中国科学: 数学 2026 年 第 56 卷 第 ? 期: 1 ∼ 30
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark click for updates

$(\sum \ell_p)_{\ell_q}$ 单位球面间的相位等距延拓

孙龙发[1*], 张逸芃[2], 孙英华[2]

1. 华北电力大学数理学院和河北省物理学与能源技术重点实验室, 保定 071003;
2. 厦门大学数学科学学院, 厦门 361005
E-mail: sun.longfa@163.com, 13932117503@163.com, sunak87@163.com

收稿日期: 2026-03-04; 接受日期: 2026-05-18; 网络出版日期: 2026-06-08; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12101234) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 2025MS178) 资助项目

摘要 本文研究 $(\sum \ell_p)_{\ell_q}$ 单位球面间的满相位等距延拓问题. 令 $S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}} = \{x \in (\sum \ell_p)_{\ell_q} : \|x\| = 1\}$ 为 $(\sum \ell_p)_{\ell_q}$ 的单位球面, $f : S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}} \to S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$ 为相位等距, 即

$$\{\|f(x) + f(y)\|, \|f(x) - f(y)\|\} = \{\|x + y\|, \|x - y\|\}, \quad \forall\, x, y \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}.$$

本文证明, 当 $1 < p < q = \infty$, $1 = q < p < \infty$, $1 < q < p \leqslant 2$ 或 $2 \leqslant p < q < \infty$ 时, 每个满射 f 都可以延拓为 $(\sum \ell_p)_{\ell_q}$ 到其自身的满相位等距 $\tilde{f}$, 且 $\tilde{f}$ 相位等价于一个线性满等距.

关键词 相位等距 线性等距 Wigner 定理 Tingley 问题

MSC (2020) 主题分类 46B04, 46B20

1 引言

设 X 和 Y 是实 Banach 空间, S_X 和 S_Y 为其单位球面. 称映射 $f : X \to Y$ 为等距 (保度量映射), 若其满足

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|, \quad \forall\, x, y \in X. \tag{1.1}$$

如果 f 将 X 中的原点映成 Y 中的原点, 即 $f(0) = 0$, 则称 f 是标准的.

经典的 Mazur-Ulam 定理 [10] 断言: 每个标准的满等距映射 $f : X \to Y$ 都是线性的. 该定理揭示了一个深刻的事实: Banach 空间之间的映射保持度量不变的前提是保持线性结构不变. 该结论在不同方向上都获得了极大的推广, 其中之一为球面上的等距延拓问题, 也称之为 Tingley 问题 [17]:

问题 1.1 对任意的两个 Banach 空间 X 和 Y, 是否每个满等距 $f : S_X \to S_Y$ 都可以延拓为全空间上的线性满等距?

英文引用格式: Sun L F, Zhang Y P, Sun Y H. On extension of phase-isometries between the unit spheres of $(\sum \ell_p)_{\ell_q}$ (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 1–30, doi: 10.1360/SSM-2026-0065

© 2026《中国科学》杂志社

Tingley 问题的意义在于, 一旦该问题有肯定的回答, 就意味着单位球面上的度量结构能够决定整个空间的线性结构. 经过众多数学家的努力, 在大量的 Banach 空间上, 人们对 Tingley 问题都得到了肯定的回答 (参见文献 [4,11]).

作为等距的一种推广, Banach 空间上的相位等距也引起了人们的关注. 设 X 和 Y 是实 Banach 空间, 称映射 $f: X \to Y$ 为相位等距, 若其满足

$$\{\|f(x)+f(y)\|, \|f(x)-f(y)\|\} = \{\|x+y\|, \|x-y\|\}, \quad \forall\, x, y \in X. \tag{1.2}$$

设 $f, g: X \to Y$ 为两个映射, 若存在一个相位函数 $\varepsilon: X \to \{-1, 1\}$ 使得 $g = \varepsilon \cdot f$, 则称 f 和 g 是相位等价的. 显然, 相位等价于线性等距的 f 为相位等距, 且每个相位等距都是标准的. 然而, 相位等距与等距并不相容. 例如, 定义 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, 则 f 为相位等距但不是等距; 定义 $f: \mathbb{R} \to \ell_\infty^2$, $f(x) = (x, |x|)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, 则 f 为标准的等距但不是相位等距.

尽管二者互不相容, 但从几何角度来看二者又有着紧密的联系. 给定 X 中两个线性无关的向量 x 和 y, 其所生成的平行四边形的两条对角线分别为 $x-y$ 和 $x+y$. 向量 x 和 y 在映射 f 下的像分别为 $f(x)$ 和 $f(y)$ (不妨假定 $f(x)$ 与 $f(y)$ 也是线性无关的), 由其生成的平行四边形的两条对角线分别为 $f(x)-f(y)$ 和 $f(x)+f(y)$. 由 (1.1) 知等距映射 f 保持了平行四边形一条特定的对角线 $x-y$ 与像空间中平行四边形所对应的对角线 $f(x)-f(y)$ 长度不变, 由 (1.2) 知相位等距映射 f 则保持了原空间中两条对角线 $x-y$, $x+y$ 与像空间中两条对角线 $f(x)-f(y)$, $f(x)+f(y)$ 长度不变, 但对角线之间的对应关系并没有限制. 因此, 有如下一个自然的问题:

问题 1.2 是否对每个相位等距 $f: X \to Y$, 都存在一个相位函数 $\varepsilon: X \to \{-1, 1\}$ 使得 $\varepsilon \cdot f: X \to Y$ 为等距?

相位等距的研究来源于经典的 Wigner 定理, 由于描述了量子态的对称性, 该定理在量子力学中起着重要作用 (参见文献 [19,20]). Wigner 定理有多种表现形式, 其中之一刻画了复 Hilbert 空间之间保内积模长不变的映射: 设 H 和 K 是复 Hilbert 空间, 若映射 $f: H \to K$ 满足

$$|\langle f(x), f(y)\rangle| = |\langle x, y\rangle|, \quad \forall\, x, y \in H, \tag{1.3}$$

则存在一个函数 $\varepsilon: H \to \mathbb{C}$, 满足 $|\varepsilon(x)| = 1$, 使得 $\varepsilon \cdot f$ 为一个线性等距或共轭线性等距. 注意到当 H 和 K 为实 Hilbert 空间时, 若 f 满足 (1.3), 自然满足 (1.2). Maksa 和 Páles [9] 利用内积空间的极化恒等式证明了当 f 满足 (1.2) 时, (1.3) 也成立. 进而由 Wigner 定理知, 两个实 Hilbert 空间之间的相位等距一定相位等价于一个线性等距. 同时他们提出, 实 Banach 空间之间的相位等距 $f: X \to Y$ 何时会相位等价于一个线性等距? 受 Mazur-Ulam 定理的启发, 人们从具体空间之间满的相位等距入手进行研究, 并得到了一系列正面结果. Huang 和 Tan [6] 及 Li 和 Tan [8] 证明了原子 L_p- 空间和 Tsirelson 空间等空间上满的相位等距相位等价于一个线性满等距. 对一般的 Banach 空间, Wang 和 Bugajewski [18] 证明了当 X 为二维空间或者是严格凸空间时, 从 X 到任意 Banach 空间 Y 的每个满相位等距都相位等价于线性满等距. Tan 和 Huang [14] 对光滑空间 X 得到了同样的结论. 最终, Ilišević 等 [7] 将上述结果推广到了任意的 Banach 空间, 给出了一个 Mazur-Ulam 型定理:

定理 1.1 设 X 和 Y 为两个 Banach 空间, $f: X \to Y$ 为满的相位等距, 则 f 相位等价于一个线性满等距.

该结果在满相位等距情形下, 对问题 1.2 给出了肯定的回答. 受 Tingley 问题启发并结合上述讨论, 有如下自然的问题:

问题 1.3 对任意的两个 Banach 空间 X 和 Y, 是否每个满的相位等距 $f: S_X \to S_Y$ 都可以延拓为全空间上的满相位等距 $\tilde{f}$, 且 $\tilde{f}$ 相位等价于一个线性满等距?

文献 [5,13,15,16] 在原子 L_p- 空间 $(0<p<\infty)$, $\mathcal{L}^\infty(\Gamma)$- 空间、连续函数空间及 CL- 空间上对上述问题给出了正面的回答.

本文研究 $(\sum \ell_p)_{\ell_q}$ 空间单位球面上的满相位等距的延拓问题. 我们证明当 $1<p<q=\infty$, $1=q<p<\infty$, $1<q<p\leqslant 2$ 或 $2\leqslant p<q<\infty$ 时, 每个满的相位等距 $f: S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}} \to S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$ 都可延拓为全空间上的满相位等距 $\tilde{f}$, 且 $\tilde{f}$ 相位等价于一个线性满等距.

为阅读方便起见, 首先给出一些符号说明. 设 X 为 Banach 空间, S_X 为其单位球面. 定义序列空间 ℓ_p $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 的 ℓ_q- 直和为

$$\left(\sum \ell_p\right)_{\ell_q} = \begin{cases} \left\{x=(x_n)_{n=1}^\infty : x_n\in\ell_p, \sum\limits_n \|x_n\|^q<\infty\right\}, & 1\leqslant q<\infty, \\ \left\{x=(x_n)_{n=1}^\infty : x_n\in\ell_p, \sup\limits_n \|x_n\|<\infty\right\}, & q=\infty, \end{cases}$$

并赋予范数

$$\|x\| = \begin{cases} \left(\sum\limits_n \|x_n\|^q\right)^{\frac{1}{q}}, & 1\leqslant q<\infty, \\ \sup\limits_n \|x_n\|, & q=\infty. \end{cases}$$

对 $x_n=(x_{(n,j)})_{j=1}^\infty\in\ell_p$, $x_{(n,j)}$ 表示 x_n 的第 j 个元素. 对于任意 $n,j\in\mathbb{N}$, 令

$$e^n = \{(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} : \xi_n=1; \xi_i=0, i\neq n, i\in\mathbb{N}\},$$
$$e^{(n,\,j)} = \{(\xi_{(n',\,j')})_{n',j'\in\mathbb{N}} : \xi_{(n,\,j)}=1; \xi_{(n',\,j')}=0, (n',\,j')\neq(n,\,j), n',j'\in\mathbb{N}\}.$$

显然, $e^n\in S_{\ell_p}$, $e^{(n,\,j)}\in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$. 对 $x=(x_n)_{n=1}^\infty\in\ell_p$ 或 $x=(x_n)_{n=1}^\infty\in(\sum\ell_p)_{\ell_q}$, $\mathrm{supp}(x)=\{n\in\mathbb{N}: x_n\neq 0\}$ 表示 x 的支撑集. "$\pm$" 表示 "$+$" 或 "$-$" 二者成立其一.

2 指标为 $1=q<p<\infty$, $1<q<p\leqslant 2$ 或 $2\leqslant p<q<\infty$ 的情形

下述结果来自文献 [13], 为阅读方便, 给出其证明.

引理 2.1 设 X 和 Y 为实赋范空间, $f: S_X\to S_Y$ 为满相位等距, 则 f 为单射, 并满足

$$f(-x)=-f(x), \quad \|f(x)\|=\|x\|, \quad \forall x\in S_X.$$

证明 任取 $x\in S_X$, 由 f 是满射知, 存在 $y\in S_X$ 使得 $f(y)=-f(x)$. 因为 f 是相位等距, 所以有

$$\{\|x+y\|, \|x-y\|\} = \{\|f(x)+f(y)\|, \|f(x)-f(y)\|\} = \{0, \|f(x)-f(y)\|\}.$$

若 $\|x-y\|=0$, 则 $x=y$. 此时 $f(x)=0$, 与 $f(x)\in S_Y$ 矛盾. 因此, $\|x+y\|=0$, 即 $y=-x$ 且 $f(-x)=-f(x)$. 类似地, 可证明 f 为单射. 令 $y=x$, 由 (1.2) 可知 $\|f(x)\|=\|x\|$. 证毕. □

下述结果来自文献 [1], 为方便使用, 本文对其进行了一些修改:

引理 2.2 设 $1 \leqslant p < \infty$, 则对任意的 $x, y \in \ell_p$, 有

$$\begin{aligned} &\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leqslant 2(\|x\|^p + \|y\|^p), \quad \forall\, 1 \leqslant p < 2, \\ &\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \geqslant 2(\|x\|^p + \|y\|^p), \quad \forall\, 2 \leqslant p < \infty. \end{aligned}$$

证明 注意到

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p - 2(\|x\|^p + \|y\|^p) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (|x_n+y_n|^p + |x_n-y_n|^p - 2|x_n|^p - 2|y_n|^p).$$

由不等式

$$\begin{aligned} &|\xi+\eta|^p + |\xi-\eta|^p \leqslant 2(|\xi|^p + |\eta|^p), \quad \forall\, \xi, \eta \in \mathbb{R}, \quad 1 \leqslant p < 2, \\ &|\xi+\eta|^p + |\xi-\eta|^p \geqslant 2(|\xi|^p + |\eta|^p), \quad \forall\, \xi, \eta \in \mathbb{R}, \quad p \geqslant 2 \end{aligned}$$

可知, 当 $1 \leqslant p < 2$ 时,

$$|x_n+y_n|^p + |x_n-y_n|^p \leqslant 2(|x_n|^p + |y_n|^p);$$

当 $p \geqslant 2$ 时,

$$|x_n+y_n|^p + |x_n-y_n|^p \geqslant 2(|x_n|^p + |y_n|^p).$$

因此, 当 $1 \leqslant p < 2$ 时,

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leqslant 2(\|x\|^p + \|y\|^p);$$

当 $p \geqslant 2$ 时,

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \geqslant 2(\|x\|^p + \|y\|^p).$$

证毕. □

设 $x, y \in (\sum \ell_p)_{\ell_q}$, 若 $\operatorname{supp}(x) \cap \operatorname{supp}(y) = \emptyset$, 则称 x 与 y 正交, 记为 $x \perp y$.

引理 2.3 设 $1 < q < p \leqslant 2$ 或 $2 \leqslant p < q < \infty$, $x, y \in (\sum \ell_p)_{\ell_q}$, 则 $x \perp y$ 当且仅当

$$\|x-y\|^q + \|x+y\|^q = 2(\|x\|^q + \|y\|^q).$$

证明 "⇒" 设 $x \perp y$, 则

$$\begin{aligned} &\|x-y\|^q + \|x+y\|^q \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\|x_n-y_n\|^q + \|x_n+y_n\|^q) \\ &= \sum_{n\in\operatorname{supp}(x)} (\|x_n\|^q + \|x_n\|^q) + \sum_{n\in\operatorname{supp}(y)} (\|-y_n\|^q + \|y_n\|^q) \\ &= 2(\|x\|^q + \|y\|^q). \end{aligned}$$

“⇐” 采用反证法. 假设存在 $m \in \operatorname{supp}(x) \cap \operatorname{supp}(y)$. 设 $a, b > 0$, 令

$$f(p) = \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad g(p) = (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall\, p \in (1, \infty).$$

计算

$$\begin{aligned} f'(p) &= \frac{a^p \ln a^p + b^p \ln b^p - (a^p + b^p) \ln(\frac{a^p + b^p}{2})}{p^2(a^p + b^p)} \mathrm{e}^{\frac{\ln(\frac{a^p+b^p}{2})}{p}} \\ &= \frac{a^p \ln(\frac{2a^p}{a^p+b^p}) + b^p \ln(\frac{2b^p}{a^p+b^p})}{p^2(a^p + b^p)} \mathrm{e}^{\frac{\ln(\frac{a^p+b^p}{2})}{p}}. \end{aligned}$$

注意到当 $t > 0$ 时, $\ln t \leqslant t - 1$. 因此

$$\begin{aligned} a^p \ln\left(\frac{2a^p}{a^p + b^p}\right) + b^p \ln\left(\frac{2b^p}{a^p + b^p}\right) &= -\left(a^p \ln\left(\frac{a^p + b^p}{2a^p}\right) + b^p \ln\left(\frac{a^p + b^p}{2b^p}\right)\right) \\ &\geqslant -\left(a^p\left(\frac{a^p + b^p}{2a^p} - 1\right) + b^p\left(\frac{a^p + b^p}{2b^p} - 1\right)\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

从而 $f'(p) \geqslant 0$, f 是单调递增的. 计算

$$g'(p) = \frac{a^p \ln a^p + b^p \ln b^p - (a^p + b^p) \ln(a^p + b^p)}{p^2(a^p + b^p)} \mathrm{e}^{\frac{\ln(a^p+b^p)}{p}} < 0.$$

这意味着 g 是严格单调递减的.

当 $1 < q < p \leqslant 2$ 时, 由 f 单调递增、g 严格单调递减以及引理 2.2, 可知

$$\begin{aligned} \frac{\|x_m - y_m\|^q + \|x_m + y_m\|^q}{2} &\leqslant \left(\frac{\|x_m - y_m\|^p + \|x_m + y_m\|^p}{2}\right)^{\frac{q}{p}} \\ &\leqslant (\|x_m\|^p + \|y_m\|^p)^{\frac{q}{p}} \\ &< \|x_m\|^q + \|y_m\|^q. \end{aligned}$$

再由引理 2.2, 可知

$$\begin{aligned} \|x - y\|^q + \|x + y\|^q &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\|x_n - y_n\|^q + \|x_n + y_n\|^q) \\ &= \sum_{n\neq m} (\|x_n - y_n\|^q + \|x_n + y_n\|^q) + (\|x_m - y_m\|^q + \|x_m + y_m\|^q) \\ &< 2 \sum_{n\neq m} (\|x_n\|^q + \|y_n\|^q) + 2(\|x_m\|^q + \|y_m\|^q) \\ &= 2(\|x\|^q + \|y\|^q). \end{aligned}$$

矛盾.

当 $2 \leqslant p < q < \infty$ 时, 再次由 f 单调递增、g 严格单调递减以及引理 2.2, 可得

$$\frac{\|x_m - y_m\|^q + \|x_m + y_m\|^q}{2} \geqslant \left(\frac{\|x_m - y_m\|^p + \|x_m + y_m\|^p}{2}\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\begin{aligned}&\geqslant (\|x_m\|^p + \|y_m\|^p)^{\frac{q}{p}}\\ &> \|x_m\|^q + \|y_m\|^q.\end{aligned}$$

由引理 2.2, 有

$$\begin{aligned}\|x-y\|^q + \|x+y\|^q &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\|x_n - y_n\|^q + \|x_n + y_n\|^q)\\ &= \sum_{n\neq m} (\|x_n - y_n\|^q + \|x_n + y_n\|^q) + (\|x_m - y_m\|^q + \|x_m + y_m\|^q)\\ &> 2\sum_{n\neq m} (\|x_n\|^q + \|y_n\|^q) + 2(\|x_m\|^q + \|y_m\|^q)\\ &= 2(\|x\|^q + \|y\|^q).\end{aligned}$$

矛盾. 证毕. □

注 2.1 当 $1 < p < q \leqslant 2$ 或 $2 \leqslant q < p < \infty$ 时, 引理 2.3 不一定成立. 例如, 令 $x = (x_1, x_2, 0, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, 0, \ldots)$, 其中 $x_1 = (1, 1, 0, \ldots)$, $x_2 = (1, 1, 0, \ldots)$, $y_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $y_2 = (0, -1, 0, \ldots)$. 显然, $\operatorname{supp}(x) \cap \operatorname{supp}(y) \neq \emptyset$, 这意味着 $x \not\perp y$. 注意到

$$\|x\|^q = 2^{\frac{q}{p}+1}, \quad \|y\|^q = 2, \quad \|x+y\|^q = \|x-y\|^q = (2^p+1)^{\frac{q}{p}} + 1.$$

但是, 存在指标 p 和 q 满足 $1 < p < q \leqslant 2$ 或 $2 \leqslant q < p < \infty$, 使得等式 $\|x-y\|^q + \|x+y\|^q = 2(\|x\|^q + \|y\|^q)$ 成立.

引理 2.4 设 $1 = q < p < \infty$, $f : S_{(\sum \ell_p)_{\ell_1}} \to S_{(\sum \ell_p)_{\ell_1}}$ 为满相位等距, $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_1}}$, 则 $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ 当且仅当对任意的 $m \in \operatorname{supp}(x) \cap \operatorname{supp}(y)$, 都存在某个 $\lambda_m > 0$, 使得 $y_m = \lambda_m x_m$.

证明 "⇐" 设 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$, 并且对任意的 $m \in \operatorname{supp}(x) \cap \operatorname{supp}(y)$, 都存在某个 $\lambda_m > 0$ 满足 $y_m = \lambda_m x_m$. 则

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= \sum_{n\in\operatorname{supp}(x+y)} \|x_n + y_n\|\\ &= \sum_{n\in\operatorname{supp}(x)\setminus\operatorname{supp}(y)} \|x_n\| + \sum_{n\in\operatorname{supp}(y)\setminus\operatorname{supp}(x)} \|y_n\| + \sum_{n\in\operatorname{supp}(x)\cap\operatorname{supp}(y)} \|x_n + y_n\|\\ &= \sum_{n\in\operatorname{supp}(x)\setminus\operatorname{supp}(y)} \|x_n\| + \sum_{n\in\operatorname{supp}(y)\setminus\operatorname{supp}(x)} \|y_n\| + \sum_{n\in\operatorname{supp}(x)\cap\operatorname{supp}(y)} (\|x_n\| + \lambda_n\|x_n\|)\\ &= \|x\| + \|y\|.\end{aligned}$$

"⇒" 设 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ 和 $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_1}}$ 满足 $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, 则

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n + y_n\| = \|x+y\| = \|x\| + \|y\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\|x_n\| + \|y_n\|),$$

由 $\|x_n + y_n\| \leqslant \|x_n\| + \|y_n\|$ 知 $\|x_n + y_n\| = \|x_n\| + \|y_n\|$. 注意到 ℓ_p 是严格凸的, 对任意的 $m \in \operatorname{supp}(x) \cap \operatorname{supp}(y)$, 都存在 $\lambda_m > 0$, 使得 $y_m = \lambda_m x_m$. 证毕. □

注 2.2 令 $q=1$. 当 $p=1$ 或 $p=\infty$ 时, 由下例可知引理 2.4 不再成立.

设 $p=1$, 令 $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}=((x_{(n,j)})_{j=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty}$, $y=(y_n)_{n=1}^{\infty}=((y_{(n,j)})_{j=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty}$, 其中

$$x_{(n,j)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & (n,j)=(1,1),\\ \dfrac{1}{2}, & (n,j)=(1,2),\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad y_{(n,j)}=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & (n,j)=(1,1),\\ \dfrac{2}{3}, & (n,j)=(1,2),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则 $x,y\in S_{(\sum\ell_1)_{\ell_1}}$, $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ 并且 $1\in\operatorname{supp}(x)\cap\operatorname{supp}(y)$. 但并不存在 $\lambda>0$ 使得 $y_1=\lambda x_1$.

设 $p=\infty$, 令 $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}=((x_{(n,j)})_{j=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty}$, $y=(y_n)_{n=1}^{\infty}=((y_{(n,j)})_{j=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty}$, 其中

$$x_{(n,j)}=\begin{cases}1, & (n,j)=(1,1),\\ \dfrac{1}{2}, & (n,j)=(1,2),\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad y_{(n,j)}=\begin{cases}1, & (n,j)=(1,1),\\ \dfrac{1}{2}, & (n,j)=(1,3),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则 $x,y\in S_{(\sum\ell_\infty)_{\ell_1}}$, $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ 并且 $1\in\operatorname{supp}(x)\cap\operatorname{supp}(y)$. 但并不存在 $\lambda>0$ 使得 $y_1=\lambda x_1$.

引理 2.5 设 $1=q<p<\infty$, $1<q<p\leqslant 2$ 或 $2\leqslant p<q<\infty$, $f:S_{(\sum\ell_p)_{\ell_q}}\to S_{(\sum\ell_p)_{\ell_q}}$ 为满相位等距, 则 $x\perp y$ 当且仅当 $f(x)\perp f(y)$.

证明 "$\Rightarrow$" 当 $1=q<p<\infty$ 时, 由 $x\perp y$ 知 $\|x+y\|=\|x-y\|=\|x\|+\|y\|$. 由相位等距的定义知

$$\|f(x)+f(y)\|=\|f(x)-f(y)\|=\|f(x)\|+\|f(y)\|.$$

假设存在 $m\in\operatorname{supp}(f(x))\cap\operatorname{supp}(f(y))$, 由引理 2.4 知存在 $\lambda_{m_1},\lambda_{m_2}>0$, 使得

$$f(y)_m=\lambda_{m_1}f(x)_m,\quad f(y)_m=-\lambda_{m_2}f(x)_m,$$

矛盾. 因此 $\operatorname{supp}(f(x))\cap\operatorname{supp}(f(y))=\emptyset$, 即 $f(x)\perp f(y)$.

当 $1<q<p\leqslant 2$ 或 $2\leqslant p<q<\infty$ 时, 由 $x\perp y$ 及引理 2.3 知

$$\|x-y\|^q+\|x+y\|^q=2(\|x\|^q+\|y\|^q).$$

由 f 是相位等距及引理 2.1 知

$$\|f(x)-f(y)\|^q+\|f(x)+f(y)\|^q=2(\|f(x)\|^q+\|f(y)\|^q).$$

由引理 2.3 可得 $f(x)\perp f(y)$.

"$\Leftarrow$" 由引理 2.1 知 f 为双射, 注意到 f^{-1} 也是满相位等距, 由类似上述讨论可得 $x\perp y$. 证毕. □

引理 2.6 设 $1=q<p<\infty$, $1<q<p\leqslant 2$ 或 $2\leqslant p<q<\infty$, $f:S_{(\sum\ell_p)_{\ell_q}}\to S_{(\sum\ell_p)_{\ell_q}}$ 为满相位等距. 则存在双射 $\tau:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 使得对每个满足 $\|x_n\|=1$ 或 $\|x_n\|=0$ 的 $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}\in S_{(\sum\ell_p)_{\ell_q}}$, 有

$$\|x_n\|=\|f(x)_{\tau(n)}\|.$$

证明 任取 $n \in \mathbb{N}$, 首先证明, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得对任意满足 $\|x_n\| = 1$ 的 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$ 都有

$$\|f(x)_m\| = 1.$$

采用反证法. 假设存在 $m_1 \neq m_2 \in \operatorname{supp}(f(x))$. 注意到, $\|x_n\| = 1$ 当且仅当 $\operatorname{supp}(x) = \{n\}$. 取 $h, h' \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$ 满足 $\|h_{m_1}\| = \|h'_{m_2}\| = 1$, 则 $h \perp h', h \not\perp f(x), h' \not\perp f(x)$. 由引理 2.5 知, $f^{-1}(h) \perp f^{-1}(h'), f^{-1}(h) \not\perp x, f^{-1}(h') \not\perp x$, 与 $\operatorname{supp}(x)$ 是单点集矛盾. 因此, 存在某个 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\operatorname{supp}(f(x)) = \{m\}$.

我们断言 m 与 x 的选择无关. 假设 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ 和 $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$ 满足 $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$. 由上述讨论知, 存在 $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ 使得 $\|f(x)_{m_1}\| = \|f(y)_{m_2}\| = 1$. 由于 $x \not\perp y$, 所以由引理 2.5 知 $f(x) \not\perp f(y)$, 这意味着 $m_1 = m_2$. 定义

$$\tau(n) = m, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

则 $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 为良定义的.

下面证明 τ 为双射. 假设存在 $n_1 \neq n_2 \in \mathbb{N}$ 满足 $\tau(n_1) = \tau(n_2) = m$. 对任意满足 $\|x_{n_1}\| = \|y_{n_2}\| = 1$ 的 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$, 有 $\|f(x)_m\| = \|f(y)_m\| = 1$. 注意到 $x \perp y$, 由引理 2.5 知 $f(x) \perp f(y)$, 矛盾. 因此 τ 为单射.

注意到 f^{-1} 为满相位等距, 对任意的 $m \in \mathbb{N}$, 由上述讨论可知, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得对任意满足 $\|y_m\| = 1$ 的 $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$, 有

$$\|f^{-1}(y)_n\| = 1.$$

由 τ 的定义, 有 $\|y_{\tau(n)}\| = \|f(f^{-1}(y))_{\tau(n)}\| = 1$. 注意到 $\|y\| = 1$, 由 $\|y_m\| = \|y_{\tau(n)}\| = 1$ 知 $\tau(n) = m$. 因此 τ 为满射.

对任意满足 $x_n = 0$ 的 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$, 选取 $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$ 满足 $\|y_n\| = 1$, 则 $x \perp y$. 由引理 2.5 知 $f(x) \perp f(y)$. 注意到 $\operatorname{supp}(f(y)) = \{\tau(n)\}$, 因此 $f(x)_{\tau(n)} = 0$. 证毕. □

利用文献 [5, 定理 2.6] 和 [1–3] 中的等距表示定理 (可参见文献 [12, 引理 2.3]), 可得下述结果.

引理 2.7 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f : S_{\ell_p} \to S_{\ell_p}$ 为满相位等距. 则存在双射 $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 使得对任意的 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{\ell_p}$ 有

$$x_n = \pm f(x)_{\mu(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

引理 2.8 设 $1 = q < p < \infty$, $1 < q < p \leqslant 2$ 或 $2 \leqslant p < q < \infty$, $f : S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}} \to S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$ 为满相位等距. 则存在双射 $\tau, \mu_i (i \in \mathbb{N}) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 使得对任意的 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} = ((x_{(n,j)})_{j=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$, 有

$$x_{(n,j)} = \pm f(x)_{(\tau(n),\mu_n(j))}, \quad \forall n, j \in \mathbb{N}.$$

证明 由引理 2.6 知, 存在双射 $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 使得对每个满足 $\|x_n\| = 1$ 或 $\|x_n\| = 0$ 的 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$, 有

$$\|x_n\| = \|f(x)_{\tau(n)}\|.$$

给定 $i\in\mathbb{N}$, 对 $z\in S_{\ell_p}$, 令

$$g_i(z)_n=\begin{cases}0, & n\neq i,\\ z, & n=i,\end{cases}$$

则 $g_i(z)=(g_i(z)_n)_{n=1}^{\infty}\in S_{(\sum\ell_p)_{\ell_q}}$, 并且 $g_i:S_{\ell_p}\to S_{(\sum\ell_p)_{\ell_q}}$ 是良定义的.

对 $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}\in S_{(\sum\ell_p)_{\ell_q}}$, 令

$$P_i(x)=x_i.$$

则 $P_i:S_{(\sum\ell_p)_{\ell_q}}\to S_{\ell_p}$ 是良定义的.

注意到 f 为满射, 由 τ 的定义, 容易验证 $f_i\equiv P_{\tau(i)}\circ f\circ g_i:S_{\ell_p}\to S_{\ell_p}$ 为满相位等距. 由引理 2.7 可知, 存在双射 $\mu_i:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 使得

$$z_j=\pm f_i(z)_{\mu_i(j)},\quad \forall\, z=(z_j)_{j=1}^{\infty}\in S_{\ell_p},\quad j\in\mathbb{N}.$$

对满足 $\|x_n\|=1$ 的 $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}=((x_{(n,j)})_{j=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty}\in S_{(\sum\ell_p)_{\ell_q}}$, 由上式及 f_i 的定义知,

$$x_{(n,j)}=\pm f_n(x_n)_{\mu_n(j)}=\pm f(x)_{(\tau(n),\mu_n(j))},\quad \forall\, j\in\mathbb{N}. \tag{2.1}$$

接下来证明对任意的 $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}=((x_{(n,j)})_{j=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty}\in S_{(\sum\ell_p)_{\ell_q}}$, 都有

$$x_{(n,j)}=\pm f(x)_{(\tau(n),\mu_n(j))},\quad \forall\, n,j\in\mathbb{N}.$$

对于任意的 $n_0\in\mathbb{N}$, 由引理 2.6 知, 若 $x_{n_0}=0$, 则 $f(x)_{\tau(n_0)}=0$. 假设 $x_{n_0}\neq 0\in\ell_p$, 令

$$y_n=\begin{cases}\dfrac{x_{n_0}}{\|x_{n_0}\|}, & n=n_0,\\ 0, & n\neq n_0,\end{cases}$$

则 $y=(y_n)_{n=1}^{\infty}\in S_{(\sum\ell_p)_{\ell_q}}$ 且 $\|y_{n_0}\|=1$. 令

$$z_n=\begin{cases}\dfrac{f(x)_{\tau(n_0)}}{\|f(x)_{\tau(n_0)}\|}, & n=\tau(n_0),\\ 0, & n\neq\tau(n_0),\end{cases}$$

则 $z=(z_n)_{n=1}^{\infty}\in S_{(\sum\ell_p)_{\ell_q}}$ 且 $\|z_{\tau(n_0)}\|=1$. 注意到,

$$\begin{aligned}\|x-y\|&\geqslant\min\{\min\{\|x-u\|,\|x+u\|\}:u\in S_{(\sum\ell_p)_{\ell_q}},\|u_{n_0}\|=1\}\\&=\min\left\{\left(\sum_{n\neq n_0}\|x_n\|^q+(\min\{\|x_{n_0}-u_{n_0}\|,\|x_{n_0}+u_{n_0}\|\})^q\right)^{\frac{1}{q}}:u\in S_{(\sum\ell_p)_{\ell_q}},\|u_{n_0}\|=1\right\}\\&\geqslant\left(\sum_{n\neq n_0}\|x_n\|^q+(1-\|x_{n_0}\|)^q\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\|x-y\|,\end{aligned}$$

即

$$\min\{\min\{\|x-u\|,\|x+u\|\}:u\in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}},\|u_{n_0}\|=1\}=\|x-y\|.$$

同理可得

$$\min\{\min\{\|f(x)-f(u)\|,\|f(x)+f(u)\|\}:u\in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}},\|u_{n_0}\|=1\}=\|f(x)-z\|.$$

由于 f 是满相位等距, 对任意满足 $\|u_{n_0}\|=1$ 的 $u\in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$, 都有

$$\{\|x-u\|,\|x+u\|\}=\{\|f(x)-f(u)\|,\|f(x)+f(u)\|\}.$$

因此 $\|x-y\|=\|f(x)-z\|$. 另外,

$$\|x-y\|^q=\sum_{n\neq n_0}\|x_n\|^q+\|x_{n_0}-y_{n_0}\|^q=1-\|x_{n_0}\|^q+(1-\|x_{n_0}\|)^q.$$

同理,

$$\|f(x)-z\|^q=1-\|f(x)_{\tau(n_0)}\|^q+(1-\|f(x)_{\tau(n_0)}\|)^q. \tag{2.2}$$

因此,

$$(1-\|x_{n_0}\|)^q-\|x_{n_0}\|^q=(1-\|f(x)_{\tau(n_0)}\|)^q-\|f(x)_{\tau(n_0)}\|^q.$$

当 $1\leqslant q<\infty$ 时, 函数 $g(t)=(1-t)^q-t^q$ 在 $[0,\infty)$ 上严格单调递减, 因此 $\|x_{n_0}\|=\|f(x)_{\tau(n_0)}\|$.

由于 $\|y_{n_0}\|=1$, 由引理 2.6 知 $\|f(y)_{\tau(n_0)}\|=1$. 由 $\|x-y\|=\|f(x)-z\|$ 和 $\|x-y\|<\|x+y\|$ 知

$$\min\{\|f(x)-f(y)\|,\|f(x)+f(y)\|\}=\|f(x)-z\|. \tag{2.3}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\min\{\|f(x)-f(y)\|^q,\|f(x)+f(y)\|^q\}\\&\quad=\min\{\|f(x)_{\tau(n_0)}-f(y)_{\tau(n_0)}\|^q,\|f(x)_{\tau(n_0)}+f(y)_{\tau(n_0)}\|^q\}+1-\|f(x)_{\tau(n_0)}\|^q.\end{aligned} \tag{2.4}$$

结合 (2.2)–(2.4), 可知

$$\min\{\|f(x)_{\tau(n_0)}-f(y)_{\tau(n_0)}\|,\|f(x)_{\tau(n_0)}+f(y)_{\tau(n_0)}\|\}=1-\|f(x)_{\tau(n_0)}\|=\|f(y)_{\tau(n_0)}\|-\|f(x)_{\tau(n_0)}\|.$$

由于 ℓ_p 是严格凸的, 所以 $f(y)_{\tau(n_0)}=\pm\frac{f(x)_{\tau(n_0)}}{\|f(x)_{\tau(n_0)}\|}$. 因此对任意的 $n_0,j\in\mathbb{N}$, 由 (2.1) 和 $\|x_{n_0}\|=\|f(x)_{\tau(n_0)}\|$ 可得

$$\begin{aligned}x_{(n_0,j)}&=\|x_{n_0}\|\frac{x_{(n_0,j)}}{\|x_{n_0}\|}=\|x_{n_0}\|y_{(n_0,j)}\\&=\pm\|x_{n_0}\|f(y)_{(\tau(n_0),\mu_{n_0}(j))}\\&=\pm\|x_{n_0}\|\frac{f(x)_{(\tau(n_0),\mu_{n_0}(j))}}{\|f(x)_{\tau(n_0)}\|}\\&=\pm f(x)_{(\tau(n_0),\mu_{n_0}(j))}.\end{aligned}$$

注意 n_0 是任意的, 证毕. □

引理 2.9 设 $1=q<p<\infty$, $1<q<p\leqslant 2$ 或 $2\leqslant p<q<\infty$, $f: S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}\to S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$ 为满相位等距. 若 $x,y\in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$ 且 $\mathrm{supp}(x)\cap\mathrm{supp}(y)=\emptyset$, 则存在 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 满足 $|\alpha|=|\beta|=1$, 使得对于任意满足 $ax+by\in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$ 的 $a,b>0$, 都有

$$f(ax+by)=\alpha af(x)+\beta bf(y).$$

证明 设 $x,y\in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$ 满足 $\mathrm{supp}(x)\cap\mathrm{supp}(y)=\emptyset$, $a,b>0$ 满足 $ax+by\in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$. 由引理 2.8 知

$$f(ax+by)_{(\tau(n),\mu_n(j))}=(\pm af(x)\pm bf(y))_{(\tau(n),\mu_n(j))}. \tag{2.5}$$

注意到 $\mathrm{supp}(x)\cap\mathrm{supp}(y)=\emptyset$, 由引理 2.8 和 (2.5) 可知

$$\begin{aligned}
&\Big\{\sum_{n\in\mathrm{supp}(x)}\|(f(ax+by)+f(x))_{\tau(n)}\|^q+\sum_{n\in\mathrm{supp}(y)}\|(f(ax+by)+f(x))_{\tau(n)}\|^q,\\
&\quad\sum_{n\in\mathrm{supp}(x)}\|(f(ax+by)-f(x))_{\tau(n)}\|^q+\sum_{n\in\mathrm{supp}(y)}\|(f(ax+by)-f(x))_{\tau(n)}\|^q\Big\}\\
&\quad=\{\|f(ax+by)+f(x)\|^q,\|f(ax+by)-f(x)\|^q\}\\
&\quad=\{\|ax+by+x\|^q,\|ax+by-x\|^q\}\\
&\quad=\{(1+a)^q+b^q,|1-a|^q+b^q\}.
\end{aligned}$$

注意到,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathrm{supp}(y)}\|(f(ax+by)-f(x))_{\tau(n)}\|^q&=\sum_{n\in\mathrm{supp}(y)}\|(f(ax+by)+f(x))_{\tau(n)}\|^q\\
&=\sum_{n\in\mathrm{supp}(y)}\|(ax+by)_n\|^q=b^q.
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
&\max\Big\{\sum_{n\in\mathrm{supp}(x)}\|(f(ax+by)+f(x))_{\tau(n)}\|^q,\sum_{n\in\mathrm{supp}(x)}\|(f(ax+by)-f(x))_{\tau(n)}\|^q\Big\}\\
&=(1+a)^q=\sum_{n\in\mathrm{supp}(x)}(\|(ax+by)_n\|+\|x_n\|)^q\\
&=\sum_{n\in\mathrm{supp}(x)}(\|f(ax+by)_{\tau(n)}\|+\|f(x)_{\tau(n)}\|)^q.
\end{aligned}\tag{2.6}$$

注意到,

$$\begin{aligned}
\|(f(ax+by)+f(x))_{\tau(n)}\|^q&\leqslant(\|f(ax+by)_{\tau(n)}\|+\|f(x)_{\tau(n)}\|)^q,\\
\|(f(ax+by)-f(x))_{\tau(n)}\|^q&\leqslant(\|f(ax+by)_{\tau(n)}\|+\|f(x)_{\tau(n)}\|)^q.
\end{aligned}$$

由 (2.6) 知, 对任意的 $n\in\mathrm{supp}(x)$, 有

$$\max\{\|(f(ax+by)+f(x))_{\tau(n)}\|,\ \|(f(ax+by)-f(x))_{\tau(n)}\|\}=\|f(ax+by)_{\tau(n)}\|+\|f(x)_{\tau(n)}\|.$$

进而, 对每个固定的 $n \in \mathrm{supp}(x)$, 由 (2.5) 知

$$\begin{aligned}
&\max\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}}|(f(ax+by)+f(x))_{(\tau(n),\mu_n(j))}|^p, \sum_{j\in\mathbb{N}}|(f(ax+by)-f(x))_{(\tau(n),\mu_n(j))}|^p\right\}\\
&=\max\{\|(f(ax+by)+f(x))_{\tau(n)}\|^p, \|(f(ax+by)-f(x))_{\tau(n)}\|^p\}\\
&=(\|f(ax+by)_{\tau(n)}\|^p+\|f(x)_{\tau(n)}\|)^p\\
&=\|f(ax+by)_{\tau(n)}\|^p+\|f(x)_{\tau(n)}\|^p\\
&=\sum_{j\in\mathbb{N}}(|f(ax+by)_{(\tau(n),\mu_n(j))}|^p+|f(x)_{(\tau(n),\mu_n(j))}|^p).
\end{aligned}$$

这意味着, 对任意的 $j \in \mathbb{N}$, 或者

$$\mathrm{sgn}(f(ax+by)_{(\tau(n),\mu_n(j))}) = \mathrm{sgn}(f(x)_{(\tau(n),\mu_n(j))})$$

或者

$$\mathrm{sgn}(f(ax+by)_{(\tau(n),\mu_n(j))}) = \mathrm{sgn}(-f(x)_{(\tau(n),\mu_n(j))}).$$

否则,

$$\begin{aligned}
&\max\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}}|(f(ax+by)+f(x))_{(\tau(n),\mu_n(j))}|^p, \sum_{j\in\mathbb{N}}|(f(ax+by)-f(x))_{(\tau(n),\mu_n(j))}|^p\right\}\\
&<\sum_{j\in\mathbb{N}}(|f(ax+by)_{(\tau(n),\mu_n(j))}|^p+|f(x)_{(\tau(n),\mu_n(j))}|^p).
\end{aligned}$$

矛盾. 因此存在 $\alpha_n \in \mathbb{N}$ 满足 $|\alpha_n| = 1$, 由 (2.5) 知

$$f(ax+by)_{(\tau(n),\mu_n(j))} = \alpha_n a f(x)_{(\tau(n),\mu_n(j))}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

这意味着

$$f(ax+by)_{\tau(n)} = \alpha_n a f(x)_{\tau(n)}.$$

我们断言, 对所有的 $n \in \mathrm{supp}(x)$, α_n 的符号都相同, 记为 α. 此时,

$$f(ax+by)_{\tau(n)} = \alpha a f(x)_{\tau(n)}, \quad n \in \mathrm{supp}(x).$$

否则

$$\begin{aligned}
&\max\left\{\sum_{n\in supp(x)}\|(f(ax+by)+f(x))_{\tau(n)}\|^q, \sum_{n\in supp(x)}\|(f(ax+by)-f(x))_{\tau(n)}\|^q\right\}\\
&<\sum_{n\in supp(x)}(\|f(ax+by)_{\tau(n)}\|+\|f(x)_{\tau(n)}\|)^q,
\end{aligned}$$

与 (2.6) 矛盾. 同理, 对任意的 $n \in \mathrm{supp}(y)$, 存在 $\beta \in \mathbb{N}$ 满足 $|\beta| = 1$ 使得 $f(ax+by)_{\tau(n)} = \beta b f(y)_{\tau(n)}$. 因此,

$$f(ax+by) = \alpha a f(x) + \beta b f(y).$$

证毕. □

定理 2.1 设 $1=q<p<\infty$, $1<q<p\leqslant 2$ 或 $2\leqslant p<q<\infty$, $f: S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}} \to S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$ 为满相位等距. 则 f 可以延拓为从 $(\sum \ell_p)_{\ell_q}$ 到其自身的满相位等距 $\tilde{f}$, 并且 $\tilde{f}$ 相位等价于一个线性满等距.

证明 令

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}\|x\| f\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

下面证明 $\tilde{f}$ 即为所要求的映射. 容易看到 $\tilde{f}$ 是保范的. 我们证明 $\tilde{f}$ 是 f 的齐次延拓, 且对任意满足 $\operatorname{supp}(x)\cap\operatorname{supp}(y)=\emptyset$ 的 $x,y\in(\sum \ell_p)_{\ell_q}$, 都存在 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 满足 $|\,\alpha\,|=|\,\beta\,|=1$, 使得

$$\tilde{f}(x+y)=\alpha\tilde{f}(x)+\beta\tilde{f}(y). \tag{2.7}$$

任取 $0\neq x\in(\sum \ell_p)_{\ell_q}$, $0\neq\lambda\in\mathbb{R}$, 由引理 2.1 知

$$\tilde{f}(-x)=\|x\| f\left(\frac{-x}{\|x\|}\right)=-\|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)=-\tilde{f}(x).$$

当 $\lambda>0$ 时, $\tilde{f}(\lambda x)=\|\lambda x\| f(\frac{x}{\|x\|})=\lambda\tilde{f}(x)$; 当 $\lambda<0$ 时, $\tilde{f}(\lambda x)=\|\lambda x\| f(\frac{-x}{\|x\|})=\lambda\tilde{f}(x)$. 这意味着对任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$, 都有

$$\tilde{f}(\lambda x)=\lambda\tilde{f}(x),\quad \forall x\in\left(\sum \ell_p\right)_{\ell_q}.$$

对于任意满足 $\operatorname{supp}(x)\cap\operatorname{supp}(y)=\emptyset$ 的 $x,y\in(\sum \ell_p)_{\ell_q}$, 由引理 2.9 知, 存在 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 满足 $|\alpha|=|\beta|=1$, 使得

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x+y)&=\|x+y\| f\left(\frac{x+y}{\|x+y\|}\right)\\ &=\|x+y\| f\left(\frac{\|x\|}{\|x+y\|}\frac{x}{\|x\|}+\frac{\|y\|}{\|x+y\|}\frac{y}{\|y\|}\right)\\ &=\|x+y\|\left(\alpha\frac{\|x\|}{\|x+y\|}f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)+\beta\frac{\|y\|}{\|x+y\|}f\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right)\\ &=\alpha\tilde{f}(x)+\beta\tilde{f}(y).\end{aligned}$$

这意味着 (2.7) 成立. 我们断言存在 $\gamma\in\mathbb{R}$ 满足 $|\gamma|=1$, 使得

$$\tilde{f}(x-y)=\gamma(\alpha\tilde{f}(x)-\beta\tilde{f}(y)). \tag{2.8}$$

由上述讨论知, 存在 $\alpha',\beta'\in\mathbb{R}$ 满足 $|\alpha'|=|\beta'|=1$, 使得

$$\tilde{f}(x-y)=\alpha'\tilde{f}(x)+\beta'\tilde{f}(-y)=\alpha'\tilde{f}(x)-\beta'\tilde{f}(y).$$

当 $x=0$ 或 $y=0$ 或 $x=-y$ 时, 由 $\tilde{f}$ 定义知 (2.8) 显然成立. 若 $x,y\neq 0$ 且 $x\neq -y$, 采用反证法, 假设 $\alpha\beta=-\alpha'\beta'$, 则 $\tilde{f}(x+y)=\tilde{f}(x-y)$ 或 $\tilde{f}(x+y)=\tilde{f}(y-x)$. 由 $\tilde{f}$ 定义可知

$$f\left(\frac{x+y}{\|\tilde{f}(x+y)\|}\right)=f\left(\frac{x-y}{\|\tilde{f}(x+y)\|}\right)\quad 或\quad f\left(\frac{x+y}{\|\tilde{f}(x+y)\|}\right)=f\left(\frac{y-x}{\|\tilde{f}(x+y)\|}\right).$$

根据引理 2.1, f 是单射, 则 $x=0$ 或 $y=0$, 矛盾. 这说明 (2.8) 成立.

下面证明, 对任意的 $x, y \in (\sum \ell_p)_{\ell_q}$, 若存在 $h \in \mathbb{N}$ 使得 $h \notin \operatorname{supp}(x) \cup \operatorname{supp}(y)$, 则

$$\{\|x+y\|, \|x-y\|\} = \{\|\tilde{f}(x)+\tilde{f}(y)\|, \|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)\|\}.$$

若 $\|x\| = \|y\|$, 则

$$\begin{aligned}
&\{\|\tilde{f}(x)+\tilde{f}(y)\|, \|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)\|\} \\
&= \left\{\|x\| \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) + f\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\|, \|x\| \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - f\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| \right\} \\
&= \{\|x+y\|, \|x-y\|\}.
\end{aligned}$$

若 $\|x\| < \|y\|$, 令 $t = (\|y\|^q - \|x\|^q)^{\frac{1}{q}}$, 则 $\|x + te^{(h,h)}\| = \|y\|$. 由 (2.7) 知, 存在 $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$, 使得

$$\tilde{f}(x + te^{(h,h)}) = \alpha\tilde{f}(x) + \beta\tilde{f}(te^{(h,h)}).$$

由 (2.7), (2.8) 及 $\tilde{f}$ 的保范性, 有

$$\begin{aligned}
&\{\|x+y\|^q + \|te^{(h,h)}\|^q, \|x-y\|^q + \|te^{(h,h)}\|^q\} \\
&= \{\|x + te^{(h,h)} + y\|^q, \|x + te^{(h,h)} - y\|^q\} \\
&= \{\|\tilde{f}(x + te^{(h,h)} + y)\|^q, \|\tilde{f}(x + te^{(h,h)} - y)\|^q\} \\
&= \{\|\tilde{f}(x + te^{(h,h)}) + \tilde{f}(y)\|^q, \|\tilde{f}(x + te^{(h,h)}) - \tilde{f}(y)\|^q\} \\
&= \{\|\alpha\tilde{f}(x) + \beta\tilde{f}(te^{(h,h)}) + \tilde{f}(y)\|^q, \|\alpha\tilde{f}(x) + \beta\tilde{f}(te^{(h,h)}) - \tilde{f}(y)\|^q\} \\
&= \{\|\tilde{f}(x)+\tilde{f}(y)\|^q + \|\tilde{f}(te^{(h,h)})\|^q, \|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)\|^q + \|\tilde{f}(te^{(h,h)})\|^q\}.
\end{aligned}$$

因此,

$$\{\|x+y\|, \|x-y\|\} = \{\|\tilde{f}(x)+\tilde{f}(y)\|, \|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)\|\}.$$

同理可证, 当 $\|x\| > \|y\|$ 时, 有 $\{\|x+y\|, \|x-y\|\} = \{\|\tilde{f}(x)+\tilde{f}(y)\|, \|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)\|\}$.

对 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in (\sum \ell_p)_{\ell_q}$, 令

$$M(x,y) := \{n \in \mathbb{N} : \|x_n + y_n\| \neq \|x_n - y_n\|\}.$$

固定 $m \in \mathbb{N}$, 令

$$z(x,m)_n = \begin{cases} x_m, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

则 $z(x,m) = (z(x,m)_n)_{n=1}^{\infty} \in (\sum \ell_p)_{\ell_q}$.

接下来证明 $\tilde{f}$ 为满相位等距, 由 f 为满射易知 $\tilde{f}$ 为满射. 任取 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in (\sum \ell_p)_{\ell_q}$. 由引理 2.6 及 $\tilde{f}$ 定义知, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 若 $x_n = 0$, 则

$$\tilde{f}(x)_{\tau(n)} = 0 = \tilde{f}(z(x,n))_{\tau(n)}.$$

若 $x_n \neq 0$, 但 $x = z(x,n)$, 此时

$$\tilde{f}(x)_{\tau(n)} = \tilde{f}(z(x,n))_{\tau(n)}.$$

若 $x_n \neq 0$, 且 $x \neq z(x,n)$, 此时

$$\tau(n) \in \operatorname{supp}\left(f\left(\frac{z(x,n)}{\|z(x,n)\|}\right)\right) = \operatorname{supp}(\tilde{f}(z(x,n)))$$

且

$$\tau(n) \notin \operatorname{supp}\left(f\left(\frac{x-z(x,n)}{\|x-z(x,n)\|}\right)\right) = \operatorname{supp}(\tilde{f}(x-z(x,n))).$$

结合 (2.7) 可知, 存在 $\alpha(x,\tau(n)), \beta(x,\tau(n)) \in \mathbb{R}$ 满足 $|\alpha(x,\tau(n))| = |\beta(x,\tau(n))| = 1$, 使得

$$\tilde{f}(x)_{\tau(n)} = (\alpha(x,\tau(n))\tilde{f}(z(x,n)) + \beta(x,\tau(n))\tilde{f}(x-z(x,n)))_{\tau(n)} = \alpha(x,\tau(n))\tilde{f}(z(x,n))_{\tau(n)}.$$

因此, 存在一列 $\alpha(x,n) \in \mathbb{R}$ 满足 $|\alpha(x,n)| = 1$, 使得

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha(x,n)\tilde{f}(z(x,n)).$$

同理, 存在一列 $\alpha(y,n) \in \mathbb{R}$ 满足 $|\alpha(y,n)| = 1$, 使得

$$\tilde{f}(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha(y,n)\tilde{f}(z(y,n)).$$

注意到, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 都存在某个 $h \in \mathbb{N}$ 使得 $h \notin \operatorname{supp}(z(x,n)) \cup \operatorname{supp}(z(y,n))$, 由上述讨论知

$$\{\|z(x,n)+z(y,n)\|, \|z(x,n)-z(y,n)\|\} = \{\|\tilde{f}(z(x,n))+\tilde{f}(z(y,n))\|, \|\tilde{f}(z(x,n))-\tilde{f}(z(y,n))\|\}.$$

因此存在 $\beta(x,y,n) \in \{-1,1\}$ 使得 $\|z(x,n)+z(y,n)\| = \|\tilde{f}(z(x,n))+\beta(x,y,n)\tilde{f}(z(y,n))\|$.

下面证明存在 $\theta(x,y) \in \{-1,1\}$ 使得

$$\alpha(x,n)\alpha(y,n)\beta(x,y,n) = \theta(x,y), \quad \forall n \in M(x,y). \tag{2.9}$$

采用反证法. 假设存在 $m_1, m_2 \in M(x,y)$ 使得

$$\alpha(x,m_1)\alpha(y,m_1)\beta(x,y,m_1) = -\alpha(x,m_2)\alpha(y,m_2)\beta(x,y,m_2).$$

令 $x' = z(x,m_1)+z(x,m_2)$ 和 $y' = z(y,m_1)+z(y,m_2)$. 由 (2.7) 知, 存在 $\alpha(x',m_i), \alpha(y',m_i) \in \{-1,1\}$, $i = 1,2$, 使得

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x') &= \alpha(x',m_1)\tilde{f}(z(x,m_1)) + \alpha(x',m_2)\tilde{f}(z(x,m_2)),\\ \tilde{f}(y') &= \alpha(y',m_1)\tilde{f}(z(y,m_1)) + \alpha(y',m_2)\tilde{f}(z(y,m_2)).\end{aligned}$$

我们断言 $\alpha(x',m_1)\alpha(y',m_1)\beta(x,y,m_1) = \alpha(x',m_2)\alpha(y',m_2)\beta(x,y,m_2)$. 否则,

$$\alpha(x',m_1)\alpha(y',m_1)\beta(x,y,m_1) = -\alpha(x',m_2)\alpha(y',m_2)\beta(x,y,m_2).$$

注意到存在某个 $h \in \mathbb{N}$ 使得 $h \notin \operatorname{supp}(x') \cup \operatorname{supp}(y')$, 由上述讨论知

$$\{\|x'+y'\|, \|x'-y'\|\} = \{\|\tilde{f}(x')+\tilde{f}(y')\|, \|\tilde{f}(x')-\tilde{f}(y')\|\},$$

且对任意的 $n \in M(x,y)$, $\alpha \in \{-1,1\}$, 有

$$\|\tilde{f}(z(x,n))_{\tau(n)} + \alpha \tilde{f}(z(y,n))_{\tau(n)}\| = \|\tilde{f}(z(x,n)) + \alpha \tilde{f}(z(y,n))\|. \tag{2.10}$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\{\|x_{m_1}+y_{m_1}\|^q + \|x_{m_2}+y_{m_2}\|^q, \|x_{m_1}-y_{m_1}\|^q + \|x_{m_2}-y_{m_2}\|^q\} \\
&\quad = \{\|x'+y'\|^q, \|x'-y'\|^q\} \\
&\quad = \{\|\tilde{f}(x')+\tilde{f}(y')\|^q, \|\tilde{f}(x')-\tilde{f}(y')\|^q\} \\
&\quad = \{\|\alpha(x',m_1)\tilde{f}(z(x,m_1))_{\tau(m_1)} + \alpha(y',m_1)\tilde{f}(z(y,m_1))_{\tau(m_1)}\|^q \\
&\qquad + \|\alpha(x',m_2)\tilde{f}(z(x,m_2))_{\tau(m_2)} + \alpha(y',m_2)\tilde{f}(z(y,m_2))_{\tau(m_2)}\|^q, \\
&\qquad \|\alpha(x',m_1)\tilde{f}(z(x,m_1))_{\tau(m_1)} - \alpha(y',m_1)\tilde{f}(z(y,m_1))_{\tau(m_1)}\|^q \\
&\qquad + \|\alpha(x',m_2)\tilde{f}(z(x,m_2))_{\tau(m_2)} - \alpha(y',m_2)\tilde{f}(z(y,m_2))_{\tau(m_2)}\|^q\} \\
&\quad = \{\|\alpha(x',m_1)\tilde{f}(z(x,m_1)) + \alpha(y',m_1)\tilde{f}(z(y,m_1))\|^q \\
&\qquad + \|\alpha(x',m_2)\tilde{f}(z(x,m_2)) + \alpha(y',m_2)\tilde{f}(z(y,m_2))\|^q, \\
&\qquad \|\alpha(x',m_1)\tilde{f}(z(x,m_1)) - \alpha(y',m_1)\tilde{f}(z(y,m_1))\|^q \\
&\qquad + \|\alpha(x',m_2)\tilde{f}(z(x,m_2)) - \alpha(y',m_2)\tilde{f}(z(y,m_2))\|^q\} \\
&\quad = \{\|\tilde{f}(z(x,m_1)) + \alpha(x',m_1)\alpha(y',m_1)\tilde{f}(z(y,m_1))\|^q \\
&\qquad + \|\tilde{f}(z(x,m_2)) + \alpha(x',m_2)\alpha(y',m_2)\tilde{f}(z(y,m_2))\|^q, \\
&\qquad \|\tilde{f}(z(x,m_1)) - \alpha(x',m_1)\alpha(y',m_1)\tilde{f}(z(y,m_1))\|^q \\
&\qquad + \|\tilde{f}(z(x,m_2)) - \alpha(x',m_2)\alpha(y',m_2)\tilde{f}(z(y,m_2))\|^q\} \\
&\quad = \{\|\tilde{f}(z(x,m_1)) + \beta(x,y,m_1)\tilde{f}(z(y,m_1))\|^q + \|\tilde{f}(z(x,m_2)) - \beta(x,y,m_2)\tilde{f}(z(y,m_2))\|^q, \\
&\qquad \|\tilde{f}(z(x,m_1)) - \beta(x,y,m_1)\tilde{f}(z(y,m_1))\|^q + \|\tilde{f}(z(x,m_2)) + \beta(x,y,m_2)\tilde{f}(z(y,m_2))\|^q\} \\
&\quad = \{\|x_{m_1}+y_{m_1}\|^q + \|x_{m_2}-y_{m_2}\|^q, \|x_{m_1}-y_{m_1}\|^q + \|x_{m_2}+y_{m_2}\|^q\}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

注意 $m_1, m_2 \in M(x,y)$, 这意味着 (2.11) 不可能成立. 不妨设 $\|x_{m_1}+y_{m_1}\| > \|x_{m_1}-y_{m_1}\|$, $\|x_{m_2}+y_{m_2}\| > \|x_{m_2}-y_{m_2}\|$, 则

$$\|x_{m_1}+y_{m_1}\|^q + \|x_{m_2}+y_{m_2}\|^q > \max\{\|x_{m_1}+y_{m_1}\|^q + \|x_{m_2}-y_{m_2}\|^q, \|x_{m_1}-y_{m_1}\|^q + \|x_{m_2}+y_{m_2}\|^q\},$$

与 (2.11) 矛盾. 剩余情况可以类似讨论. 因此, 有

$$\alpha(x',m_1)\alpha(y',m_1)\beta(x,y,m_1) = \alpha(x',m_2)\alpha(y',m_2)\beta(x,y,m_2).$$

由 (2.7) 及上述讨论知, 存在 $\alpha_0, \alpha_1 \in \{-1,1\}$, 使得

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n \neq m_1, m_2} \alpha(x,n)\tilde{f}(z(x,n)) + \alpha_0 \tilde{f}(x'), \quad \tilde{f}(y) = \sum_{n \neq m_1, m_2} \alpha(y,n)\tilde{f}(z(y,n)) + \alpha_1 \tilde{f}(y').$$

因此

$$\alpha(x,m_1)=\alpha_0\alpha(x',m_1),\quad \alpha(x,m_2)=\alpha_0\alpha(x',m_2),$$
$$\alpha(y,m_1)=\alpha_1\alpha(y',m_1),\quad \alpha(y,m_2)=\alpha_1\alpha(y',m_2).$$

从而 $\alpha(x,m_1)\alpha(y,m_1)\beta(x,y,m_1)=\alpha(x,m_2)\alpha(y,m_2)\beta(x,y,m_2)$, 与假设矛盾, (2.9) 成立.

由 (2.9) 和 (2.10) 知

$$\begin{aligned}
&\{\|\tilde f(x)+\tilde f(y)\|^q,\|\tilde f(x)-\tilde f(y)\|^q\}\\
&=\Big\{\Big\|\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha(x,n)\tilde f(z(x,n))+\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha(y,n)\tilde f(z(y,n))\Big\|^q,\\
&\quad\Big\|\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha(x,n)\tilde f(z(x,n))-\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha(y,n)\tilde f(z(y,n))\Big)\Big\|^q\Big\}\\
&=\Big\{\sum_{n\in M(x,y)}\|\alpha(x,n)\tilde f(z(x,n))+\alpha(y,n)\tilde f(z(y,n))\|^q+\sum_{n\notin M(x,y)}\|x_n+y_n\|^q,\\
&\quad\sum_{n\in M(x,y)}\|\alpha(x,n)\tilde f(z(x,n))-\alpha(y,n)\tilde f(z(y,n))\|^q+\sum_{n\notin M(x,y)}\|x_n+y_n\|^q\Big\}\\
&=\Big\{\sum_{n\in M(x,y)}\|\beta(x,y,n)\theta(x,y)\tilde f(z(x,n))+\tilde f(z(y,n))\|^q+\sum_{n\notin M(x,y)}\|x_n+y_n\|^q,\\
&\quad\sum_{n\in M(x,y)}\|\beta(x,y,n)\theta(x,y)\tilde f(z(x,n))-\tilde f(z(y,n))\|^q+\sum_{n\notin M(x,y)}\|x_n+y_n\|^q\Big\}\\
&=\Big\{\sum_{n\in M(x,y)}\|z(x,n)+z(y,n)\|^q+\sum_{n\notin M(x,y)}\|x_n+y_n\|^q,\\
&\quad\sum_{n\in M(x,y)}\|z(x,n)-z(y,n)\|^q+\sum_{n\notin M(x,y)}\|x_n+y_n\|^q\Big\}\\
&=\Big\{\sum_{n\in M(x,y)}\|x_n+y_n\|^q+\sum_{n\notin M(x,y)}\|x_n+y_n\|^q,\\
&\quad\sum_{n\in M(x,y)}\|x_n-y_n\|^q+\sum_{n\notin M(x,y)}\|x_n+y_n\|^q\Big\}\\
&=\{\|x+y\|^q,\|x-y\|^q\}.
\end{aligned}$$

因此 $\tilde f$ 为满相位等距. 由定理 1.1 可知 $\tilde f$ 相位等价于一个线性满等距. 证毕. □

3 指标为 $1<p<q=\infty$ 的情形

令 $1<p<q=\infty$, $x\in S_{(\sum\ell_p)\ell_\infty}$, 定义

$$A(x):=\{y\in S_{(\sum\ell_p)\ell_\infty}:\max\{\|x-y\|,\|x+y\|\}=2\}.$$

引理 3.1 设 $x\in S_{(\sum\ell_p)\ell_\infty}$, 则存在唯一的 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $\|x_n\|=1$ 且不存在序列 $\{m_i\}$, $m_i\to\infty$ 使得 $\lim_{i\to\infty}\|x_{m_i}\|=1$ 当且仅当对于任意的 $y,z\in A(x)$ 有 $y\in A(z)$.

证明 "⇒" 假设 $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}\in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$, 存在唯一的 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $\|x_n\|=1$ 且不存在序列 $\{m_i\}$, $m_i\to\infty$ 使得 $\lim_{i\to\infty}\|x_{m_i}\|=1$.

对任意的 $y,z\in A(x)$, 存在 $m_1,m_2\in\mathbb{N}$, 使得 $\|x_{m_1}\pm y_{m_1}\|=\|x_{m_2}\pm z_{m_2}\|=2$. 由 ℓ_p 严格凸性知 $x_{m_1}=\pm y_{m_1}$ 和 $x_{m_2}=\pm z_{m_2}$. 根据 $\|x_{m_1}\|=\|x_{m_2}\|=1$ 和 n 为唯一指标使得 $\|x_n\|=1$, 可知 $m_1=m_2=n$. 因此 $x_n=\pm y_n=\pm z_n$, 从而 $y\in A(z)$.

"⇐" 采用反证法. 分两种情形讨论.

情形 1 假设存在 $n_1=n_2\in\mathbb{N}$ 使得 $\|x_{n_1}\|=\|x_{n_2}\|=1$. 令 $y_n=x_{n_1}$, $n=n_1$; $y_n=0$, $n\neq n_1$; $z_n=x_{n_2}$, $n=n_2$; $z_n=0$, $n\neq n_2$. 则 $y=(y_n)_{n=1}^{\infty}\in A(x)$, $z=(z_n)_{n=1}^{\infty}\in A(x)$, 但 $y\notin A(z)$. 矛盾.

情形 2 假设存在序列 $\{m_i\}$, $m_i\to\infty$ 使得 $\lim_{i\to\infty}\|x_{m_i}\|=1$. 令 $y_n=x_{m_{2i}}$, $n=m_{2i}$; $y_n=0$, $n\neq m_{2i}$; $z_n=x_{m_{2i+1}}$, $n=m_{2i+1}$; $z_n=0$, $n\neq m_{2i+1}$. 则 $y=(y_n)_{n=1}^{\infty}\in A(x)$, $z=(z_n)_{n=1}^{\infty}\in A(x)$, 但 $y\notin A(z)$. 矛盾. 证毕. □

引理 3.2 设 $f:S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}\to S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$ 为满相位等距, 则存在双射 τ, $\mu_i(i\in\mathbb{N}):\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 使得对任意的 $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}=((x_{(n,j)})_{j=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty}\in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$, 都有

$$x_{(n,j)}=\pm f(x)_{(\tau(n),\mu_n(j))},\quad \forall\, n,j\in\mathbb{N}.$$

证明 固定 $n\in\mathbb{N}$. 设 $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}\in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$, 满足 n 为唯一指标使得 $\|x_n\|=1$ 且不存在序列 $\{m_i\}$, $m_i\to\infty$ 使得 $\lim_{i\to\infty}\|x_{m_i}\|=1$. 由引理 3.1 知, 对任意的 $y,y'\in A(x)$, 有 $y\in A(y')$. 注意到 f 为双射, 则 $f(A(x))=A(f(x))$. 因此对任意的 $z,z'\in A(f(x))$, 有 $z\in A(z')$. 再由引理 3.1 知, 存在唯一的 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $\|f(x)_m\|=1$ 且不存在序列 $\{k_i\}$, $k_i\to\infty$ 使得 $\lim_{i\to\infty}\|f(x)_{k_i}\|=1$.

下面证明 m 与 x 的选择无关. 设 $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $y=(y_n)_{n=1}^{\infty}\in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$, 存在唯一的 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $\|x_n\|=\|y_n\|=1$ 且不存在序列 $\{m_i\}$ 和 $\{m_i'\}$, $m_i\to\infty$, $m_i'\to\infty$ 使得 $\lim_{i\to\infty}\|x_{m_i}\|=1$, $\lim_{i\to\infty}\|y_{m_i'}\|=1$. 由上述讨论知存在唯一的 $m_1,m_2\in\mathbb{N}$ 使得 $\|f(x)_{m_1}\|=\|f(y)_{m_2}\|=1$ 且不存在序列 $\{k_i\}$ 和 $\{k_i'\}$, $k_i\to\infty$, $k_i'\to\infty$ 使得 $\lim_{i\to\infty}\|f(x)_{k_i}\|=1$, $\lim_{i\to\infty}\|f(y)_{k_i'}\|=1$.

采用反证法. 假设 $m_1\neq m_2$. 给定 $n_0\in\mathbb{N}$, $x_0\in S_{\ell_p}$, 令

$$N(n_0,x_0):=\{x\in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}:x_{n_0}=\pm x_0\}.$$

由 $A(x)$ 和 $N(n,x_n)$ 定义知

$$A(x)=N(n,x_n),\quad A(f(x))=N(m_1,f(x)_{m_1}).$$

由 $f(A(x))=A(f(x))$ 知 $f(N(n,x_n))=N(m_1,f(x)_{m_1})$. 同理可知,

$$f(N(n,y_n))=N(m_2,f(y)_{m_2}).$$

因此,

$$\begin{aligned}
1&<\max\{\|x_n-y_n\|,\|x_n+y_n\|\}\\
&=\inf\{\max\{\|x'-y'\|,\|x'+y'\|\}:x'\in N(n,x_n),y'\in N(n,y_n)\}\\
&=\inf\{\max\{\|z-z'\|,\|z+z'\|\}:z\in N(m_1,f(x)_{m_1}),z'\in N(m_2,f(y)_{m_2})\}\\
&=1.
\end{aligned}$$

矛盾. 因此 $m_1 = m_2$, m 与 x 的选择无关. 定义

$$\tau(n) = m,$$

则 $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 为良定义的. 由 f 为双射知 τ 为双射. 下面证明, 对任意的 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$, $x_{n_0} = 0$ 当且仅当 $f(x)_{\tau(n_0)} = 0$. 假设 $x_{n_0} = 0$, 取 $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$ 满足 $\|y_{n_0}\| = 1$, 且 $y_n = 0, n \neq n_0$. 因此

$$\begin{aligned}
&\max\{\|f(x)_{\tau(n_0)} + f(y)_{\tau(n_0)}\|, \|f(x)_{\tau(n_0)} - f(y)_{\tau(n_0)}\|\} \\
&\quad \leqslant \max\{\|f(x) + f(y)\|, \|f(x) - f(y)\|\} \\
&\quad \leqslant \max\{\|x + y\|, \|x - y\|\} \\
&\quad = 1.
\end{aligned}$$

注意到 $\|f(y)_{\tau(n_0)}\| = 1$, 若

$$\min\{\|f(x)_{\tau(n_0)} - f(y)_{\tau(n_0)}\|, \|f(x)_{\tau(n_0)} + f(y)_{\tau(n_0)}\|\} < 1,$$

则

$$\max\{\|f(x)_{\tau(n_0)} - f(y)_{\tau(n_0)}\|, \|f(x)_{\tau(n_0)} + f(y)_{\tau(n_0)}\|\} > 1,$$

矛盾. 因此 $\|f(x)_{\tau(n_0)} + f(y)_{\tau(n_0)}\| = \|f(x)_{\tau(n_0)} - f(y)_{\tau(n_0)}\| = 1$. 这说明

$$\|f(x)_{\tau(n_0)} + f(y)_{\tau(n_0)}\| + \|f(y)_{\tau(n_0)} - f(x)_{\tau(n_0)}\| = 2\|f(y)_{\tau(n_0)}\|.$$

由 ℓ_p 是严格凸的可知, 存在常数 t, 使得 $f(x)_{\tau(n_0)} + f(y)_{\tau(n_0)} = t(f(y)_{\tau(n_0)} - f(x)_{\tau(n_0)})$. 由上述讨论知 $t = 1$, 可得 $f(x)_{\tau(n_0)} = 0$. 反之, 当 $f(x)_{\tau(n_0)} = 0$ 时, 由 f 为双射知 $x_{n_0} = 0$.

给定 $z \in S_{\ell_p}$, $i \in \mathbb{N}$, 令 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$, 其中, $x_n = z$, $n = i$; $x_n = 0$, $n \neq i$. 令

$$f_i(z) = f(x)_{\tau(i)},$$

则 $f_i : S_{\ell_p} \to S_{\ell_p}$ 为良定义的. 由 f 为单射知 f_i 为单射. 任取 $z \in S_{\ell_p}$, 令 $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$, 其中 $y_{\tau(i)} = z$; $y_n = 0$, $n \neq \tau(i)$. 由 f 为满射及上述讨论可知, 存在 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$, 满足 $x_i \in S_{\ell_p}$; $x_n = 0$, $n \neq i$, 使得 $f(x) = y$. 由 f_i 的定义知

$$f_i(x_i) = f(x)_{\tau(i)} = y_{\tau(i)} = z.$$

这说明 f_i 为满射. 任取 $z, z' \in S_{\ell_p}$, 令 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x' = (x'_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$, 其中 $x_i = z$, $x'_i = z'$; $x_n = x'_n = 0$, $n \neq i$. 注意到

$$f(N(i, z)) = f(A(x)) = A(f(x)) = N(\tau(i), f(x)_{\tau(i)}) = N(\tau(i), f_i(z)).$$

同理, $f(N(i, z')) = N(\tau(i), f_i(z'))$. 可得

$$\begin{aligned}
&\min\{\|z - z'\|, \|z + z'\|\} \\
&\quad = \inf\{\|u - v\| : u \in N(i, z), v \in N(i, z')\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \inf\{\|u'-v'\| : u' \in N(\tau(i), f_i(z)), v' \in N(\tau(i), f_i(z'))\} \\
&= \min\{\|f_i(z) - f_i(z')\|, \|f_i(z) + f_i(z')\|\}, \\
&\max\{\|z-z'\|,\ \|z+z'\|\} \\
&= \inf\{\|u+v\| : \|u-v\| = \min\{\|z-z'\|, \|z+z'\|\}, u \in N(i,z), v \in N(i,z')\} \\
&= \inf\{\|u'+v'\| : \|u'-v'\| = \min\{\|z-z'\|, \|z+z'\|\}, u' \in N(\tau(i), f_i(z)), v' \in N(\tau(i), f_i(z'))\} \\
&= \max\{\|f_i(z) - f_i(z')\|, \|f_i(z) + f_i(z')\|\}.
\end{aligned}
$$

这意味着 f_i 为双射相位等距. 由引理 2.7 知, 存在双射 $\mu_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 使得

$$
z_j = \pm f_i(z)_{\mu_i(j)}, \quad \forall\, z = (z_j)_{j=1}^{\infty} \in S_{\ell_p}, \quad j \in \mathbb{N}.
$$

令 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$. 对于任意的 $n_0 \in \mathbb{N}$, 若 $x_{n_0} = 0$, 则由以上讨论知 $f(x)_{\tau(n_0)} = 0$. 若 $x_{n_0} \neq 0$, 令 $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$, 其中 $y_{n_0} = \frac{x_{n_0}}{\|x_{n_0}\|}$; $y_n = 0$, $n \neq n_0$. 注意到

$$
f(N(n_0, y_{n_0})) = f(A(y)) = A(f(y)) = N(\tau(n_0), f(y)_{\tau(n_0)}) = N(\tau(n_0), f_{n_0}(y_{n_0})),
$$

则

$$
\begin{aligned}
1 + \|x_{n_0}\| &= \max\{\|y_{n_0} - x_{n_0}\|, \|y_{n_0} + x_{n_0}\|\} \\
&= \inf\{\max\{\|x-u\|, \|x+u\|\} : u \in N(n_0, y_{n_0})\} \\
&= \sup_{z \in S_{\ell_p}} \inf\{\max\{\|x-u\|, \|x+u\|\} : u \in N(n_0, z)\} \\
&= \sup_{f_{n_0}(z) \in S_{\ell_p}} \inf\{\max\{\|f(x)-v\|, \|f(x)+v\|\} : v \in N(\tau(n_0), f_{n_0}(z))\} \\
&= \left\| f(x)_{\tau(n_0)} + \frac{f(x)_{\tau(n_0)}}{\|f(x)_{\tau(n_0)}\|} \right\| = 1 + \|f(x)_{\tau(n_0)}\|.
\end{aligned}
$$

因此 $\|x_{n_0}\| = \|f(x)_{\tau(n_0)}\|$. 注意到

$$
\begin{aligned}
1 + \|f(x)_{\tau(n_0)}\| &= \inf\{\max\{\|x-u\|, \|x+u\|\} : u \in N(n_0, y_{n_0})\} \\
&= \inf\{\max\{\|f(x)-v\|, \|f(x)+v\|\} : v \in N(\tau(n_0), f_{n_0}(y_{n_0}))\} \\
&= \max\{\|f(x)_{\tau(n_0)} - f_{n_0}(y_{n_0})\|, \|f(x)_{\tau(n_0)} + f_{n_0}(y_{n_0})\|\}.
\end{aligned}
$$

由 ℓ_p 的严格凸性知 $f_{n_0}(y_{n_0}) = \pm \frac{f(x)_{\tau(n_0)}}{\|f(x)_{\tau(n_0)}\|}$. 因此

$$
x_{(n_0,j)} = \|x_{n_0}\| y_{(n_0,j)} = \pm \|x_{n_0}\| f_{n_0}(y_{n_0})_{\mu_{n_0}(j)} = \pm \|x_{n_0}\| \left(\frac{f(x)_{\tau(n_0)}}{\|f(x)_{\tau(n_0)}\|} \right)_{\mu_{n_0}(j)} = \pm f(x)_{(\tau(n_0), \mu_{n_0}(j))}.
$$

由 n_0 的任意性知, 对任意的 $n, j \in \mathbb{N}$, 都有

$$
x_{(n,j)} = \pm f(x)_{(\tau(n), \mu_n(j))}.
$$

证毕. □

引理 3.3 设 $f: S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}} \to S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$ 为满相位等距, 若 $x, y \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$ 且 $\mathrm{supp}(x) \cap \mathrm{supp}(y) = \emptyset$, 则存在 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 满足 $|\alpha| = |\beta| = 1$, 使得对于任意满足 $ax + by \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$ 的 $a, b > 0$, 都有

$$f(ax + by) = \alpha a f(x) + \beta b f(y).$$

证明 任取 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$, 令 $e^x = ((e^x)_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$, 其中

$$(e^x)_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}, \quad n \in \mathrm{supp}(x); \quad (e^x)_n = 0, \quad n \notin \mathrm{supp}(x).$$

设 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$ 满足 $\mathrm{supp}(x) \cap \mathrm{supp}(y) = \emptyset$. 下面证明, 对任意满足 $ax + by \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$ 的 $a, b > 0$, 总存在 $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ 满足 $|\alpha_1| = |\beta_1| = 1$, 使得

$$f(e^{ax+by}) = \alpha_1 a f(e^x) + \beta_1 b f(e^y).$$

给定 $n \in \mathbb{N}$, $0 \neq z \in S_{\ell_p}$, 令 $e(n, z) = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$, 其中 $\xi_n = \frac{z}{\|z\|}$; $\xi_i = 0$, $i \neq n$. 任取 $n \in \mathrm{supp}(x)$, 则 $e(n, x_n)_n = (e^x)_n = (e^{x+y})_n$. 由引理 3.2, 有

$$\begin{aligned}
2 &= \max\{\|e(n, x_n) - e^x\|, \|e(n, x_n) + e^x\|\} \\
&= \max\{\|f(e(n, x_n)) - f(e^x)\|, \|f(e(n, x_n)) + f(e^x)\|\} \\
&= \max\{\|f(e(n, x_n))_{\tau(n)} - f(e^x)_{\tau(n)}\|, \|f(e(n, x_n))_{\tau(n)} + f(e^x)_{\tau(n)}\|\}, \\
2 &= \max\{\|e(n, x_n) - e^{x+y}\|, \|e(n, x_n) + e^{x+y}\|\} \\
&= \max\{\|f(e(n, x_n)) - f(e^{x+y})\|, \|f(e(n, x_n)) + f(e^{x+y})\|\} \\
&= \max\{\|f(e(n, x_n))_{\tau(n)} - f(e^{x+y})_{\tau(n)}\|, \|f(e(n, x_n))_{\tau(n)} + f(e^{x+y})_{\tau(n)}\|\}.
\end{aligned}$$

由 ℓ_p 的严格凸性可知 $f(e(n, x_n))_{\tau(n)} = \pm f(e^x)_{\tau(n)}$ 和 $f(e(n, x_n))_{\tau(n)} = \pm f(e^{x+y})_{\tau(n)}$. 因此,

$$f(e^{x+y})_{\tau(n)} = \pm f(e^x)_{\tau(n)}, \quad \forall n \in \mathrm{supp}(x).$$

下面证明存在 $\alpha_1 \in \{-1, 1\}$ 使得

$$f(e^{x+y})_{\tau(n)} = \alpha_1 f(e^x)_{\tau(n)}, \quad \forall n \in \mathrm{supp}(x).$$

采用反证法. 假设存在 $n_1 \neq n_2 \in \mathrm{supp}(x)$ 使得 $f(e^{x+y})_{\tau(n_1)} = f(e^x)_{\tau(n_1)}$, $f(e^{x+y})_{\tau(n_2)} = -f(e^x)_{\tau(n_2)}$. 则有

$$\begin{aligned}
\{2, 2\} &= \{\|f(e_{x+y}) - f(e_x)\|, \|f(e_{x+y}) + f(e_x)\|\} \\
&= \{\|e_{x+y} - e_x\|, \|e_{x+y} + e_x\|\} \\
&= \{1, 2\},
\end{aligned}$$

矛盾. 因此存在 α_1 满足 $|\alpha_1| = 1$ 使得 $f(e^{x+y})_{\tau(n)} = \alpha_1 f(e^x)_{\tau(n)}$, $\forall n \in \mathrm{supp}(x)$. 同理, 对任意的 $n \in \mathrm{supp}(y)$, 存在 β_1 满足 $|\beta_1| = 1$ 使得 $f(e^{x+y})_{\tau(n)} = \beta_1 f(e^y)_{\tau(n)}$, $\forall n \in \mathrm{supp}(y)$. 因此

$$f(e^{ax+by}) = f(e^{x+y}) = \alpha_1 f(e^x) + \beta_1 f(e^y). \tag{3.1}$$

任取 $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}\in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$, $n\in \mathrm{supp}(x)$. 令 $y=e(n,x_n)$, 则 $y_n=(e^x)_n=\frac{x_n}{\|x_n\|}$. 由引理 3.2, 有

$$\begin{aligned}1+\|x_n\|&=\max\{\|y_n-x_n\|,\|y_n+x_n\|\}\\&=\max\{\|y-x\|,\|y+x\|\}\\&=\max\{\|f(y)-f(x)\|,\|f(y)+f(x)\|\}\\&=\max\{\|f(y)_{\tau(n)}-f(x)_{\tau(n)}\|,\|f(y)_{\tau(n)}+f(x)_{\tau(n)}\|\},\\2&=\max\{\|y_n-(e^x)_n\|,\|y_n+(e^x)_n\|\}\\&=\max\{\|y-e^x\|,\|y+e^x\|\}\\&=\max\{\|f(y)-f(e^x)\|,\|f(y)+f(e^x)\|\}\\&=\max\{\|f(y)_{\tau(n)}-f(e^x)_{\tau(n)}\|,\|f(y)_{\tau(n)}+f(e^x)_{\tau(n)}\|\}.\end{aligned}$$

由 ℓ_p 的严格凸性知 $f(y)_{\tau(n)}=\pm\frac{f(x)_{\tau(n)}}{\|f(x)_{\tau(n)}\|}=\pm(e^{f(x)})_{\tau(n)}$ 和 $f(y)_{\tau(n)}=\pm f(e^x)_{\tau(n)}$. 因此,

$$(e^{f(x)})_{\tau(n)}=\pm f(e^x)_{\tau(n)},\quad \forall\, n\in\mathrm{supp}(x).$$

下面证明 $e^{f(x)}=\pm f(e^x)$. 采用反证法, 假设存在 $m_1\neq m_2\in\mathrm{supp}(f(x))$ 使得

$$(e^{f(x)})_{m_1}=f(e^x)_{m_1},\quad (e^{f(x)})_{m_2}=-f(e^x)_{m_2}.$$

则有

$$\begin{aligned}1&<\min\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f(x)_{\tau(n)}-f(e^x)_{\tau(n)}\|,\ \sup_{n\in\mathbb{N}}\|f(x)_{\tau(n)}+f(e^x)_{\tau(n)}\|\right\}\\&=\min\{\|f(x)-f(e^x)\|,\|f(x)+f(e^x)\|\}\\&=\min\{\|x-e^x\|,\|x+e^x\|\}\\&=1-\inf\|x_n\|.\end{aligned}$$

矛盾. 因此

$$e^{f(x)}=\pm f(e^x). \tag{3.2}$$

一方面, 由 (3.1) 和 (3.2) 可知, 存在 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 满足 $|\alpha|=|\beta|=1$, 使得

$$e^{f(ax+by)}=\alpha e^{f(x)}+\beta e^{f(y)}=e^{\alpha f(x)+\beta f(y)}=e^{\alpha a f(x)+\beta b f(y)}.$$

另一方面, 由引理 3.2 及 $\mathrm{supp}(x)\cap\mathrm{supp}(y)=\emptyset$ 知

$$|(\alpha a f(x)+\beta b f(y))_{(\tau(n),\mu_n(j))}|=|(ax+by)_{(n,j)}|=|f(ax+by)_{(\tau(n),\mu_n(j))}|,\quad \forall\, n,j\in\mathbb{N}.$$

因此 $\|(\alpha a f(x)+\beta b f(y))_{\tau(n)}\|=\|f(ax+by)_{\tau(n)}\|$, 从而有

$$f(ax+by)=\alpha a f(x)+\beta b f(y).$$

证毕. □

定理 3.1 设 $f: S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}} \to S_{(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}}$ 为满相位等距. 则 f 可以延拓为从 $(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}$ 到其自身的满相位等距 $\tilde{f}$, 并且 $\tilde{f}$ 相位等价于一个线性满等距.

证明 令

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \|x\| f\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

下面证明 $\tilde{f}$ 即为所要求的映射. 容易看到 $\tilde{f}$ 是保范的. 与定理 2.1 的证明类似, 利用引理 3.3, 可以验证 $\tilde{f}$ 是 f 的齐次延拓, 且对任意满足 $\operatorname{supp}(x) \cap \operatorname{supp}(y) = \emptyset$ 的 $x, y \in (\sum \ell_p)_{\ell_\infty}$, 都存在 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ 满足 $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$, 使得

$$\tilde{f}(x+y) = \alpha \tilde{f}(x) + \beta \tilde{f}(y), \tag{3.3}$$

$$\tilde{f}(x-y) = \gamma(\alpha \tilde{f}(x) - \beta \tilde{f}(y)). \tag{3.4}$$

接下来证明, 对任意的 $x, y \in (\sum \ell_p)_{\ell_\infty}$, 若存在 $h \in \mathbb{N}$ 使得 $h \notin \operatorname{supp}(x) \cup \operatorname{supp}(y)$, 则

$$\{\|x+y\|, \|x-y\|\} = \{\|\tilde{f}(x) + \tilde{f}(y)\|, \|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\|\}.$$

令 $t > \|x\| + \|y\|$, 则 $\|x + te^{(h,h)}\| = \|y + te^{(h,h)}\| = t$. 由 (3.3) 知, 存在 $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \{-1, 1\}$, 使得

$$\tilde{f}(x + te^{(h,h)}) = \alpha \tilde{f}(x) + \beta \tilde{f}(te^{(h,h)}),$$
$$\tilde{f}(y + te^{(h,h)}) = \alpha' \tilde{f}(y) + \beta' \tilde{f}(te^{(h,h)}).$$

由 (3.3), (3.4) 及 $\tilde{f}$ 的保范性, 有

$$\begin{aligned}
&\{2t, \|x-y\|\} \\
&\quad = \{\|x + y + 2te^{(h,h)}\|, \|x-y\|\} \\
&\quad = \left\{t\left\|\tilde{f}\left(\frac{x+te^{(h,h)}}{t}\right) + \tilde{f}\left(\frac{y+te^{(h,h)}}{\|t\|}\right)\right\|, t\left\|\tilde{f}\left(\frac{x+te^{(h,h)}}{\|t\|}\right) - \tilde{f}\left(\frac{y+te^{(h,h)}}{\|t\|}\right)\right\|\right\} \\
&\quad = \{\|\tilde{f}(x + te^{(h,h)}) + \tilde{f}(y + te^{(h,h)})\|, \|\tilde{f}(x + te^{(h,h)}) - \tilde{f}(y + te^{(h,h)})\|\} \\
&\quad = \{\|\alpha \tilde{f}(x) + \beta \tilde{f}(te^{(h,h)}) + \alpha' \tilde{f}(y) + \beta' \tilde{f}(te^{(h,h)})\|, \|\alpha \tilde{f}(x) + \beta \tilde{f}(te^{(h,h)}) - \alpha' \tilde{f}(y) - \beta' \tilde{f}(te^{(h,h)})\|\} \\
&\quad = \{\|\tilde{f}(x) - \alpha\beta\alpha'\beta' \tilde{f}(y)\|, 2t\}, \\
&\{2t, \|x+y\|\} \\
&\quad = \{\|x - y + 2te^{(h,h)}\|, \|x+y\|\} \\
&\quad = \left\{t\left\|\tilde{f}\left(\frac{x+te^{(h,h)}}{t}\right) + \tilde{f}\left(\frac{y-te^{(h,h)}}{\|t\|}\right)\right\|, t\left\|\tilde{f}\left(\frac{x+te^{(h,h)}}{\|t\|}\right) - \tilde{f}\left(\frac{y-te^{(h,h)}}{\|t\|}\right)\right\|\right\} \\
&\quad = \{\|\tilde{f}(x + te^{(h,h)}) + \tilde{f}(y - te^{(h,h)})\|, \|\tilde{f}(x + te^{(h,h)}) - \tilde{f}(y - te^{(h,h)})\|\} \\
&\quad = \{\|\alpha \tilde{f}(x) + \beta \tilde{f}(te^{(h,h)}) + \alpha' \tilde{f}(y) - \beta' \tilde{f}(te^{(h,h)})\|, \|\alpha \tilde{f}(x) + \beta \tilde{f}(te^{(h,h)}) - \alpha' \tilde{f}(y) + \beta' \tilde{f}(te^{(h,h)})\|\} \\
&\quad = \{\|\tilde{f}(x) + \alpha\beta\alpha'\beta' \tilde{f}(y)\|, 2t\}.
\end{aligned}$$

因此,

$$\{\|x+y\|, \|x-y\|\} = \{\|\tilde{f}(x) + \tilde{f}(y)\|, \|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\|\}.$$

对 $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $y=(y_n)_{n=1}^{\infty}\in(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}$, 固定 $m\in\mathbb{N}$, 令

$$z(x,m)_n=\begin{cases}x_m, & n=m,\\ 0, & n\neq m,\end{cases}$$

则 $z(x,m)=(z(x,m)_n)_{n=1}^{\infty}\in(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}$.

下面证明 $\tilde{f}$ 为满相位等距, 由 f 为满射易知 $\tilde{f}$ 为满射. 任取 $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $y=(y_n)_{n=1}^{\infty}\in(\sum \ell_p)_{\ell_\infty}$, 由引理 3.2 及 $\tilde{f}$ 定义知, 对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 若 $x_n=0$, 则

$$\tilde{f}(x)_{\tau(n)}=0=\tilde{f}(z(x,n))_{\tau(n)}.$$

若 $x_n\neq 0$, 但 $x=z(x,n)$, 此时

$$\tilde{f}(x)_{\tau(n)}=\tilde{f}(z(x,n))_{\tau(n)}.$$

若 $x_n\neq 0$, 且 $x\neq z(x,n)$, 此时

$$\tau(n)\in\operatorname{supp}\left(f\left(\frac{z(x,n)}{\|z(x,n)\|}\right)\right)=\operatorname{supp}(\tilde{f}(z(x,n)))$$

且

$$\tau(n)\notin\operatorname{supp}\left(f\left(\frac{x-z(x,n)}{\|x-z(x,n)\|}\right)\right)=\operatorname{supp}(\tilde{f}(x-z(x,n))).$$

结合 (3.3) 可知, 存在 $\alpha(x,\tau(n)),\beta(x,\tau(n))\in\mathbb{R}$ 满足 $|\alpha(x,\tau(n))|=|\beta(x,\tau(n))|=1$, 使得

$$\tilde{f}(x)_{\tau(n)}=(\alpha(x,\tau(n))\tilde{f}(z(x,n))+\beta(x,\tau(n))\tilde{f}(x-z(x,n)))_{\tau(n)}=\alpha(x,\tau(n))\tilde{f}(z(x,n))_{\tau(n)}.$$

因此, 存在一列 $\alpha(x,n)\in\mathbb{R}$ 满足 $|\alpha(x,n)|=1$, 使得

$$\tilde{f}(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha(x,n)\tilde{f}(z(x,n)).$$

同理, 存在一列 $\alpha(y,n)\in\mathbb{R}$ 满足 $|\alpha(y,n)|=1$, 使得

$$\tilde{f}(y)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha(y,n)\tilde{f}(z(y,n)).$$

注意到, 对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 都存在某个 $h\in\mathbb{N}$ 使得 $h\notin\operatorname{supp}(z(x,n))\cup\operatorname{supp}(z(y,n))$, 由上述讨论知

$$\{\|z(x,n)+z(y,n)\|,\|z(x,n)-z(y,n)\|\}=\{\|\tilde{f}(z(x,n))+\tilde{f}(z(y,n))\|,\|\tilde{f}(z(x,n))-\tilde{f}(z(y,n))\|\}.$$

因此存在 $\beta(x,y,n)\in\{-1,1\}$ 使得 $\|z(x,n)+z(y,n)\|=\|\tilde{f}(z(x,n))+\beta(x,y,n)\tilde{f}(z(y,n))\|$.

若 $\|x-y\|=\|x+y\|$, 则存在 $m\in\mathbb{N}$, 使得

$$\begin{aligned}\|x-z(x,m)+y-z(y,m)\|&=\|x+y\|,\\ \|x-z(x,m)-y+z(y,m)\|&=\|x-y\|.\end{aligned}$$

令 $w_1=x-z(x,m)$, $w_2=y-z(y,m)$. 由 (3.3) 知存在 $\alpha(x),\beta(x),\alpha(y),\beta(y)\in\{-1,1\}$ 使得

$$\tilde{f}(x)=\alpha(x)\tilde{f}(w_1)+\beta(x)\tilde{f}(z(x,m)),$$

$$\tilde{f}(y)=\alpha(y)\tilde{f}(w_2)+\beta(y)\tilde{f}(z(y,m)).$$

注意到 $m\notin \mathrm{supp}(w_1)\cup \mathrm{supp}(w_2)$, 因此

$$\begin{aligned}
&\{\|\tilde{f}(x)+\tilde{f}(y)\|,\|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)\|\}\\
&\quad=\{\|\alpha(x)\tilde{f}(w_1)+\beta(x)\tilde{f}(z(x,m))+\alpha(y)\tilde{f}(w_2)+\beta(y)\tilde{f}(z(y,m))\|,\\
&\qquad\|\alpha(x)\tilde{f}(w_1)+\beta(x)\tilde{f}(z(x,m))-\alpha(y)\tilde{f}(w_2)-\beta(y)\tilde{f}(z(y,m))\|\}\\
&\quad=\{\max\{\|\alpha(x)\tilde{f}(w_1)+\alpha(y)\tilde{f}(w_2)\|,\|\beta(x)\tilde{f}(z(x,m))+\beta(y)\tilde{f}(z(y,m))\|\},\\
&\qquad\max\{\|\alpha(x)\tilde{f}(w_1)-\alpha(y)\tilde{f}(w_2)\|,\|\beta(x)\tilde{f}(z(x,m))-\beta(y)\tilde{f}(z(y,m))\|\}\}\\
&\quad=\{\|w_1+w_2\|,\|w_1-w_2\|\}\\
&\quad=\{\|x-y\|,\|x+y\|\}.
\end{aligned}$$

因此假设 $\|x-y\|\neq\|x+y\|$, 不妨设 $\|x+y\|>\|x-y\|$, $\|x+y\|<\|x-y\|$ 的情况可以类似讨论. 下面分两种情形进行说明.

情形 1 存在 $m\in\mathbb{N}$ 满足 $\|x_m+y_m\|\leqslant\|x-y\|$ 并且

$$\|x+y-z(x,m)-z(y,m)\|=\|x+y\|,\quad \|x-y-z(x,m)+z(y,m)\|=\|x-y\|.$$

令 $w_1=x-z(x,m)$, $w_2=y-z(y,m)$. 由 (3.3) 知存在 $\alpha(x),\beta(x),\alpha(y),\beta(y)\in\{-1,1\}$ 使得

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x)&=\alpha(x)\tilde{f}(w_1)+\beta(x)\tilde{f}(z(x,m)),\\
\tilde{f}(y)&=\alpha(y)\tilde{f}(w_2)+\beta(y)\tilde{f}(z(y,m)).
\end{aligned}$$

注意到 $m\notin \mathrm{supp}(w_1)\cup \mathrm{supp}(w_2)$, 因此

$$\begin{aligned}
&\{\|\tilde{f}(x)+\tilde{f}(y)\|,\|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)\|\}\\
&\quad=\{\|\alpha(x)\tilde{f}(w_1)+\beta(x)\tilde{f}(z(x,m))+\alpha(y)\tilde{f}(w_2)+\beta(y)\tilde{f}(z(y,m))\|,\\
&\qquad\|\alpha(x)\tilde{f}(w_1)+\beta(x)\tilde{f}(z(x,m))-\alpha(y)\tilde{f}(w_2)-\beta(y)\tilde{f}(z(y,m))\|\}\\
&\quad=\{\max\{\|\alpha(x)\tilde{f}(w_1)+\alpha(y)\tilde{f}(w_2)\|,\|\beta(x)\tilde{f}(z(x,m))+\beta(y)\tilde{f}(z(y,m))\|\},\\
&\qquad\max\{\|\alpha(x)\tilde{f}(w_1)-\alpha(y)\tilde{f}(w_2)\|,\|\beta(x)\tilde{f}(z(x,m))-\beta(y)\tilde{f}(z(y,m))\|\}\}\\
&\quad=\{\|w_1+w_2\|,\|w_1-w_2\|\}\\
&\quad=\{\|x-y\|,\|x+y\|\}.
\end{aligned}$$

情形 2 不存在 $m\in\mathbb{N}$ 满足 $\|x_m+y_m\|\leqslant\|x-y\|$ 并且

$$\|x+y-z(x,m)-z(y,m)\|=\|x+y\|,\quad \|x-y-z(x,m)+z(y,m)\|=\|x-y\|.$$

令

$$\begin{aligned}
A&:=\{n\in\mathbb{N}:\|x_n+y_n\|>\|x-y\|\},\\
B&:=\{n\in\mathbb{N}:\|x_n-y_n\|=\|x-y\|\ \text{且}\ \|x_n+y_n\|<\|x-y\|\},\\
C&:=\{n\in\mathbb{N}:\|x_n+y_n\|=\|x_n-y_n\|=\|x-y\|\}.
\end{aligned}$$

由假设可知, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 若 $\|x_n - y_n\| \neq \|x - y\|$, 则 $\|x_n + y_n\| > \|x - y\|$. 因此 $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$.

我们断言 B 中至多存在一个元素. 假设存在 $n_0, n_1 \in B$, 则 $\|x_{n_0} + y_{n_0}\| < \|x - y\| < \|x + y\|$. 因此

$$\|x + y - z(x, n_0) - z(y, n_0)\| = \|x + y\|.$$

另外, 由 $n_1 \in B$ 可知

$$\|x - y - z(x, n_0) + z(y, n_0)\| = \|x_{n_1} - y_{n_1}\| = \|x - y\|.$$

与情形 2 的假设矛盾.

下面证明

$$\alpha(x, m)\alpha(y, m)\beta(x, y, m) = \alpha(x, n)\alpha(y, n)\beta(x, y, n), \quad \forall\, m, n \in A. \tag{3.5}$$

任取 $m_1, m_2 \in A$, 令 $x' = z(x, m_1) + z(x, m_2)$, $y' = z(y, m_1) + z(y, m_2)$. 由 (3.3) 知存在 $\alpha(x', m_i)$, $\alpha(y', m_i) \in \{-1, 1\}$, $i = 1, 2$, 使得

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x') &= \alpha(x', m_1)\tilde{f}(z(x, m_1)) + \alpha(x', m_2)\tilde{f}(z(x, m_2)),\\
\tilde{f}(y') &= \alpha(y', m_1)\tilde{f}(z(y, m_1)) + \alpha(y', m_2)\tilde{f}(z(y, m_2)).
\end{aligned}$$

我们断言 $\alpha(x', m_1)\alpha(y', m_1)\beta(x, y, m_1) = \alpha(x', m_2)\alpha(y', m_2)\beta(x, y, m_2)$, 否则

$$\alpha(x', m_1)\alpha(y', m_1)\beta(x, y, m_1) = -\alpha(x', m_2)\alpha(y', m_2)\beta(x, y, m_2).$$

注意到存在某个 $h \in \mathbb{N}$ 使得 $h \notin \operatorname{supp}(x') \cup \operatorname{supp}(y')$, 由以上讨论知

$$\{\|x' + y'\|, \|x' - y'\|\} = \{\|\tilde{f}(x') + \tilde{f}(y')\|, \|\tilde{f}(x') - \tilde{f}(y')\|\}.$$

因此

$$\begin{aligned}
&\{\max\{\|x_{m_1} + y_{m_1}\|, \|x_{m_2} + y_{m_2}\|\}, \max\{\|x_{m_1} - y_{m_1}\|, \|x_{m_2} - y_{m_2}\|\}\}\\
&\quad = \{\|x' + y'\|, \|x' - y'\|\}\\
&\quad = \{\|\tilde{f}(x') + \tilde{f}(y')\|, \|\tilde{f}(x') - \tilde{f}(y')\|\}\\
&\quad = \Big\{\Big\|\sum_{i=1,2} \alpha(x', m_i)\tilde{f}(z(x, m_i)) + \alpha(y', m_i)\tilde{f}(z(y, m_i))\Big\|,\\
&\qquad \Big\|\sum_{i=1,2} \alpha(x', m_i)\tilde{f}(z(x, m_i)) - \alpha(y', m_i)\tilde{f}(z(y, m_i))\Big\|\Big\}\\
&\quad = \Big\{\max_{i=1,2}\{\|\tilde{f}(z(x, m_i)) + \alpha(x', m_i)\alpha(y', m_i)\tilde{f}(z(y, m_i))\|\},\\
&\qquad \max_{i=1,2}\{\|\tilde{f}(z(x, m_i)) - \alpha(x', m_i)\alpha(y', m_i)\tilde{f}(z(y, m_i))\|\}\Big\}\\
&\quad = \{\max\{\|\tilde{f}(z(x, m_1)) + \beta(x, y, m_1)\tilde{f}(z(y, m_1))\|, \|\tilde{f}(z(x, m_2)) - \beta(x, y, m_2)\tilde{f}(z(y, m_2))\|\},\\
&\qquad \max\{\|\tilde{f}(z(x, m_1)) - \beta(x, y, m_1)\tilde{f}(z(y, m_1))\|, \|\tilde{f}(z(x, m_2)) + \beta(x, y, m_2)\tilde{f}(z(y, m_2))\|\}\}\\
&\quad = \{\max\{\|x_{m_1} + y_{m_1}\|, \|x_{m_2} - y_{m_2}\|\}, \max\{\|x_{m_1} - y_{m_1}\|, \|x_{m_2} + y_{m_2}\|\}\}
\end{aligned}$$

$$= \{\|x_{m_1} + y_{m_1}\|, \|x_{m_2} + y_{m_2}\|\}. \tag{3.6}$$

注意 $m_1, m_2 \in A$, 这意味着 (3.6) 不可能成立. 由 A 定义知

$$\|x_{m_1} + y_{m_1}\| > \max\{\|x_{m_1} - y_{m_1}\|, \|x_{m_2} - y_{m_2}\|\},$$
$$\|x_{m_2} + y_{m_2}\| > \max\{\|x_{m_1} - y_{m_1}\|, \|x_{m_2} - y_{m_2}\|\}.$$

与 (3.6) 矛盾. 因此, 有

$$\alpha(x', m_1)\alpha(y', m_1)\beta(x, y, m_1) = \alpha(x', m_2)\alpha(y', m_2)\beta(x, y, m_2).$$

由 (3.3) 及以上讨论知, 存在 $\alpha_0, \alpha_1 \in \{-1, 1\}$, 使得

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n \neq m_1, m_2} \alpha(x, n)\tilde{f}(z(x, n)) + \alpha_0 \tilde{f}(x'),$$
$$\tilde{f}(y) = \sum_{n \neq m_1, m_2} \alpha(y, n)\tilde{f}(z(y, n)) + \alpha_1 \tilde{f}(y').$$

因此

$$\alpha(x, m_1) = \alpha_0\alpha(x', m_1), \alpha(x, m_2) = \alpha_0\alpha(x', m_2),$$
$$\alpha(y, m_1) = \alpha_1\alpha(y', m_1), \alpha(y, m_2) = \alpha_1\alpha(y', m_2).$$

从而 $\alpha(x, m_1)\alpha(y, m_1)\beta(x, y, m_1) = \alpha(x, m_2)\alpha(y, m_2)\beta(x, y, m_2)$, (3.5) 成立.

注意到 B 中至多存在一个元素. 下面证明, 若 $m_1 \in B \neq \emptyset$, 则

$$\alpha(x, m)\alpha(y, m)\beta(x, y, m) = \alpha(x, m_1)\alpha(y, m_1)\beta(x, y, m_1), \quad \forall m \in A. \tag{3.7}$$

假设 $m_1 \in B$, 由 B 定义知

$$\|x_{m_1} - y_{m_1}\| = \|x - y\|, \quad \|x_{m_1} + y_{m_1}\| < \|x - y\|.$$

我们断言, 对 $n \in A$, 都有 $\|x_n - y_n\| < \|x - y\|$. 否则存在 $n_0 \in A$, 使得 $\|x_{n_0} - y_{n_0}\| = \|x - y\|$. 进而 $\|x_{m_1} + y_{m_1}\| \leqslant \|x - y\|$ 且

$$\|x + y - z(x, m_1) - z(y, m_1)\| = \|x + y\|, \quad \|x - y - z(x, m_1) + z(y, m_1)\| = \|x - y\|,$$

与假设矛盾.

由以上讨论知, 任取 $m_2 \in A$, 有

$$\|x_{m_2} - y_{m_2}\| < \|x - y\|, \quad \|x_{m_2} + y_{m_2}\| > \|x - y\|.$$

令 $x' = z(x, m_1) + z(x, m_2)$, $y' = z(y, m_1) + z(y, m_2)$. 由 (3.3) 知, 存在 $\alpha(x', m_i), \alpha(y', m_i) \in \{-1, 1\}$, $i = 1, 2$, 使得

$$\tilde{f}(x') = \alpha(x', m_1)\tilde{f}(z(x, m_1)) + \alpha(x', m_2)\tilde{f}(z(x, m_2)),$$
$$\tilde{f}(y') = \alpha(y', m_1)\tilde{f}(z(y, m_1)) + \alpha(y', m_2)\tilde{f}(z(y, m_2)).$$

我们断言 $\alpha(x',m_1)\alpha(y',m_1)\beta(x,y,m_1)=\alpha(x',m_2)\alpha(y',m_2)\beta(x,y,m_2)$, 否则

$$\alpha(x',m_1)\alpha(y',m_1)\beta(x,y,m_1)=-\alpha(x',m_2)\alpha(y',m_2)\beta(x,y,m_2).$$

注意到存在 $h\in\mathbb{N}$ 使得 $h\notin \operatorname{supp}(x')\cup\operatorname{supp}(y')$, 由以上讨论知

$$\{\|x'+y'\|,\|x'-y'\|\}=\{\|\tilde{f}(x')+\tilde{f}(y')\|,\|\tilde{f}(x')-\tilde{f}(y')\|\}.$$

因此

$$\begin{aligned}
&\{\|x_{m_2}+y_{m_2}\|,\|x-y\|\}\\
&\quad=\{\max\{\|x_{m_1}+y_{m_1}\|,\|x_{m_2}+y_{m_2}\|\},\max\{\|x_{m_1}-y_{m_1}\|,\|x_{m_2}-y_{m_2}\|\}\}\\
&\quad=\{\|x'+y'\|,\|x'-y'\|\}\\
&\quad=\{\|\tilde{f}(x')+\tilde{f}(y')\|,\|\tilde{f}(x')-\tilde{f}(y')\|\}\\
&\quad=\Big\{\Big\|\sum_{i=1,2}\alpha(x',m_i)\tilde{f}(z(x,m_i))+\alpha(y',m_i)\tilde{f}(z(y,m_i))\Big\|,\\
&\qquad\Big\|\sum_{i=1,2}\alpha(x',m_i)\tilde{f}(z(x,m_i))-\alpha(y',m_i)\tilde{f}(z(y,m_i))\Big\|\Big\}\\
&\quad=\Big\{\max_{i=1,2}\{\|\tilde{f}(z(x,m_i))+\alpha(x',m_i)\alpha(y',m_i)\tilde{f}(z(y,m_i))\|\},\\
&\qquad\max_{i=1,2}\{\|\tilde{f}(z(x,m_i))-\alpha(x',m_i)\alpha(y',m_i)\tilde{f}(z(y,m_i))\|\}\Big\}\\
&\quad=\{\max\{\|\tilde{f}(z(x,m_1))+\beta(x,y,m_1)\tilde{f}(z(y,m_1))\|,\|\tilde{f}(z(x,m_2))-\beta(x,y,m_2)\tilde{f}(z(y,m_2))\|\},\\
&\qquad\max\{\|\tilde{f}(z(x,m_1))-\beta(x,y,m_1)\tilde{f}(z(y,m_1))\|,\|\tilde{f}(z(x,m_2))+\beta(x,y,m_2)\tilde{f}(z(y,m_2))\|\}\}\\
&\quad=\{\max\{\|x_{m_1}+y_{m_1}\|,\|x_{m_2}-y_{m_2}\|\},\max\{\|x_{m_1}-y_{m_1}\|,\|x_{m_2}+y_{m_2}\|\}\}\\
&\quad=\{\max\{\|x_{m_1}+y_{m_1}\|,\|x_{m_2}-y_{m_2}\|\},\|x_{m_2}+y_{m_2}\|\}.
\end{aligned}$$

这与 $\max\{\|x_{m_1}+y_{m_1}\|,\|x_{m_2}-y_{m_2}\|\}<\|x-y\|$ 矛盾.

根据 (3.3), 可知存在 $\alpha_0,\alpha_1\in\{-1,1\}$, 使得

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x)&=\sum_{n\neq m_1,m_2}\alpha(x,n)\tilde{f}(z(x,n))+\alpha_0\tilde{f}(x'),\\
\tilde{f}(y)&=\sum_{n\neq m_1,m_2}\alpha(y,n)\tilde{f}(z(y,n))+\alpha_1\tilde{f}(y').
\end{aligned}$$

因此

$$\alpha(x,m_1)=\alpha_0\alpha(x',m_1),\alpha(x,m_2)=\alpha_0\alpha(x',m_2),\quad \alpha(y,m_1)=\alpha_1\alpha(y',m_1),\alpha(y,m_2)=\alpha_1\alpha(y',m_2),$$

(3.7) 成立.

由 (3.5) 和 (3.7) 知

$$\begin{aligned}
&\{\|\tilde{f}(x)+\tilde{f}(y)\|,\|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)\|\}\\
&\quad=\Big\{\sup_{n\in A\cup B\cup C}\|\alpha(x,n)\tilde{f}(z(x,n))+\alpha(y,n)\tilde{f}(z(y,n))\|,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\sup_{n\in A\cup B\cup C}\|\alpha(x,n)\tilde{f}(z(x,n))-\alpha(y,n)\tilde{f}(z(y,n))\|\Big\}\\
=&\Big\{\max\Big\{\sup_{n\in A\cup B}\|\alpha(x,n)\tilde{f}(z(x,n))+\alpha(y,n)\tilde{f}(z(y,n))\|,\|x-y\|\Big\},\\
&\max\Big\{\sup_{n\in A\cup B}\|\alpha(x,n)\tilde{f}(z(x,n))-\alpha(y,n)\tilde{f}(z(y,n))\|,\|x-y\|\Big\}\Big\},\\
=&\Big\{\max\Big\{\sup_{n\in A\cup B}\|\beta(x,y,n)\tilde{f}(z(x,n))+\tilde{f}(z(y,n))\|,\|x-y\|\Big\},\\
&\max\Big\{\sup_{n\in A\cup B}\|\beta(x,y,n)\tilde{f}(z(x,n))-\tilde{f}(z(y,n))\|,\|x-y\|\Big\}\Big\}\\
=&\Big\{\max\Big\{\sup_{n\in A\cup B}\|z(x,n)+z(y,n)\|,\|x-y\|\Big\},\max\Big\{\sup_{n\in A\cup B}\|z(x,n)-z(y,n)\|,\|x-y\|\Big\}\Big\}\\
=&\{\|x+y\|,\|x-y\|\}
\end{aligned}
$$

因此 $\tilde{f}$ 为满相位等距. 由定理 1.1 可知 $\tilde{f}$ 相位等价于一个线性满等距. 证毕. □

下述问题仍待解决:

问题 3.1 当 $p=1$ 且 $q=\infty$, $q=1$ 且 $p=\infty$, $1<p<q\leqslant 2$ 或 $2\leqslant q<p<\infty$ 时, 任意的满相位等距 $f: S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}\to S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$ 是否可以延拓为从 $(\sum \ell_p)_{\ell_q}$ 到它自身的满相位等距 $\tilde{f}$?

致谢 诚挚地感谢审稿专家对本文的辛勤付出.

参考文献

1 Ding G G. The isometric extension problem in the unit spheres of $\ell^p(\Gamma)$ $(p>1)$ type spaces. Sci China Ser A, 2003, 46: 333–338
2 Ding G G. The representation theorem of onto isometric mappings between two unit spheres of $\ell^1(\Gamma)$ type spaces and the application to the isometric extension problem. Acta Math Sin (Engl Ser), 2004, 20: 1089–1094
3 Ding G G. The representation theorem of onto isometric mappings between two unit spheres of ℓ^∞-type spaces and the application on isometric extension problem. Sci China Ser A, 2004, 47: 722–729
4 Ding G G. On isometric extension problem between two unit spheres. Sci China Ser A, 2009, 52: 2069–2083
5 Huang X J, Jin X H. Extension of phase-isometries between the unit spheres of atomic L_p-spaces for $p>0$. Bull Korean Math Soc, 2019, 56: 1377–1384
6 Huang X J, Tan D N. Wigner's theorem in atomic L_p-spaces $(p>0)$. Publ Math Debrecen, 2018, 92: 411–418
7 Ilišević D, Omladič M, Turnšek A. Phase-isometries between normed spaces. Linear Algebra Appl, 2021, 612: 99–111
8 Li Y X, Tan D N. Wigner's theorem on the Tsirelson space T. Ann Funct Anal, 2019, 10: 515–524
9 Maksa G, Páles Z. Wigner's theorem revisited. Publ Math Debrecen, 2012, 81: 243–249
10 Mazur S, Ulam S. Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés. C R Acad Sci Paris, 1932, 194: 946–948
11 Peralta A M. A survey on Tingley's problem for operator algebras. Acta Sci Math (Szeged), 2018, 84: 81–123
12 Sun L F, Sun Y H, Li L, et al. On extension of isometries between the positive unit spheres of $(\sum \ell_p)_{\ell_q}$. Positivity, 2024, 28: 1–31
13 Tan D N, Gao Y L. Phase-isometries on the unit sphere of $C(K)$. Ann Funct Anal, 2021, 12: 1–14
14 Tan D N, Huang X J. Phase-isometries on real normed spaces. J Math Anal Appl, 2020, 488: 124058
15 Tan D N, Xiong X L. A note on Tingley's problem and Wigner's theorem in the unit sphere of $\mathcal{L}^\infty(\Gamma)$-type spaces. Quaest Math, 2021, 44: 1209–1217
16 Tan D N, Zhang F, Huang X J. Phase-isometries on the unit sphere of CL-spaces. J Math Anal Appl, 2023, 527: 127568
17 Tingley D. Isometries of the unit sphere. Geom Dedicata, 1987, 22: 371–378
18 Wang R D, Bugajewski D. On normed spaces with the Wigner property. Ann Funct Anal, 2020, 11: 523–539
19 Wigner E P. Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren. Braunschweig: Fredrik Vieweg und Sohn, 1931
20 Wigner E P. Group Theory: And Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra. Pure and Applied Physics. New York: Academic Press, 1959

On extension of phase-isometries between the unit spheres of $(\sum \ell_p)_{\ell_q}$

Longfa Sun, Yipeng Zhang & Yinghua Sun

Abstract In this paper, we study the problem of extending surjective phase-isometries between the unit spheres of $(\sum \ell_p)_{\ell_q}$. Let $S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}} = \{x \in (\sum \ell_p)_{\ell_q} : \|x\| = 1\}$ be the unit sphere of $(\sum \ell_p)_{\ell_q}$, and $f : S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}} \to S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$ be a phase-isometry, i.e.,

$$\{\|f(x) + f(y)\|, \|f(x) - f(y)\|\} = \{\|x + y\|, \|x - y\|\}, \quad \forall\, x, y \in S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}.$$

When $1 < p < q = \infty$, $1 = q < p < \infty$, $1 < q < p \leqslant 2$ or $2 \leqslant p < q < \infty$, we prove that every surjective phase-isometry $f : S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}} \to S_{(\sum \ell_p)_{\ell_q}}$ can be extended to a surjective phase-isometry $\tilde{f}$ from $(\sum \ell_p)_{\ell_q}$ onto itself, and $\tilde{f}$ is phase-equivalent to a linear surjective isometry.

Keywords **phase-isometries, linear isometries, Wigner's theorem, Tingley's problem**

MSC(2020) **46B04, 46B20**

doi: 10.1360/SSM-2026-0065