



星型区域上几乎不可压复合材料正问题与反问题的直接线法

朱晓鹏^{1*}, 黄忠亿²

1. 辽宁工程技术大学理学院, 阜新 123000;

2. 清华大学数学科学系, 北京 100084

E-mail: zhuxiaopeng@lntu.edu.cn, zhongyih@tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2023-07-12; 接受日期: 2024-04-24; 网络出版日期: 2024-09-02; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12025104, 11871298 和 81930119) 资助项目

摘要 本文应用直接线法求解星型区域上 (几乎) 不可压复合材料问题, 同时本文也研究了其在反问题上的应用. 通过引入一个合适的曲线坐标, 不正规的星型区域被转化成正规的半无限条形区域. 本文在角度方向离散 (几乎) 不可压弹性方程并使用直接方法去求解所得到的变分微分方程. 然后给出此半离散数值解的最优误差估计, 没有闭锁现象且收敛阶不会降低. 对于反问题, 本文通过极小化能量泛函从测量数据来反演 Lamé 系数, 为了处理可能的奇性和区域的不正规性, 本文将直接线法作为正问题求解器. 丰富的数值算例证明了此方法对正问题和反问题的有效性与准确性.

关键词 复合材料 几乎不可压 反问题 星型区域 线法

MSC (2020) 主题分类 35J75, 52A30, 65N21, 65N40, 74A40, 74B05

1 引言

复合材料是将多种不同参数的弹性材料通过化学或物理的方法组合在一起所形成的, 通常复合材料的性能会比各组分材料更加优良. 复合材料历史悠久, 钢筋混凝土和玻璃钢等都是典型的复合材料, 同时碳纤维、碳化硅纤维等高强度、高模量纤维能与合成树脂、陶瓷、橡胶等非金属基体或镁、铝等金属基体复合, 构成各具特色的复合材料. 现代高科技的发展也离不开复合材料, 城市建设、纺织、汽车、飞机、高铁等行业都需要用到不同的复合材料. 在巨大的市场需求下, 复合材料产业将会得到更广阔的发展, 因此研究复合材料问题意义重大, 这类问题也引起了许多数学家和工程师的关注.

本文主要考虑星型区域上 (几乎) 不可压复合材料的正问题与反问题. 首先假设区域 Ω 为星型区域: $\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^K \bar{\Omega}_k$, 其中 Ω 代表由 K 种不同弹性材料组成的复合材料, Ω_k 表示第 k 种弹性材料. 边界 $\Gamma = \partial\Omega$ 是星型 (即从原点 O 出发的射线与边界只有一个交点) 闭 Lipschitz 曲线并且 Γ 能

英文引用格式: Zhu X P, Huang Z Y. The direct method of lines for forward and inverse problems of nearly-incompressible composite materials in star-shaped domains (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 417–436, doi: 10.1360/SCM-2023-0400

被参数化表示成角度的分片光滑函数 $\tilde{r} = \tilde{r}(\phi)$, 使得 $\tilde{r}(0) = \tilde{r}(2\pi)$ 以及对于任意 $0 \leq \phi \leq 2\pi$ 有 $\tilde{r}(\phi) \geq r_0 > 0$. 不失一般性地, 假设不同材料的界面都交于原点, 每个界面 $\overline{\Omega}_{k-1} \cap \overline{\Omega}_k$ 是一条线段 $L_k = \{(r, \theta) \mid \theta = \theta_k, 0 \leq r \leq \tilde{r}(\theta_k)\}$, $k = 1, \dots, K$, 其中 $\Omega_0 = \Omega_K$ 并且 $\theta_1 = 0, \theta_{K+1} = 2\pi$ (如图 1 所示). 则几乎不可压复合材料问题可以表达成

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \sigma^k &= 0, \quad \text{在 } \Omega_k \text{ 中}, \\ \frac{1}{\lambda^k} p^k + \operatorname{div} u^k &= 0, \quad \text{在 } \Omega_k \text{ 中}, \\ u^k &= f^k, \quad \text{在 } \Gamma_k \text{ 上}, \\ u^{k-1}|_{\theta=\theta_k^-} &= u^k|_{\theta=\theta_k^+}, \\ \sigma^{k-1} \cdot n_k|_{\theta=\theta_k^-} &= \sigma^k \cdot n_k|_{\theta=\theta_k^+}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

以及

$$\sigma_{ij}^k = -\delta_{ij} p^k + \mu^k \left(\frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 2, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (1.2)$$

其中 $k = 1, \dots, K$, $\Gamma_k = \partial\Omega_k \cap \partial\Omega$, f 是 Γ 上已知的向量值函数并且 $f|_{\Gamma_k} = f^k = (f_1^k, f_2^k)^T$, u 是 Ω 上的位移向量并且 $u|_{\Omega_k} = u^k = (u_1^k, u_2^k)^T$, p 是压力并且 $p|_{\Omega_k} = p^k$, σ 是 Ω 上的应力张量并且 $\sigma|_{\Omega_k} = \sigma^k$, 单位外法向 $n_k = (-\sin(\theta_k), \cos(\theta_k))^T$, μ 是分片常数的 Lamé 系数并且 $\mu_k > 0$, λ^k 趋于无穷大 (对于不可压情形, $\lambda^k = \infty$). 几乎不可压复合材料正问题就是: 已知 Lamé 系数 λ 和 μ , 求解 (1.1) 得到位移向量 u 和压力 p . 我们关心的反问题是: 已知位移向量 u 和压力 p 的一个测量, 去确定区域 Ω 上的 Lamé 系数 μ .

对于复合材料正问题, 第一个困难是在界面交界、物体边缘和裂纹尖端等处方程的解可能会出现应力奇性. 文献 [10, 14, 45, 49, 50, 58, 61] 研究了复合材料的应力奇性的结构, 发现应力会在界面和裂纹尖端处存在振荡行为. 从文献 [20, 45, 53] 可知 $u \in H^1(\Omega)$ 但 $u \notin H^2(\Omega)$. 因此用传统数值方法 (包括有限元方法与有限差分方法), 问题的奇性可能导致收敛阶的降低. 过去几十年, 许多数学家和工程师发展出了许多不同的数值方法来改善数值结果, 如网格细分方法 [3, 41]、无限元方法 [25]、边界元方法 [39, 48]、利用奇异函数的有限元方法 [15, 40]、有限带方法 [12]、辅助映射方法 [44]、自适应有限元方法 [9]、自适应间断 Galerkin 有限元方法 [57]、修正拓展的有限元方法 [16]、稳定的广义有限元方法 [24] 和拓展的等几何分析方法 [17] 等. 一般而言, 这些方法对给定的问题可以得到更准确的数值结果, 但是

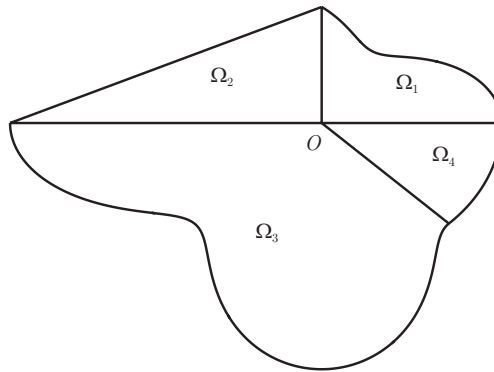


图 1 星型区域

每种方法也有各自的限制. 例如, 辅助映射方法和拓展的等几何分析方法等需要对奇异点的奇性结构有预先的了解.

第二个困难是星型区域通常是不规则且非凸的, 这导致普通的传统方法难以求解问题 (1.1).

最大的困难是由于复合材料是几乎不可压的, 普通的有限元方法会发生闭锁现象以及离散稳定性的损失. 文献 [47] 指出经典有限元方法的误差估计依赖于因子 $\frac{1}{1-2\nu}$, 其中 ν 是 Poisson 比, 在几乎不可压弹性材料问题中趋于 0.5, 因此这个因子会趋于无穷大. 随后许多改善的数值方法被提出, 如稳定化有限元方法 [42, 43]、间断 Galerkin 方法 [7]、最小二乘有限元方法 [33]、几何化有限元方法 [32]、自动变分稳定有限元方法 [8]、无网格有限元方法 [37]、稳定公式方法 [1] 和混合 FFT-Galerkin (fast Fourier transform Galerkin) 方法 [56] 以及几种特殊有限元方法 [5, 6, 11, 30, 34]. 这些方法一般都能得到更精确并且没有闭锁现象的数值结果, 但是这些有限元空间的构造和分析比较复杂.

本文应用直接线法来求解几乎不可压复合材料问题. 直接线法是一种从线法 [52, 60] 发展起来的半离散方法, 这种方法不需要奇异性的预先知识, 并且能够得到更准确的数值解. 直接线法已经被用于解决多边形区域的椭圆奇异问题 [28, 29] 和无界区域的边值问题 [26, 27], 近来直接线法又被用于解决星型区域的带奇性的 Laplace 方程 [59] 以及星型区域上可压缩复合材料问题 [63]. 本文通过引入曲线坐标系, 将不规则的星型区域转化为规则的半无界带状区域. 在角度方向变分将原问题化为一个等价的变分微分问题, 在角度方向离散此变分微分问题后将得到一个常微分方程组. 这个常微分方程组很容易用解析的方法求解从而得到原问题的半离散数值解. 丰富的数值算例证明了本文的方法可以自然地捕捉到奇性, 没有闭锁现象并且收敛阶不会降低. 最后给出此半离散方法的最优误差估计.

另外, 弹性反问题在医疗诊断的弹性成像 [13, 21] 和材料特征提取 [2, 22, 51] 方面有很成功的应用. 类似正问题, 本文仍然聚焦于星型区域上的几乎不可压复合材料问题. 因为全场测量可以通过许多方法 (参见文献 [22, 23, 46]) 得到, 所以假设整个区域的位移测量是可以获得的. 反问题的目标就是通过已知的全场位移测量 u 和压力 p 去确定界面的位置以及每个子区域上的 Lamé 系数 μ . 有很多不同的反问题框架 [2, 4, 18, 19, 31, 35, 36, 62] 可以选择, 本文采用文献 [18, 35] 中的最小二乘框架, 因为其极小化泛函是凸的, 且计算泛函梯度时不需要计算数值解 u 对 Lamé 系数的偏导数. 用分片常数去近似 Lamé 系数, 并用 Adam 算法 [38] 去极小化带全变分正则化的能量泛函. 在每一步迭代中, 都要求解几乎不可压复合材料正问题, 因此将直接线法作为正问题求解器, 去处理区域的不正规性以及解的奇性.

本文余下内容的安排如下. 第 2 节将直接线法用于几乎不可压复合材料正问题, 同时给出最优误差估计. 第 3 节给出求解几乎不可压复合材料反问题的数值程序. 第 4 节给出正问题与反问题的数值算例. 第 5 节给出本文结论.

2 几乎不可压复合材料正问题的直接线法

2.1 曲线坐标系

星型区域一般是不正规的, 这导致难以求解 (1.1), 因此引入曲线坐标系

$$(x, y) = e^{\rho}(\tilde{r}(\phi) \cos(\phi), \tilde{r}(\phi) \sin(\phi)), \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad -\infty < \rho \leq 0. \quad (2.1)$$

通过这个坐标变换, 将每个子区域 Ω_k 变成正规的半无限带状区域, 这样可以处理更一般的区域. 在新的坐标系下, 应力张量变为

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^k &= -p^k + 2\mu^k \left(\frac{\tilde{r}' \sin(\phi) + \tilde{r} \cos(\phi)}{e^\rho \tilde{r}^2} \frac{\partial u_1^k}{\partial \rho} - \frac{\tilde{r} \sin(\phi)}{e^\rho \tilde{r}^2} \frac{\partial u_1^k}{\partial \phi} \right), \\
\sigma_{12}^k &= \sigma_{21}^k \\
&= \mu^k \left(-\frac{\tilde{r}' \cos(\phi) - \tilde{r} \sin(\phi)}{e^\rho \tilde{r}^2} \frac{\partial u_1^k}{\partial \rho} + \frac{\tilde{r} \cos(\phi)}{e^\rho \tilde{r}^2} \frac{\partial u_1^k}{\partial \phi} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\tilde{r}' \sin(\phi) + \tilde{r} \cos(\phi)}{e^\rho \tilde{r}^2} \frac{\partial u_2^k}{\partial \rho} - \frac{\tilde{r} \sin(\phi)}{e^\rho \tilde{r}^2} \frac{\partial u_2^k}{\partial \phi} \right), \\
\sigma_{22}^k &= -p^k + 2\mu^k \left(-\frac{\tilde{r}' \cos(\phi) - \tilde{r} \sin(\phi)}{e^\rho \tilde{r}^2} \frac{\partial u_2^k}{\partial \rho} + \frac{\tilde{r} \cos(\phi)}{e^\rho \tilde{r}^2} \frac{\partial u_2^k}{\partial \phi} \right).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

在子区域 Ω_k 上, 原问题 (1.1) 变为如下问题:

$$\begin{aligned}
&\left((\tilde{r}' \sin(\phi) + \tilde{r} \cos(\phi)) \frac{\partial}{\partial \rho} - (\tilde{r} \sin(\phi)) \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \sigma_{11}^k + \left((-\tilde{r}' \cos(\phi) + \tilde{r} \sin(\phi)) \frac{\partial}{\partial \rho} + (\tilde{r} \cos(\phi)) \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \sigma_{12}^k \\
&= 0, \\
&\left((\tilde{r}' \sin(\phi) + \tilde{r} \cos(\phi)) \frac{\partial}{\partial \rho} - (\tilde{r} \sin(\phi)) \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \sigma_{12}^k + \left((-\tilde{r}' \cos(\phi) + \tilde{r} \sin(\phi)) \frac{\partial}{\partial \rho} + (\tilde{r} \cos(\phi)) \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \sigma_{22}^k \\
&= 0, \\
&(\tilde{r}' \sin(\phi) + \tilde{r} \cos(\phi)) \frac{\partial u_1^k}{\partial \rho} - (\tilde{r} \sin(\phi)) \frac{\partial u_1^k}{\partial \phi} + (-\tilde{r}' \cos(\phi) + \tilde{r} \sin(\phi)) \frac{\partial u_2^k}{\partial \rho} + (\tilde{r} \cos(\phi)) \frac{\partial u_2^k}{\partial \phi} + \frac{e^\rho \tilde{r}^2}{\lambda^k} p^k \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$u^k|_{\rho=0} = f^k(\phi), \quad \theta_{k-1} < \phi < \theta_k,$$

$$u^{k-1}(\rho, \theta_k^-) = u^k(\rho, \theta_k^+),$$

$$\left(\begin{array}{c} \sigma_{11}^{k-1} \sin(\theta_k) - \sigma_{12}^{k-1} \cos(\theta_k) \\ \sigma_{21}^{k-1} \sin(\theta_k) - \sigma_{22}^{k-1} \cos(\theta_k) \end{array} \right) \Big|_{\theta=\theta_k^-} = \left(\begin{array}{c} \sigma_{11}^k \sin(\theta_k) - \sigma_{12}^k \cos(\theta_k) \\ \sigma_{21}^k \sin(\theta_k) - \sigma_{22}^k \cos(\theta_k) \end{array} \right) \Big|_{\theta=\theta_k^+},$$

当 $\rho \rightarrow -\infty$ 时, u 有界.

令 $L^2(\Omega)$ 和 $H^1(\Omega)$ 是标准 Sobolev 空间, 引入以下空间: $H_p^1((0, 2\pi)) = \{v(\phi) \mid v(\phi), v'(\phi) \in L^2((0, 2\pi)), v(0) = v(2\pi)\}$, $W = H_p^1((0, 2\pi)) \times H_p^1((0, 2\pi))$, $V = \{v = (v_1(\rho, \phi), v_2(\rho, \phi))^T \mid \text{对固定的 } \rho < 0, \text{有 } v, \partial_\rho v, \partial_{\rho\rho}^2 v \in W\}$, $Q = \{q(\phi) \mid q(\phi) \in L^2((0, 2\pi)), q(0) = q(2\pi)\}$, $S = \{p(\rho, \phi) \mid \text{对固定的 } \rho < 0, \text{有 } p \in Q\}$.

(2.3) 等价于以下变分微分问题:

找到 $(u, p) \in V \times S$, 使得对于任意 $-\infty < \rho < 0$, 都有

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 A_2(u, v)}{d\rho^2} + \frac{dA_1(u, v)}{d\rho} + A_0(u, v) + \frac{d(e^\rho B_1(p, v))}{d\rho} - e^\rho B_0(p, v) = 0, \quad \forall v \in W, \\
&\frac{dB_1(q, u)}{d\rho} + B_0(q, u) + e^\rho C_0(p, q) = 0, \quad \forall q \in Q,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$u|_{\rho=0} = f, \quad \text{当 } \rho \rightarrow -\infty \text{ 时, } u \text{ 有界,}$$

其中

$$A_2(u, v) = \sum_{k=1}^K \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} u^k(\rho, \phi)^T \Psi_2^k v^k(\phi) d\phi, \tag{2.5}$$

$$A_1(u, v) = \sum_{k=1}^K \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \left(\left(\frac{\partial u^k(\rho, \phi)}{\partial \phi} \right)^T \Psi_1^k v^k(\phi) - u^k(\rho, \phi)^T (\Psi_1^k)^T \frac{dv^k(\phi)}{d\phi} \right) d\phi, \quad (2.6)$$

$$A_0(u, v) = - \sum_{k=1}^K \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \left(\frac{\partial u^k(\rho, \phi)}{\partial \phi} \right)^T \Psi_0^k \frac{dv^k(\phi)}{d\phi} d\phi, \quad (2.7)$$

$$B_1(q, v) = \sum_{k=1}^K \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} -q^k (\tilde{r}' \sin(\phi) + \tilde{r} \cos(\phi)) v_1^k + q^k (\tilde{r}' \cos(\phi) - \tilde{r} \sin(\phi)) v_2^k d\phi, \quad (2.8)$$

$$B_0(q, v) = \sum_{k=1}^K \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} q^k (\tilde{r} \sin(\phi)) \frac{dv_1^k}{d\phi} + q^k (-\tilde{r} \cos(\phi)) \frac{dv_2^k}{d\phi} d\phi, \quad (2.9)$$

$$C_0(p, q) = \sum_{k=1}^K \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{\tilde{r}^2}{\lambda^k} p^k q^k d\phi, \quad (2.10)$$

以及

$$\begin{aligned} v^k &= v|_{[\theta_k, \theta_{k+1}]}, \\ q^k &= q|_{[\theta_k, \theta_{k+1}]}, \\ \Psi_2^k &= \mu^k \begin{pmatrix} \frac{2(\tilde{r}' \sin(\phi) + \tilde{r} \cos(\phi))^2 + (\tilde{r}' \cos(\phi) - \tilde{r} \sin(\phi))^2}{\tilde{r}^2} & -\frac{(\tilde{r}' \sin(\phi) + \tilde{r} \cos(\phi))(\tilde{r}' \cos(\phi) - \tilde{r} \sin(\phi))}{\tilde{r}^2} \\ -\frac{(\tilde{r}' \sin(\phi) + \tilde{r} \cos(\phi))(\tilde{r}' \cos(\phi) - \tilde{r} \sin(\phi))}{\tilde{r}^2} & \frac{(\tilde{r}' \sin(\phi) + \tilde{r} \cos(\phi))^2 + 2(\tilde{r}' \cos(\phi) - \tilde{r} \sin(\phi))^2}{\tilde{r}^2} \end{pmatrix}, \\ \Psi_1^k &= \mu^k \begin{pmatrix} \frac{-2\tilde{r}' \sin^2(\phi) - \tilde{r} \cos(\phi) \sin(\phi) - \tilde{r}' \cos^2(\phi)}{\tilde{r}} & \frac{(\tilde{r}' \cos(\phi) - \tilde{r} \sin(\phi)) \sin(\phi)}{\tilde{r}} \\ \frac{(\tilde{r}' \sin(\phi) + \tilde{r} \cos(\phi)) \cos(\phi)}{\tilde{r}} & \frac{-\tilde{r}' \sin^2(\phi) + \tilde{r} \cos(\phi) \sin(\phi) - 2\tilde{r}' \cos^2(\phi)}{\tilde{r}} \end{pmatrix}, \\ \Psi_0^k &= \mu^k \begin{pmatrix} 1 + \sin(\phi)^2 & -\sin(\phi) \cos(\phi) \\ -\sin(\phi) \cos(\phi) & 1 + \cos(\phi)^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

可以得到以下引理.

引理 2.1 以下陈述成立:

- (1) $A_j(u, v)$ ($j = 0, 1, 2$) 是 $W \times W$ 上的有界双线性型;
- (2) 在 $W \times W$ 上, A_0 和 A_2 是对称的, A_1 是反对称的;
- (3) 令 $\|\cdot\|_2$ 是 L^2 范数, 存在一个常数 $c > 0$ 使得

$$-A_0(v, v) \geq c\|v'\|_2^2, \quad A_2(v, v) \geq c\|v\|_2^2, \quad \forall v \in W.$$

2.2 半离散近似

考虑 (2.4) 的数值求解, 令 $0 = \phi_1 < \cdots < \phi_{M+1} = 2\pi$ 是 $[0, 2\pi]$ 的一个划分使得每个 $\{\theta_k\}_{k=1}^K$ 是划分中的一个点, 即对每个 θ_k , 存在一个 $\phi_j = \theta_k$. 令 $h = \max_{1 \leq j \leq M} |\phi_{j+1} - \phi_j|$, W_1^h 是 $H_p^1((0, 2\pi))$ 的任意有限维子空间, Q^h 是 Q 的任意有限维子空间. 再令 $W^h = W_1^h \times W_1^h$ 和 $V^h = \{v = (v_1(\rho, \phi), v_2(\rho, \phi))^T \mid \text{对任意固定的 } \rho < 0, \text{ 有 } v, \partial_\rho v, \partial_{\rho\rho}^2 v \in W^h\}$, $S^h = \{p(\rho, \phi) \mid \text{对任意固定的 } \rho < 0, \text{ 有 } p \in Q^h\}$. 考虑以下近似问题:

$$\begin{aligned}
& \text{找到 } (u^h, p^h) \in V^h \times S^h, \text{ 使得对于任意 } -\infty < \rho < 0, \text{ 都有} \\
& \frac{d^2 A_2(u^h, v^h)}{d\rho^2} + \frac{dA_1(u^h, v^h)}{d\rho} + A_0(u^h, v^h) \\
& + \frac{d(e^\rho B_1(p^h, v^h))}{d\rho} - e^\rho B_0(p^h, v^h) = 0, \quad \forall v^h \in W^h, \\
& \frac{dB_1(q^h, u^h)}{d\rho} + B_0(q^h, u^h) + e^\rho C_0(p^h, q^h) = 0, \quad \forall q^h \in Q^h, \\
& u^h|_{\rho=0} = f^h(\phi), \quad \text{当 } \rho \rightarrow -\infty \text{ 时, } u^h \text{ 有界,}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

其中 $f^h(\phi) \in W^h$ 并且 $f^h(\phi_j) = f(\phi_j)$, $j = 1, \dots, M$.

选择 W_1^h 是 $H_p^1((0, 2\pi))$ 的二次多项式有限元子空间, 即

$$W_1^h = \{v(\phi) \mid v \in H_p^1((0, 2\pi)) \cap C([0, 2\pi]), v|_{[\phi_j, \phi_{j+1}]} \in P_2([\phi_j, \phi_{j+1}]), j = 1, \dots, M\}. \tag{2.13}$$

选择 Q^h 是 Q 的线性多项式有限元子空间, 即

$$Q^h = \{q(\phi) \mid q \in Q \cap C([0, 2\pi]), q|_{[\phi_j, \phi_{j+1}]} \in P_1([\phi_j, \phi_{j+1}]), j = 1, \dots, M\}. \tag{2.14}$$

令 $N_1(\phi), N_{3/2}(\phi), N_2(\phi), \dots, N_M(\phi), N_{M+1/2}(\phi)$ 是 W_1^h 的基函数并且 $\{R_j(\phi)\}_{j=1}^M$ 是 Q^h 的基函数使得

$$\begin{aligned}
N_j(\phi_k) &= \delta_{kj}, \quad 1 \leq k, j \leq M, \\
N_j(\phi_{k+1/2}) &= 0, \quad 1 \leq k, j \leq M, \\
N_{j+1/2}(\phi_k) &= 0, \quad 1 \leq k, j \leq M, \\
N_{j+1/2}(\phi_{k+1/2}) &= \delta_{kj}, \quad 1 \leq k, j \leq M, \\
R_j(\phi_k) &= \delta_{kj}, \quad 1 \leq k, j \leq M.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

设

$$\begin{aligned}
N(\phi) &= \begin{pmatrix} N_1(\phi) & \cdots & N_{M+1/2}(\phi) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_1(\phi) & \cdots & N_{M+1/2}(\phi) \end{pmatrix}^T, \\
R(\phi) &= (R_1(\phi) \cdots R_M(\phi))^T.
\end{aligned}$$

对于 $u^h(\rho, \phi) \in V^h$ 和 $p^h(\rho, \phi) \in S^h$, 令 $U(\rho) = (u_1^h(\rho, \phi_1), u_1^h(\rho, \phi_2), \dots, u_1^h(\rho, \phi_{M+1/2}), u_2^h(\rho, \phi_1), u_2^h(\rho, \phi_2), \dots, u_2^h(\rho, \phi_{M+1/2}))^T$ 和 $P(\rho) = (p^h(\rho, \phi_1), \dots, p^h(\rho, \phi_M))^T$. 则

$$u^h(\rho, \phi) = N^T(\phi)U(\rho), \quad p^h(\rho, \phi) = R^T(\phi)P(\rho), \tag{2.16}$$

并且 $f^h(\phi) = N^T(\phi)F$, 其中 $F = (f_1(\phi_1), \dots, f_1(\phi_{M+1/2}), f_2(\phi_1), \dots, f_2(\phi_{M+1/2}))^T$. 因此 (2.12) 等价于下列二阶常微分方程组:

$$\begin{aligned}
A_2 U''(\rho) + A_1 U'(\rho) + A_0 U(\rho) + B_1(e^\rho P)' - B_0(e^\rho P) &= 0, \quad -\infty < \rho < 0, \\
B_1^T U'(\rho) + B_0^T U(\rho) + e^\rho C_0 P(\rho) &= 0, \quad -\infty < \rho < 0, \\
U|_{\rho=0} &= F,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

当 $\rho \rightarrow -\infty$ 时, U 有界,

其中

$$A_2 = \sum_{k=1}^K \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} N(\phi) \Psi_2^k N(\phi)^T d\phi, \quad (2.18)$$

$$A_1 = \sum_{k=1}^K \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} (N(\phi) \Psi_1^k N'(\phi)^T - N'(\phi) (\Psi_1^k)^T N(\phi)^T) d\phi, \quad (2.19)$$

$$A_0 = - \sum_{k=1}^K \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} N'(\phi) \Psi_0^k N'(\phi)^T d\phi. \quad (2.20)$$

$$B_1 = \sum_{k=1}^K \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} N(\phi) \begin{pmatrix} -\tilde{r}' \sin(\phi) - \tilde{r} \cos(\phi) \\ \tilde{r}' \cos(\phi) - \tilde{r} \sin(\phi) \end{pmatrix} R(\phi)^T d\phi, \quad (2.21)$$

$$B_0 = \sum_{k=1}^K \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} N'(\phi) \begin{pmatrix} \tilde{r} \sin(\phi) \\ -\tilde{r} \cos(\phi) \end{pmatrix} R(\phi)^T d\phi, \quad (2.22)$$

$$C_0 = \sum_{k=1}^K \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{1}{\lambda^k} R(\phi) \tilde{r}^2 R(\phi)^T d\phi, \quad (2.23)$$

A_j ($j = 0, 1, 2$) 是 3 个 $4M \times 4M$ 的常数矩阵, B_j ($j = 0, 1$) 是两个 $4M \times M$ 的常数矩阵, C_0 是 $M \times M$ 的常数矩阵. 从引理 2.1 可以得到以下引理:

引理 2.2 A_2 是对称正定矩阵, A_1 是反对称矩阵并且 A_0 是半负定矩阵.

下面使用解析方法求解 (2.17). 令

$$U(\rho) = e^{\rho\gamma} \xi, \quad P(\rho) = e^{\rho(\gamma-1)} \eta, \quad (2.24)$$

其中 γ 是常数, $\eta \in \mathbb{C}^M$ 并且 $\xi \in \mathbb{C}^{4M}$, 这三者都是待定的. 将 (2.24) 代入 (2.17), 得到以下二次特征值问题:

$$\begin{aligned} [\gamma^2 A_2 + \gamma A_1 + A_0] \xi + [\gamma B_1 - B_0] \eta &= 0, \\ [\gamma B_1^T + B_0^T] \xi + C_0 \eta &= 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

令 $\zeta = \gamma \xi$, 则上述二次特征值问题 (2.25) 等价于下列广义特征值问题:

$$\begin{pmatrix} I_{4M} & 0 & 0 \\ 0 & -A_0 & B_0 \\ 0 & B_0^T & C_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 & I_{4M} & 0 \\ A_2 & A_1 & B_1 \\ 0 & -B_1^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

其中 I_{4M} 是 $4M \times 4M$ 单位矩阵. 从引理 2.2 和文献 [54] 中的结果, 可知如下引理成立:

引理 2.3 广义特征值问题 (2.26) 有 $4M$ 个非负实部的特征值.

数值求解 (2.26) 之后, 得到 $4M$ 个非负实部特征值 $\{\gamma_j^h\}_{j=1}^{4M}$ 和相应的特征向量 $(\zeta_j^T, \xi_j^T, \eta_j^T)^T$, $j = 1, \dots, 4M$, 其中至少有两个零特征值, 不妨假定 $\gamma_1^h = \gamma_2^h = 0$. 同时假定 $\{\gamma_j^h\}_{j=1}^{2m}$ 是升序排列的实特征值, $\{\gamma_j^h\}_{j=2m+1}^{4M}$ 是非零虚部的复特征值使得 $\gamma_{2j}^h = \bar{\gamma}_{2j-1}^h$, $m+1 \leq j \leq 2M$. 则

$$U(\rho) = \sum_{j=1}^{2m} \alpha_j e^{\rho\gamma_j^h} \xi_j + \sum_{j=1+m}^{2M} (\alpha_{2j-1} \operatorname{Re}(e^{\rho\gamma_{2j}^h} \xi_{2j}) + \alpha_{2j} \operatorname{Im}(e^{\rho\gamma_{2j}^h} \xi_{2j})) \quad (2.27)$$

和

$$P(\rho) = \sum_{j=1}^{2m} \alpha_j e^{\rho(\gamma_j^h - 1)} \eta_j + \sum_{j=1+m}^{2M} (\alpha_{2j-1} \operatorname{Re}(e^{\rho(\gamma_{2j}^h - 1)} \eta_{2j}) + \alpha_{2j} \operatorname{Im}(e^{\rho(\gamma_{2j}^h - 1)} \eta_{2j})) \quad (2.28)$$

满足 (2.17). 由于 $U(0) = F$, 所以

$$F = \sum_{j=1}^{2m} \alpha_j \xi_j + \sum_{j=1+m}^{2M} (\alpha_{2j-1} \operatorname{Re}(\xi_{2j}) + \alpha_{2j} \operatorname{Im}(\xi_{2j})). \quad (2.29)$$

记

$$\begin{aligned} S(\rho) &= [e^{\rho\gamma_1^h} \xi_1, \dots, e^{\rho\gamma_{2m}^h} \xi_{2m}, \operatorname{Re}(e^{\rho\gamma_{2m+2}^h} \xi_{2m+2}), \operatorname{Im}(e^{\rho\gamma_{2m+2}^h} \xi_{2m+2}), \dots, \\ &\quad \operatorname{Re}(e^{\rho\gamma_{4M}^h} \xi_{4M}), \operatorname{Im}(e^{\rho\gamma_{4M}^h} \xi_{4M})], \\ E(\rho) &= [e^{\rho(\gamma_1^h - 1)} \eta_1, \dots, e^{\rho(\gamma_{2m}^h - 1)} \eta_{2m}, \operatorname{Re}(e^{\rho(\gamma_{2m+2}^h - 1)} \eta_{2m+2}), \operatorname{Im}(e^{\rho(\gamma_{2m+2}^h - 1)} \eta_{2m+2}), \\ &\quad \dots, \operatorname{Re}(e^{\rho(\gamma_{4M}^h - 1)} \eta_{4M}), \operatorname{Im}(e^{\rho(\gamma_{4M}^h - 1)} \eta_{4M})], \\ S(0) &= [\xi_1, \dots, \xi_{2m}, \operatorname{Re}(\xi_{2m+2}), \operatorname{Im}(\xi_{2m+2}), \dots, \operatorname{Re}(\xi_{4M}), \operatorname{Im}(\xi_{4M})], \\ \alpha &= [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{4M}]^T. \end{aligned}$$

从 (2.29) 可知

$$\alpha = S(0)^{-1} F. \quad (2.30)$$

将 (2.30) 代入 (2.27) 和 (2.28), 得到 (2.17) 的解

$$U(\rho) = S(\rho) S(0)^{-1} F, \quad P(\rho) = E(\rho) S(0)^{-1} F. \quad (2.31)$$

从 (2.16) 得到 (2.4) 的半离散数值解

$$u^h(\rho, \phi) = N(\phi)^T S(\rho) S(0)^{-1} F, \quad p^h(\rho, \phi) = R(\phi)^T E(\rho) S(0)^{-1} F. \quad (2.32)$$

定理 2.1 令 u 和 p 是问题 (1.1) 的解, 如果按照上述步骤选取有限元子空间并得到数值解 u^h 与 p^h , 则存在一个与 h 和 λ 无关的正常数 C 使得

$$\|u - u^h\|_*^2 \leq C h^4 \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^2 \iint_{\Omega_k} 2\mu^k \left(|\nabla u_j^k|^2 + \sum_{|\beta|=2} (x^2 + y^2) |D^\beta u_j^k|^2 \right) + \frac{1}{\lambda} |\nabla p^k|^2 dx dy, \quad (2.33)$$

其中 $\beta = (\beta_1, \beta_2)^T \in \mathbb{N}^2$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2$, $D^\beta u_j = \frac{\partial^{|\beta|} u_j}{\partial x^{\beta_1} \partial y^{\beta_2}}$, $\varepsilon(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T)$,

$$\begin{aligned} \|u - u^h\|_*^2 &= \iint_{\Omega} (2\mu \|\varepsilon(u - u^h)\|^2 + \lambda \|\operatorname{div}(u - u^h)\|^2) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \left(2\mu \|\varepsilon(u - u^h)\|^2 + \frac{1}{\lambda} \|p - p^h\|^2 \right) dx dy. \end{aligned} \quad (2.34)$$

证明 对于任意 $w, v \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, 设

$$E(w, v) = \sum_{k=1}^K \iint_{\Omega_k} (2\mu^k \varepsilon(w) \varepsilon(v) + \lambda \operatorname{div}(w) \cdot \operatorname{div}(v)) dx dy.$$

令 $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma} = 0\}$, 显然 $\|v\|_*$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 的一种范数, 则对于任意 $v \in (H_0^1(\Omega))^2$, 都有

$$E(u, p, v) = \sum_{k=1}^K \iint_{\Omega_k} (2\mu^k \varepsilon(u) \varepsilon(v) - p \operatorname{div}(v)) dx dy = 0, \quad (2.35)$$

$$E(u^h, p^h, v) = \int_{-\infty}^0 \left\{ \frac{d^2 A_2(u^h, v)}{d\rho^2} + \frac{dA_1(u^h, v)}{d\rho} + A_0(u^h, v) + \frac{d(e^\rho B_1(p^h, v))}{d\rho} - e^\rho B_0(p^h, v) \right\} d\rho. \quad (2.36)$$

再令 $\Pi u \in V^h$ 是 u 的插值函数使得 $\Pi u_j(\rho, \phi_i) = u_j(\rho, \phi_i)$, 其中 $j = 1, 2, i = 1, 3/2, \dots, M, M + 1/2$.

因为 $\Pi u - u^h \in (H_0^1(\Omega))^2$ 且对固定的 $\rho \leq 0$ 有 $\Pi u - u^h \in W^h$, 所以由 (2.36) 和 (2.12) 得到 $E(u^h, \Pi u - u^h) = 0$, 从而 $E(u - u^h, \Pi u - u^h) = 0$. 那么 (本证明中出现的常数 C 与 h 和 λ 无关)

$$\begin{aligned} \|u - u^h\|_*^2 &= E(u - u^h, u - u^h) = E(u - u^h, u - \Pi u) \\ &\leq C E(u - u^h, u - u^h)^{\frac{1}{2}} E(u - \Pi u, u - \Pi u)^{\frac{1}{2}} \\ &= C \|u - u^h\|_* \|u - \Pi u\|_*. \end{aligned} \quad (2.37)$$

从而得到

$$\|u - u^h\|_* \leq C \|u - \Pi u\|_*. \quad (2.38)$$

类似于文献 [29, 定理 4.1] 的证明, 由于选取的是二阶元加线性元的混合有限元方法, 所以可以得到

$$\iint_{\Omega} (2\mu \|\varepsilon(u - \Pi u)\|^2) dx dy \leq Ch^4 \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^2 \iint_{\Omega_k} 2\mu^k \left(|\nabla u_j^k|^2 + \sum_{|\beta|=2} (x^2 + y^2) |D^\beta u_j^k|^2 \right) dx dy, \quad (2.39)$$

同时

$$\iint_{\Omega} (\lambda \|\operatorname{div}(u - \Pi u)\|^2) dx dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{\lambda} \|p - \Pi p\|^2 \right) dx dy \leq Ch^4 \sum_{k=1}^K \iint_{\Omega_k} \frac{1}{\lambda} (|\nabla p^k|^2) dx dy. \quad (2.40)$$

综合 (2.38)–(2.40), 定理得证. $\square$

注 2.1 如果使用更高次的混合有限元, 且原问题解具有足够高正则性, 则可以得到更高阶的收敛性. 我们也注意到

$$\|u - u^h\|_{H^1}^2 \leq C \iint_{\Omega} (2\mu \|\varepsilon(u - u^h)\|^2) dx dy \leq C \|u - u^h\|_*^2. \quad (2.41)$$

2.3 有体积力的线性弹性问题

如果存在体积力 $Vp = (Vp_1, Vp_2)^T$, 则考虑

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \sigma^k &= Vp^k, \quad \text{在 } \Omega_k \text{ 中}, \\ \operatorname{div} u^k + \frac{1}{\lambda^k} p^k &= 0, \quad \text{在 } \Omega_k \text{ 中}, \\ u^k &= f^k, \quad \text{在 } \Gamma_k \text{ 上}, \\ u^{k-1}|_{\theta=\theta_k^-} &= u^k|_{\theta=\theta_k^+}, \\ \sigma^{k-1} \cdot n_k|_{\theta=\theta_k^-} &= \sigma^k \cdot n_k|_{\theta=\theta_k^+}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

其中 $k = 1, \dots, K$ 并且 $Vp^k = (Vp_1^k, Vp_2^k)^T = Vp|_{\Omega_k}$. 采用坐标变换 (2.1), 类似的半离散近似会得到

$$\begin{aligned} A_2 U''(\rho) + A_1 U'(\rho) + A_0 U(\rho) + B_1 (e^\rho P)' - B_0 (e^\rho P) &= G(\rho), \quad -\infty < \rho < 0, \\ B_1^T U'(\rho) + B_0^T U(\rho) + e^\rho C_0 P(\rho) &= 0, \quad -\infty < \rho < 0, \\ U|_{\rho=0} &= F, \\ \text{当 } \rho \rightarrow -\infty \text{ 时, } U &\text{ 有界,} \end{aligned} \quad (2.43)$$

其中

$$G(\rho) = - \int_0^{2\pi} e^{2\rho} \tilde{r}^2(\phi) N(\phi) Vp(\rho, \phi) d\phi.$$

(2.43) 的解可以写成

$$U(\rho) = U_G(\rho) + U_P(\rho), P(\rho) = P_G(\rho) + P_P(\rho),$$

其中 U_G 和 P_G 是表达形式为 (2.31) 的基本解, U_P 和 P_P 是满足 (2.43) 的特解. 一旦找到了 U_P 和 P_P , 就有 $\alpha = S(0)^{-1}(F - U_P(0))$, 并且

$$\begin{aligned} u^h(\rho, \phi) &= N(\phi)^T (S(\rho) S(0)^{-1} (F - U_P(0)) + U_P(\rho)), \\ p^h(\rho, \phi) &= R(\phi)^T (E(\rho) S(0)^{-1} (F - U_P(0)) + P_P(\rho)). \end{aligned} \quad (2.44)$$

某些情形 U_P 和 P_P 容易找到, 如果 $Vp = Vp(\phi)$, $\lambda = 2$ 不是 (2.25) 的特征值, 并且 (ξ_P, η_P) 满足

$$\begin{pmatrix} 4A_2 + 2A_1 + A_0 & 2B_1 - B_0 \\ 2B_1^T + B_0^T & C_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_P \\ \eta_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(\rho)/e^{2\rho} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

则

$$U_P(\rho) = e^{2\rho} \xi_P, \quad P_P(\rho) = e^\rho \eta_P. \quad (2.46)$$

3 几乎不可压复合材料反问题

本节考虑几乎不可压复合材料反问题, 从位移 u 和压力 p 的一个测量去反演 Lamé 系数 μ . 我们仍然关注星型区域上的复合材料, 其中不同材料之间的界面是一条连接原点和边界的线段, 我们想要重构界面位置和每个子区域上的 Lamé 系数. 考虑

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \sigma &= Vp, \quad \text{在 } \Omega \text{ 中,} \\ \operatorname{div} u + \frac{1}{\lambda} p &= 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 中,} \\ u &= 0, \quad \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上,} \\ \sigma \cdot n &= g, \quad \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上,} \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是星型区域, $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 并且 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, n 是 Γ_2 的单位外法向. 令 $u[\mu]$ 和 $p[\mu]$ 是 (3.1) 对应于 μ 的解. 因为复合材料的 Lamé 系数是跳跃不连续的, 可以采用 TV (total variation) 正则化, 假设存在常数 $C_1, C_2 > 0$ 使得

$$\mu \in \Lambda := \{\mu \in L^\infty(\Omega) \mid C_1 \leq \mu \leq C_2, \operatorname{TV}(\mu) < \infty\}, \quad (3.2)$$

其中对于任意 $v \in L^1(\Omega)$, $\text{TV}(v)$ 是 v 的全变差 (参见文献 [55]), 其定义是

$$\text{TV}(v) = \sup \left\{ \iint_{\Omega} (v(\nabla \cdot w)) dx dy \mid w \in (C_0^1(\Omega))^2, |w(x)| \leq 1, \forall x \in \Omega \right\}, \quad (3.3)$$

这里 $|\cdot|$ 是 Euclid 范数.

在全场数据的几乎不可压复合材料反问题中, 给定 $u[\mu^*](x, y)$ 和 $p[\mu^*](x, y)$ 的带噪声的测量数据 $\tilde{u}(x, y)$ 和 $\tilde{p}(x, y)$, 其中 $\mu^* \in \Lambda$ 并且 $(x, y) \in \Omega$, 我们的目标是从测量数据 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{p}$ 去估计 μ^* .

考虑极小化泛函

$$\min_{\mu \in \Lambda} J(\mu) := \iint_{\Omega} \left(\mu |\varepsilon(u[\mu] - \tilde{u})|^2 - (p[\mu] - \tilde{p}) \nabla \cdot (u[\mu] - \tilde{u}) - \frac{1}{2\lambda} (p[\mu] - \tilde{p})^2 \right) dx dy + \eta \text{TV}(\mu), \quad (3.4)$$

其中 $\eta > 0$ 是正则化参数. 设

$$J_0(\mu) = \iint_{\Omega} \left(\mu |\varepsilon(u[\mu] - \tilde{u})|^2 - (p[\mu] - \tilde{p}) \nabla \cdot (u[\mu] - \tilde{u}) - \frac{1}{2\lambda} (p[\mu] - \tilde{p})^2 \right) dx dy.$$

此泛函是凸的, 并且计算其梯度时不涉及解 u 和 p 对 μ 的偏导数. 同时根据文献 [36, 定理 2.3] 可以得到如下定理:

定理 3.1 极小化问题 (3.4) 存在一个解 $\mu_0 \in \Lambda$.

我们仍然在曲线坐标系 (2.1) 中考虑此问题, 在复合材料中, 真实 Lamé 系数 μ^* 对于固定的 ϕ 在 ρ 方向都是常数, 并且对于固定的 ρ 在 ϕ 方向是分片常数. 设 $0 = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_m = 2\pi$, 定义

$$\Lambda_h = \{\mu_h(\rho, \phi) \in \Lambda \mid \mu_h \text{ 在 } (-\infty, 0] \times [\varphi_i, \varphi_{i+1}) \text{ 上几乎处处是常数, 对于 } i = 0, 1, \dots, m-1\}, \quad (3.5)$$

其中 $h = \max_{0 \leq i < m} |\varphi_{i+1} - \varphi_i|$. 下面将问题 (3.4) 离散成以下问题:

$$\begin{aligned} \min_{\mu_h \in \Lambda_h} J(\mu_h) = & \sum_{k=1}^m \int_{-\infty}^0 \int_{\varphi_{k-1}}^{\varphi_k} \left\{ (\mu_h |\varepsilon(u[\mu_h] - \tilde{u})|^2 - (p[\mu_h] - \tilde{p}) \nabla \cdot (u[\mu_h] - \tilde{u})) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2\lambda} (p[\mu_h] - \tilde{p})^2 e^{2\rho} \tilde{r}(\phi)^2 \right\} d\phi d\rho + \eta \text{TV}(\mu_h). \end{aligned} \quad (3.6)$$

对于 (3.6) 解的存在性, 有以下定理. Λ_h 是 Λ 在 L^1 度量下的闭子集, 可以根据定理 3.1 给出证明.

定理 3.2 极小化问题 (3.6) 存在一个解 $\mu_h^0 \in \Lambda_h$.

下面使用 Adam 算法去求解 (3.6). 假设

$$\mu_h(\rho, \phi) = \mathbf{1}_{(-\infty, 0]}(\rho) \sum_{j=1}^m \mu_j \mathbf{1}_{[\varphi_{j-1}, \varphi_j)}(\phi), \quad (3.7)$$

其中 $\mathbf{1}$ 是示性函数. 则

$$\text{TV}(\mu_h) = \sum_{j=1}^m \tilde{r}(\varphi_j) |\mu_{j+1} - \mu_j|,$$

其中 $\mu_{m+1} = \mu_1$. 由于 Adam 算法需要计算 J 的梯度, 所以先计算 $\text{TV}(\mu_h)$ 的梯度,

$$\frac{\partial \text{TV}(\mu_h)}{\partial \mu_j} = \text{sgn}(\mu_j - \mu_{j-1}) r(\theta_{j-1}) + \text{sgn}(\mu_{j+1} - \mu_j) r(\theta_j).$$

同时由链式法则可得

$$\frac{\partial J_0}{\partial \mu_j} = \int_{-\infty}^0 \int_0^{2\pi} \frac{\partial J_0}{\partial \mu_h} \frac{\partial \mu_h}{\partial \mu_j} e^{2\rho} \tilde{r}(\phi)^2 d\phi d\rho = \int_{-\infty}^0 \int_{\varphi_{j-1}}^{\varphi_j} \frac{\partial J_0}{\partial \mu_h} e^{2\rho} \tilde{r}(\phi)^2 d\phi d\rho$$

和 $\frac{\partial J_0}{\partial \mu_h} = -\varepsilon(u[\mu_h] + \tilde{u}) \cdot \varepsilon(u[\mu_h] - \tilde{u})$. 因此对于 $j = 1, \dots, m$, 有

$$\frac{\partial J}{\partial \mu_j} = \frac{\partial J_0}{\partial \mu_j} + \eta \frac{\partial \text{TV}(\mu_h)}{\partial \mu_j}. \quad (3.8)$$

从以上的讨论可以看出, 求解 J 和 J 的梯度需要求解正问题. 对于 $\mu_h \in \Lambda_h$, 复合材料问题的解 $u[\mu_h]$ 和 $p[\mu_h]$ 在界面交接处可能存在奇性, 并且星型区域一般是不规则的, 所以采用直接线法作为正问题的求解器.

4 数值算例

4.1 正问题

在以下正问题算例中, 数值解是用二次元加线性元做半离散得到的, 而参考解是用更细网格的三次元加二次元作半离散得到的.

例 4.1 令 $\tilde{r}(\phi) = \sqrt{2 + \cos(6\phi)}$, $\Omega = \{(r, \phi) \mid 0 \leq r < \tilde{r}(\phi), 0 \leq \phi < 2\pi\}$, $\Omega_k = \{(r, \phi) \mid 0 < r < \tilde{r}(\phi), \theta_k < \phi < \theta_{k+1}\}$, 其中 $k = 1, \dots, 3$ 并且 $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = \pi$, $\theta_3 = 3\pi/2$, $\theta_4 = \pi/4$, 如图 2(a) 所示. 考虑

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \sigma^k &= Vp, \quad \text{在 } \Omega_k \text{ 中}, \\ \text{div} u^k &= 0, \quad \text{在 } \Omega_k \text{ 中}, \\ u &= f, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上}, \\ u^{k-1}|_{\theta=\theta_k^-} &= u^k|_{\theta=\theta_k^+}, \\ \sigma^{k-1} \cdot n_k|_{\theta=\theta_k^-} &= \sigma^k \cdot n_k|_{\theta=\theta_k^+}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中 $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 9$, $\lambda = \infty$ 并且 $Vp = (y, x)^T$, $f = (1, 1)^T$.

我们在图 3 中展示当 $\phi_0 = \frac{5\pi}{4}$ 时 $\frac{\partial u}{\partial r}(r, \phi_0)$ 的图像. 可以看到, 当 $r \rightarrow 0$ 时, $\frac{\partial u_1}{\partial r}$ 和 $\frac{\partial u_2}{\partial r}$ 趋向于 $-\infty$, 揭示了在原点处有应力奇性.

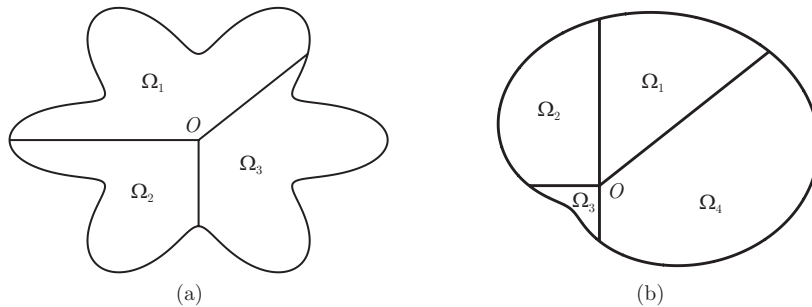


图 2 (a) 例 4.1 中的区域 Ω ; (b) 例 4.2 中的区域 Ω

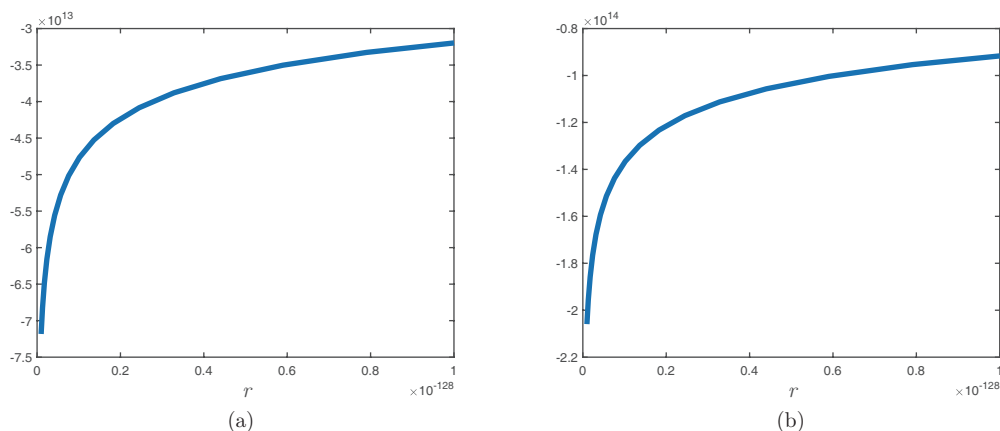


图 3 (网络版彩图) 例 4.1 中 $\frac{\partial u_1}{\partial r}$ (a) 和 $\frac{\partial u_2}{\partial r}$ (b) 的值随 r 的变化

令 M 是一个正整数并且给出 $[0, 2\pi]$ 的一个划分 $0 = \phi_1 < \phi_2 < \cdots < \phi_{M+1} = 2\pi$, 其中 $h = \frac{2\pi}{M}$ 和 $\phi_j = (j-1)h$, $j = 1, 2, \dots, M+1$. 对于不同的 M , 数值解 u^h 的 H^1 范数和 p^h 的 L^2 范数的相对误差结果如表 1 所示, 可以看到收敛阶是略微超过 2.

例 4.2 令 $\tilde{r}(\phi) = 2 + \cos(\phi) + \sin(\phi)$, $\Omega = \{(r, \phi) \mid 0 \leq r < \tilde{r}(\phi), 0 \leq \phi < 2\pi\}$, $\Omega_k = \{(r, \phi) \mid 0 < r < \tilde{r}(\phi), \theta_k < \phi < \theta_{k+1}\}$, 其中 $k = 1, \dots, 4$ 并且 $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = \pi/2$, $\theta_3 = \pi$, $\theta_4 = 3\pi/2$, $\theta_5 = \pi/4$, 如图 2(b) 所示. 考虑

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \sigma^k &= Vp, \quad \text{在 } \Omega_k \text{ 中}, \\ \operatorname{div} u^k + \frac{1}{\lambda} p^k &= 0, \quad \text{在 } \Omega_k \text{ 中}, \\ u &= f, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上}, \\ u^{k-1}|_{\theta=\theta_k^-} &= u^k|_{\theta=\theta_k^+}, \\ \sigma^{k-1} \cdot n_k|_{\theta=\theta_k^-} &= \sigma^k \cdot n_k|_{\theta=\theta_k^+}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中 $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2.5$, $\mu_3 = 1$, $\mu_4 = 1.5$, $\lambda = 10^6$ 并且 $Vp = (1, -1)^T$, $f = (y^2, -x^2)^T$.

我们在图 4 中展示当 $\phi_0 = \frac{5\pi}{4}$ 时 $\frac{\partial u}{\partial r}(r, \phi_0)$ 的图像. 可以看到当 $r \rightarrow 0$ 时, $\frac{\partial u_1}{\partial r}$ 和 $\frac{\partial u_2}{\partial r}$ 趋向于 $-\infty$, 揭示了在原点处有应力奇性.

令 M 是一个正整数并且给出 $[0, 2\pi]$ 的一个划分 $0 = \phi_1 < \phi_2 < \cdots < \phi_{M+1} = 2\pi$, 其中 $h = \frac{2\pi}{M}$ 和 $\phi_j = (j-1)h$, $j = 1, 2, \dots, M+1$. 对于不同的 M , 数值解 u^h 的 H^1 范数相对误差结果如表 2 所示, 可以看到收敛阶是 2.

例 4.3 令 $\tilde{r}(\phi) = \sqrt{2 + \cos(5\phi)}$, $\Omega = \{(r, \phi) \mid 0 \leq r < \tilde{r}(\phi), 0 \leq \phi < 2\pi\}$, $\Omega_k = \{(r, \phi) \mid 0 < r <$

表 1 例 4.1 中数值解的相对误差

M	$\frac{\ u - u^h\ _{H^1} + \ p - p^h\ _{L^2}}{\ u\ _{H^1} + \ p\ _{L^2}}$	收敛阶
16	2.787E-3	
32	3.313E-4	3.073
64	4.227E-5	2.970
128	7.675E-6	2.461

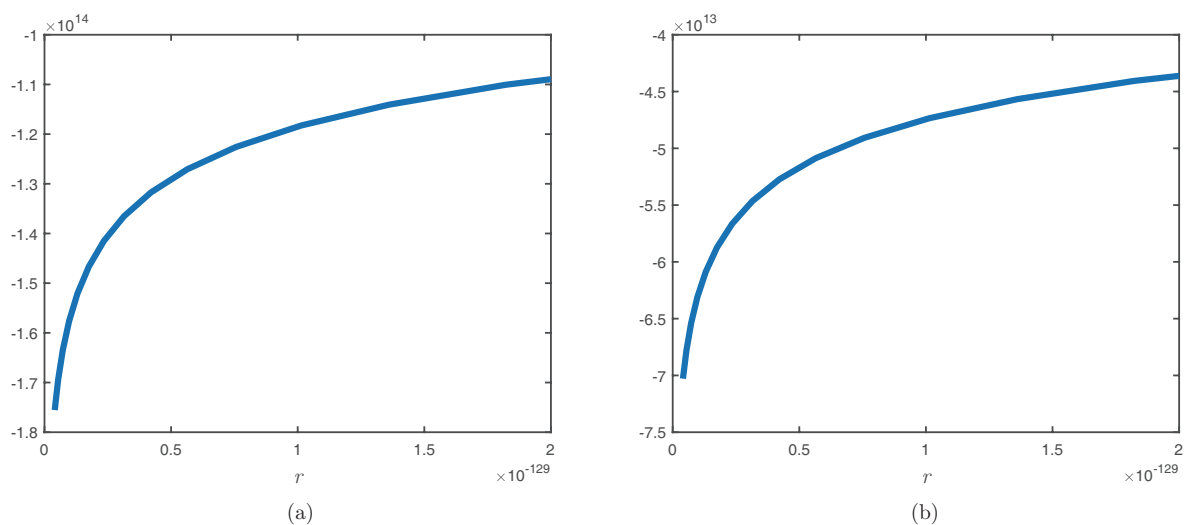
图 4 (网络版彩图) 例 4.2 中 $\frac{\partial u_1}{\partial r}$ (a) 和 $\frac{\partial u_2}{\partial r}$ (b) 的值随 r 的变化

表 2 例 4.2 中数值解的相对误差

M	$\frac{\ u - u^h\ _{H^1}}{\ u\ _{H^1}}$	收敛阶
8	7.749E-2	
16	2.053E-2	1.916
32	5.684E-3	1.853
64	1.438E-3	1.983
128	3.968E-4	1.858

$\tilde{r}(\phi), \theta_k < \phi < \theta_{k+1}\}$, 其中 $k = 1, \dots, 5$ 并且 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/2, \theta_3 = \pi, \theta_4 = 5\pi/4, \theta_5 = 3\pi/2, \theta_6 = 2\pi$, 如图 5 所示. 考虑

$$\begin{aligned}
 -\nabla \cdot \sigma^k &= Vp, \quad \text{在 } \Omega_k \text{ 中,} \\
 \operatorname{div} u^k + \frac{1}{\lambda} p^k &= 0, \quad \text{在 } \Omega_k \text{ 中,} \\
 u &= f, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上,} \\
 u^{k-1}|_{\theta=\theta_k^-} &= u^k|_{\theta=\theta_k^+}, \\
 \sigma^{k-1} \cdot n_k|_{\theta=\theta_k^-} &= \sigma^k \cdot n_k|_{\theta=\theta_k^+},
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

其中 $\mu_1 = 4, \mu_2 = 5, \mu_3 = 1, \mu_4 = 2, \mu_5 = 3, \lambda = 10^5$ 并且 $Vp = (x^2, y^2)^T, f = (1, 1)^T$.

我们在图 6 中展示当 $\phi_0 = \frac{5\pi}{4}$ 时 $\frac{\partial u}{\partial r}(r, \phi_0)$ 的图像. 可以看到, 当 $r \rightarrow 0$ 时, $\frac{\partial u_1}{\partial r}$ 和 $\frac{\partial u_2}{\partial r}$ 趋向于 $-\infty$, 揭示了在原点处有应力奇性.

令 M 是一个正整数并且给出 $[0, 2\pi]$ 的一个划分 $0 = \phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_{M+1} = 2\pi$, 其中 $h = \frac{2\pi}{M}$ 和 $\phi_j = (j-1)h, j = 1, 2, \dots, M+1$. 对于不同的 M , 数值解 u^h 的 H^1 范数相对误差结果如表 3 所示, 可以看到收敛阶超过 2.

4.2 反问题

我们使用 Adam 算法在 $\mu_h \in \Lambda_h$ 上极小化 (3.6), 其中正则化参数 $\eta = 10^{-6}$. 用网格 $h = \pi/32$

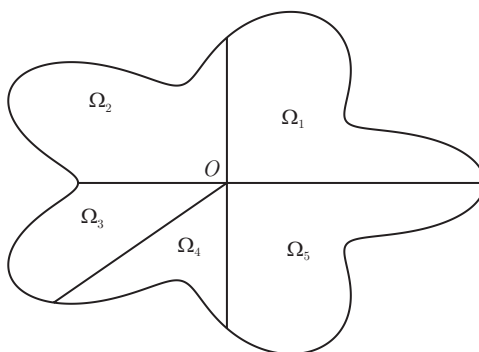
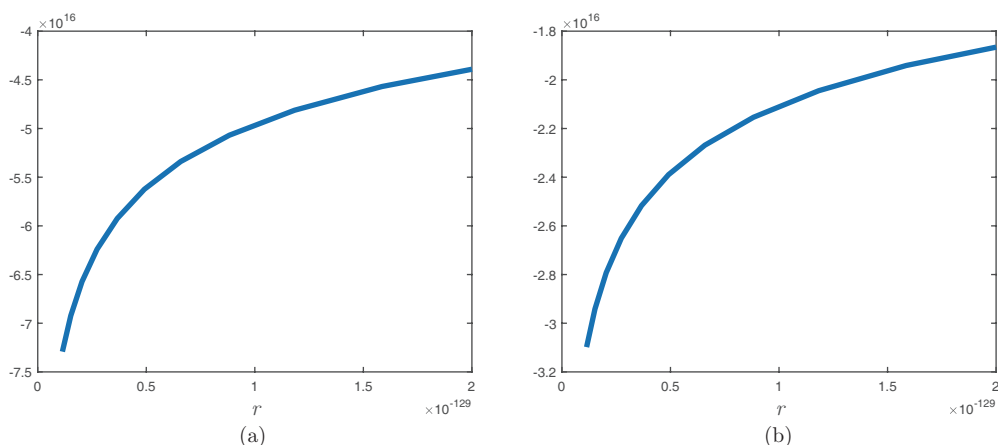
图 5 例 4.3 中的区域 Ω 图 6 (网络版彩图) 例 4.3 中 $\frac{\partial u_1}{\partial r}$ (a) 和 $\frac{\partial u_2}{\partial r}$ (b) 的值随 r 的变化

表 3 例 4.3 中数值解的相对误差

M	$\frac{\ u - u^h\ _{H^1}}{\ u\ _{H^1}}$	收敛阶
8	3.595E-3	
16	1.014E-3	1.826
32	1.646E-4	2.623
64	1.968E-5	3.054
128	2.434E-6	3.015

去离散解空间, 即 μ_h 离散成 $\mu_h = \mathbf{1}_{(-\infty, 0]}(\rho) \sum_{j=1}^{64} \mu_j \mathbf{1}_{[(j-1)h, jh)}(\phi)$. 记 μ_j 在第 k 步的值为 μ_j^k , $j = 1, \dots, 64$. 每步迭代的正问题用网格为 $\tilde{h} = \pi/32$ 的二次元加线性元的混合有限元方法的直接线法求解, $u[\mu^*]$ 是用更密的网格的三次元加二次元的混合有限元方法的直接线法获得. 测量在离散点集 $\Xi = \{(x_j, y_j)\}_{j=1}^{M_1} \subset \Omega$ 上取值, 考虑 Lamé 系数的 L^1 相对误差, 记 L^1 范数为 $\|\cdot\|_1$.

例 4.4 令 $\tilde{r}(\phi) = 2 + \cos(\phi)^3$, $\Omega = \{(r, \phi) \mid 0 \leq r < \tilde{r}(\phi), 0 \leq \phi < 2\pi\}$, $\Omega_k = \{(r, \phi) \mid 0 < r < \tilde{r}(\phi), \theta_k < \phi < \theta_{k+1}\}$, 其中 $k = 1, \dots, 3$ 并且 $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = \pi$, $\theta_3 = 3\pi/2(-\pi/2)$, $\theta_4 = \pi/4$, 如图 7(a)

所示. 考虑

$$\begin{aligned}
 -\nabla \cdot \sigma^k &= Vp, \quad \text{在 } \Omega_k \text{ 中}, \\
 \operatorname{div} u^k &= 0, \quad \text{在 } \Omega_k \text{ 中}, \\
 u &= f, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上}, \\
 u^{k-1}|_{\theta=\theta_k^-} &= u^k|_{\theta=\theta_k^+}, \\
 \sigma^{k-1} \cdot n_k|_{\theta=\theta_k^-} &= \sigma^k \cdot n_k|_{\theta=\theta_k^+},
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

其中 $\mu_1^* = 2.5$, $\mu_2^* = 1$, $\mu_3^* = 3$, $\lambda = \infty$ 并且 $Vp = (1, -1)^T$, $f = (y^2, -x^2)^T$.

设 $z|_{\Xi} = u[\mu^*]|_{\Xi} + \delta \xi_U \|u[\mu^*]\|_{\infty}$ 是带噪声的测量, 其中 $\|\cdot\|_{\infty}$ 是 L^{∞} 范数, ξ_U 是 $[-1, 1]$ 上独立同分布均匀分布随机向量并且噪声水平 $\delta = 0.0001$.

初值设为 $\mu_1^0 = \cdots = \mu_{64}^0 = 2$, 131 步迭代后停止条件满足. J 的值随迭代步数的变化图像如图 7(b) 所示. 图 8 中的蓝线是 ϕ 方向上数值 Lamé 系数 μ_h^{131} , 红线是准确的 Lamé 系数. 经过 131 步迭代后, L^1 相对误差是 $\|\mu_h^{131} - \mu^*\|_1 / \|\mu^*\|_1 = 1.702 \times 10^{-2}$.

例 4.5 令 $\tilde{r}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\cos(\phi)^4 + \sin(\phi)^4}}$, $\Omega = \{(r, \phi) \mid 0 \leq r < \tilde{r}(\phi), 0 \leq \phi < 2\pi\}$, $\Omega_k = \{(r, \phi) \mid 0 < r < \tilde{r}(\phi), \theta_k < \phi < \theta_{k+1}\}$, 其中 $k = 1, \dots, 4$ 并且 $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$, $\theta_3 = \pi$, $\theta_4 = 3\pi/2$, $\theta_5 = 2\pi$, 如图 9(a) 所示. 考虑

$$\begin{aligned}
 -\nabla \cdot \sigma^k &= Vp, \quad \text{在 } \Omega_k \text{ 中}, \\
 \operatorname{div} u^k + \frac{1}{\lambda} p^k &= 0, \quad \text{在 } \Omega_k \text{ 中}, \\
 u &= f, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上}, \\
 u^{k-1}|_{\theta=\theta_k^-} &= u^k|_{\theta=\theta_k^+}, \\
 \sigma^{k-1} \cdot n_k|_{\theta=\theta_k^-} &= \sigma^k \cdot n_k|_{\theta=\theta_k^+},
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

其中 $\mu_1^* = 3$, $\mu_2^* = 2$, $\mu_3^* = 1$, $\mu_4^* = 2$, $\lambda = 10^6$ 并且 $Vp = (1, -1)^T$, $f = (y^2, -x^2)^T$.

设 $z|_{\Xi} = u[\mu^*]|_{\Xi} + \delta \xi_U \|u[\mu^*]\|_{\infty}$ 是带噪声的测量, 其中 $\|\cdot\|_{\infty}$ 是 L^{∞} 范数, ξ_U 是 $[-1, 1]$ 上独立同分布均匀分布随机向量并且 δ 是噪声水平. 初值设为 $\mu_1^0 = \cdots = \mu_{64}^0 = 2$, 对于不同的噪声水平 δ , 迭

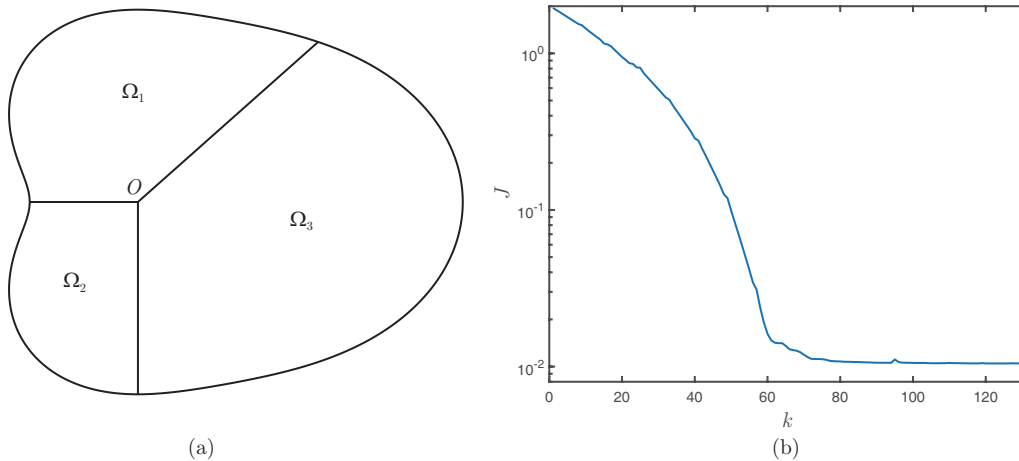


图 7 (网络版彩图) (a) 例 4.4 的区域 Ω ; (b) 能量泛函的变化图

代步数和 L_1 相对误差如表 4 所示, μ 的反演结果如图 10 所示, 其中蓝线是 ϕ 方向上数值 Lamé 系数 μ_h , 红线是准确的 Lamé 系数. 从这个例子可以看出, 对于不同的噪声水平, 我们的方法在恢复界面位置以及子区域上的 Lamé 系数方面依然是有效的.

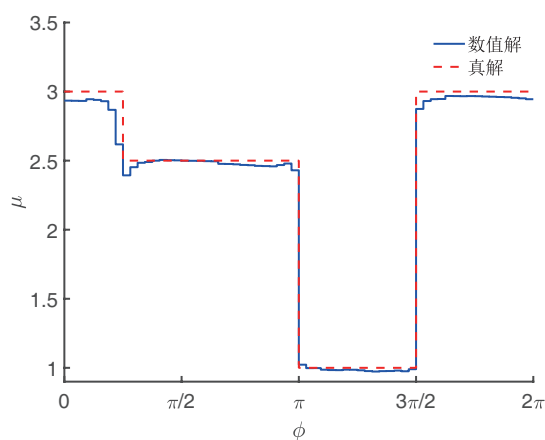


图 8 (网络版彩图) 例 4.4 中 ϕ 方向上第 131 步迭代的 Lamé 系数

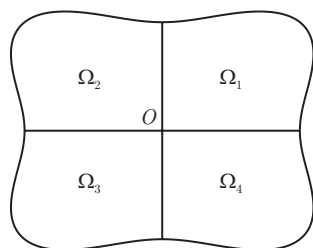


图 9 例 4.5 的区域 Ω

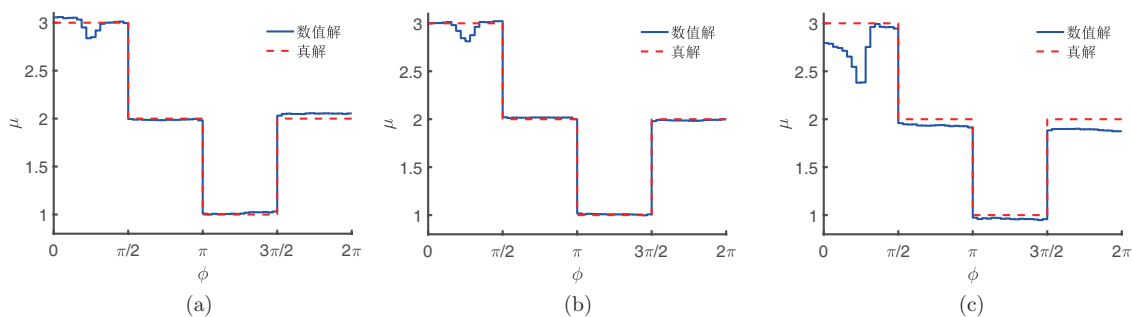


图 10 (网络版彩图) (a) 例 4.5 中 $\delta = 0.0004$ 的反演结果; (b) 例 4.5 中 $\delta = 0.0007$ 的反演结果; (c) 例 4.5 中 $\delta = 0.001$ 的反演结果

表 4 例 4.5 中不同噪声水平的反演结果

δ	迭代步数	$\ \mu_h - \mu^*\ _1 / \ \mu^*\ _1$
0.0004	210	1.000E-2
0.0007	211	1.557E-2
0.001	109	5.550E-2

5 结论

本文将直接线法推广到星型区域上几乎不可压复合材料问题, 并且将其应用到相应的反问题上. 假设区域边界可以被参数化成角度的 C^1 函数从而引入曲线坐标系. 在新的坐标系下, 不规则的星型区域变为规则的半无限带状区域, 原问题转化为一个变分微分问题. 随后将此变分微分问题半离散化得到一个可以直接求解的常微分方程组. 求解此常微分方程组可以得到原问题的半离散数值解. 本文的方法可以自然地模拟准确解的奇性, 并且给出最优误差估计. 本文的方法不会发生闭锁现象且保持最优收敛阶, 数值算例验证了此方法的有效性与准确性.

考虑几乎不可压复合材料反问题. 通过 Adam 算法极小化一个带全变差正则化的能量泛函, 从而反演出 Lamé 系数. 在每一步迭代中, 本文将直接线法作为正问题求解器. 大量数值算例说明了本文的方法可以成功重构界面位置和每个子区域上 Lamé 系数的值.

参考文献

- 1 Ang I, Bouklas N, Li B. Stabilized formulation for phase-field fracture in nearly incompressible hyperelasticity. *Internat J Numer Methods Engrg*, 2022, 123: 4655–4673
- 2 Babaniyi O A, Oberai A A, Barbone P E. Direct error in constitutive equation formulation for plane stress inverse elasticity problem. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2017, 314: 3–18
- 3 Babuška I, Kellogg R B, Pitkäranta J. Direct and inverse error estimates for finite elements with mesh refinements. *Numer Math*, 1979, 33: 447–471
- 4 Bao G, Yin T, Zeng F. Multifrequency iterative methods for the inverse medium scattering problems in elasticity. *SIAM J Sci Comput*, 2019, 41: B721–B745
- 5 Braess D, Ming P. A finite element method for nearly incompressible elasticity problems. *Math Comp*, 2005, 74: 25–52
- 6 Braess D, Ming P, Shi Z. Shear locking in a plane elasticity problem and the enhanced assumed strain method. *SIAM J Numer Anal*, 2010, 47: 4473–4491
- 7 Bramwell J, Demkowicz L, Gopalakrishnan J, et al. A locking-free hp DPG method for linear elasticity with symmetric stresses. *Numer Math*, 2012, 122: 671–707
- 8 Calo V M, Romkes A, Valseth E. Automatic variationally stable analysis for FE computations: An introduction. In: *Boundary and Interior Layers, Computational and Asymptotic Methods. Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, vol. 135. Cham: Springer, 2020, 19–43
- 9 Carstensen C, Dolzmann G, Funken S A, et al. Locking-free adaptive mixed finite element methods in linear elasticity. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2000, 190: 1701–1718
- 10 Chang J, Xu J Q. The singular stress field and stress intensity factors of a crack terminating at a bimaterial interface. *Int J Mech Sci*, 2007, 49: 888–897
- 11 Chen L, Hu J, Huang X. Stabilized mixed finite element methods for linear elasticity on simplicial grids in $\mathbb{R}^n$. *Comput Methods Appl Math*, 2017, 17: 17–31
- 12 Cheung Y K, Jiang C P. Application of the finite strip method to plane fracture problems. *Eng Fract Mech*, 1996, 53: 89–96
- 13 Doyley M M. Model-based elastography: A survey of approaches to the inverse elasticity problem. *Phys Med Biol*, 2012, 57: R35–R73
- 14 England A H. A crack between dissimilar media. *J Appl Mech*, 1965, 32: 400–402
- 15 Fix G J, Gulati S, Wakoff G I. On the use of singular functions with finite element approximations. *J Comput Phys*, 1973, 13: 209–228
- 16 Fries T-P. A corrected XFEM approximation without problems in blending elements. *Internat J Numer Methods Engrg*, 2008, 75: 503–532
- 17 Ghorashi S S, Valizadeh N, Mohammadi S. Extended isogeometric analysis for simulation of stationary and propagating cracks. *Internat J Numer Methods Engrg*, 2012, 89: 1069–1101
- 18 Gockenbach M S, Khan A A. An abstract framework for elliptic inverse problems: Part 1. An output least-squares approach. *Math Mech Solids*, 2007, 12: 259–276
- 19 Gockenbach M S, Khan A A. An abstract framework for elliptic inverse problems: Part 2. An augmented Lagrangian approach. *Math Mech Solids*, 2009, 14: 517–539
- 20 González-Estrada O A, Natarajan S, Ródenas J J, et al. Efficient recovery-based error estimation for the smoothed finite element method for smooth and singular linear elasticity. *Comput Mech*, 2013, 52: 37–52
- 21 Greenleaf J F, Fatemi M, Insana M. Selected methods for imaging elastic properties of biological tissues. *Annu Rev*

- Biomed Eng, 2003, 5: 57–78
- 22 Grédiac M. The use of full-field measurement methods in composite material characterization: Interest and limitations. *Compos Part A Appl Sci Manuf*, 2004, 35: 751–761
 - 23 Grédiac M, Hild F. *Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics*. New York: John Wiley & Sons, 2012
 - 24 Gupta V, Duarte C A, Babuška I, et al. A stable and optimally convergent generalized FEM (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2013, 266: 23–39
 - 25 Han H. The numerical solutions of interface problems by infinite element method. *Numer Math*, 1982, 39: 39–50
 - 26 Han H, Bao W. An artificial boundary condition for two-dimensional incompressible viscous flows using the method of lines. *Internat J Numer Methods Fluids*, 1996, 22: 483–493
 - 27 Han H, Bao W. The discrete artificial boundary condition on a polygonal artificial boundary for the exterior problem of Poisson equation by using the direct method of lines. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1999, 179: 345–360
 - 28 Han H, Huang Z. The direct method of lines for the numerical solutions of interface problem. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1999, 171: 61–75
 - 29 Han H, Huang Z. The discrete method of separation of variables for composite material problems. *Int J Fract*, 2001, 112: 379–402
 - 30 Hong Q, Hu J, Ma L, et al. New discontinuous Galerkin algorithms and analysis for linear elasticity with symmetric stress tensor. *Numer Math*, 2021, 149: 645–678
 - 31 Hubmer S, Sherina E, Neubauer A, et al. Lamé parameter estimation from static displacement field measurements in the framework of nonlinear inverse problems. *SIAM J Imag Sci*, 2018, 11: 1268–1293
 - 32 Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2005, 194: 4135–4195
 - 33 Li R, Yang F. A least squares method for linear elasticity using a patch reconstructed space. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2020, 363: 112902
 - 34 Liao Y, Ming P, Xu Y. Taylor-Hood like finite elements for nearly incompressible strain gradient elasticity problems. *J Sci Comput*, 2023, 95: 4
 - 35 Jadamba B, Khan A A, Raciti F. On the inverse problem of identifying Lamé coefficients in linear elasticity. *Comput Math Appl*, 2008, 56: 431–443
 - 36 Jadamba B, Khan A A, Rus G, et al. A new convex inversion framework for parameter identification in saddle point problems with an application to the elasticity imaging inverse problem of predicting tumor location. *SIAM J Appl Math*, 2014, 74: 1486–1510
 - 37 Kahla N B, AlQadhi S, Ahmed M. Mesh-free MLS-based error-recovery technique for finite element incompressible elastic computations. *Appl Sci*, 2023, 13: 6890
 - 38 Kingma D P, Ba J L. Adam: A method for stochastic gradient descent. In: *International Conference on Learning Representations*. San Diego: ICLR, 2015, 1–15
 - 39 Li Z C, Mathon R. Error and stability analysis of boundary methods for elliptic problems with interfaces. *Math Comp*, 1990, 54: 41–61
 - 40 Lin K Y, Mar J W. Finite element analysis of stress intensity factors for cracks at a bi-material interface. *Int J Fract*, 1976, 12: 521–531
 - 41 Matos P P L, McMeeking R M, Charalambides P G, et al. A method for calculating stress intensities in bimaterial fracture. *Int J Fract*, 1989, 40: 235–254
 - 42 Nakshatrala K B, Masud A, Hjelmstad K D. On finite element formulations for nearly incompressible linear elasticity. *Comput Mech*, 2008, 41: 547–561
 - 43 Nemer R, Larcher A, Coupez T, et al. Stabilized finite element method for incompressible solid dynamics using an updated Lagrangian formulation. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2021, 384: 113923
 - 44 Oh H S, Babuška I. The method of auxiliary mapping for the finite element solutions of elasticity problems containing singularities. *J Comput Phys*, 1995, 121: 193–212
 - 45 Papadakis P J, Babuška I. A numerical procedure for the determination of certain quantities related to the stress intensity factors in two-dimensional elasticity. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1995, 122: 69–92
 - 46 Parker K J, Doyley M M, Rubens D J. Imaging the elastic properties of tissue: The 20 year perspective. *Phys Med Biol*, 2010, 56: R1–R29
 - 47 Phillips P J, Wheeler M F. Overcoming the problem of locking in linear elasticity and poroelasticity: An heuristic approach. *Comput Geosci*, 2009, 13: 5–12
 - 48 Raveendra S T, Banerjee P K. Computation of stress intensity factors for interfacial cracks. *Eng Fract Mech*, 1991, 40: 89–103
 - 49 Rice J R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *J Appl Mech*, 1988, 55: 98–103
 - 50 Rice J R, Sih G C. Plane problems of cracks in dissimilar media. *J Appl Mech*, 1965, 32: 418–423
 - 51 Rossi M, Pierron F. On the use of simulated experiments in designing tests for material characterization from full-field measurements. *Int J Solids Struct*, 2012, 49: 420–435

- 52 Schiesser W E. The Numerical Method of Lines: Integration of Partial Differential Equations. San Diego: Academic Press, 1991
- 53 Szabó B A, Babuška I. Finite Element Analysis. New York: Wiley, 1991
- 54 Tisseur F, Meerbergen K. The quadratic eigenvalue problem. SIAM Rev, 2001, 43: 235–286
- 55 Vogel C R. Computational Methods for Inverse Problems. Philadelphia: SIAM, 2002
- 56 Wang M, Zhang K, Chen C. A mixed FFT-Galerkin approach for incompressible or slightly compressible hyperelastic solids under finite deformation. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2022, 396: 115092
- 57 Wihler T P. Locking-free adaptive discontinuous Galerkin FEM for linear elasticity problems. Math Comp, 2006, 75: 1087–1102
- 58 Williams M L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media. Bull Seismol Soc Amer, 1959, 49: 199–204
- 59 Wu Z, Huang Z, Wang W C, et al. The direct method of lines for elliptic problems in star-shaped domains. J Comput Appl Math, 2018, 327: 350–361
- 60 Xanthis L S, Schwab C. The method of arbitrary lines. C R Acad Sci Sér 1 Math, 1991, 312: 181–187
- 61 Yang Y Y, Munz D. Stress singularities in a dissimilar materials joint with edge tractions under mechanical and thermal loadings. Int J Solids Struct, 1997, 34: 1199–1216
- 62 Zhang Y, Guo L, Brousse C J A, et al. Machine learning based inverse modeling of full-field strain distribution for mechanical characterization of a linear elastic and heterogeneous membrane. Mech Mater, 2022, 165: 104134
- 63 Zhu X, Wu Z, Huang Z. The direct method of lines for forward and inverse linear elasticity problems of composite materials in star-shaped domains. Numer Math Theory Methods Appl, 2023, 16: 242–276

The direct method of lines for forward and inverse problems of nearly-incompressible composite materials in star-shaped domains

Xiaopeng Zhu & Zhongyi Huang

Abstract In this paper, the direct method of lines is extended to (nearly) incompressible composite materials problems in star-shaped domains. We also study its application in inverse elasticity problems. By introducing a suitable curvilinear coordinate, the irregular star-shaped domains are transformed into regular semi-infinite stripes. The (nearly) incompressible elastic equations are discretized in the angular variable and we resolve the resulting semi-discrete approximation using the direct method. Then we present an optimal error estimate for the nearly-incompressible composite materials problem. There is no rise to the “locking effect” and the convergence order will not reduce. For the inverse problems, we determine the Lamé coefficient from the measured data by minimizing the regularized energy functionals. We apply the direct method of lines as a forward solver to deal with the irregularity of the domain and the possible singularity in the forward problem. The effectiveness and accuracy of this method for forward and inverse problems are verified by abundant numerical examples.

Keywords composite material, nearly-incompressible, inverse elasticity problem, star-shaped domain, method of line

MSC(2020) 35J75, 52A30, 65N21, 65N40, 74A40, 74B05

doi: 10.1360/SCM-2023-0400