



速度大小 - 方向权衡诱导的时滞群集系统的方向切换行为研究

王佳怡¹, 李望¹, 尹相鑫¹, 赵冬华², 孙永征^{1*}

1. 中国矿业大学数学学院, 徐州 221116;

2. 复旦大学数学科学学院, 上海 200433

E-mail: jy_wang0708@163.com, liwang718@126.com, yinxianxin1998@163.com, dhzhao@fudan.edu.cn, yzsung@gmail.com

收稿日期: 2024-06-06; 接受日期: 2025-07-20; 网络出版日期: 2025-10-14; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12271519 和 2211001016)、江苏省自然科学基金 (批准号: BK20211241)、徐州市自然科学基金 (批准号: KC23065) 和深圳自然科学基金 (批准号: JCYJ20240813101300001) 资助项目

摘要 群集运动生物经常会展现有序的运动方向切换行为. 经典的 Vicsek 模型在一定程度上能够模拟这一行为, 但未能充分考虑个体在速度大小与运动方向之间的权衡、社会相互作用及时滞等因素叠加所带来的复杂效应. 本文提出一个数学框架, 以计算包含速度大小 - 方向权衡的时滞系统中运动方向的平均切换时间, 并利用该框架分析时滞及社会相互作用对群集运动的影响. 理论与数值结果表明, 存在最优速度大小 - 方向权衡及社会相互作用强度, 可使系统的运动方向切换更加有序.

关键词 方向切换 速度大小 - 方向权衡 时滞 Vicsek 模型 Fokker-Planck 方程

MSC (2020) 主题分类 60G10, 92D25, 93B70, 93C43

1 引言

生物群体通过个体相互作用展现出的群集行为在自然界中无处不在, 受生物群体启发的多智能体系统也广泛应用于工程领域 [13, 32, 44, 45]. 例如, 鸟群 [10]、鱼群 [9, 17, 26, 28]、蚁群 [2, 16, 25] 等在觅食、迁徙过程中都表现出丰富的群集行为. 在工程应用领域, 机器人 [12, 27, 31, 49, 52] 以及航天器 [4] 的编队和协同也是群集行为的重要应用.

在群体运动过程中, 生物群体往往会突然改变其运动方向. 例如, 鱼群既可高度有序地运动, 也能突然改变方向. 在某些情况下, 群体运动方向的切换是对外部环境的响应, 例如, 当捕食者出现时, 猎物可能会改变方向. 然而, 对蝗虫群 [5] 和鸽群 [7, 35] 的研究揭示, 生物群体也可以自发地切换运动方向. 研究指出, 群体密度和内在噪声是影响动物和细菌群运动方向切换的关键因素 [2, 6, 15, 28, 50], 群体密度增大会抑制方向切换的发生, 内在噪声可以诱导有序的方向切换. 特别地, 在噪声环境下的双稳态系

英文引用格式: Wang J Y, Li W, Yin X X, et al. Directional switches in time-delay swarming systems induced by speed-direction trade-off (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 1–16, doi: [10.1360/SSM-2024-0194](https://doi.org/10.1360/SSM-2024-0194)

统中, 当群体密度较大且随机波动较小时, 平均切换时间 (meaning switching time, MST) 对群体密度的依赖性并不显著 [29].

在真实世界中, 个体之间的信息传递速度有限, 且每个个体都需要一定的时间处理信息. 因此, 在研究群集行为时考虑时滞效应显得尤为重要, 众多模型已经引入了时滞因素 (参见文献 [1, 3, 8, 14, 23, 33, 36, 41, 42, 46]). Olfati-Saber 和 Murray [36] 首次探究了时滞对多智能体系统一致性的影响. Holubec 等 [23] 进一步发现适度增加时滞可以促进 Vicsek 模型的一致性, 但过度增加时滞则可能导致这一趋势逆转. 同时, Blum 等 [3] 则专注于研究群集振子系统中时滞相互作用的影响, 并发现了两种由时滞产生的长期群集状态. 另外, 部分模型同时结合多种时滞研究其群集行为, 如蝗虫群和鸽群的方向切换 [33, 41, 42], 以及鱼群的持久性 - 响应性自适应模型 [8]. 这些研究共同表明时滞在理解及预测群集行为方面的重要作用.

事实上, 鸽群、鱼群等群体中个体的行为倾向于与其建立密切社会联系的个体保持一致 [22, 35, 38]. 最近, Xiao 等 [47, 48] 利用降维方法 [19] 在 Erdős-Rényi 网络中探讨了社会相互作用如何影响方向切换行为. 而不同群体在社会关系构建方面存在差异, 例如, 蝗虫群中个体引导群体运动的能力在各个体之间分布较均匀 [15], 相比之下, 在灵长类动物群体和鸽群中, 个体的社会地位显著影响其在群体运动中的相互作用 [35, 40]. 为此, 研究群体运动的方向切换行为有必要考虑社会相互作用的影响.

上述对方向切换的研究主要关注邻域内个体速度方向对群体运动状态的影响, 却鲜少强调速度大小 - 方向权衡的影响 [42, 43, 48]. 已有研究表明速度的大小和方向都是影响群集行为的重要因素. 例如, 基于 Cziráok 等 [11] 提出的一维连续模型, Escudero 等 [15] 和 Yates 等 [50] 进一步发展了更具普适性的包含速度大小与方向的模型, 得出内在噪声诱导系统的 MST 并应用粗粒度方法识别了实验数据和理论之间的关键差异. 然而相关研究都尚未考虑到时滞对方向切换的影响, 这主要是由于计算时滞运动群体的 MST 具有理论挑战性. 因此, 有必要提出新的数学框架计算时滞系统的 MST 并分析速度大小 - 方向权衡以及社会相互作用对群集行为的影响.

本文首先在 Vicsek 模型中引入个体对运动速度大小 - 方向的权衡. 然后, 对带有速度权衡的 Vicsek 模型, 分别探讨信息处理及传递时滞对方向切换行为的影响. 随后, 基于降维及 Fokker-Planck 方程的延迟近似法等方法简化局部与社会相互作用的复杂性, 计算群体状态的稳态概率密度以及方向的平均切换时间, 揭示运动速度大小 - 方向的权衡、时滞以及社会相互作用对运动方向切换行为的影响. 本文不仅强调在方向切换行为研究中, 综合考虑速度大小 - 方向的权衡、社会相互作用以及时滞效应的重要性, 其研究成果还将为群体智能设备的设计提供理论支撑.

2 预备知识

引理 2.1 [20] 考虑一维扩散过程

$$dX(t) = h(X(t))dt + \sqrt{Q}dW(t), \quad (2.1)$$

其中漂移项 $h(X(t))$ 与时间无关, 扩散项 $\sqrt{Q}$ 表示与噪声相关的常数, $W(t)$ 表示标准 Brown 运动. 其对应的 Fokker-Planck 方程可表示为

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(h(x)P(x, t)) + \frac{1}{2}Q\frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2.2)$$

其中 $P(x, t)$ 是扩散过程 (2.1) 的概率密度. 此时, 系统的稳态概率分布 (stationary probability distribution, SPD) 为

$$P_{\text{st}}(x) = \frac{1}{Z} \exp(-\phi(x)), \quad (2.3)$$

其中 $\phi(x) = -2V(x)/Q$, $V(x)$ 为 $h(x)$ 的原函数, Z 为归一化常数. 假设个体在时间 $t = 0$ 的初始位置为 x , 边界条件为 $h'(a) = 0$, $h(b) = 0$, 且 $a \leq x \leq b$, 则 x 在区间 (a, b) 内的停留时间为

$$T(x) = \frac{2}{Q} \int_x^b \exp(\phi(y)) dy \int_a^y \exp(-\phi(z)) dz. \quad (2.4)$$

引理 2.2 ^[18] 考虑一维时滞扩散过程

$$dX(t) = h(X(t), X(t - \tau))dt + \sqrt{Q}dW(t), \quad (2.5)$$

其中, $\tau \geq 0$ 表示系统的时延, $x_\tau = x(t - \tau)$ 表示 $t - \tau$ 时刻系统的状态, 漂移项 $h(X(t), X(t - \tau))$ 与时间无关, 扩散项 $\sqrt{Q}$ 表示与噪声相关的常数, $W(t)$ 是标准 Brown 运动. 其对应的时滞 Fokker-Planck 方程可表示为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = & -\frac{\partial}{\partial x} \int h(x, x_\tau) P(x, t; x_\tau, t - \tau) dx_\tau \\ & + \frac{Q}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int P(x, t; x_\tau, t - \tau) dx_\tau, \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中 $P(x, t; x_\tau, t - \tau)$ 是 x 和 x_τ 的联合概率分布. 此时, 系统的一阶近似 SPD 可由以下形式给出:

$$P_{\text{st}}^{(1)}(x) = \frac{1}{Z} \exp(-\phi(x)), \quad (2.7)$$

其中 Z 是归一化常数, $\phi(x) = -2U_{\text{eff}}(x)/Q$, $U_{\text{eff}}(x)$ 定义为

$$U_{\text{eff}}(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi Q\tau}} \int_{-\infty}^x dx' \int_{-\infty}^{\infty} dx_\tau h(x', x_\tau) \times \exp\left(-\frac{(x_\tau - x' - h^{(0)}(x')\tau)^2}{2Q\tau}\right), \quad (2.8)$$

这里 $h^{(0)}(x')$ 表示非时滞情况下的 $h(x, x_\tau)$.

3 信息处理时滞诱导的方向切换

3.1 具有局部相互作用的群集系统的方向切换

时滞对于调控生物行为具有重要意义, 因此引入这一因素对揭示生物群体运动方向切换行为的内在机理极为关键^[37]. 生物群体的运动经常受到信息处理和传递两种时滞的影响^[34, 36], 信息处理时滞代表个体接收到信息后处理并调整状态所需要的时间, 个体接收其邻居信息而需要的时间称为信息传递时滞. 接下来分别研究这两种时滞对群体运动方向切换行为的影响.

本文首先研究信息处理时滞诱导的具有局部相互作用的群集系统的方向切换行为. 假设信息的传递是瞬时的, 并假设每个个体在接收到邻居的速度信息后, 需要时间 τ 调整自身的速度. 因此, 在信息处理时滞系统中, 第 i 个个体根据相邻个体在 $t - \tau$ 时刻的速度更新自身在 t 时刻的速度.

假设 N 个个体沿着圆移动, 该圆由区间 $\Omega = [0, 1)$ 表示. 在周期边界条件下, 设 $X_i \equiv X_i(t) \in \Omega$ 和 $V_i \equiv V_i(t)$, $i = 1, \dots, N$ 分别表示个体 i 的位置及速度, 相互作用邻域集定义为 $J_{i,R}(t) = \{j \in$

$\{1, \dots, N\} \mid \min(d_{ij}, 1 - d_{ij}) \leq R\}$, 其中 d_{ij} 为个体 i 与 j 之间的物理距离, R 为相互作用半径. 群体中的个体速度演化为

$$dV_i = [G(V_i^{\text{local}}(t - \tau)) - V_i(t - \tau)]dt + \eta dW_i, \quad (3.1)$$

其中 $\eta > 0$ 表示噪声强度, dW_i 表示标准白噪声, $V_i^{\text{local}}(t) = (1/|J_{i,R}(t)|) \sum_{j \in J_{i,R}(t)} V_j(t)$ 表示个体 i 在邻域内的平均速度. 鉴于群体运动同时受到速度大小与方向的影响 [11, 15, 50], 本文引入一个权衡函数

$$G(x) = \frac{1}{1 + \beta} (\beta x + \text{sign}(x)) \quad (3.2)$$

以描述运动群体中个体间相互作用的速度大小 - 方向权衡, 此权衡函数不仅同时考虑速度大小与方向, 且反对称函数 $G(x)$ 使得当 $x > 0$ 时, 有 $G(x) > 0$, 而当 $x < 0$ 时有 $G(x) < 0$, 这使得自驱动粒子模型有可能自发涌现对称性破缺. 此外, 若 $0 < x < 1$, 则有 $G(x) > x$, 表现为对个体运动的加速作用; 若 $x > 1$, 则有 $G(x) < x$, 表现为对个体运动的减速阻尼, 这种特性确保了函数的有界性. 该函数中 $\beta/(1 + \beta)$ 表示速度大小的权重, $1/(1 + \beta)$ 表示速度方向的权重, 其中 $\beta \in [0, +\infty)$ 表示速度大小 - 方向的权衡参数, 它反映了邻域内个体速度更倾向于保持大小还是方向一致的偏好, β 越大则越倾向于大小一致. 当 $\beta = 1$ 时, $G(x) = (x + \text{sign}(x))/2$ 表示速度大小与方向对群体的影响几乎一致, 此时该相互作用函数与文献 [11] 中函数一致. $\beta = 0$ 表示速度方向是主要影响因素, 此时该相互作用函数与文献 [48] 中函数一致. 将相互作用函数 (3.2) 代入模型 (3.1), 得到

$$dV_i = \left(\frac{\beta}{1 + \beta} V_i^{\text{local}}(t - \tau) + \frac{1}{1 + \beta} \text{sign}(V_i^{\text{local}}(t - \tau)) - V_i(t - \tau) \right) dt + \eta dW_i, \quad (3.3)$$

假设相互作用半径足够大. 所以 (3.3) 中的局部平均速度 $V_i^{\text{local}}(t)$ 变成全局平均速度

$$V(t) = (1/N) \sum_{j=1}^N V_j(t).$$

因此, (3.3) 变为

$$dV_i = \left(\frac{\beta}{1 + \beta} V(t - \tau) + \frac{1}{1 + \beta} \text{sign}(V(t - \tau)) - V_i(t - \tau) \right) dt + \eta dW_i, \quad (3.4)$$

由 (3.4) 得全局平均速度 $V(t)$ 满足的 Itô 型随机微分方程

$$dV = \frac{1}{1 + \beta} \left[\text{sign}(V(t - \tau)) - V(t - \tau) \right] dt + \frac{\eta}{\sqrt{N}} dW. \quad (3.5)$$

下面对模型 (3.1) 进行数值模拟以探究各因素对群体方向切换的影响. 所有形如 (3.3) 的随机微分方程均采用标准二阶随机 Runge-Kutta 格式求解 [39], 其中时间步长 $\Delta t = 0.01$, 相互作用半径 $R = 0.35$, 个体的初始位置在区间 $[0, 1]$ 内均匀取值, 初始速度呈均值为 0、方差为 1 的正态分布. 群体的平均速度 V 随时间的演化如图 1 所示, 从图中可以发现, 在外部环境没有任何变化的情况下, 群体的运动方向会突然切换到相反的方向. 分析图 1(a) 发现, 尽管存在邻域内个体速度大小的相互作用, 但是密度低的群体比密度高的群体更频繁地改变方向, 这与已有结论一致 (参见文献 [5]). 图 1(b) 为速度大小 - 方向权衡参数对群体平均速度的影响, 由图 1(b) 可知, 方向切换行为不仅与群体密度有关, 还与邻域内个体相互作用的速度大小 - 方向的权衡有关. 接下来运用理论分析各因素对方向切换的影响.

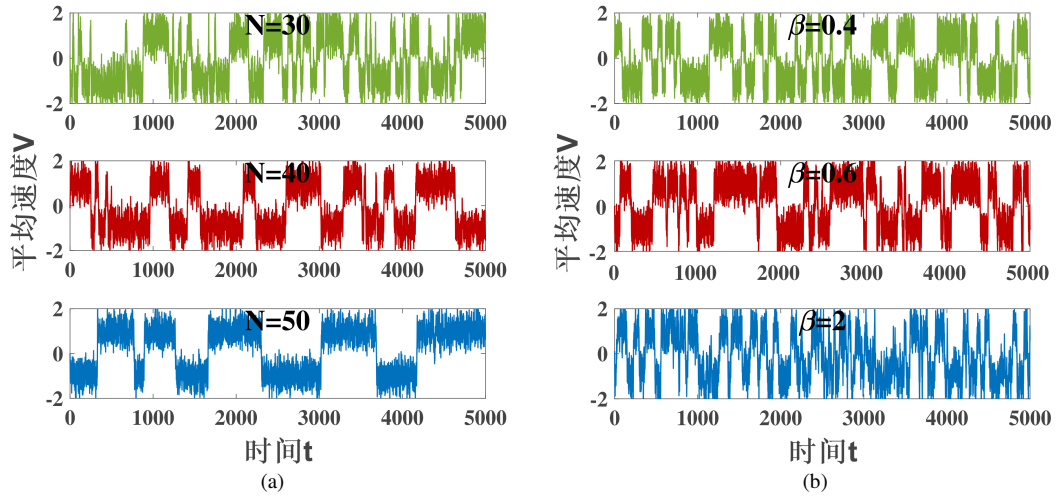


图 1 (网络版彩图) 模型 (3.1) 中各因素对群体平均速度的影响. (a) 群体密度, 其中 $\beta = 1$; (b) 速度大小 - 方向权衡参数, 其中 $N = 30$; 其他参数为 $\tau = 0.8$, $\eta = 2$, $R = 0.35$

定理 3.1 当 $N \gg 1$ 且 $0 \leq \tau < 1$ 时, 考虑扩散过程

$$dV = [aV(t - \tau) + b\text{sign}(V(t - \tau)) - (a + b)V(t)]dt + \frac{\eta}{\sqrt{N}}dW, \quad (3.6)$$

其中 a 和 b 为常数, $\tau \geq 0$ 表示系统的时延, $\eta/\sqrt{N}$ 表示与状态无关的噪声强度, $W(t)$ 是标准 Brown 运动. 系统的一阶近似 SPD 为

$$P_{\text{st}}^{(1)}(v) = \frac{k_{\tau} e^{2k_{\tau}^2(|v| - v^2/2)}}{2\sqrt{\pi}e^{k_{\tau}^2}}, \quad (3.7)$$

其中 $k_{\tau} = \sqrt{N(b(a\tau + 1))/\eta^2}$.

证明 设 $P(v, t)$ 表示扩散过程 (3.6) 的概率密度, 则 $P(v, t)dv$ 表示在 $V(t) \in [v, v + dv]$ 的全局平均速度的概率, $P_{\text{st}}(v)$ 表示 $v(t)$ 的 SPD, $P_{\text{st}}^{(1)}(v)$ 表示 SPD 的一阶近似. 根据引理 2.2, 可得

$$P_{\text{st}}^{(1)}(v) = \frac{1}{Z} \exp(-\phi(v)),$$

其中 Z 是归一化常数, 势函数 $\phi(v) = -2NU_{\text{eff}}(v)/\eta^2$, $U_{\text{eff}}(v) = \sqrt{N/2\pi\eta^2\tau} \int_0^v h_{\text{eff}}(v')dv'$. 计算可得

$$\begin{aligned} h_{\text{eff}}(v') &= \int_{-\infty}^{+\infty} (av_{\tau} + b\text{sign}(v_{\tau}) - cv') \exp\left(-\frac{(v_{\tau} - \psi(v'))^2}{2\eta^2\tau/N}\right) dv_{\tau} \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} v_{\tau} \exp\left(-\frac{(v_{\tau} - \psi(v'))^2}{2\eta^2\tau/N}\right) dv_{\tau} \\ &\quad + b \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sign}(v_{\tau}) \exp\left(-\frac{(v_{\tau} - \psi(v'))^2}{2\eta^2\tau/N}\right) dv_{\tau} \\ &\quad - c \int_{-\infty}^{+\infty} v' \exp\left(-\frac{(v_{\tau} - \psi(v'))^2}{2\eta^2\tau/N}\right) dv_{\tau} \\ &\triangleq I_1 + I_2 - I_3, \end{aligned}$$

此处 $a + b = c$, $\psi(v') = v' + \tau(av'_\tau + b\text{sign}(v'_\tau) - cv')$. 令 $\mu = v_\tau - \psi(v')$, $p = \mu/\sqrt{2\eta^2\tau/N}$, 可得

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} a\mu \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\eta^2\tau/N}\right) d\mu + a\psi(v') \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\eta^2\tau/N}\right) d\mu \\ &= a\psi(v') \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\eta^2\tau/N}\right) d\mu \\ &= a\sqrt{2\eta^2\tau/N}\psi(v') \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-p^2) dp \\ &= a\sqrt{2\pi\eta^2\tau/N}\psi(v'). \end{aligned}$$

对于 I_3 , 通过计算可得

$$I_3 = cv' \sqrt{2\eta^2\tau/N} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-p^2) dp = cv' \sqrt{2\pi\eta^2\tau/N}$$

以及

$$\begin{aligned} I_2 &= b \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sign}(v_\tau) \exp\left(-\frac{(v_\tau - \psi(v'))^2}{2\eta^2\tau/N}\right) dv_\tau \\ &= -b \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{(v_\tau - \psi(v'))^2}{2\eta^2\tau/N}\right) dv_\tau \\ &\quad + b \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{(v_\tau - \psi(v'))^2}{2\eta^2\tau/N}\right) dv_\tau \\ &\triangleq I_4 + I_5. \end{aligned}$$

计算 I_4 和 I_5 , 可得

$$\begin{aligned} I_4 &= -b \int_{-\infty}^{-\psi(v')} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\eta^2\tau/N}\right) d\mu \\ &= -b\sqrt{2\eta^2\tau/N} \left(\int_{-\infty}^0 \exp(-p^2) dp + \int_0^{-\frac{\psi(v')}{\sqrt{2\eta^2\tau/N}}} \exp(-p^2) dp \right), \\ I_5 &= b \int_{-\psi(v')}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\eta^2\tau/N}\right) d\mu \\ &= b\sqrt{2\eta^2\tau/N} \left(\int_{-\frac{\psi(v')}{\sqrt{2\eta^2\tau/N}}}^0 \exp(-p^2) dp + \int_0^{\infty} \exp(-p^2) dp \right). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} I_2 &= I_4 + I_5 = b\sqrt{2\eta^2\tau/N} \left(- \int_0^{-\frac{\psi(v')}{\sqrt{2\eta^2\tau/N}}} \exp(-p^2) dp + \int_{-\frac{\psi(v')}{\sqrt{2\eta^2\tau/N}}}^0 \exp(-p^2) dp \right) \\ &= b\sqrt{2\eta^2\tau/N} \int_{-\frac{\psi(v')}{\sqrt{2\eta^2\tau/N}}}^{\frac{\psi(v')}{\sqrt{2\eta^2\tau/N}}} \exp(-p^2) dp \\ &= b\sqrt{2\pi\eta^2\tau/N} \text{erf}\left(\frac{\psi(v')}{\sqrt{2\eta^2\tau/N}}\right). \end{aligned}$$

因此, 通过上述公式, 得到

$$h_{\text{eff}}(v') = \sqrt{2\pi\eta^2\tau/N} \left[a\psi(v') + \text{berf}\left(\frac{\psi(v')}{\sqrt{2\eta^2\tau/N}}\right) - cv' \right],$$

当 $v' > 0$ 时, $\psi(v')/\sqrt{2\eta^2\tau/N} = +\infty$, $\text{erf}(+\infty) = 1$. 由此可知, 当 $N \gg 1$ 且 $0 \leq \tau < 1$ 时,

$$\int_0^v \text{erf}\left(\frac{\psi(v')}{\sqrt{2\eta^2\tau/N}}\right) dv' \approx |v|,$$

所以

$$U_{\text{eff}}(v) = b(1 + a\tau)|v| + (1 + a\tau)(a - c)\frac{v^2}{2}.$$

又因为 $c = a + b$, 最后可得

$$P_{\text{st}}^{(1)}(v) = \frac{1}{Z} \exp\left(\frac{2Nb(1 + a\tau)}{\eta^2} \left(|v| - \frac{v^2}{2}\right)\right). \quad (3.8)$$

借助归一化方法可对 Z 进行求解. 设 $k_\tau = \sqrt{N(b(a\tau + 1))/\eta^2}$, 由于 $P_{\text{st}}^{(1)}(v)$ 是概率密度函数, 因此 $\int_{-\infty}^{+\infty} P_{\text{st}}^{(1)}(v) dv = 1$, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{Z} e^{2k_\tau^2(|v| - v^2/2)} dv = \frac{2}{Z} \int_0^{+\infty} e^{2k_\tau^2(v - v^2/2)} dv = 1.$$

令 $m = k_\tau(v - 1)$, 可得

$$\begin{aligned} Z &= 2e^{k_\tau^2} \int_{-k_\tau}^{+\infty} e^{-m^2} \cdot \frac{1}{k_\tau} dm = \frac{2e^{k_\tau^2}}{k_\tau} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{erf}(+\infty) - \int_0^{k_\tau} e^{-m^2} dm \right) \\ &= \frac{2e^{k_\tau^2}}{k_\tau} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{erf}(-k_\tau) \right) = \frac{\sqrt{\pi}e^{k_\tau^2}}{k_\tau} (1 + \text{erf}(k_\tau)). \end{aligned}$$

将 Z 代入 (3.8), 得到完整的 $P_{\text{st}}^{(1)}(v)$ 表达式

$$P_{\text{st}}^{(1)}(v) = \frac{k_\tau e^{2k_\tau^2(|v| - v^2/2)}}{e^{k_\tau^2} \sqrt{\pi} (1 + \text{erf}(k_\tau))}, \quad (3.9)$$

当 $N \gg 1$ 且 $0 \leq \tau < 1$ 时, $k_\tau \rightarrow +\infty$, $\text{erf}(k_\tau) \approx 1$, (3.9) 简化为

$$P_{\text{st}}^{(1)}(v) = \frac{k_\tau e^{2k_\tau^2(|v| - v^2/2)}}{2\sqrt{\pi}e^{k_\tau^2}}.$$

证毕. □

对于模型 (3.5), 运用定理 3.1, 当 $a = -1/(1 + \beta)$, $b = 1/(1 + \beta)$ 时, 群体平均速度的一阶近似 SPD 为

$$P_{\text{st}}^{(1)}(v) = \frac{k_\tau e^{2k_\tau^2(|v| - v^2/2)}}{2\sqrt{\pi}e^{k_\tau^2}}, \quad (3.10)$$

其中

$$k_\tau = \sqrt{\frac{N(1+\beta-\tau)}{\eta^2(1+\beta)^2}}, \quad (3.11)$$

显然, 在 $v = \pm 1$ 时, $P_{\text{st}}^{(1)}(v)$ 有两个全局最大值, 且其概率分布近似于

$$P_{\text{st}}^{(1)}(v = \pm 1) = \frac{k_\tau}{2\sqrt{\pi}}. \quad (3.12)$$

由 (3.11) 可得, 随着群体密度 N 的增加以及噪声强度 η 和信息处理时滞 τ 的减小, $P_{\text{st}}^{(1)}(v = \pm 1)$ 增大, 可以更加清楚地分辨出系统的稳态为 $v = \pm 1$, 表明系统的方向切换变得有序. 这些结论都与图 1(a) 所示的数值模拟相吻合, 验证了模型 (3.5) 理论结果的有效性. 同时, (3.11) 也表明速度大小 - 方向的权衡会影响群体的速度分布. 分析可得, 当 $0 < \tau \leq 0.5$ 时, β 增大导致 $P_{\text{st}}^{(1)}(v = \pm 1)$ 减少, 表明较小的信息处理时滞情况下, 相互作用中速度大小权重增大不利于群体一致性的产生, 增大了方向切换的频率; 而当 $0.5 < \tau < 1$ 时, $P_{\text{st}}^{(1)}(v = \pm 1)$ 在临界点 $\beta^c = 2\tau - 1$ 时最大, 随后随着速度大小 - 方向权衡参数增加开始减小. 这表明, 在信息处理时滞系统中, 系统对速度大小 - 方向权衡的依赖并非固定不变, 而是随着信息处理时滞的变化而发生相应的动态调整. 且与普遍认知不同, 系统存在一个最优的速度大小 - 方向权衡参数 β^c 使方向切换最有序. 分析临界点发现最优权衡参数 $\beta^c \in (0, 1)$, 即虽然速度大小会影响群体的一致性, 但速度方向仍为群体保持稳态的主要影响因素.

尽管如此, $P_{\text{st}}^{(1)}(v)$ 只是群体平均速度分布的理论结果, 在现实生活中很难与真实的群体数据进行对比验证. 因此, 本文进一步计算模型 (3.5) 中的 MST 从而证明 τ 和 β 等多种因素对群体运动方向切换行为的影响, 其中 MST 的定义为 $T(v) = T(-1 \rightarrow 1) = T(+1 \rightarrow -1)$, 即对于小时滞, 个体从一个稳态到另一个稳态的 MST. 接下来引入非时滞系统刻画时滞系统的 MST.

定理 3.2 对于时滞系统 (3.6), 存在相应的非时滞系统

$$dv = -\xi'(v)dt + \sqrt{2\epsilon_\tau}dW, \quad (3.13)$$

其中 $\xi(v) = v^2/2 - |v|$, $\epsilon_\tau = \sqrt{\eta^2/2(b(a\tau + 1))N}$, 使得时滞系统 (3.6) 与非时滞系统 (3.13) 从一个稳态 $v = -1$ 到另一个稳态 $v = +1$ 的 MST 相同.

证明 根据引理 2.1, 非时滞系统的 SPD 为

$$P_{\text{st}} = \frac{1}{Z} \exp(-\xi(v)/\epsilon_\tau). \quad (3.14)$$

忽略近似项, 由 (3.8) 和 (3.14) 易得, 时滞系统 (3.6) 与非时滞系统 (3.13) 都具有相同的平均速度 SPD, 所以它们的动力学都可近似地由 (3.13) 描述, 因此, 对于时滞系统 (3.6) 与非时滞系统 (3.13), 从一个稳态 $v = -1$ 到另一个稳态 $v = +1$ 的 MST 相同. $\square$

由定理 3.2 可知, 信息处理时滞 τ 也反映在非时滞系统 (3.13) 的扩散项 ϵ_τ 中, 从而能够分析信息处理时滞对群体运动方向切换行为的影响. 接下来, 计算非时滞系统 (3.13) 的 MST.

定理 3.3 对于非时滞系统 (3.13), 其 MST 可以近似的表示为

$$T = \exp(1/2\epsilon_\tau) \times \sqrt{2\pi\epsilon_\tau}. \quad (3.15)$$

证明 假设个体的初始状态为 $v \neq 0$ (即 $P_{\text{st}}(v \neq 0) = 1$), 其中边界条件为 $T(0) = 0$ 与 $\lim_{v \rightarrow -\infty} T'(v) = 0$. 在 $y = 0$ 附近对函数 $\xi(y)$ 进行一阶 Taylor 展开为 $\xi(y) \simeq y$, 在 $z = -1$ 附

近对函数 $\xi(z)$ 进行二阶 Taylor 展开得到 $\xi(z) \simeq ((z+1)^2 - 1)/2$. 于是, 根据引理 2.1, 在小扰动 (即 $\epsilon_\tau \rightarrow 0$) 时, 最小值 $v = -1$ 附近的个体从一个稳态切换到另一个稳态的 MST 可以近似为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\epsilon_\tau} \int_{-1}^0 \exp(\xi(y)/\epsilon_\tau) dy \int_{-\infty}^y \exp(-\xi(z)/\epsilon_\tau) dz \\ &\approx \frac{1}{\epsilon_\tau} \int_{-1}^0 \exp(\xi(y)/\epsilon_\tau) dy \int_{-\infty}^0 \exp(-\xi(z)/\epsilon_\tau) dz \\ &\approx \frac{1}{\epsilon_\tau} \int_{-1}^0 \exp(y/\epsilon_\tau) dy \int_{-\infty}^0 \exp(-((z+1)^2 - 1)/2\epsilon_\tau) dz \\ &\approx \frac{1}{\epsilon_\tau} \int_{-\infty}^0 \exp(y/\epsilon_\tau) dy \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-((z+1)^2 - 1)/2\epsilon_\tau) dz \\ &= \exp(1/2\epsilon_\tau) \times \sqrt{2\pi\epsilon_\tau}. \end{aligned}$$

证毕. □

运用定理 3.3, 最后得到模型 (3.5) 的 MST

$$T(N, \tau) = \sqrt{\frac{\pi\eta^2(1+\beta)^2}{N(1+\beta-\tau)}} \exp\left(\frac{N(1+\beta-\tau)}{\eta^2(1+\beta)^2}\right). \quad (3.16)$$

由 (3.16) 可知, 当 $\beta \rightarrow 0$ 时, MST 近似为 $T(N, \tau) \simeq \sqrt{\pi\eta^2/N(1-\tau)} \exp(N(1-\tau)/\eta^2)$, 其结论与文献 [41] 一致. 图 2(a) 表明 MST 为群体密度 N 的指数增长函数, 该结果说明, 随着群体密度的增加, 群体可以涌现更有序的方向切换行为. 数值模拟结果表明, 定理 3.3 能够较为准确表征高密度群体方向切换过程中的 MST, 从而有效验证了模型 (3.1) 的理论预测能力. 图 2(b) 绘制了不同延迟值下 MST 作为速度大小 - 方向权衡参数的曲线. 图中结果与前文通过分析一阶近似 SPD 得到的结论一致, 即速度大小 - 方向权衡对 MST 的影响在不同大小的信息处理时滞下呈现不同趋势. 在信息处理时滞系统中, 当 $0 < \tau \leq 0.5$ 时, MST 随 β 的增加而单调减小, 这意味着越高的速度大小权重使群体的方向切换变得越频繁; 而当 $0.5 < \tau < 1$ 时, MST 随 β 增加先变增大后减小, 呈现非单调性, 表明可以通过调整速度大小和方向之间的权衡, 使系统的方向切换最有序. 观察图 2(c) 可以发现, 虽然群体密度不同, 但速度大小 - 方向权衡参数在某个特定值时使群体的 MST 达到最大, 且临界点为 $\beta^c = 2\tau - 1$, 即速度大小 - 方向的权衡对方向切换趋势的影响与群体密度无关, 且随着群体密度的增加, 个体的无

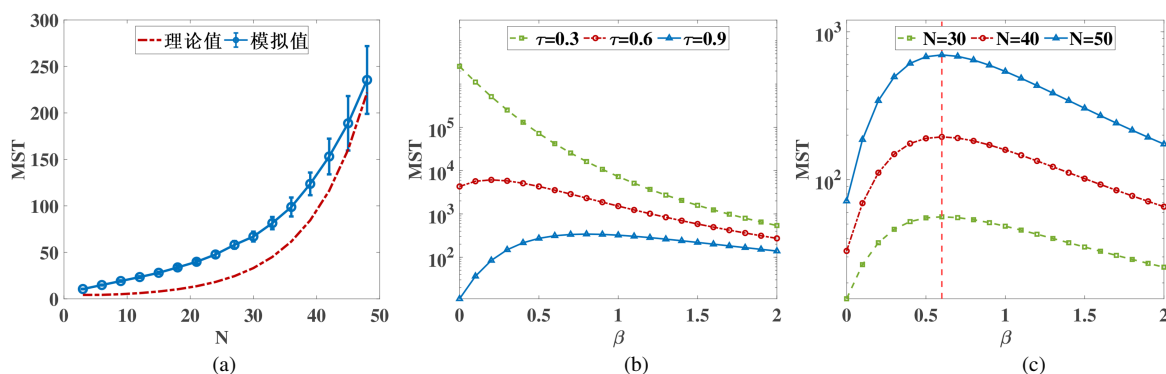


图 2 (网络版彩图) 模型 (3.5) 中 MST 关于各因素的函数. (a) 群体密度, 其中 $\beta = 1$, $\eta = 2$, $\tau = 0.1$; (b) 速度大小 - 方向的权衡参数, 其中 $N = 50$, $\eta = 0.5$; (c) 速度大小 - 方向的权衡参数, 其中 $\tau = 1$, $\eta = 0.5$

序运动会转变为有序的群体运动. 上述结论都揭示了信息处理时滞的大小在决定速度大小 - 方向的权衡对方向切换的影响中起着至关重要的作用.

3.2 具有社会相互作用的群集系统的方向切换

然而, 不仅存在通过物理距离影响相互作用的群体, 有些群体还倾向于将它们与具有更高社会地位的个体联系在一起, 如鱼群的游动及鸽群的飞行 [22, 35, 38]. 基于此, 对于具有社会相互作用的信息处理时滞系统, 个体的速度应满足 [48]

$$dV_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} [G(V_j(t-\tau)) - V_i(t-\tau)]dt + \frac{\eta}{\sqrt{N}} dW_i(t), \quad (3.17)$$

其中矩阵 A 表示个体间的社会相互作用矩阵. 如果存在从个体 i 到个体 j 的社交联系, 则 $A_{ij} = 1$, 否则 $A_{ij} = 0$. 为了量化社会相互作用对方向切换的影响, 引入降维算子 $\mathcal{L}$, 其定义为

$$\mathcal{L}(V) = \mathbf{1}^T A V / \mathbf{1}^T A \mathbf{1} = \langle s_j^{\text{out}} V_j \rangle / \langle s_j^{\text{out}} \rangle, \quad (3.18)$$

其中节点 i 的入度表示为 $s_i^{\text{in}} = \sum_{j=1}^N A_{ij}$, 节点 j 的出度表示为 $s_j^{\text{out}} = \sum_{i=1}^N A_{ij}$, 且 $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$, $V = (V_1, V_2, \dots, V_N)^T$. 假设社会网络的平均度较小, 个体的邻居速度等于群体的有效平均速度, 即 $\sum_{j=1}^N A_{ij} G(V_j(t)) \approx \sum_{j=1}^N A_{ij} G(\mathcal{L}(V)(t))$. 因此, (3.17) 简写为

$$dV = s^{\text{in}} \circ [G(\mathcal{L}(V)(t-\tau)) \mathbf{1} - V(t-\tau)]dt + \frac{\eta}{\sqrt{N}} dW(t), \quad (3.19)$$

其中 $s^{\text{in}} = (s_1^{\text{in}}, s_2^{\text{in}}, \dots, s_n^{\text{in}})^T$, $W = (W_1, W_2, \dots, W_N)^T$, $\circ$ 表示 Hadamard 积. 假设 $\mathcal{L}(a \circ b) \approx \mathcal{L}(a)\mathcal{L}(b)$, 将等式两边同时作用线性算子 $\mathcal{L}$, 可得

$$d\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(s^{\text{in}}) \circ \mathcal{L}[G(\mathcal{L}(V)(t-\tau)) \mathbf{1} - V(t-\tau)]dt + \frac{\eta}{\sqrt{N}} d\mathcal{L}(W(t)), \quad (3.20)$$

令 $V_{\text{eff}} = \mathcal{L}(V)$ 表示群体的有效平均速度, $\alpha_{\text{eff}} = \mathcal{L}(s^{\text{in}})$ 表示社会相互作用的综合效应. 假设群体的社会网络为 Erdős-Rényi 随机网络, 则 $\alpha_{\text{eff}} = \langle s \rangle + 1$, 其中 $\langle s \rangle$ 表示网络的平均度. α_{eff} 越大, 表示群体的社会相互作用越强. 将它们代入上式计算得

$$dV_{\text{eff}} = \frac{\alpha_{\text{eff}}}{1+\beta} [\text{sign}(V_{\text{eff}}(t-\tau)) - V_{\text{eff}}(t-\tau)]dt + \frac{\eta}{\sqrt{N}} dW. \quad (3.21)$$

运用定理 3.1 可得, 当 $a = -\alpha_{\text{eff}}/(1+\beta)$, $b = \alpha_{\text{eff}}/(1+\beta)$ 时, 模型 (3.21) 的有效平均速度在 $v_{\text{eff}} = \pm 1$ 时一阶近似 SPD 最大, 表示为

$$P_{\text{st}}^{(1)}(v_{\text{eff}} = \pm 1) = \frac{k_\tau}{2\sqrt{\pi}}, \quad (3.22)$$

其中

$$k_\tau = \sqrt{\frac{N\alpha_{\text{eff}}(1+\beta-\alpha_{\text{eff}}\tau)}{\eta^2(1+\beta)^2}}. \quad (3.23)$$

接下来, 对具有社会相互作用的模型 (3.17) 进行数值模拟, 并进一步与 (3.22) 对比. 速度大小 - 方向权衡参数对方向切换的影响如图 3(a) 所示, 从中观察到与模型 (3.1) 一致的现象, 即速度大小 -

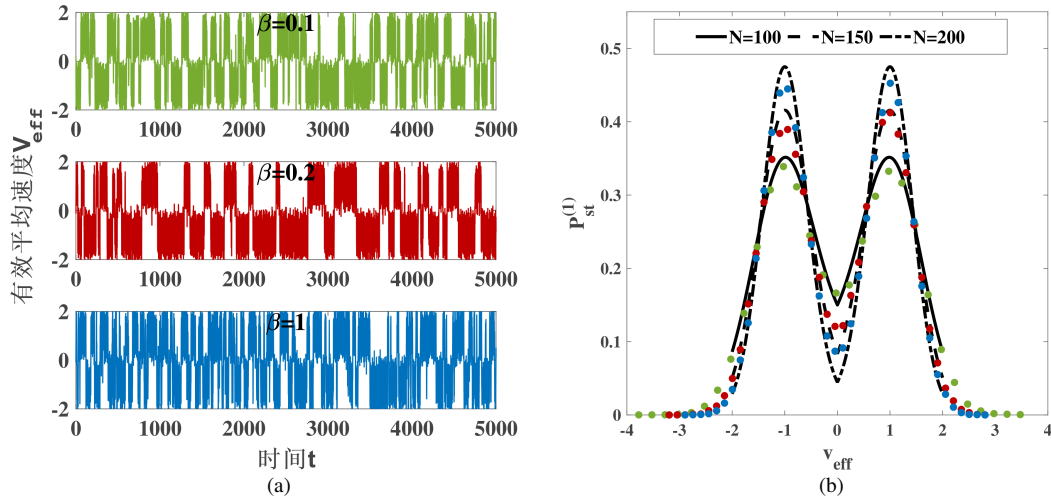


图 3 (网络版彩图) (a) 模型 (3.17) 中速度大小 - 方向的权衡参数对有效平均速度的影响, 其中 $N = 100$, $\tau = 0.12$, $\eta = 8$, $\langle s \rangle = 4$; (b) 模型 (3.17) 中有效平均速度的一阶近似 SPD, 其中 $\tau = 0.15$, $\beta = 1$, $\eta = 10$, $\langle s \rangle = 3$

方向的权衡在方向切换中表现出非单调特性. 图 3(b) 则通过对比不同群体密度下的 $P_{\text{st}}^{(1)}(v_{\text{eff}})$ 的理论值和模拟值, 从另一种角度验证了模型 (3.17) 的有效性, 其中实心点为模拟值, 黑色线条为理论值. 从中可以看出, 模拟值与理论值可以很好地对应, 且群体密度越大, 一阶近似 SPD 的最大值越大, 即方向切换越有序.

由 k_τ 表达式可得, 对于社会相互作用, 当 α_{eff} 增大时, $P_{\text{st}}^{(1)}(v_{\text{eff}} = \pm 1)$ 先增至峰值, 然后随着 α_{eff} 的进一步增加而减小, 这个临界点位于 $\alpha_{\text{eff}}^c = (1 + \beta)/2\tau$. 这表明, 在信息处理时滞系统中, 社会相互作用也会对系统产生复杂影响. 此外, 当 $0 < \alpha_{\text{eff}}\tau \leq 0.5$ 时, 随着 β 的增加, 群体的 $P_{\text{st}}^{(1)}(v_{\text{eff}} = \pm 1)$ 减小; 然而, 当 $0.5 < \alpha_{\text{eff}}\tau$ 时, 在临界点 $\beta = 2\alpha_{\text{eff}}\tau - 1$, $P_{\text{st}}^{(1)}(v_{\text{eff}} = \pm 1)$ 达到最大值. 此时, 社会相互作用和信息处理时滞共同决定速度大小 - 方向权衡对有效平均速度分布的影响.

更进一步地, 由定理 3.2 和 3.3 知, 在最小值 $v_{\text{eff}} = -1$ 的附近, 与速度大小 - 方向的权衡参数 β 、社会相互作用 α_{eff} 等因素相关的 MST 为

$$T(N, \tau) = \sqrt{\frac{\pi\eta^2(1+\beta)^2}{\alpha_{\text{eff}}(1+\beta-\alpha_{\text{eff}}\tau)N}} \exp\left(\frac{\alpha_{\text{eff}}(1+\beta-\alpha_{\text{eff}}\tau)N}{\eta^2(1+\beta)^2}\right). \quad (3.24)$$

当 (3.24) 中 $\beta \rightarrow 0$ 时, 其结果类似于文献 [48] 中具有社会相互作用的离散 Vicsek 模型的 MST. 图 4 刻画了群体的 MST 对权衡参数 β 及社会相互作用 α_{eff} 等的依赖关系. 通过图 4(a) 可以发现, 由于社会相互作用的存在, MST 呈现先增加后减少的趋势, 当 $\alpha_{\text{eff}}^c = (1 + \beta)/2\tau$ 时 MST 最大, 这意味着社会相互作用强度在一定程度上可以先抑制再促进方向的切换. 除此之外, 观察图 4(b) 可以发现, 在 $0 < \alpha_{\text{eff}}\tau \leq 0.5$ 时, MST 为随速度大小 - 方向权衡参数增加而减小的函数, 从而使群体的转向率变高; 在 $0.5 < \alpha_{\text{eff}}\tau$ 时, MST 随速度大小 - 方向权衡参数增加先变大后变小, 且临界点是 $\beta^c = 2\alpha_{\text{eff}}\tau - 1$, 这也再次论证了某些情况下相互作用中速度大小权重对群体运动方向切换行为的影响呈非单调性. 最后, 同时分析图 4(b) 和 4(c) 可得, MST 随速度大小 - 方向权衡参数的变化趋势由社会相互作用 α_{eff} 和信息处理时滞 τ 共同决定, 而与群体密度 N 无关.

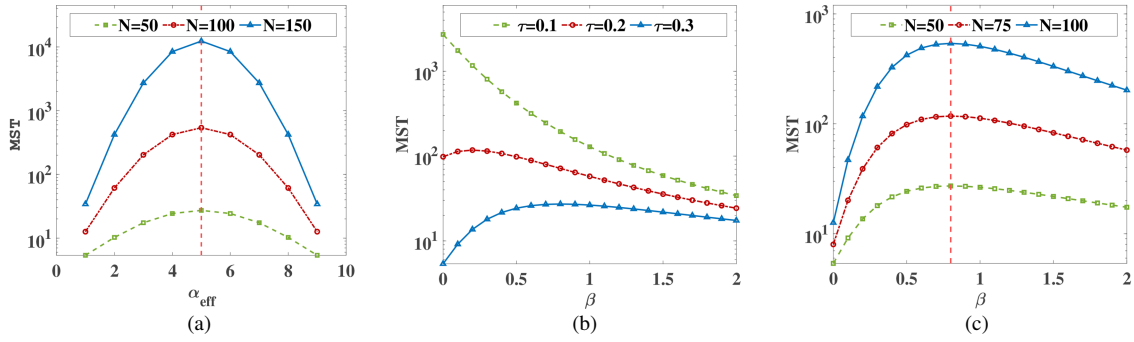


图 4 (网络版彩图) 模型 (3.17) 中 MST 关于各因素的函数. (a) 社会相互作用, 其中 $\beta = 0.5$, $\tau = 0.15$, $\eta = 5$; (b) 速度大小 - 方向权衡参数, 其中 $\alpha_{\text{eff}} = 3$, $N = 100$, $\eta = 5$; (c) 速度大小 - 方向权衡参数, 其中 $\alpha_{\text{eff}} = 6$, $\tau = 0.15$, $\eta = 5$

4 信息传递时滞诱导的方向切换

除模型 (3.1) 和 (3.17) 中引入的信息处理时滞外, 信息传递时滞对系统的影响也不容忽视, 它源于个体之间信息传递速度有限这一实际约束. 因此, 本文研究具有社会相互作用的信息传递时滞模型

$$dV_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} [G(V_j(t - \omega)) - V_i(t)] dt + \frac{\eta}{\sqrt{N}} dW_i(t), \quad (4.1)$$

其中 $\omega > 0$ 表示信息传递时滞, 代表每个个体接收其邻居速度信息所需要的时间. 在不考虑调整时间的情况下, 第 i 个个体根据其自身在 t 时刻的速度和其邻居在 $t - \omega$ 时刻的速度来更新其速度. 代入速度权衡函数 (3.2) 及降维算子 (3.18), 可得

$$dV_{\text{eff}} = \alpha_{\text{eff}} \left[\frac{\beta}{1 + \beta} V_{\text{eff}}(t - \omega) + \frac{1}{1 + \beta} \text{sign}(V_{\text{eff}}(t - \omega)) - V_{\text{eff}}(t) \right] dt + \frac{\eta}{\sqrt{N}} dW. \quad (4.2)$$

根据定理 3.1, 当 $a = \alpha_{\text{eff}}\beta/(1 + \beta)$, $b = \alpha_{\text{eff}}/(1 + \beta)$ 时, 同样可以计算其有效平均速度在最大值 $v_{\text{eff}} = \pm 1$ 附近的一阶近似 SPD

$$P_{\text{st}}^{(1)}(v_{\text{eff}} = \pm 1) = \frac{k_{\omega}}{2\sqrt{\pi}}, \quad (4.3)$$

其中

$$k_{\omega} = \sqrt{N\alpha_{\text{eff}} \left(\frac{1 + \alpha_{\text{eff}}\omega + \beta}{(1 + \beta)^2 \eta^2} \right)}. \quad (4.4)$$

分析 k_{ω} 的理论结果可知, β 越小, α_{eff} 越大, 则 $P_{\text{st}}^{(1)}(v_{\text{eff}} = \pm 1)$ 越大, 呈现单调性, 即群体的一致性越高, 越不容易发生方向切换. 根据定理 3.2 和 3.3, 通过引入非时滞系统, 计算具有社会相互作用的信息传递时滞模型的 MST, 得到

$$T(N, \omega) = \sqrt{\frac{\pi\eta^2(1 + \beta)^2}{N\alpha_{\text{eff}}(1 + \alpha_{\text{eff}}\omega + \beta)}} \exp \left(\frac{N\alpha_{\text{eff}}(1 + \alpha_{\text{eff}}\omega + \beta)}{\eta^2(1 + \beta)^2} \right). \quad (4.5)$$

最后, 本文模拟了具有信息传递时滞系统的有效平均速度的一阶近似 SPD 以及不同因素下的 MST. 图 5(a) 展示了速度大小 - 方向权衡参数 β 取不同值时有效平均速度 V_{eff} 的一阶近似 SPD,

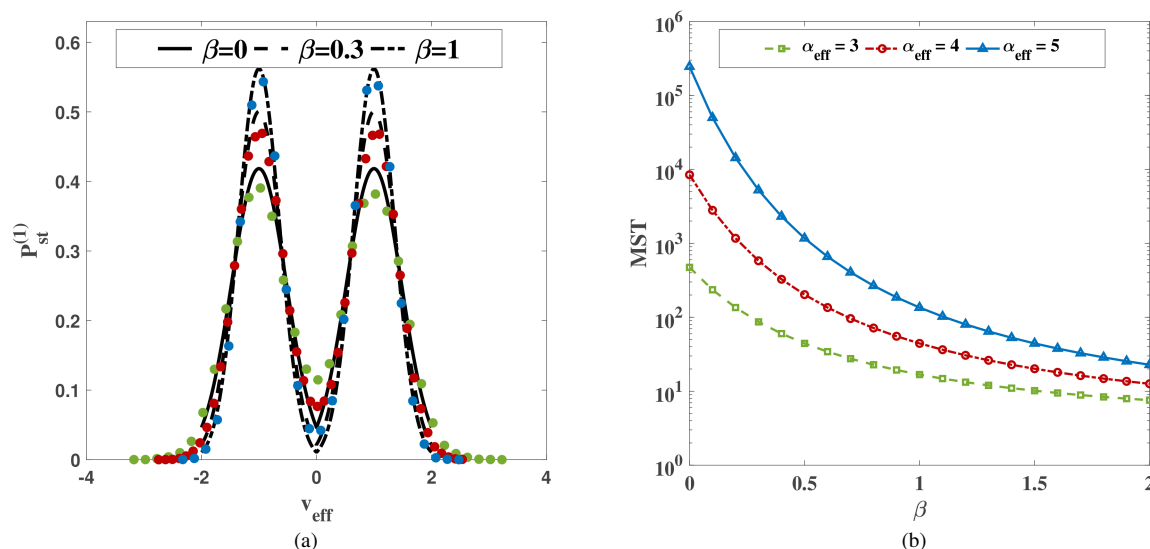


图 5 (网络版彩图) (a) 模型 (4.1) 中有效平均速度的一阶近似 SPD, 其中 $N = 100$, $\omega = 0.05$, $\langle s \rangle = 3$, $\eta = 10$; (b) 模型 (4.1) 中 MST 作为速度大小 - 方向权衡参数的函数, 其中 $N = 150$, $w = 0.15$, $\eta = 10$

其中数值结果与理论分析相吻合, 并且可以发现无论信息传递时滞大小, 系统的一阶近似 SPD 都在 $v_{eff} = \pm 1$ 时最大, 且概率分布都随速度大小 - 方向权衡参数增加而减小, 表明在信息传递时滞系统中, 随着速度大小 - 方向权衡参数增大, 群体的方向会发生快速的切换. 图 5(b) 为对于不同社会相互作用条件下群体的 MST 作为 β 的函数. 可以发现, 与信息处理时滞系统不同, 信息传递时滞系统的 MST 分别是速度大小 - 方向权衡参数和社会相互作用的单调递减和递增函数, 这表明, 在信息传递时滞系统中, 社会相互作用通常会促进群体运动的一致性. 据此, 同时对比信息处理和传递时滞系统, 可以发现时滞相互作用的类型也是决定各因素对调节有序方向切换行为的关键因素.

5 结论

本文研究了群集的方向切换行为, 综合分析了速度大小 - 方向权衡以及社会相互作用对不同时滞系统中运动方向切换行为的影响. 首先, 在 Vicsek 模型中引入速度大小 - 方向权衡, 并在假设相互作用半径足够大的情况下, 运用 Fokker-Planck 理论计算信息处理时滞以及速度大小 - 方向权衡等因素对群体平均速度的一阶近似 SPD 和 MST 的影响, 从而量化了各因素对群体运动方向切换行为的影响. 本文提出的时滞系统的 MST 计算框架, 能够有效分析信息处理及传递时滞以及社会相互作用对群体运动方向切换行为的影响, 理论分析与数值模拟结果吻合较好.

本文的研究表明, 方向切换不仅依赖于群体密度、噪声强度、时滞相互作用, 还依赖于运动个体速度大小 - 方向权衡以及个体间社会相互作用. 除此之外, 本文还揭示了时滞相互作用的类型和大小对于决定各因素如何影响群体运动的方向切换发挥重要作用. 值得一提的是, 我们还计算出在特定时滞条件下, 系统存在一个使方向切换频率最低的速度大小 - 方向权衡值以及社会相互作用强度值. 具体而言, 在信息处理时滞和社会相互作用都较小的情况下, 速度大小 - 方向权衡参数越大, MST 越小, 即速度大小权重增大会促进方向切换的发生; 当这两种相互作用较大时, 权衡参数的增大对方向切换的发生呈现先抑制后促进的复杂效应, 且在临界点时系统最有序. 不同于信息处理时滞系统, 无论信息

传递时滞大小如何, 增大速度大小权重都会加快方向切换的频率. 除此之外, 本文发现信息处理时滞系统中 MST 随社会相互作用的增加先增大后减小, 在临界点处, 群体的转向率最低; 而社会相互作用增加反而导致信息传递时滞系统的 MST 延长.

本研究的发现不仅加深了我们对群集行为的理解, 还为多智能体系统的应用提供了重要的理论指导. 在现实中, 生物群体之间的相互作用并非固定不变, 因此将本文中使用的的方法进一步扩展到具有时变拓扑 [21, 24, 30, 51, 53] 的情况将是未来需要研究的一些课题.

致谢 作者谨向审稿人提出的宝贵与建设性意见致谢, 这些意见深入完善了本文. 同时, 对所有在研究过程中给予支持与帮助的同仁深表谢意.

参考文献

- 1 Bai Y J, Gan T, Jiao L, et al. Switching controller synthesis for time-delayed hybrid systems (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2021, 51: 97–114 [白云军, 甘庭, 焦莉, 等. 时延混成系统的切换控制器合成. 中国科学: 数学, 2021, 51: 97–114]
- 2 Biancalani T, Dyson L, McKane A J. Noise-induced bistable states and their mean switching time in foraging colonies. *Phys Rev Lett*, 2014, 112: 038101
- 3 Blum N, Li A, O’Keeffe K, et al. Swarmalators with delayed interactions. *Phys Rev E*, 2024, 109: 014205
- 4 Brewer J M, Tsiotras P. Partial attitude synchronization for networks of underactuated spacecraft. *Automatica*, 2018, 97: 27–37
- 5 Buhl C, Sumpter D J T, Couzin I D, et al. From disorder to order in marching locusts. *Science*, 2006, 312: 1402–1406
- 6 Chen C, Liu S, Shi X Q, et al. Weak synchronization and large-scale collective oscillation in dense bacterial suspensions. *Nature*, 2017, 542: 210–214
- 7 Chen D X, Sun Y Z, Shao G B, et al. Coordinating directional switches in pigeon flocks: The role of nonlinear interactions. *R Soc Open Sci*, 2021, 8: 210649
- 8 Chen Z H, Zheng Y B. Persistent and responsive collective motion with adaptive time delay. *Sci Adv*, 2024, 10: eadk3914
- 9 Couzin I D, Krause J, Franks N R, et al. Effective leadership and decision-making in animal groups on the move. *Nature*, 2005, 433: 513–516
- 10 Cucker F, Smale S. Emergent behavior in flocks. *IEEE Trans Automat Control*, 2007, 52: 852–862
- 11 Czirók A, Barabási A L, Vicsek T. Collective motion of self-propelled particles: Kinetic phase transition in one dimension. *Phys Rev Lett*, 1999, 82: 209–212
- 12 Deblais A, Barois T, Guerin T, et al. Boundaries control collective dynamics of inertial self-propelled robots. *Phys Rev Lett*, 2018, 120: 188002
- 13 Dong J G, Ha S Y, Jung J, et al. On the stochastic flocking of the Cucker-Smale flock with randomly switching topologies. *SIAM J Control Optim*, 2020, 58: 2332–2353
- 14 Erban R, Haškovec J, Sun Y. A Cucker-Smale model with noise and delay. *SIAM J Appl Math*, 2016, 76: 1535–1557
- 15 Escudero C, Yates C A, Buhl C, et al. Ergodic directional switching in mobile insect groups. *Phys Rev E*, 2010, 82: 011926
- 16 Feinerman O, Pinkoviezky I, Gelblum A, et al. The physics of cooperative transport in groups of ants. *Nature Phys*, 2018, 14: 683–693
- 17 Filella A, Nadal F, Sire C, et al. Model of collective fish behavior with hydrodynamic interactions. *Phys Rev Lett*, 2018, 120: 198101
- 18 Frank T D. Delay Fokker-Planck equations, Novikov’s theorem, and Boltzmann distributions as small delay approximations. *Phys Rev E*, 2005, 72: 011112
- 19 Gao J X, Barzel B, Barabási A L. Universal resilience patterns in complex networks. *Nature*, 2016, 530: 307–312
- 20 Gardiner C W. Stochastic Methods, 4th ed. Heidelberg: Springer-Verlag, 2009
- 21 Guo Y, Lin W, Chen G R. Stability of switched systems on randomly switching durations with random interaction matrices. *IEEE Trans Automat Control*, 2017, 63: 21–36
- 22 Herbert-Read J E, Perna A, Mann R P, et al. Inferring the rules of interaction of shoaling fish. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2011, 108: 18726–18731
- 23 Holubec V, Geiss D, Loos S A M, et al. Finite-size scaling at the edge of disorder in a time-delay Vicsek model. *Phys Rev Res*, 2021, 127: 258001–258006

- 24 Hou J W, Ma H F, He D K, et al. Harvesting random embedding for high-frequency change-point detection in temporal complex systems. *Natl Sci Rev*, 2022, 9: nwab228
- 25 Houchmandzadeh B, Vallade M. Exact results for a noise-induced bistable system. *Phys Rev E*, 2015, 91: 022115
- 26 Ioannou C C, Guttal V, Couzin I D. Predatory fish select for coordinated collective motion in virtual prey. *Science*, 2012, 337: 1212–1215
- 27 Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Trans Automat Control*, 2003, 48: 988–1001
- 28 Jhawar J, Morris R G, Amith-Kumar U R, et al. Noise-induced schooling of fish. *Nature Phys*, 2020, 16: 488–493
- 29 Kudtarkar S K, Dhadwal R. Noise induced bistability in a fluctuating environment. *Phys A*, 2023, 615: 128582
- 30 Leng S Y, Ma H F, Kurths J, et al. Partial cross mapping eliminates indirect causal influences. *Nat Commun*, 2020, 11: 2632
- 31 Li S G, Batra R, Brown D, et al. Particle robotics based on statistical mechanics of loosely coupled components. *Nature*, 2019, 567: 361–365
- 32 Liu M Y, Lei X K, Yang P P, et al. Progress of theoretical modelling and empirical studies on collective motion (in Chinese). *Chin Sci Bull*, 2014, 59: 2464–2483 [刘明雍, 雷小康, 杨盼盼, 等. 群集运动的理论建模与实证分析. 科学通报, 2014, 59: 2464–2483]
- 33 Liu S J, Xiao R, Zhao D H, et al. Coordinating directional switches of multiagent systems with delayed and nonlinear interactions. *Phys Rev Res*, 2023, 5: 043304
- 34 Mijalkov M, McDaniel A, Wehr J, et al. Engineering sensorial delay to control phototaxis and emergent collective behaviors. *Phys Rev X*, 2016, 6: 011008–011023
- 35 Nagy M, Vásárhelyi G, Pettit B, et al. Context-dependent hierarchies in pigeons. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2013, 110: 13049–13054
- 36 Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Trans Automat Control*, 2004, 49: 1520–1533
- 37 Piowarczyk R, Selin M, Ihle T, et al. Influence of sensorial delay on clustering and swarming. *Phys Rev E*, 2019, 100: 012607
- 38 Rosenthal S B, Twomey C R, Hartnett A T, et al. Revealing the hidden networks of interaction in mobile animal groups allows prediction of complex behavioral contagion. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2015, 112: 4690–4695
- 39 Rüemelin W. Numerical treatment of stochastic differential equations. *SIAM J Numer Anal*, 1982, 19: 604–613
- 40 Shultz S, Dunbar R I M. Socioecological complexity in primate groups and its cognitive correlates. *Phil Trans R Soc B*, 2022, 377: 20210296
- 41 Sun Y Z, Li W, Li L, et al. Delay-induced directional switches and mean switching time in swarming systems. *Phys Rev Res*, 2022, 4: 033054
- 42 Sun Y Z, Lin W, Erban R. Time delay can facilitate coherence in self-driven interacting-particle systems. *Phys Rev E*, 2014, 90: 062708
- 43 Vicsek T, Czirók A, Ben-Jacob E, et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Phys Rev Lett*, 1995, 75: 1226–1229
- 44 Vicsek T, Zafeiris A. Collective motion. *Phys Rep*, 2012, 517: 71–140
- 45 Wang X Y, Xue X P. The collective behavior of the Cucker-Smale model on the infinite graphs (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2023, 53: 1799–1826 [王新宇, 薛小平. 无限图上 Cucker-Smale 模型的集群行为. 中国科学: 数学, 2023, 53: 1799–1826]
- 46 Wu C, Dong J G. Effects of time delay on Cucker-Smale flocking under hierarchical leadership. *IEEE Trans Automat Control*, 2024, 69: 1812–1817
- 47 Xiao R, Li W, Liu S J, et al. Nonlinear interaction-induced ordered directional switches in pigeon flocks (in Chinese). *Sci Sin Inform*, 2025, 55: 412–425 [肖瑞, 李望, 刘世杰, 等. 非线性相互作用诱导的鸽群运动方向的有序切换. 中国科学: 信息科学, 2025, 55: 412–425]
- 48 Xiao R, Li W, Zhao D H, et al. Directional switches in network-organized swarming systems with delay. *Chaos*, 2023, 33: 043143
- 49 Xu B, Zhang D L. Tight formation flight control of UAVs based on pigeon inspired algorithm optimization by quantum behavior (in Chinese). *Acta Aeronaut Astronaut Sin*, 2020, 41: 323722 [徐博, 张大龙. 基于量子行为鸽群优化的无人机紧密编队控制. 航空学报, 2020, 41: 323722]
- 50 Yates C A, Erban R, Escudero C, et al. Inherent noise can facilitate coherence in collective swarm motion. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2009, 106: 5464–5469
- 51 Ying X, Leng S Y, Ma H F, et al. Continuity scaling: A rigorous framework for detecting and quantifying causality accurately. *Research*, 2022, 2022: 9870149

- 52 Zhang K, Chermprayong P, Xiao F, et al. Aerial additive manufacturing with multiple autonomous robots. [Nature](#), 2022, 609: 709–717
- 53 Zhou S J, Guo Y, Liu M X, et al. Random temporal connections promote network synchronization. [Phys Rev E](#), 2019, 100: 032302

Directional switches in time-delay swarming systems induced by speed-direction trade-off

Jiayi Wang, Wang Li, Xiangxin Yin, Donghua Zhao & Yongzheng Sun

Abstract Collective motion in biological systems often exhibits emergent orderly directional switching behavior. The classical Vicsek model can partially simulate this behavior but fails to fully account for the complex effects arising from the interplay of individual trade-off between speed and movement direction, social interactions, and time delays. In this paper, we propose a mathematical framework to compute the average directional switching time in a time-delay system that incorporates speed-direction trade-offs. Using this framework, we analyze the effects of time delay and social interactions on collective motion. Theoretical and numerical results indicate the existence of an optimal speed-direction trade-off and social interaction strength that maximize the orderliness of directional switching in the system.

Keywords directional switches, speed-direction trade-off, time delay, Vicsek model, Fokker-Planck equation

MSC(2020) 60G10, 92D25, 93B70, 93C43

doi: 10.1360/SSM-2024-0194