega}$ 上, 有 ${}_\varsigma D_\tau \hat{\theta} = 0$, ${}_\varsigma D_\tau D_\xi \hat{\theta} = 0$.

因为 $D_j = \sum_{i=1}^3 a_{ji} \partial_i$, 下面将频繁利用如下关系:

$$\|D_y \hat{\mathbf{v}}\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla_x \mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)}, \quad \|D_y^2 \hat{\mathbf{v}}\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla_x \mathbf{v}\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (2.74)$$

上述不等式应用到 $\zeta, \theta, U, \hat{\mathbf{v}}$ 和 $\hat{\theta}$ 函数上.

由插值不等式 $\|\cdot\|_{H^2}^2 \leq \delta \|\cdot\|_{H^3}^2 + C_\delta \|\cdot\|_{H^1}^2$, $\|\nabla^2 \operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L_t^2(L^2)}$ 的边界估计可简化为估计

$$\int_0^t \int_{\tilde{\Omega}} J \chi^2 |D_y^2(a_{ji} D_j U^i)| dy ds$$

的有界性, 其中 χ 是 $C_0^\infty(\Lambda^{-1}(W))$ 函数. 所以, 将边界上函数的导数估计分成两部分: 切向上的导数估计和法向上的导数估计.

(1) 切向上的导数估计. 将 $D_{\tau\xi}^2$ 作用于 (2.71) (τ 和 ξ 是边界 $\partial\tilde{\Omega}$ 上的切向变量), 得到

$$\left\{ \begin{aligned} & \hat{U}^j a_{kj} D_{k\tau\xi}^3 \hat{\zeta} + \frac{1}{\epsilon} D_{\tau\xi}^2 [a_{kj} D_k \hat{v}^j] \\ &= D_\xi (\hat{U}^j a_{kj}) D_{k\tau}^2 \hat{\zeta} + D_{\tau\xi}^2 (\hat{U}^j a_{kj}) D_k \hat{\zeta} + D_\tau (\hat{U}^j a_{kj}) D_{k\xi}^2 \hat{\zeta} \\ &\quad - D_{\tau\xi}^2 [\hat{v}^j a_{kj} D_k \hat{\zeta} + \hat{\zeta} a_{kj} D_k \hat{v}^j + \epsilon a_{kj} D_k (\hat{P}(\hat{U}^j + \hat{v}^j))], \\ & \hat{U}^j a_{kj} D_{k\tau\xi}^3 \hat{v}^i - D_{\tau\xi}^2 [\mu a_{kj} D_k (a_{lj} D_l \hat{v}^i) + (\mu + \lambda) a_{ki} D_k (a_{lj} D_l \hat{v}^j)] + \frac{1}{\epsilon} D_{\tau\xi}^2 [a_{ki} D_k (\hat{\zeta} + \hat{\theta})] \\ &= D_\xi (\hat{U}^j a_{kj}) D_{k\tau}^2 \hat{v}^i + D_{\tau\xi}^2 (\hat{U}^j a_{kj}) D_k \hat{v}^i + D_\tau (\hat{U}^j a_{kj}) D_{k\xi}^2 \hat{v}^i \\ &\quad + D_{\tau\xi}^2 [\epsilon \hat{F}^i - \hat{v}^j a_{kj} D_k \hat{v}^i - \hat{\theta} a_{ki} D_k \hat{\zeta} - \hat{\zeta} a_{ki} D_k \hat{\theta}], \\ & \hat{U}^j a_{kj} D_{k\tau\xi}^3 \hat{\theta} - \kappa D_{\tau\xi}^2 [a_{kj} D_k (a_{lj} D_l \hat{\theta})] + \frac{1}{\epsilon} D_{\tau\xi}^2 [a_{kj} D_k \hat{v}^j] \\ &= D_\xi (\hat{U}^j a_{kj}) D_{k\tau}^2 \hat{\theta} + D_{\tau\xi}^2 (\hat{U}^j a_{kj}) D_k \hat{\theta} + D_\tau (\hat{U}^j a_{kj}) D_{k\xi}^2 \hat{\theta} \\ &\quad + D_{\tau\xi}^2 [\epsilon \hat{G} - \hat{v}^j a_{kj} D_k \hat{\theta} - \hat{\zeta} a_{kj} D_k \hat{v}^j - \hat{\theta} a_{kj} D_k \hat{v}^j]. \end{aligned} \right. \quad (2.75)$$

将 (2.75)₁, (2.75)₂ 和 (2.75)₃ 分别乘以 $J \chi^2 D_{\tau\xi} \hat{\zeta}$, $J \chi^2 D_{\tau\xi} \hat{v}^i$ 和 $J \chi^2 D_{\tau\xi} \hat{\theta}$, 并积分得到

$$\begin{aligned} & - \int_{\tilde{\Omega}} D_{\tau\xi}^2 [\mu a_{kj} D_k (a_{lj} D_l \hat{v}^i) + (\mu + \lambda) a_{ki} D_k (a_{lj} D_l \hat{v}^j)] \cdot J \chi^2 D_{\tau\xi}^2 \hat{v}^i dy \\ & - \int_{\tilde{\Omega}} \kappa D_{\tau\xi}^2 [a_{kj} D_k (a_{lj} D_l \hat{\theta})] \cdot J \chi^2 D_{\tau\xi}^2 \hat{\theta} dy \\ & + \int_{\tilde{\Omega}} \hat{U}^j a_{kj} (D_{k\tau\xi}^3 \hat{\zeta} \cdot J \chi^2 D_{\tau\xi}^2 \hat{\zeta} + D_{k\tau\xi}^3 \hat{v}^i \cdot J \chi^2 D_{\tau\xi}^2 \hat{v}^i + D_{k\tau\xi}^3 \hat{\theta} \cdot J \chi^2 D_{\tau\xi}^2 \hat{\theta}) dy \\ & + \frac{1}{\epsilon} \int_{\tilde{\Omega}} \{ D_{\tau\xi}^2 [a_{kj} D_k \hat{v}^j] \cdot J \chi^2 D_{\tau\xi}^2 \hat{\zeta} + D_{\tau\xi}^2 [a_{ki} D_k (\hat{\zeta} + \hat{\theta})] \cdot J \chi^2 D_{\tau\xi}^2 \hat{v}^i + D_{\tau\xi}^2 [a_{kj} D_k \hat{v}^j] \cdot J \chi^2 D_{\tau\xi}^2 \hat{\theta} \} dy \\ & = \int_{\tilde{\Omega}} \{ D_\xi (\hat{U}^j a_{kj}) D_{k\tau}^2 \hat{\zeta} + D_{\tau\xi}^2 (\hat{U}^j a_{kj}) D_k \hat{\zeta} + D_\tau (\hat{U}^j a_{kj}) D_{k\xi}^2 \hat{\zeta} \\ & \quad - D_{\tau\xi}^2 [\hat{v}^j a_{kj} D_k \hat{\zeta} + \hat{\zeta} a_{kj} D_k \hat{v}^j + \epsilon a_{kj} D_k (\hat{P}(\hat{U}^j + \hat{v}^j))] \} \cdot J \chi^2 D_{\tau\xi}^2 \hat{\zeta} dy \\ & + \int_{\tilde{\Omega}} \{ D_\xi (\hat{U}^j a_{kj}) D_{k\tau}^2 \hat{v}^i + D_{\tau\xi}^2 (\hat{U}^j a_{kj}) D_k \hat{v}^i + D_\tau (\hat{U}^j a_{kj}) D_{k\xi}^2 \hat{v}^i \\ & \quad + D_{\tau\xi}^2 [\epsilon \hat{F}^i - \hat{v}^j a_{kj} D_k \hat{v}^i - \hat{\theta} a_{ki} D_k \hat{\zeta} - \hat{\zeta} a_{ki} D_k \hat{\theta}] \} \cdot J \chi^2 D_{\tau\xi}^2 \hat{v}^i dy \\ & + \int_{\tilde{\Omega}} \{ D_\xi (\hat{U}^j a_{kj}) D_{k\tau}^2 \hat{\theta} + D_{\tau\xi}^2 (\hat{U}^j a_{kj}) D_k \hat{\theta} + D_\tau (\hat{U}^j a_{kj}) D_{k\xi}^2 \hat{\theta} \\ & \quad + D_{\tau\xi}^2 [\epsilon \hat{G} - \hat{v}^j a_{kj} D_k \hat{\theta} - \hat{\zeta} a_{kj} D_k \hat{v}^j - \hat{\theta} a_{kj} D_k \hat{v}^j] \} \cdot J \chi^2 D_{\tau\xi}^2 \hat{\theta} dy. \end{aligned} \quad (2.76)$$

记 (2.76) 的左手端为 $L'_1 + L'_2 + L'_3 + L'_4$. 通过分部积分, 并利用边界条件, 可逐一进行如下估计:

$$\begin{aligned}
 L'_1 = & - \int_{\bar{\Omega}} \{ D_{\tau\xi}^2(\mu a_{kj}) D_k(a_{lj} D_l \hat{v}^i) + D_\tau(\mu a_{kj}) D_{k\xi}^2(a_{lj} D_l \hat{v}^i) \\
 & + D_\xi(\mu a_{kj}) D_k[D_\tau(a_{lj}) D_l \hat{v}^i + a_{lj} D_{l\tau}^2 \hat{v}^i] + \mu a_{kj} D_{k\xi}[D_\tau(a_{lj}) D_l \hat{v}^i + a_{lj} D_{l\tau}^2 \hat{v}^i] \\
 & + D_{\tau\xi}^2((\mu + \lambda) a_{ki}) D_k(a_{lj} D_l \hat{v}^j) + D_\tau((\mu + \lambda) a_{ki}) D_{k\xi}^2(a_{lj} D_l \hat{v}^j) \\
 & + D_\xi((\mu + \lambda) a_{ki}) D_k[D_\tau(a_{lj}) D_l \hat{v}^j + a_{lj} D_{l\tau}^2 \hat{v}^j] \\
 & + (\mu + \lambda) a_{ki} D_{k\xi}^2[D_\tau(a_{lj}) D_l \hat{v}^j + a_{lj} D_{l\tau}^2 \hat{v}^j] \} \cdot J \chi^2 D_{\tau\xi}^2 \hat{v}^i dy,
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\bar{\Omega}} [\mu a_{kj} D_{k\xi}^2(a_{lj} D_{l\tau}^2 \hat{v}^i) + (\mu + \lambda) a_{ki} D_{k\xi}^2(a_{lj} D_{l\tau}^2 \hat{v}^j)] \cdot J \chi^2 D_{\tau\xi}^2 \hat{v}^i dy \\
 & = \int_{\bar{\Omega}} [\mu J \chi^2 a_{kj} D_{k\tau\xi}^3 \hat{v}^i a_{lj} D_{l\tau\xi}^3 \hat{v}^i + (\mu + \lambda) J \chi^2 a_{ki} D_{k\tau\xi}^3 \hat{v}^i a_{lj} D_{l\tau\xi}^3 \hat{v}^j] dy \\
 & \quad + \int_{\bar{\Omega}} [D_k(\mu J \chi^2 a_{kj}) D_\xi(a_{lj} D_{l\tau} \hat{v}^i) \cdot D_{\tau\xi}^2 \hat{v}^i + \mu J \chi^2 a_{kj} D_{k\tau\xi}^3 \hat{v}^i D_\xi(a_{lj}) D_{l\tau}^2 \hat{v}^i \\
 & \quad + D_k((\mu + \lambda) J \chi^2 a_{ki}) D_\xi(a_{lj} D_{l\tau}^2 \hat{v}^i) \cdot D_{\tau\xi}^2 \hat{v}^i + \mu J \chi^2 a_{ki} D_{k\tau\xi}^3 \hat{v}^i D_\xi(a_{lj}) D_{l\tau}^2 \hat{v}^j] dy;
 \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}
 L'_2 = & \int_{\bar{\Omega}} \kappa J \chi^2 a_{kj} D_{k\tau\xi}^3 \hat{\theta} a_{lj} D_{l\tau\xi}^3 \hat{\theta} dy \\
 & + \int_{\bar{\Omega}} [D_k(\kappa J \chi^2 a_{kj}) D_\xi(a_{lj} D_{l\tau}^2 \hat{\theta}) D_{\tau\xi}^2 \hat{\theta} + \kappa J \chi^2 a_{kj} D_{k\tau\xi}^3 \hat{\theta} D_\xi(a_{lj}) D_{l\tau}^2 \hat{\theta}] dy \\
 & - \int_{\bar{\Omega}} \{ D_{\tau\xi}^2(\kappa a_{kj}) D_k(a_{lj} D_l \hat{\theta}) + D_\tau(\kappa a_{kj}) D_{k\xi}^2(a_{lj} D_l \hat{\theta}) \\
 & + D_\xi(\kappa a_{kj}) D_k[D_\tau(a_{lj}) D_l \hat{\theta} + a_{lj} D_{l\tau}^2 \hat{\theta}] + \kappa a_{kj} D_{k\xi}^2 D_\tau(a_{lj}) D_l \hat{\theta} \} \cdot J \chi^2 D_{\tau\xi}^2 \hat{\theta} dy;
 \end{aligned}$$

另外, 因为 $a_{kj} D_k \hat{U}^j = 0$, 所以有

$$\begin{aligned}
 L'_3 = & - \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} J \chi^2 a_{kj} D_k \hat{U}^j (|D_{\tau\xi}^2 \hat{\zeta}|^2 + |D_{\tau\xi}^2 \hat{v}^i|^2 + |D_{\tau\xi}^2 \hat{\theta}|^2) dy \\
 & - \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} D_k(J \chi^2 a_{kj}) \hat{U}^j (|D_{\tau\xi}^2 \hat{\zeta}|^2 + |D_{\tau\xi}^2 \hat{v}^i|^2 + |D_{\tau\xi}^2 \hat{\theta}|^2) dy \\
 & = - \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} D_k(J \chi^2 a_{kj}) \hat{U}^j (|D_{\tau\xi}^2 \hat{\zeta}|^2 + |D_{\tau\xi}^2 \hat{v}^i|^2 + |D_{\tau\xi}^2 \hat{\theta}|^2) dy;
 \end{aligned}$$

至于 L'_4 , 根据

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\epsilon} \int_{\bar{\Omega}} D_{\tau\xi}^2[a_{ki} D_k(\hat{\zeta} + \hat{\theta})] \cdot J \chi^2 D_{\tau\xi}^2 \hat{v}^i dy \\
 & = - \frac{1}{\epsilon} \int_{\bar{\Omega}} J \chi^2 D_{\tau\xi}^2(a_{ki} D_k \hat{v}^i) D_{\tau\xi}^2(\hat{\zeta} + \hat{\theta}) dy \\
 & \quad + \frac{1}{\epsilon} \int_{\bar{\Omega}} [D_{\tau\xi}^2(a_{ki}) D_k(\hat{\zeta} + \hat{\theta}) + D_\tau(a_{ki}) D_{k\xi}^2(\hat{\zeta} + \hat{\theta}) + D_\xi(a_{ki}) D_{k\tau}^2(\hat{\zeta} + \hat{\theta})] \cdot J \chi^2 D_{\tau\xi}^2 \hat{v}^i dy \\
 & \quad + \frac{1}{\epsilon} \int_{\bar{\Omega}} D_{\xi\tau}^2(\hat{\zeta} + \hat{\theta}) [D_{\xi\tau}^2(a_{ki}) D_k \hat{v}^i + D_\tau(a_{ki}) D_{k\xi} \hat{v}^i + D_\xi(a_{ki}) D_{k\tau} \hat{v}^i \\
 & \quad - D_k(J \chi^2) a_{ki} D_{\tau\xi}^2 \hat{v}^i - D_k(a_{ki}) J \chi^2 D_{\tau\xi}^2 \hat{v}^i] dy,
 \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} L'_4 = & \frac{1}{\epsilon} \int_{\tilde{\Omega}} [D_{\tau\xi}^2(a_{ki})D_k(\hat{\zeta} + \hat{\theta}) + D_{\tau}(a_{ki})D_{k\xi}(\hat{\zeta} + \hat{\theta}) + D_{\xi}(a_{ki})D_{k\tau}^2(\hat{\zeta} + \hat{\theta})] \cdot J\chi^2 D_{\tau\xi}^2 \hat{v}^i dy \\ & + \frac{1}{\epsilon} \int_{\tilde{\Omega}} D_{\xi\tau}^2(\hat{\zeta} + \hat{\theta}) [D_{\xi\tau}^2(a_{ki})D_k \hat{v}^i + D_{\tau}(a_{ki})D_{k\xi}^2 \hat{v}^i + D_{\xi}(a_{ki})D_{k\tau}^2 \hat{v}^i \\ & - D_k(J\chi^2)a_{ki}D_{\tau\xi}^2 \hat{v}^i - D_k(a_{ki})J\chi^2 D_{\tau\xi}^2 \hat{v}^i] dy. \end{aligned}$$

将上述不等式代入 (2.76), 利用 Sobolev 不等式和 Young 不等式及性质 (2.74), 可得

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\Omega}} \mu J\chi^2 a_{kj} D_{k\tau\xi}^3 \hat{v}^i a_{lj} D_{l\tau\xi}^3 \hat{v}^i dy + \int_{\tilde{\Omega}} (\mu + \lambda) J\chi^2 a_{ki} D_{k\tau\xi}^3 \hat{v}^i a_{lj} D_{l\tau\xi}^3 \hat{v}^j dy + \int_{\tilde{\Omega}} \kappa J\chi^2 a_{kj} D_{k\tau\xi}^3 \hat{\theta} a_{lj} D_{l\tau\xi}^3 \hat{\theta} dy \\ & \leq C_9 \left[\|U\|_3 \|\zeta\|_2^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3 \|\zeta\|_2^2 + \epsilon \|P\|_3 (\|U\|_3 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3) \|\zeta\|_2 + \|U\|_3^2 (\|\mathbf{v}\|_1 + \|\theta\|_1) \right. \\ & \quad + \epsilon^2 (\|\tilde{F}\|_1^2 + \|\tilde{G}\|_1^2) + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^4 + \|\zeta\|_2^2 (\|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^2 + \|\tilde{\theta}\|_2^2) + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^2 \|\tilde{\theta}\|_2^2 \\ & \quad \left. + (\|\mathbf{v}\|_1^2 + \|\theta\|_1^2) \right] + \delta \left(\|\mathbf{v}\|_3^2 + \|\theta\|_3^2 + \left\| \frac{\nabla \zeta + \nabla \theta}{\epsilon} \right\|_1^2 \right), \end{aligned} \quad (2.77)$$

其中 C_9 为常数.

(2) 法向上的导数估计. 将 (2.71)₂ 乘以 a_{3i} , 得到

$$\begin{aligned} & - (2\mu + \lambda) D_3(a_{lj} D_l \hat{v}^j) + \frac{1}{\epsilon} D_3(\hat{\zeta} + \hat{\theta}) \\ & = -a_{3i} \hat{U}^j a_{kj} D_k \hat{v}^i + \epsilon a_{3i} \hat{F}^i - a_{3i} \hat{v}^j a_{kj} D_k \hat{v}^i - \hat{\theta} D_3 \hat{\zeta} - \hat{\zeta} D_3 \hat{\theta} \\ & \quad + \mu [a_{3i} a_{kj} D_k(a_{lj} D_l \hat{v}^i) - D_3(a_{lj} D_l \hat{v}^j)], \end{aligned} \quad (2.78)$$

(2.78) 的右手端可重写为

$$\begin{aligned} & \mu [a_{3i} a_{kj} D_k(a_{lj} D_l \hat{v}^i) - D_3(a_{lj} D_l \hat{v}^j)] \\ & = \mu [D_3(a_{3j}) D_3 \hat{v}^j + D_3(a_{\tau j}) D_{\tau} \hat{v}^j + a_{\tau j} D_{3\tau}^2 \hat{v}^j - a_{3j} D_3(a_{3j}) a_{3i} D_3 \hat{v}^i \\ & \quad - a_{\tau j} a_{3i} D_{\tau} a_{lj} D_l \hat{v}^i - a_{\tau j} a_{\xi j} a_{3i} D_{\tau\xi}^2 \hat{v}^i - a_{3j} a_{3i} D_3(a_{\tau j}) D_{\tau} \hat{v}^i], \quad \tau, \xi = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.79)$$

其不包括 $D_{33} \hat{\mathbf{v}}$.

(i) 为得到 $D_{\tau 3}^2(a_{lj} D_l \hat{v}^j)$ 和 $D_{\tau 3}^2(a_{kj} D_k \hat{\theta})$ 的估计, 需要证明下面引理.

引理 2.9 存在一个常数 C_{10} 和一个小的正数 $\delta > 0$, 使得

$$\begin{aligned} & \frac{2\mu + \lambda}{2} \int_{\tilde{\Omega}} J\chi^2 |D_{\tau 3}^2(a_{lj} D_l \hat{v}^j)|^2 dy + \frac{\kappa}{2} \int_{\tilde{\Omega}} J\chi^2 |D_{\tau 3}^2(a_{kj} D_k \hat{\theta})|^2 dy \\ & \leq C_{10} \left\{ \|U\|_4^2 \|\mathbf{v}\|_1^2 + \epsilon^2 \|\tilde{F}\|_1^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^4 + \|\tilde{\theta}\|_2^2 \|\zeta\|_2^2 + \int_{\tilde{\Omega}} J\chi^2 |D_{\tau\xi y}^3 \mathbf{v}|^2 dy \right. \\ & \quad + [\|U\|_3 \|\zeta\|_2^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3 \|\zeta\|_2^2 + (1 + \|U\|_3) \|\theta\|_2^2 + \epsilon \|P\|_3 (\|U\|_3 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3) \|\zeta\|_2 \\ & \quad \left. + \epsilon^2 \|\tilde{G}\|_1^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^2 \|\tilde{\theta}\|_2^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^2 \|\zeta\|_2^2] \right\} + \delta (\|\mathbf{v}\|_3^2 + \|\theta\|_3^2). \end{aligned} \quad (2.80)$$

证明 将 (2.78) 关于 y_{τ} ($\tau = 1, 2$) 进行微分, 然后乘以 $-J\chi^2 D_{\tau 3} (a_{lj} D_l \hat{v}^j)$ 并积分, 得到

$$\frac{2\mu + \lambda}{2} \int_{\tilde{\Omega}} J\chi^2 |D_{\tau 3}^2(a_{lj} D_l \hat{v}^j)|^2 dy - \frac{1}{\epsilon} \int_{\tilde{\Omega}} J\chi^2 D_{\tau 3}^2(\hat{\zeta} + \hat{\theta}) D_{\tau 3}^2(a_{lj} D_l \hat{v}^j) dy$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C(\|a_{3i}\hat{U}^j a_{kj} D_k \hat{v}^i\|_1^2 + \epsilon^2 \|\hat{F}^i\|_1^2 + \|a_{3i}\hat{v}^j a_{kj} D_k \hat{v}^i\|_1^2 \\
 &\quad + \|\hat{\theta} D_3 \hat{\zeta} + \hat{\zeta} D_3 \hat{\theta}\|_1^2) + C \int_{\tilde{\Omega}} J\chi^2 |D_{\tau\xi y}^3 v|^2 dy \\
 &\leq C(\|U\|_2^2 \|v\|_2^2 + \epsilon^2 \|\tilde{F}\|_1^2 + \|\tilde{v}\|_2^4 + \|\tilde{\theta}\|_2^2 \|\tilde{\zeta}\|_2^2) + C \int_{\tilde{\Omega}} J\chi^2 |D_{\tau\xi y}^3 v|^2 dy.
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

同时, 将算子 $D_{\tau 3}$ 作用到 (2.71)₃ 和 (2.71)₁ 上, 并将所得的方程分别与 $J\chi^2 D_{\tau 3}^2 \hat{\theta}$ 和 $J\chi^2 D_{\tau 3}^2 \hat{\zeta}$ 作对偶积分并相加, 得到

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\tilde{\Omega}} \kappa D_{\tau 3} [a_{kj} D_k (a_{lj} D_l \hat{\theta})] \cdot J\chi^2 D_{\tau 3}^2 \hat{\theta} dy + \frac{1}{\epsilon} \int_{\tilde{\Omega}} D_{\tau 3}^2 (a_{kj} D_k \hat{v}^j) \cdot J\chi^2 (D_{\tau 3}^2 \hat{\theta} + D_{\tau 3}^2 \hat{\zeta}) dy \\
 & + \int_{\tilde{\Omega}} [D_{\tau 3}^2 (\hat{U}^j a_{kj} D_k \hat{\zeta}) \cdot J\chi^2 D_{\tau 3}^2 \hat{\zeta} + D_{\tau 3}^2 (\hat{U}^j a_{kj} D_k \hat{\theta}) \cdot J\chi^2 D_{\tau 3}^2 \hat{\theta}] dy \\
 & = - \int_{\tilde{\Omega}} D_{\tau 3}^2 \{ \hat{v}^j a_{kj} D_k \hat{\zeta} + \hat{\zeta} a_{kj} D_k \hat{v}^j + \epsilon a_{kj} D_k [\hat{P}(\hat{U}^j + \hat{v}^j)] \} \cdot J\chi^2 D_{\tau 3}^2 \hat{\zeta} \\
 & + \int_{\tilde{\Omega}} D_{\tau 3}^2 (\epsilon \hat{G} - \hat{v}^j a_{kj} D_k \tilde{\theta} - \hat{\zeta} a_{kj} D_k \tilde{v}^j - \hat{\theta} a_{kj} D_k \tilde{v}^j) \cdot J\chi^2 D_{\tau 3}^2 \hat{\theta} dy.
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

令 (2.82) 的左端为 $L_1'' + L_2'' + L_3''$. 为控制 L_k'' ($k = 1, 2, 3$), 通过分部积分得到

$$\begin{aligned}
 L_1'' &= \kappa \int_{\tilde{\Omega}} J\chi^2 D_{\tau 3}^2 (a_{kj} D_k \hat{\theta}) D_{\tau 3}^2 (a_{lj} D_l \hat{\theta}) dy \\
 & - \int_{\tilde{\Omega}} \kappa J\chi^2 D_{\tau 3}^2 \hat{\theta} (D_{\tau 3}^2 (a_{kj}) D_k (a_{lj} D_l \hat{\theta}) + D_{\tau} (a_{kj}) D_{3k}^2 (a_{lj} D_l \hat{\theta}) + D_3 (a_{kj}) D_{k\tau}^2 (a_{lj} D_l \hat{\theta})) dy \\
 & + \kappa \int_{\tilde{\Omega}} D_k (J\chi^2 a_{kj}) D_{\tau 3}^2 (\hat{\theta}) D_{\tau 3}^2 (a_{lj} D_l \hat{\theta}) dy \\
 & - \kappa \int_{\tilde{\Omega}} J\chi^2 (D_{\tau 3}^2 (a_{kj}) D_k \hat{\theta} + D_{\tau} (a_{kj}) D_{3k}^2 \hat{\theta} + D_3 (a_{kj}) D_{k\tau}^2 \hat{\theta}) \cdot D_{\tau 3}^2 (a_{lj} D_l \hat{\theta}) dy
 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
 L_3'' &= \int_{\tilde{\Omega}} J\chi^2 D_{\tau 3}^2 \hat{\zeta} \cdot (D_{\tau 3}^2 (\hat{U}^j a_{kj}) D_k \hat{\zeta} + D_{\tau} (\hat{U}^j a_{kj}) D_{k3}^2 \hat{\zeta} + D_3 (\hat{U}^j a_{kj}) D_{k\tau}^2 \hat{\zeta}) dy \\
 & - \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Omega}} (D_k (J\chi^2 a_{kj}) \hat{U}^j |D_{\tau 3}^2 \hat{\zeta}|^2 + J\chi^2 a_{kj} D_k \hat{U}^j |D_{\tau 3}^2 \hat{\zeta}|^2) dy \\
 & + \int_{\tilde{\Omega}} (D_{\tau 3}^2 (\hat{U}^j a_{kj}) D_k \hat{\theta} + D_{\tau} (\hat{U}^j a_{kj}) D_{k3}^2 \hat{\theta} + D_3 (\hat{U}^j a_{kj}) D_{k\tau}^2 \hat{\theta}) \cdot J\chi^2 D_{\tau 3}^2 \hat{\theta} dy \\
 & - \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Omega}} (D_k (J\chi^2 a_{kj}) \hat{U}^j |D_{\tau 3}^2 \hat{\theta}|^2 + J\chi^2 a_{kj} D_k \hat{U}^j |D_{\tau 3}^2 \hat{\theta}|^2) dy.
 \end{aligned}$$

将 L_1'' 和 L_3'' 的估计代入 (2.82), 可得

$$\begin{aligned}
 &\frac{\kappa}{2} \int_{\tilde{\Omega}} J\chi^2 |D_{\tau 3}^2 (a_{kj} D_k \hat{\theta})|^2 dy + \frac{1}{\epsilon} \int_{\tilde{\Omega}} J\chi^2 D_{\tau 3}^2 (\hat{\zeta} + \hat{\theta}) D_{\tau 3}^2 (a_{lj} D_l \hat{v}^j) dy \\
 &\leq \|\theta\|_2^2 + \delta (\|D_{3k}^2 (a_{lj} D_l \hat{\theta})\|_0^2 + \|D_{k\tau}^2 (a_{lj} D_l \hat{\theta})\|_0^2 + \|\theta\|_3^2) \\
 &\quad + C[\|U\|_3 \|\zeta\|_2^2 + \|U\|_3 \|\theta\|_2^2 + \|\tilde{v}\|_3 \|\zeta\|_2^2 + \epsilon \|P\|_3 (\|U\|_3 + \|\tilde{v}\|_3) \|\zeta\|_2 \\
 &\quad + \epsilon^2 \|\tilde{G}\|_1^2 + \|\tilde{v}\|_2^2 \|\tilde{\theta}\|_2^2 + \|\tilde{v}\|_2^2 \|\zeta\|_2^2].
 \end{aligned} \tag{2.83}$$

由 Sobolev 不等式和 Young 不等式, 将 (2.81) 和 (2.83) 求和得到估计 (2.80). $\square$

(ii) 现在需要得到 $\|D_{33}^2(a_{ij}D_i\hat{v}^j)\|_0$ 的估计. 将算子 D_3 作用于 (2.78), 得到

$$\begin{aligned} & -(2\mu + \lambda)D_{33}^2(a_{lj}D_l\hat{v}^j) + \frac{1}{\epsilon}D_{33}^2(\hat{\zeta} + \hat{\theta}) \\ & = D_3(a_{3i})(-\hat{U}^j a_{kj}D_k\hat{v}^i + \epsilon\hat{F}^i - \hat{v}^j a_{kj}D_k\hat{v}^i) - a_{3i}D_3(\hat{U}^j a_{kj}D_k\hat{v}^i - \epsilon\hat{F}^i + \hat{v}^j a_{kj}D_k\hat{v}^i) \\ & \quad - D_3(\hat{\theta}D_3\hat{\zeta} + \hat{\zeta}D_3\hat{\theta}) + O(1)(D_{33\tau}^3\hat{v}^j + D_{3l}^2\hat{v}^j + D_l\hat{v}^j). \end{aligned} \quad (2.84)$$

将等式 (2.84) 乘以 $-J\chi^2 D_{33}^2(a_{lj}D_l\hat{v}^j)$ 并积分, 得到

$$\begin{aligned} & \frac{2\mu + \lambda}{2} \int_{\Omega} J\chi^2 |D_{33}^2(a_{lj}D_l\hat{v}^j)|^2 dy - \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} J\chi^2 D_{33}^2(a_{lj}D_l\hat{v}^j) \cdot D_{33}^2(\hat{\zeta} + \hat{\theta}) dy \\ & \leq C(\|U\|_2^2 \|v\|_2^2 + \epsilon^2 \|\tilde{F}\|_1^2 + \|\tilde{v}\|_2^4 + \|\tilde{\theta}\|_2^2 \|\tilde{\zeta}\|_2^2) + \|v\|_2^2 + \|v\|_1^2 + \int_{\Omega} J\chi^2 |D_{33\tau}^3\hat{v}|^2 dy. \end{aligned} \quad (2.85)$$

相应地, 将算子 D_{33}^2 作用于 (2.71)₁ 和 (2.71)₃, 并将得到的方程分别乘以 $J\chi^2 D_{33}^2\hat{\zeta}$ 和 $J\chi^2 D_{33}^2\hat{\theta}$ 积分求和, 得到

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa}{2} \int_{\Omega} J\chi^2 |D_{33}^2(a_{kj}D_k\hat{\theta})|^2 dy + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} J\chi^2 D_{33}^2(a_{lj}D_l\hat{v}^j) \cdot D_{33}^2(\hat{\zeta} + \hat{\theta}) dy \\ & \leq C\|\theta\|_2^2(1 + \|U\|_3) + \delta\|\theta\|_3^2 + \|U\|_3\|\zeta\|_2^2 + \|\tilde{v}\|_3\|\zeta\|_2^2 + \epsilon\|P\|_3(\|U\|_3 + \|\tilde{v}\|_3)\|\zeta\|_2 \\ & \quad + \epsilon^2\|\tilde{G}\|_1^2 + \|\tilde{v}\|_2^2\|\tilde{\theta}\|_2^2 + \|\tilde{v}\|_2^2\|\zeta\|_2^2. \end{aligned} \quad (2.86)$$

结合 (2.85) 和 (2.86), 可得存在一个正常数 C_{11} 和一个小的 δ , 使得

$$\begin{aligned} & \frac{2\mu + \lambda}{2} \int_{\Omega} J\chi^2 |D_{33}^2(a_{lj}D_l\hat{v}^j)|^2 dy + \frac{\kappa}{2} \int_{\Omega} J\chi^2 |D_{33}^2(a_{kj}D_k\hat{\theta})|^2 dy \\ & \leq \delta(\|\theta\|_3^2 + \|v\|_3^2) + C_{11} \left\{ (\|U\|_4^2 \|v\|_1^2 + \epsilon^2 \|\tilde{F}\|_1^2 + \|\tilde{v}\|_2^4 + \|\tilde{\theta}\|_2^2 \|\tilde{\zeta}\|_2^2) \right. \\ & \quad + \left[\|v\|_1^2 + \int_{\Omega} J\chi^2 |D_{33\tau}^3\hat{v}|^2 dy + \|\theta\|_1^2(1 + \|U\|_3) + \|U\|_3\|\zeta\|_2^2 + \|\tilde{v}\|_3\|\zeta\|_2^2 \right. \\ & \quad \left. \left. + \epsilon\|P\|_3(\|U\|_3 + \|\tilde{v}\|_3)\|\zeta\|_2 + \epsilon^2\|\tilde{G}\|_1^2 + \|\tilde{v}\|_2^2\|\tilde{\theta}\|_2^2 + \|\tilde{v}\|_2^2\|\zeta\|_2^2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

(iii) 为得到 (2.87) 的右端 $D_{33\tau}^3\hat{v}$ 的估计, 在边界附近区域上原坐标下引入如下辅助的 Stokes 问题:

$$\begin{cases} -\mu\Delta_x[(\chi D_{\tau}\hat{v}) \circ \Lambda^{-1}] + \frac{1}{\epsilon}\nabla_x[(\chi D_{\tau}(\hat{\zeta} + \hat{\theta})) \circ \Lambda^{-1}] = G_1 & \text{在 } W \cap \Omega \text{ 内,} \\ \operatorname{div}_x[(\chi D_{\tau}\hat{v}) \circ \Lambda^{-1}] = G_2 & \text{在 } W \cap \Omega \text{ 内,} \\ (\chi D_{\tau}\hat{v}) \circ \Lambda^{-1} = 0 & \text{在 } W \cap \Omega \text{ 内,} \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} G_1^i & = \chi D_{\tau}[(\mu + \lambda)a_{ki}D_k(a_{lj}D_l\hat{v}^j) + \epsilon\hat{F}^i - \hat{v}^j a_{kj}D_k\hat{v}^i - \hat{\theta}a_{ki}D_k\hat{\zeta} - \hat{\zeta}a_{ki}D_k\hat{\theta} \\ & \quad - \hat{U}^j a_{kj}D_k\hat{v}^i] + o(1) \left[D_l\hat{v}^i + D_{kl}^2\hat{v}^i + \frac{1}{\epsilon}D_k(\hat{\zeta} + \hat{\theta}) \right] \end{aligned}$$

和

$$G_2^i = o(1)(D_{\tau}\hat{v}^j + D_k\hat{v}^j + D_{\tau k}^2\hat{v}^j),$$

其估计如下:

$$\begin{aligned} \|G_1\|_{L^2}^2 &\leq C \left(\left\| \frac{\nabla(\zeta + \theta)}{\epsilon} \right\|_{L^2}^2 + \int_{\tilde{\Omega}} J\chi^2 |D_{\tau k}^2(a_{lj}D_l\hat{v}^j)|^2 dy \right) + \delta\|\mathbf{v}\|_3^2 \\ &\quad + C_\delta\|\mathbf{v}\|_1^2 + C(\epsilon^2\|\tilde{F}\|_1^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^4 + \|\tilde{\theta}\|_2^2\|\tilde{\zeta}\|_2^2 + \|U\|_3^4\|\mathbf{v}\|_1^2) \end{aligned} \quad (2.88)$$

并且

$$\|G_2\|_{H^1}^2 \leq \delta\|\mathbf{v}\|_3^2 + C_\delta\|\mathbf{v}\|_1^2 + C \int_{\tilde{\Omega}} J\chi^2 |D_{\tau k}(a_{lj}D_l\hat{v}^j)|^2 dy. \quad (2.89)$$

由 Stokes 问题正则性定理 (参见文献 [19]), 可知

$$\int_{W\cap\Omega} |\Delta_x(\chi D_\tau\hat{\mathbf{v}}) \circ \Lambda^{-1}(x)|^2 dx \leq C(\|G_1\|_{L^2(W\cap\Omega)}^2 + \|G_2\|_{H^1(W\cap\Omega)}^2), \quad (2.90)$$

其中 (2.90) 的左端等于

$$\begin{aligned} &\int_{W\cap\Omega} |\Delta_x(\chi D_\tau\hat{\mathbf{v}}) \circ \Lambda^{-1}(x)|^2 dx \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} J \left| \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{kj} D_k \left(\sum_{l=1}^3 a_{lj} D_l (\chi D_\tau\hat{\mathbf{v}}) \right) \right|^2 dy \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} J\chi^2 \left| \sum_{j,k,l=1}^3 a_{kj} a_{lj} D_{kl\tau}^3 \hat{\mathbf{v}} \right|^2 dy + o(1) \int_{\tilde{\Omega}} (|D_\tau\hat{\mathbf{v}}|^2 + |D_{y\tau}^2\hat{\mathbf{v}}|^2) dy. \end{aligned}$$

并且利用 (2.73) 可得

$$D_{33\tau}^3 \hat{\mathbf{v}} = \sum_{j,k,l=1}^3 a_{kj} a_{lj} D_{kl\tau}^3 \hat{\mathbf{v}} - \sum_{1 \leq k, l \leq 2} \sum_{j=1}^3 a_{kj} a_{lj} D_{kl\tau}^3 \hat{\mathbf{v}},$$

由此以及 (2.88)、(2.89) 和不等式 (2.90) 给出

$$\begin{aligned} &(C_{11} + 1) \int_{\tilde{\Omega}} J\chi^2 |D_{33\tau}^3 \hat{\mathbf{v}}|^2 dy \\ &\leq C(\|G_1\|_{L^2(W\cap\Omega)}^2 + \|G_2\|_{H^1(W\cap\Omega)}^2) + C \int_{\tilde{\Omega}} J\chi^2 |D_{\tau\xi}^3(\mu+\lambda)\hat{\mathbf{v}}|^2 dy + C_\delta\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2}^2 + \delta\|\mathbf{v}\|_3^2 \\ &\leq \delta\|\mathbf{v}\|_3^2 + C_{12} \left[\|\mathbf{v}\|_1^2 + \left\| \frac{\nabla(\zeta + \theta)}{\epsilon} \right\|_0^2 + \int_{\tilde{\Omega}} J\chi^2 (|D_{\xi\tau y}^3\hat{\mathbf{v}}|^2 + |D_{3\tau}^2(a_{lj}D_l\hat{v}^j)|^2) dy \right. \\ &\quad \left. + (\epsilon^2\|\tilde{F}\|_1^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^4 + \|\tilde{\theta}\|_2^2\|\tilde{\zeta}\|_2^2 + \|U\|_3^4\|\mathbf{v}\|_1^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.91)$$

令

$$\Phi_\chi := \int_{\tilde{\Omega}} J\chi^2 (|D_{\tau\xi y}^3\hat{\mathbf{v}}|^2 + |D_{\tau 3}^2(a_{lj}D_l\hat{v}^j)|^2 + |D_{33}^2(a_{lj}D_l\hat{v}^j)|^2 + |D_{33\tau}^3\hat{\mathbf{v}}|^2) dy$$

并且

$$\Psi_\chi := \int_{\tilde{\Omega}} J\chi^2 (a_{kj}|D_{k\tau\xi}^3\hat{\theta}|^2 + |D_{\tau 3}^2(a_{kj}D_k\hat{\theta})|^2 + |D_{33}^2(a_{kj}D_k\hat{\theta})|^2) dy,$$

利用如同估计 (2.59) 的 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式, 由 (2.77), (2.80), (2.87) 和 (2.91) 可推导出

$$\Phi_\chi + \Psi_\chi \leq \|U\|_3\|\zeta\|_2^2 + (\|\tilde{\mathbf{v}}\|_3 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^2)\|\zeta\|_2^2 + \epsilon\|P\|_3(\|U\|_3 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3)\|\zeta\|_2$$

$$\begin{aligned}
& + C(1 + \|U\|_3^4)(\|\mathbf{v}\|_1^2 + \|\theta\|_1^2) + \delta \left(\|\mathbf{v}\|_3^2 + \|\theta\|_3^2 + \left\| \frac{\nabla(\zeta + \theta)}{\epsilon} \right\|_1^2 \right) \\
& + C_\delta [\epsilon^2 (\|\tilde{F}\|_1^2 + \|\tilde{G}\|_1^2) + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^4 + (\|\tilde{\theta}\|_2^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^2) \|\zeta\|_2^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^2 \|\tilde{\theta}\|_2^2].
\end{aligned} \quad (2.92)$$

将上式与 (2.61)–(2.64) 联合, 可得

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{v}\|_3^2 + \|\theta\|_3^2 + \left\| \frac{\nabla\zeta + \nabla\theta}{\epsilon} \right\|_1^2 \\
& \leq C_{12} \{ \|U\|_3 \|\zeta\|_2^2 + (1 + \|U\|_3^4) [\epsilon \|P\|_3 (\|U\|_3 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3) + (\|\tilde{\theta}\|_2^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3)] \|\zeta\|_2^2 \\
& \quad + (1 + \|U\|_3^4) (\|\mathbf{v}\|_1^2 + \|\theta\|_1^2) + (1 + \|U\|_3^4) [\epsilon^2 (\|\tilde{F}\|_1^2 + \|\tilde{G}\|_1^2) + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^4 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^2 \|\tilde{\theta}\|_2^2] \}.
\end{aligned} \quad (2.93)$$

2.2.4 ζ 的有界性

在下面引理中, 我们得到了 $\|\zeta\|_1$ 和 $\|\zeta\|_2$ 的上界估计.

引理 2.10 存在一个小的 $\delta > 0$ 和两个不依赖于 ϵ 的正常数 C_{13} 和 C_{14} , 使得

$$\begin{aligned}
\|\zeta\|_1 & \leq C_{13} [\epsilon^2 \|\tilde{F}\|_0 + \epsilon (\|\tilde{\mathbf{v}}\|_2 \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1 + \|\tilde{\theta}\|_2 \|\zeta\|_2 + \|U\|_2 \|\mathbf{v}\|_2 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_1 + (\|\tilde{F}\|_{-1} + \|\tilde{G}\|_{-1})) \\
& \quad + \epsilon \|P\|_2 (\|U\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2) + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3^{\frac{1}{2}} \|\zeta\|_0 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^2 + \|\zeta\|_1 \|\tilde{\theta}\|_1 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1 (\|\tilde{\theta}\|_1 + \|\zeta\|_1)]
\end{aligned} \quad (2.94)$$

并且

$$\begin{aligned}
\|\zeta\|_2 & \leq C_{14} (1 + \epsilon) (1 + \|U\|_2^2) \{ \epsilon (\|\tilde{F}\|_1 + \|\tilde{G}\|_{-1}) + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3^2 + \|\tilde{\theta}\|_3 \|\zeta\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3^{\frac{1}{2}} \|\zeta\|_0 \\
& \quad + [\epsilon \|P\|_2 (\|U\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2) \|\zeta\|_0]^{\frac{1}{2}} + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1 (\|\tilde{\theta}\|_1 + \|\zeta\|_1) \} + \epsilon \|\mathbf{v}\|_3 + \delta \|\theta\|_3.
\end{aligned} \quad (2.95)$$

证明 由 (2.59) 可知

$$\epsilon \|\mathbf{v}\|_2 + \|\nabla\zeta + \nabla\theta\|_0 \leq C [\epsilon^2 \|\tilde{F}\|_0 + \epsilon (\|\tilde{\mathbf{v}}\|_2 \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1 + \|\tilde{\theta}\|_2 \|\zeta\|_2 + \|U\|_2 \|\mathbf{v}\|_2 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_1)].$$

利用引理 2.6, 由上式可得

$$\begin{aligned}
\|\nabla\zeta\|_1 & \leq \|\nabla\zeta + \nabla\theta\|_0 + \|\nabla\theta\|_0 \\
& \leq C [\epsilon^2 \|\tilde{F}\|_0 + \epsilon (\|\tilde{\mathbf{v}}\|_2 \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1 + \|\tilde{\theta}\|_2 \|\zeta\|_2 + \|U\|_2 \|\mathbf{v}\|_2 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_1)] \\
& \quad + C [\|\tilde{\mathbf{v}}\|_3 \|\zeta\|_0^2 + \epsilon^2 (\|\tilde{F}\|_{-1}^2 + \|\tilde{G}\|_{-1}^2) + \epsilon \|P\|_2 (\|U\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2) \|\zeta\|_0 \\
& \quad + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1^4 + \|\zeta\|_1^2 \|\tilde{\theta}\|_1^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1^2 (\|\tilde{\theta}\|_1^2 + \|\zeta\|_1^2)]^{1/2}.
\end{aligned}$$

利用 Poincaré 不等式和 Young 不等式, 以及如下事实:

$$(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)^{1/2} \leq A_1^{1/2} + A_2^{1/2} + \cdots + A_n^{1/2}, \quad \text{其中 } A_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.96)$$

可直接得到估计 (2.94).

另外, 由估计 (2.61) 可得

$$\begin{aligned}
\|\nabla\zeta\|_1 & \leq \|\nabla\zeta + \nabla\theta\|_1 + \|\nabla\theta\|_1 \\
& \leq C \epsilon (1 + \|U\|_2^2) \{ \epsilon (\|\tilde{F}\|_1 + \|\tilde{G}\|_{-1}) + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3^2 + \|\tilde{\theta}\|_3 \|\zeta\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_3^{\frac{1}{2}} \|\zeta\|_0 \\
& \quad + [\epsilon \|P\|_2 (\|U\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2) \|\zeta\|_0]^{\frac{1}{2}} + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1 (\|\tilde{\theta}\|_1 + \|\zeta\|_1) \} + \epsilon \|\mathbf{v}\|_3 + \delta \|\theta\|_3 + C_\delta \|\theta\|_1,
\end{aligned}$$

其结合 Poincaré 不等式、(2.94) 和 (2.96), 上式可蕴涵 (2.95). $\square$

3 非线性问题解的存在性

本节证明非线性问题 (1.6) 解的存在性, 所采用的方法为 Tikhonov 定理 (参见文献 [39]). 为完整起见, 我们陈述定理如下:

定理 3.1 (Tikhonov 定理, 参见文献 [39, 第 72 页, 第 1.4.11.6 小节]) 令 M 是一个可分自反 Banach 空间 X 的一个非空有界闭凸子集, $F: M \rightarrow M$ 是一个弱连续映射 (即若 $x_n \in M$, 在 X 中 x_n 弱收敛到 x , 则在 X 中 $F(x_n)$ 弱收敛于 $F(x)$), 则有 F 在 M 中至少存在一个不动点.

定义 Banach 空间 X 如下:

$$X = \tilde{H}^1 \times H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1,$$

易证其为可分自反的.

$K_1(E)$ 是 X 的一个凸子集, 定义为

$$K_1(E) = \{(\mathbf{v}, \theta) \in (H^3 \cap H_0^1) \times (H^3 \cap H_0^1) \mid \|\mathbf{v}\|_3 + \|\theta\|_3 \leq E\},$$

其中 $E < 1$ 是一个小的正常数. 根据范数的下半连续性, 易知子集 $K_1(E)$ 也是 X 中的闭集.

定义空间

$$K = K_0 \times K_1(E),$$

其中 K_0 由 (2.30) 定义, 则 K 是 X 中的非空有界闭凸子集.

定义非线性算子 N , 从 K 映射到 X , 如下:

$$N(\tilde{U}, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\theta}) := (U, \mathbf{v}, \mathbf{H}, \theta),$$

其中当给定 $(\tilde{U}, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\theta})$ 时, $U, \mathbf{H}$ 和 $(\mathbf{v}, \theta)$ 是 (2.4) 和 (2.31) 的解.

接着, 需要找到在 K 中算子 N 的一个不动点 $(U, \mathbf{v}, \theta)$, 使得 $(U, \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\theta}) = N(U, \mathbf{v}, \mathbf{H}, \theta)$. 利用定理 2.3 和 2.6 中弱解的存在性, 可得 $(U, \mathbf{H}, P)$ 和 $(\zeta, \mathbf{v}, \theta)$ 分别是 (2.1) 和 (2.2) 的边值问题的解. 因此 $(U + \mathbf{v}, \mathbf{H}, \epsilon P + \zeta, \theta)$ 将是系统 (1.6) 的解. 为此, 需要得到算子 N 将 K 映射到自身, 并且 $N: K \rightarrow K$ 是一个弱连续映射.

引理 3.1 存在一个小常数 $\epsilon_0 > 0$, 只依赖于 $\Omega, \mu, \lambda, \nu, \mathbf{f}$ 和 $\mathbf{g}$, 使得对任意的 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, K 是 X 中的非空有界闭凸子集, 并且 $N(K) \subset K$.

证明 由定义, 显然 $K \subset X$ 是非空有界闭凸子集. 下面证明算子 N 将空间 K 映到自身, 即 $N(K) \subset K$. 为此, 令 $(\tilde{U}, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\theta}) \in K$ 并且 $(U, \mathbf{v}, \theta, \mathbf{H}) = N(\tilde{U}, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\theta}, \tilde{\mathbf{H}})$. 由引理 2.3 和 2.4 可知, 对所有的 $(\tilde{U}, \tilde{\mathbf{H}}) \in K_0$, 有 $(U, \mathbf{H}) \in K_0$. 因此, 需要推导 $(\mathbf{v}, \theta) \in K_1(E)$, 当 $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\theta}) \in K_1(E)$ 时. 由 (2.17) 和 (2.18), 可得

$$\|U\|_3 + \|\mathbf{H}\|_3 + \|\nabla P\|_1 \leq Q_1 \quad \text{并且} \quad \|U\|_4 + \|\mathbf{H}\|_4 + \|\nabla P\|_2 \leq Q_2, \quad (3.1)$$

其中 $Q_1 = C_3 \|\mathbf{h}\|_1 (\|\mathbf{h}\|_1 + 1)^8$, $Q_2 = C_4 \|\mathbf{h}\|_2 (\|\mathbf{h}\|_2 + 1)^{12}$.

一方面, 根据 $\tilde{F}$ 和 $\tilde{G}$ 的定义, 由 (3.1) 可得

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}\|_1 &= \|(\epsilon P + \zeta)\mathbf{f} - (\epsilon P + \zeta)(U + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla(U + \tilde{\mathbf{v}}) - \tilde{\theta} \nabla P - P \nabla \tilde{\theta}\|_1 \\ &\leq C[\|\zeta\|_2 (\|\mathbf{f}\|_1 + \|U\|_2^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^2) + \epsilon \|P\|_2 (\|\mathbf{f}\|_1 + \|U\|_2^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^2 + \|\tilde{\theta}\|_2)] \\ &\leq C\|\zeta\|_2 (\|\mathbf{f}\|_1 + (Q_1 + 1)^2) + \epsilon C Q_1 (\|\mathbf{f}\|_1 + (Q_1 + 1)^2), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{G}\|_1 &= \|\tilde{\Psi}_1 + \tilde{\Psi}_2 - (\epsilon P + \zeta)(U + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla \tilde{\theta} + (\epsilon P + \zeta)\tilde{\theta} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} + P \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}\|_1 \\
&\leq C[\epsilon(\|U\|_2^2 + \|\mathbf{H}\|_2^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2^2) + (\|\zeta\|_2 + \epsilon\|P\|_2)(\|U\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_2)\|\tilde{\theta}\|_2 + \|P\|_2\|\tilde{\mathbf{v}}\|_2] \\
&\leq C\|\zeta\|_2(Q_1 + 1) + C(\epsilon(Q_1 + 1)^2 + (Q_1 + 1)).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

由 Poincaré 不等式和引理 2.6, 可得

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}\|_1 + \|\theta\|_1 &\leq C\{(E^{\frac{1}{2}} + E)\|\zeta\|_2 + \epsilon[\|\zeta\|_2(Q_1 + 1) + C(\|\zeta\|_2(\|\mathbf{f}\|_1 + (Q_1 + 1)^2) \\
&\quad + \epsilon C Q_1(\|\mathbf{f}\|_1 + (Q_1 + 1)^2) + \epsilon(Q_1 + 1)^2 + (Q_1 + 1))\} \\
&\quad + \epsilon C_\delta(Q_1 + 1)^2 + E^2\} + \delta\|\zeta\|_2 \\
&\leq C[E^{\frac{1}{2}} + \epsilon(\|\mathbf{f}\|_1 + (Q_1 + 1)^2)]\|\zeta\|_2 + \epsilon^2 C Q_1(\|\mathbf{f}\|_1 + (Q_1 + 1)^2) + C E^2 \\
&\quad + \delta\|\zeta\|_2 + \epsilon C_\delta(Q_1 + 1)^2,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

这里利用了估计 (3.1)–(3.3).

另一方面, 由 Poincaré 不等式、Young 不等式、(3.4) 和 (2.95), 可得

$$\begin{aligned}
\|\zeta\|_2 &\leq C(1 + \epsilon)(1 + Q_1^2)\{\epsilon[\|\zeta\|_2(\|\mathbf{f}\|_1 + (Q_1 + 1)^2) + Q_1(\|\mathbf{f}\|_1 + (Q_1 + 1)^2) \\
&\quad + \|\zeta\|_2(Q_1 + 1) + (\epsilon(Q_1 + 1)^2 + (Q_1 + 1))\} + E^2 + (E + E^{\frac{1}{2}})\|\zeta\|_2 \\
&\quad + \epsilon^{\frac{1}{2}} Q_1^{\frac{1}{2}}(Q_1 + E)^{\frac{1}{2}}\|\zeta\|_2^{\frac{1}{2}} + E(E + \|\zeta\|_2)\} + \epsilon\|\mathbf{v}\|_3 + \delta\|\theta\|_3 \\
&\leq C_{15}(1 + \epsilon)(1 + Q_1^2)\{\epsilon[\|\mathbf{f}\|_1 + (Q_1 + 1)^2 + (Q_1 + 1)] + (E + E^{\frac{1}{2}}) + \delta\}\|\zeta\|_2 \\
&\quad + \epsilon\|\mathbf{v}\|_3 + \delta\|\theta\|_3 + C_{15}(1 + \epsilon)(1 + Q_1^2)\{\epsilon(Q_1 + 1)^2 \\
&\quad + \epsilon[Q_1(\|\mathbf{f}\|_1 + (Q_1 + 1)^2) + (\epsilon(Q_1 + 1)^2 + (Q_1 + 1))\} + E^2\},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中 C_{15} 是正常数.

结合 (2.93) 和 (3.2)–(3.5), 可知存在一个正常数 C_{16} , 使得

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}\|_3 + \|\theta\|_3 + \|\zeta\|_2 &\leq C_{16}(1 + Q_1)^5\{\epsilon[\|\mathbf{f}\|_1 + (Q_1 + 1)^2] + (E + E^{\frac{1}{2}}) + \delta\}\|\zeta\|_2 \\
&\quad + \epsilon Q_1^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{v}\|_3 + \delta Q_1^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_3 + C_{16}(1 + Q_1)^5\{\epsilon(Q_1 + 1)^2 \\
&\quad + \epsilon(1 + Q_1)[\|\mathbf{f}\|_1 + (Q_1 + 1)^2] + E^2\}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

因此, 取 δ 足够小并选择适当小的 ϵ_0 和 E , 可得

$$\begin{aligned}
C_{16}(1 + Q_1)^5\{\epsilon_0[\|\mathbf{f}\|_1 + (Q_1 + 1)^2] + (E + E^{\frac{1}{2}})\} &< 1, \quad \epsilon_0 Q_1^{\frac{1}{2}} < 1, \\
C_{16}(1 + Q_1)^5\{\epsilon_0(Q_1 + 1)^2 + \epsilon_0(1 + Q_1)[\|\mathbf{f}\|_1 + (Q_1 + 1)^2] + E^2\} &< E.
\end{aligned}$$

由 (3.6) 可推导出, 对所有的 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, 有

$$\|\mathbf{v}\|_3 + \|\theta\|_3 + \|\zeta\|_2 \leq E,$$

由此可直接推导出 $\|\mathbf{v}\|_3 + \|\theta\|_3 \leq E$. 证毕. □

引理 3.2 令 N, X, K_0 和 $K_1(E)$ 为引理 3.1 所示, 则 $N: K \rightarrow K$ 是弱连续算子.

证明 根据弱连续算子的定义 (参见文献 [39, 第 72 页, 第 1.4.11.6 小节]), 需要证明在 X 的范数意义下 N 在 K 上连续.

令 $(U_i, \mathbf{v}_i, \theta_i, \mathbf{H}_i) = N(\tilde{U}_i, \tilde{\mathbf{v}}_i, \tilde{\theta}_i, \tilde{\mathbf{H}}_i)$, $i = 1, 2$. 特别地, 给定 $(\tilde{U}_i, \tilde{\mathbf{v}}_i, \tilde{\theta}_i, \tilde{\mathbf{H}}_i)$, 令 $(U_i, P_i, \mathbf{H}_i) \in (H_{0,\sigma}^4) \times \bar{H}^3 \times (H_{0,\sigma}^4)$ 和 $(\zeta_i, \mathbf{v}_i, \theta_i) \in \bar{H}^2 \times (H^3 \cap H_0^1) \times (H^3 \cap H_0^1)$ 分别是 (2.4) 和 (2.31) 的解, 即

$$\begin{cases} (\tilde{U}_i + \tilde{\mathbf{v}}_i) \cdot \nabla U_i - \mu \Delta U_i + \nabla P_i = \mathbf{h} + (\nabla \times \mathbf{H}_i) \times \tilde{\mathbf{H}}_i, \\ \operatorname{div} U_i = 0, \\ \nu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}_i) = \nabla \times (U_i \times \tilde{\mathbf{H}}_i) + \nabla \times (\tilde{\mathbf{v}}_i \times \mathbf{H}_i), \\ \operatorname{div} \mathbf{H}_i = 0, \\ U_i = 0, \quad \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\nabla \times \mathbf{H}_i) \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad \int_{\Omega} P_i dx = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

和

$$\begin{cases} U_i \cdot \nabla \zeta_i + \frac{\operatorname{div} \mathbf{v}_i}{\epsilon} = -\tilde{\mathbf{v}}_i \cdot \nabla \zeta_i - \zeta_i \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_i - \epsilon \operatorname{div}(P_i(U_i + \tilde{\mathbf{v}}_i)), \\ U_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i - \mu \Delta \mathbf{v}_i - (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}_i + \frac{\nabla \zeta_i + \nabla \theta_i}{\epsilon} = \epsilon \tilde{F}_i - \tilde{\mathbf{v}}_i \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_i - \tilde{\theta}_i \nabla \zeta_i - \zeta_i \nabla \tilde{\theta}_i, \\ U_i \cdot \nabla \theta_i - \kappa \Delta \theta_i + \frac{\operatorname{div} \mathbf{v}_i}{\epsilon} = \epsilon \tilde{G}_i - \tilde{\mathbf{v}}_i \cdot \nabla \tilde{\theta}_i - \zeta_i \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_i - \tilde{\theta}_i \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_i, \end{cases} \quad (3.8)$$

其中新外力 $\tilde{F}_i$ 和新热源 $\tilde{G}_i$ 表达式为

$$\begin{aligned} \tilde{F}_i &= (\epsilon P_i + \zeta_i) \mathbf{f} - (\epsilon P_i + \zeta_i)(U_i + \tilde{\mathbf{v}}_i) \cdot \nabla (U_i + \tilde{\mathbf{v}}_i) - \tilde{\theta}_i \nabla P_i - P_i \nabla \tilde{\theta}_i, \\ \tilde{G}_i &= \tilde{\Psi}_{1i} + \tilde{\Psi}_{2i} - (\epsilon P_i + \zeta_i)(U_i + \tilde{\mathbf{v}}_i) \cdot \nabla \tilde{\theta}_i + (\epsilon P_i + \zeta_i) \tilde{\theta}_i \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_i + P_i \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_i. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} W &= U_2 - U_1, \quad \tilde{W} = \tilde{U}_2 - \tilde{U}_1, \quad Q = P_2 - P_1, \quad \xi = \zeta_2 - \zeta_1, \\ \mathbf{w} &= \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \quad \tilde{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{v}}_2 - \tilde{\mathbf{v}}_1, \quad M = \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1, \quad \tilde{M} = \tilde{\mathbf{H}}_2 - \tilde{\mathbf{H}}_1, \\ \beta &= \theta_2 - \theta_1, \quad \tilde{\beta} = \tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1, \quad J = \tilde{F}_2 - \tilde{F}_1, \quad I = \tilde{G}_2 - \tilde{G}_1, \end{aligned}$$

则得到如下系统:

$$\begin{cases} (\tilde{U}_1 + \tilde{\mathbf{v}}_1) \cdot \nabla W - \mu \Delta W + \nabla Q = -(\tilde{W} + \tilde{\mathbf{w}}) \cdot \nabla U_2 + (\nabla \times M) \times \tilde{\mathbf{H}}_2 + (\nabla \times \mathbf{H}_1) \times \tilde{M}, \\ \operatorname{div} W = 0, \\ \nu \nabla \times (\nabla \times M) = \nabla \times (W \times \tilde{\mathbf{H}}_2) + \nabla \times (U_1 \times M) + \nabla \times (\tilde{\mathbf{w}} \times \mathbf{H}_2) + \nabla \times (\tilde{\mathbf{v}}_1 \times M), \\ \operatorname{div} M = 0, \\ U = 0, \quad M \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\nabla \times M) \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad \int_{\Omega} Q dx = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

和

$$\begin{cases} U_1 \cdot \nabla \xi + \frac{\operatorname{div} \mathbf{w}}{\epsilon} = -\operatorname{div}(\tilde{\mathbf{v}}_1 \xi + \tilde{\mathbf{w}} \zeta_2) - \epsilon \operatorname{div}(P_1(W + \tilde{\mathbf{w}}) + Q(U_2 + \tilde{\mathbf{v}}_2)) - W \cdot \nabla \zeta_2, \\ U_1 \cdot \nabla \mathbf{w} - \mu \Delta \mathbf{w} - (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{w} + \frac{\nabla \xi + \nabla \beta}{\epsilon} \\ \quad = \epsilon J - \tilde{\mathbf{w}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_2 - \tilde{\mathbf{v}}_1 \cdot \nabla \tilde{\mathbf{w}} - W \cdot \nabla \mathbf{v}_2 - \nabla(\tilde{\theta}_1 \xi + \tilde{\beta} \zeta_2), \\ U_1 \cdot \nabla \beta - \kappa \Delta \beta + \frac{\operatorname{div} \mathbf{w}}{\epsilon} \\ \quad = \epsilon I - \tilde{\mathbf{w}} \cdot \nabla \tilde{\theta}_2 - \tilde{\mathbf{v}}_1 \cdot \nabla \tilde{\beta} - W \cdot \nabla \theta_2 - \xi \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_1 - \zeta_2 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}} - \tilde{\beta} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_1 - \tilde{\theta}_2 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}}, \end{cases} \quad (3.10)$$

其中 J 和 I 分别记为

$$\begin{aligned}
 J &:= (\epsilon Q + \xi) \mathbf{f} - (\epsilon Q + \xi)(U_2 + \tilde{\mathbf{v}}_2) \cdot \nabla(U_2 + \tilde{\mathbf{v}}_2) \\
 &\quad - (\epsilon P_1 + \zeta_1)((W + \tilde{\mathbf{w}}) \cdot \nabla(U_2 + \tilde{\mathbf{v}}_2) + (U_1 + \tilde{\mathbf{v}}_1) \cdot \nabla(W + \tilde{\mathbf{w}})) - \nabla(\tilde{\beta} P_1 + Q \tilde{\theta}_2), \\
 I &:= 2\mu D(W + \tilde{\mathbf{w}}) : D(U_2 + \tilde{\mathbf{v}}_2) + 2\mu D(U_1 + \tilde{\mathbf{v}}_1) : D(W + \tilde{\mathbf{w}}) \\
 &\quad + \lambda \operatorname{div}(W + \tilde{\mathbf{w}}) \cdot \operatorname{div}(U_2 + \tilde{\mathbf{v}}_2) + \lambda \operatorname{div}(U_1 + \tilde{\mathbf{v}}_1) \cdot \operatorname{div}(W + \tilde{\mathbf{w}}) + \nu(\nabla \times \mathbf{H}_2 + \nabla \times \mathbf{H}_1) \cdot \nabla \times M \\
 &\quad - (\epsilon Q + \xi)(U_2 + \tilde{\mathbf{v}}_2) \cdot \nabla \tilde{\theta}_2 - (\epsilon P_1 + \zeta_1)((W + \tilde{\mathbf{w}}) \cdot \nabla \tilde{\theta}_2 + (U_1 + \tilde{\mathbf{v}}_1) \cdot \nabla \tilde{\beta}) \\
 &\quad + (\epsilon Q + \xi) \tilde{\theta}_2 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_2 - (\epsilon P_1 + \zeta_1)(\tilde{\beta} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_2 + \tilde{\theta}_1 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}}) + Q \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_2 + P_1 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}}.
 \end{aligned}$$

J 和 I 可有如下估计:

$$\begin{aligned}
 \|J\|_0 &\leq (\epsilon \|Q\|_1 + \|\xi\|_1)(\|\mathbf{f}\|_2 + \|U_2\|_2^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}_2\|_2^2) + (\epsilon \|P_1\|_2 + \|\zeta_1\|_2)(\|W\|_1 + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_1) \\
 &\quad \times (\|U_2\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}_2\|_2 + \|U_1\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}_1\|_2) + \|\tilde{\theta}\|_2 \|Q\|_1 + \|\tilde{\beta}\|_1 \|P_1\|_2
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

和

$$\begin{aligned}
 \|I\|_0 &\leq C\{(\|W\|_1 + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_1)(\|U_1\|_2 + \|U_2\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}_1\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}_2\|_2) + \|M\|_1(\|\mathbf{H}_2\|_1 + \|\mathbf{H}_1\|_1) \\
 &\quad + (\epsilon \|Q\|_1 + \|\xi\|_1)(\|U_2\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}_2\|_2) \cdot \|\tilde{\theta}_2\|_2 + (\epsilon \|P_1\|_2 + \|\zeta_1\|_2)(\|W\|_1 + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_1) \|\tilde{\theta}_2\|_2 \\
 &\quad + \|U_1\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}_1\|_2 \|\beta\|_1] + (\epsilon \|P_1\|_2 + \|\zeta_1\|_2)(\|\tilde{\beta}\|_1 \|\tilde{\mathbf{v}}_2\|_2 + \|\tilde{\theta}_1\|_2 \|\tilde{\mathbf{w}}\|_1) \\
 &\quad + \|Q\|_1 \|\tilde{\mathbf{v}}_2\|_2 + \|P_1\|_2 \|\tilde{\mathbf{w}}\|_1\}.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

一方面, 将 (3.9)₁ 和 (3.9)₃ 分别乘以 W 和 M 并对所得等式在 Ω 上积分, 利用 Poincaré 不等式可得

$$\begin{aligned}
 &\left(\mu - \frac{C\|\tilde{\mathbf{v}}_1\|_3}{2}\right) \|\nabla W\|_0^2 + \nu \|\nabla \times M\|_0^2 \\
 &\leq \delta(\|W\|_1^2 + \|M\|_1^2) + C(\|\tilde{W}\|_1 + \|\tilde{M}\|_1 + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_1)(\|U_1\|_3 + \|U_2\|_3 + \|\mathbf{H}_1\|_3 + \|\mathbf{H}_2\|_3),
 \end{aligned}$$

其中 C 是只依赖于 Ω, μ 和 ν 的正常数. 因此可知

$$\|W\|_1 + \|M\|_1 \leq C(\|\tilde{W}\|_1 + \|\tilde{M}\|_1 + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_1), \tag{3.13}$$

其中 C 只依赖于 $\Omega, \mu, \lambda, \nu, \mathbf{f}, E$ 和 ϵ_0 .

由 Stokes 方程的经典估计

$$\begin{cases} -\mu \Delta W + \nabla Q = -(\tilde{W} + \tilde{\mathbf{w}}) \cdot \nabla U_2 - (\tilde{U}_1 + \tilde{\mathbf{v}}_1) \cdot \nabla W + (\nabla \times M) \times \tilde{\mathbf{H}}_2 + (\nabla \times \mathbf{H}_1) \times \tilde{M}, \\ \operatorname{div} W = 0, \end{cases}$$

可得

$$\begin{aligned}
 \|W\|_2 + \|\nabla Q\|_0 &\leq C(\|\tilde{W} + \tilde{\mathbf{w}}\|_1 \|U_2\|_2 + \|\tilde{U}_1 + \tilde{\mathbf{v}}_1\|_2 \|W\|_1 + \|M\|_1 \|\tilde{\mathbf{H}}_2\|_1 + \|\mathbf{H}_1\|_1 \|\tilde{M}\|_1) \\
 &\leq C(\|\tilde{W}\|_1 + \|\tilde{M}\|_1 + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_1),
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

这里需要用到 (3.13).

另一方面, 若将 (3.10)₁, (3.10)₂ 和 (3.10)₃ 分别乘以 ξ , w 和 β 属于 L^2 , 可得

$$\begin{aligned}
 & \mu \|\nabla \mathbf{w}\|_0^2 + (\mu + \lambda) \|\operatorname{div} \mathbf{w}\|_0^2 + \kappa \|\nabla \beta\|_0^2 \\
 &= - \int [\xi \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_1 + \zeta_2 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}} + \tilde{\mathbf{v}}_1 \cdot \nabla \xi + \tilde{\mathbf{w}} \cdot \nabla \zeta_2 + \epsilon \operatorname{div}(P_1(W + \tilde{\mathbf{w}}) + Q(U_2 + \tilde{\mathbf{v}}_2)) + W \cdot \nabla \zeta_2] \xi dx \\
 &+ \int [\epsilon J - \tilde{\mathbf{w}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_2 - \tilde{\mathbf{v}}_1 \cdot \nabla \tilde{\mathbf{w}} - W \cdot \nabla v_2 - \nabla(\tilde{\theta}_1 \xi + \tilde{\beta} \zeta_2)] \cdot w dx \\
 &+ \int [\epsilon D - \tilde{\mathbf{w}} \cdot \nabla \tilde{\theta}_2 - \tilde{\mathbf{v}}_1 \cdot \nabla \tilde{\beta} - W \cdot \nabla \theta_2 - \xi \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_1 - \zeta_2 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}} - \tilde{\beta} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_1 - \tilde{\theta}_1 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}}] \beta dx \\
 &\leq C \{ \|\xi\|_0^2 \|\tilde{\mathbf{v}}_1\|_3 + \|\xi\|_1 \|\tilde{\mathbf{w}}\|_1 \|\zeta_2\|_1 + \epsilon \|\xi\|_0 [\|P_1\|_2 (\|W\|_1 + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_1) + \|Q\|_1 (\|U_2\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}_2\|_2)] \\
 &+ \|W\|_1 \|\zeta_2\|_3 \|\xi\|_1 \} + C \{ \epsilon \|J\|_0^2 + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_1^2 (\|\tilde{\mathbf{v}}_2\|_2^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}_1\|_2^2) + \|W\|_1^2 \|v_2\|_2^2 + \|\tilde{\theta}_2\|_1^2 \|\xi\|_1^2 \\
 &+ \|\tilde{\beta}\|_1^2 \|\zeta\|_2^2 \} + C \{ \epsilon \|I\|_0^2 + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_1^2 \|\tilde{\theta}_2\|_2^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}_1\|_2^2 \|\tilde{\beta}\|_1^2 + \|W\|_1^2 \|\theta_2\|_2^2 + \|\xi\|_1^2 \|\tilde{\mathbf{v}}_1\|_2^2 \\
 &+ \|\zeta_2\|_2^2 \|\tilde{\mathbf{w}}\|_1^2 + \|\tilde{\beta}\|_1^2 \|\tilde{\mathbf{v}}_1\|_2^2 + \|\tilde{\theta}_1\|_2^2 \|\tilde{\mathbf{w}}\|_1^2 \} + \delta (\|\mathbf{w}\|_0^2 + \|\beta\|_0^2). \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

由 Stokes 方程也可得

$$\begin{cases} -\mu \epsilon \Delta \mathbf{w} + \nabla \xi = \epsilon (\epsilon J - \tilde{\mathbf{w}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_2 - \tilde{\mathbf{v}}_1 \cdot \nabla \tilde{\mathbf{w}} - W \cdot \nabla v_2 - \nabla(\tilde{\theta}_1 \xi + \tilde{\beta} \zeta_2) + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{w}) - \nabla \beta, \\ \operatorname{div} \mathbf{w} = \operatorname{div} \mathbf{w}, \end{cases}$$

进而得到如下估计:

$$\begin{aligned}
 \epsilon \|\mathbf{w}\|_2 + \|\nabla \xi\|_0 &\leq \epsilon C (\|\operatorname{div} \mathbf{w}\|_2 + \epsilon \|J\|_0 + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_1 (\|\tilde{\mathbf{v}}_2\|_2 + \|\tilde{\mathbf{v}}_1\|_2) + \|W\|_1 \|v_2\|_2 \\
 &+ \|\tilde{\theta}_1\|_2 \|\xi\|_1 + \|\tilde{\beta}\|_1 \|\zeta_2\|_2) + C \|\beta\|_1. \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

利用 Poincaré 不等式, 并将 (3.16) 代入 (3.15), 结合估计式 (3.11)–(3.14), 以及 ϵ_0 和 E 的小性, 可推导出

$$\|W\|_1 + \|M\|_1 + \|\mathbf{w}\|_1 + \|\beta\|_1 \leq C (\|\tilde{W}\|_1 + \|\tilde{M}\|_1 + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_1 + \|\tilde{\beta}\|_1),$$

其中 C 是正常数, 只依赖于 $\Omega, \mu, \lambda, \nu, \mathbf{f}, E$ 和 ϵ_0 . 证毕. $\square$

最后, 根据引理 3.1 和 3.2, 利用 Tikhonov 不动点定理得到在 K 中的一个不动点 $(U, \mathbf{v}, \mathbf{H}, \theta) = N(U, \mathbf{v}, \mathbf{H}, \theta)$. 而且, 压力 $P \in \bar{H}^2$ 满足

$$\nabla P = \mu \Delta U + \mathbf{f} + \mathbf{g} + (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} - (U + \mathbf{v}) \cdot \nabla U,$$

并且 $(U + \mathbf{v}, \epsilon P + \zeta, \mathbf{H}, \theta)$ 是 (1.6) 的解. 因此得到如下结论:

命题 3.1 令 $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in H^2(\Omega)$, 则存在 ϵ_0 只依赖于 $\Omega, \mu, \lambda, \nu, \mathbf{f}$ 和 $\mathbf{g}$, 使得对所有的 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, (2.1) 和 (2.2) 存在一个解 $(U, P, \mathbf{v}, \zeta, \mathbf{H}, \theta) \in (H_{0,\sigma}^4 \times \bar{H}^3 \times (H^3 \cap H_0^1) \times \bar{H}^2 \times (H_{0,\sigma}^4 \times (H^3 \cap H_0^1))$, 满足

$$\|\mathbf{v}\|_3 + \|\zeta\|_2 + \|\theta\|_3 \leq E,$$

其中 E 是小的正常数, 只依赖于 $\Omega, \mu, \lambda, \nu, \mathbf{f}$ 和 $\mathbf{g}$. 进而, $(U + \mathbf{v}, \epsilon P + \zeta, \mathbf{H}, \theta)$ 是系统 (1.6) 的一个解.

4 不可压极限

令 $\epsilon < \epsilon_0$, $(U^\epsilon, \mathbf{v}^\epsilon, \mathbf{H}^\epsilon, \theta^\epsilon) \in K$ 是命题 3.1 确定的一个解. 在 (3.6) 中取 $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^\epsilon$ 和 $\theta = \tilde{\theta} = \theta^\epsilon$ 并且 $\zeta = \zeta^\epsilon$, 可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}^\epsilon\|_3 + \|\theta^\epsilon\|_3 + \|\zeta^\epsilon\|_2 &\leq C_{16}(1+Q_1)^5 \{\epsilon[\|\mathbf{f}\|_1 + (Q_1+1)^2] + (E+E^{\frac{1}{2}}) + \delta\} \|\zeta\|_2 \\ &\quad + (\epsilon Q_1^{\frac{1}{2}} + E) \|\mathbf{v}\|_3 + (\delta Q_1^{\frac{1}{2}} + E) \|\theta\|_3 \\ &\quad + C_{16}(1+Q_1)^5 \{\epsilon(Q_1+1)^2 + \epsilon(1+Q_1)[\|\mathbf{f}\|_1 + (Q_1+1)^2]\}. \end{aligned}$$

则通过利用 ϵ_0 和 E 的小性使得

$$C_{16}(1+Q_1)^5 \{\epsilon[\|\mathbf{f}\|_1 + (Q_1+1)^2] + (E+E^{\frac{1}{2}})\} < 1, \quad \epsilon Q_1^{\frac{1}{2}} + E < 1,$$

可知

$$\|\mathbf{v}^\epsilon\|_3 + \|\theta^\epsilon\|_3 + \|\zeta^\epsilon\|_2 \leq C_{16}(1+Q_1)^5 \{\epsilon(Q_1+1)^2 + \epsilon(1+Q_1)[\|\mathbf{f}\|_1 + (Q_1+1)^2]\},$$

故当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\|\mathbf{v}^\epsilon\|_3 + \|\theta^\epsilon\|_3 + \|\zeta^\epsilon\|_2 \rightarrow 0. \quad (4.1)$$

进而, 由 (2.2)₁, 即

$$U^\epsilon \cdot \nabla \zeta^\epsilon + \frac{\operatorname{div} \mathbf{v}^\epsilon}{\epsilon} = -\mathbf{v}^\epsilon \cdot \nabla \zeta^\epsilon - \zeta^\epsilon \operatorname{div} \mathbf{v}^\epsilon - \epsilon \operatorname{div}(P^\epsilon(U^\epsilon + \mathbf{v}^\epsilon)),$$

以及 (4.1), 可得当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\left\| \frac{\operatorname{div} \mathbf{v}^\epsilon}{\epsilon} \right\|_1 \leq \|\mathbf{v}^\epsilon \cdot \nabla \zeta^\epsilon\|_1 + \|\zeta^\epsilon \operatorname{div} \mathbf{v}^\epsilon\|_1 + \|\epsilon \operatorname{div}(P^\epsilon(U^\epsilon + \mathbf{v}^\epsilon))\|_1 + \|U^\epsilon \cdot \nabla \zeta^\epsilon\|_1 \rightarrow 0. \quad (4.2)$$

因为 (4.1) 和

$$\frac{\nabla \zeta^\epsilon + \nabla \theta^\epsilon}{\epsilon} = \epsilon F^\epsilon - \mathbf{v}^\epsilon \cdot \nabla \mathbf{v}^\epsilon - \theta^\epsilon \nabla \zeta^\epsilon - \zeta^\epsilon \nabla \theta^\epsilon - U^\epsilon \cdot \nabla \mathbf{v}^\epsilon + \mu \Delta \mathbf{v}^\epsilon + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}^\epsilon,$$

其中

$$F^\epsilon = (\epsilon P^\epsilon + \zeta^\epsilon) \mathbf{f} - (\epsilon P^\epsilon + \zeta^\epsilon)(U^\epsilon + \mathbf{v}^\epsilon) \cdot \nabla (U^\epsilon + \mathbf{v}^\epsilon) - \theta^\epsilon \nabla P^\epsilon - P^\epsilon \nabla \theta^\epsilon,$$

其为 (2.2)₂ 的变形, 并利用 Poincaré 不等式, 可得

$$\left\| \frac{\zeta^\epsilon + \theta^\epsilon}{\epsilon} \right\|_2 \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (4.3)$$

另外, 根据引理 2.4, 观察可知 $(U^\epsilon, \mathbf{H}^\epsilon, P^\epsilon)$ 是 $(H^4 \cap H_0^1) \times (H^4 \cap H_0^1) \times \bar{H}^3$ 中关于 ϵ 的一致有界序列. 则存在 $(U^{\epsilon_k}, \mathbf{H}^{\epsilon_k}, P^{\epsilon_k})$ 的一个子序列, 为简单起见仍记为 $(U^{\epsilon_k}, \mathbf{H}^{\epsilon_k}, P^{\epsilon_k})$ 和 $(\bar{U}, \bar{\mathbf{H}}, \bar{P}) \in (H^4 \cap H_0^1) \times (H^4 \cap H_0^1) \times \bar{H}^3$, 使得当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,

$$(U^\epsilon, \mathbf{H}^\epsilon, P^\epsilon) \text{ 弱收敛到 } (\bar{U}, \bar{\mathbf{H}}, \bar{P}), \quad \text{在 } (H^4 \cap H_0^1) \times \bar{H}^3 \text{ 上,}$$

并且

$$(U^\epsilon, \mathbf{H}^\epsilon, P^\epsilon) \text{ 强收敛到 } (\bar{U}, \bar{\mathbf{H}}, \bar{P}), \quad \text{在 } (H^3 \cap H_0^1) \times (H^3 \cap H_0^1) \times \bar{H}^2 \text{ 上.}$$

因此, 在 (2.1) 和 (2.2) 中取 $\epsilon \rightarrow 0$, 可得 $(\bar{U}, \bar{\mathbf{H}}, \bar{P})$ 是稳态不可压磁流体动力学方程 (1.8) 的解. 综上所述, 可得

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_{U, \mathbf{H}, P \in \mathbf{L}} \|U^\epsilon + \mathbf{v}^\epsilon - U\|_3 + \|\mathbf{H}^\epsilon - \mathbf{H}\|_3 + \left\| P^\epsilon + \frac{\zeta^\epsilon + \theta^\epsilon}{\epsilon} - P \right\|_2 + \|\theta^\epsilon\|_3 = 0,$$

其中 $\mathbf{L}$ 如定理 1.1 所示. 故得到了小 Mach 数极限的证明.

参考文献

- 1 Alazard T. Low Mach number limit of the full Navier-Stokes equations. *Arch Ration Mech Anal*, 2006, 180: 1–73
- 2 Bresch D, Desjardins B, Grenier E, et al. Low Mach number limit of viscous polytropic flows: Formal asymptotics in the periodic case. *Stud Appl Math*, 2002, 109: 125–149
- 3 Březina J, Novotný A. On weak solutions of steady Navier-Stokes equations for monoatomic gas. *Comment Math Univ Carolin*, 2008, 49: 611–632
- 4 Choe H J, Jin B J. Existence of solutions of stationary compressible Navier-Stokes equations with large force. *J Funct Anal*, 2000, 177: 54–88
- 5 da Veiga H B. An L^p -theory for the n -dimensional, stationary, compressible Navier-Stokes equations, and the incompressible limit for compressible fluids. The equilibrium solutions. *Comm Math Phys*, 1987, 109: 229–248
- 6 Dorin B, Feireisl E. The incompressible limit of the full Navier-Stokes-Fourier system on domains with rough boundaries. *Nonlinear Anal Real World Appl*, 2009, 10: 3203–3229
- 7 Dou C, Jiang F, Jiang S, et al. Existence of strong solutions to the steady Navier-Stokes equations for a compressible heat-conductive fluid with large forces. *J Math Pures Appl (9)*, 2015, 103: 1163–1197
- 8 Dou C, Jiang S, Ju Q. Global existence and the low Mach number limit for the compressible magnetohydrodynamic equations in a bounded domain with perfectly conducting boundary. *Z Angew Math Phys*, 2013, 64: 1661–1678
- 9 Dou C, Ju Q. Low Mach number limit for the compressible magnetohydrodynamic equations in a bounded domain for all time. *Commun Math Sci*, 2014, 12: 661–679
- 10 Fan J, Li F, Nakamura G. Global existence and low Mach number limit to the 3D compressible magnetohydrodynamic equations in a bounded domain. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2015, 2015: 387–394
- 11 Farwig R. Stationary solutions of compressible Navier-Stokes equations with slip boundary conditions. *Comm Partial Differential Equations*, 1989, 14: 1579–1606
- 12 Feireisl E, Malek J, Novotny A. Navier’s slip and incompressible limits in domains with variable bottoms. *Discrete Contin Dyn Syst Ser S*, 2008, 1: 427–460
- 13 Feireisl E, Novotný A. The low Mach number limit for the full Navier-Stokes-Fourier system. *Arch Ration Mech Anal*, 2007, 186: 77–107
- 14 Feireisl E, Novotný A, Petzeltová H. On the incompressible limit for the Navier-Stokes-Fourier system in domains with wavy bottoms. *Math Models Methods Appl Sci*, 2008, 18: 291–324
- 15 Frehse J, Goj S, Steinhauer M. L^p -estimates for the Navier-Stokes equations for steady compressible flow. *Manuscripta Math*, 2005, 116: 265–275
- 16 Frehse J, Steinhauer M, Weigant W. On stationary solutions for 2-D viscous compressible isothermal Navier-Stokes equations. *J Math Fluid Mech*, 2010, 13: 55–63
- 17 Frehse J, Steinhauer M, Weigant W. The Dirichlet problem for steady viscous compressible flow in three dimensions. *J Math Pures Appl (9)*, 2012, 97: 85–97
- 18 Friedman A. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964
- 19 Galdi G P. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, Volume I. Linearized Steady Problems*. New York: Springer-Verlag, 1994
- 20 Gu X Y, Ou Y B. Existence of strong solutions to steady magnetohydrodynamic equations with large forces for ideal polytropic gases. *Discrete Contin Dyn Syst Ser B*, 2025, 30: 1710–1744
- 21 Gu X Y, Ou Y B, Yang L. Incompressible limit of isentropic magnetohydrodynamic equations with ill-prepared data in bounded domains. *J Math Phys*, 2023, 64: 031501

- 22 Hagstrom T, Lorenz J. On the stability of approximate solutions of hyperbolic-parabolic systems and the all-time existence of smooth, slightly compressible flows. [Indiana Univ Math J](#), 2002, 51: 1339–1388
- 23 Hu X, Wang D. Global solutions to the three-dimensional full compressible magnetohydrodynamic flows. [Comm Math Phys](#), 2008, 283: 255–284
- 24 Hu X, Wang D. Global existence and large-time behavior of solutions to the three-dimensional equations of compressible magnetohydrodynamic flows. [Arch Ration Mech Anal](#), 2010, 197: 203–238
- 25 Jesslé D, Novotný A. Existence of renormalized weak solutions to the steady equations describing compressible fluids in barotropic regime. [J Math Pures Appl \(9\)](#), 2013, 99: 280–296
- 26 Jiang S, Jiang F, Zhou C H. Well-Posedness of Multi-Dimensional Steady Compressible Navier-Stokes Equations (in Chinese). Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 2019 [江松, 江飞, 周春晖. 高维定常可压缩 Navier-Stokes 方程的适定性理论. 上海: 上海科学技术出版社, 2019]
- 27 Jiang S, Ju Q, Li F. Incompressible limit of the nonisentropic ideal magnetohydrodynamic equations. [SIAM J Math Anal](#), 2016, 48: 302–319
- 28 Jiang S, Ou Y. Incompressible limit of the non-isentropic Navier-Stokes equations with well-prepared initial data in three-dimensional bounded domains. [J Math Pures Appl \(9\)](#), 2011, 96: 1–28
- 29 Jiang S, Zhou C H. Existence of weak solutions to the three-dimensional steady compressible Navier-Stokes equations. [Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire](#), 2011, 28: 485–498
- 30 Li H L, Xu X, Zhang J. Global classical solutions to 3D compressible magnetohydrodynamic equations with large oscillations and vacuum. [SIAM J Math Anal](#), 2013, 45: 1356–1387
- 31 Liang M, Ou Y. Convergence rate of fully compressible Navier-Stokes equations in three-dimensional bounded domains. [Discrete Contin Dyn Syst Ser B](#), 2023, 28: 1673–1695
- 32 Lions P L. Mathematical Topics in Fluid Dynamics, Volume 2. Compressible Models. Oxford: Oxford Science Publication, 1998
- 33 Majda A. Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables. Applied Mathematical Sciences, vol. 53. New York: Springer-Verlag, 1984
- 34 Matsumura A, Padula M. Stability of stationary flow of compressible fluids subject to large external potential forces. [Stab Anal Cont Media](#), 1992, 2183–2202
- 35 Novotný A, Padula M. Existence and uniqueness of stationary solutions for viscous compressible heat conductive fluid with large potential and small nonpotential external forces. [Sib Math J](#), 1991, 34: 120–146
- 36 Novotný A, Padula M. Lp-approach to steady flows of viscous compressible fluids in exterior domains. [Arch Ration Mech Anal](#), 1994, 126: 243–297
- 37 Novotný A, Pokorný M. Steady compressible Navier-Stokes-Fourier system for monoatomic gas and its generalizations. [J Differential Equations](#), 2011, 251: 270–315
- 38 Novotný A, Pokorný M. Weak and variational solutions to steady equations for compressible heat conducting fluids. [SIAM J Math Anal](#), 2011, 43: 1158–1188
- 39 Novotný A, Straškraba I. Introduction to the Theory of Compressible Flow. Oxford: Oxford University Press, 2004
- 40 Ou Y, Yang L. Incompressible limit of isentropic Navier-Stokes equations with ill-prepared data in bounded domains. [SIAM J Math Anal](#), 2022, 54: 2948–2989
- 41 Padula M. Existence and uniqueness for viscous steady compressible motions. [Arch Ration Mech Anal](#), 1987, 97: 89–102
- 42 Plotnikov P I, Ruban E V, Sokolowski J. Inhomogeneous boundary value problems for compressible Navier-Stokes and transport equations. [J Math Pures Appl \(9\)](#), 2009, 92: 113–162
- 43 Plotnikov P I, Sokolowski J. Concentrations of solutions to time-discretized compressible Navier-Stokes equations. [Comm Math Phys](#), 2005, 258: 567–608
- 44 Plotnikov P I, Sokolowski J. On compactness, domain dependence and existence of steady state solutions to compressible isothermal Navier-Stokes equations. [J Math Fluid Mech](#), 2005, 7: 529–573
- 45 Plotnikov P I, Sokolowski J. Stationary solutions of Navier-Stokes equations for diatomic gases (in Russian). [Uspekhi Mat Nauk](#), 2007, 62: 117–148; English translation in [Russian Math Surveys](#), 2007, 62: 561–593
- 46 Plotnikov P I, Weigant W. Steady 3D viscous compressible flows with adiabatic exponent $\gamma \in (1, \infty)$. [J Math Pures Appl \(9\)](#), 2015, 104: 58–82

- 47 Temam R. Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis. Amsterdam-New York-Oxford: North-Holland, 1979
- 48 Valli A. Periodic and stationary solutions for compressible Navier-Stokes equations by stability method. *Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci* (5), 1983, 10: 607–647
- 49 Valli A. On the existence of stationary solutions to compressible Navier-Stokes equations. *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 1987, 4: 99–113
- 50 Yan W. Large data existence result for the steady full compressible magnetohydrodynamic flows in three dimensional. *Ann Mat Pura Appl* (4), 2016, 195: 1–27
- 51 Yang Y F, Gu X, Dou C. Existence and uniqueness of steady solutions to the magnetohydrodynamic equations of compressible flows. *J Math Anal Appl*, 2014, 409: 846–850
- 52 Zhou C H. Existence of weak solutions to the three-dimensional steady compressible magnetohydrodynamic equations. *Acta Math Sin (Engl Ser)*, 2012, 28: 2431–2442

Existence of strong solutions and low Mach number limit for boundary value problems of steady compressible magnetohydrodynamic equations with large external forces

Changsheng Dou & Qiangchang Ju

Abstract In this paper, we consider the existence of a strong solution to the boundary value problem for steady compressible MHD (magnetohydrodynamics) equations with large external forces in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) when the Mach number is appropriately small, and we show that the strong solutions to the boundary value problem for steady compressible MHD equations tend to strong solutions to the steady incompressible MHD equations rigorously as the Mach number goes to zero. In the proof, the equations are decoupled into the steady incompressible MHD equations with large forces and the steady compressible MHD equations with small forces, and the uniform *a priori* estimates in the Mach number are established.

Keywords steady compressible MHD equations, large external forces, Dirichlet boundary condition, existence of strong solutions, low Mach number limit

MSC(2020) 35Q30, 76D05

doi: 10.1360/SSM-2025-0228