



社交网络影响力博弈的均衡存在性

献给韩继业教授 90 寿辰

陈旭瑾^{1,2}, 胡晓东^{1,2}, 宋莹莹³, 王晨豪^{3,4*}, 邬潇莹^{1,2}

1. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190;

2. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049;

3. 北京师范大学珠海校区自然科学高等研究院, 珠海 519087;

4. 北京师范大学 - 香港浸会大学联合国际学院广东省数据科学与技术交叉应用重点实验室, 珠海 519087

E-mail: xchen@amss.ac.cn, xdhu@amss.ac.cn, yys301528@gmail.com, chenhwang@bnu.edu.cn, xywu@amss.ac.cn

收稿日期: 2024-05-06; 接受日期: 2024-09-22; 网络出版日期: 2025-01-03; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12201049, 12331014, 72192804 和 71988101)、中国科学院战略性先导科技专项 (批准号:

XDA27010100)、广东省数据科学与技术交叉应用重点实验室项目 (批准号: 2022B1212010006) 和广东省教育厅高等教育“冲一流、补短板、强特色”提升计划专项资金 (批准号: R0400001-22) 资助项目

摘要 本文基于 Grabisch 等 2010 年提出的社交网络影响力博弈模型展开研究. 在一个强连通网络中, 称每个顶点为一个 (社交网络) 成员, 每个成员都有一个位于 $[0, 1]$ 中的数字表示该成员的初始观点, 并且该观点可以动态演变. 博弈在两个局中人之间展开, 其分别具有固定的观点 0 和 1; 他们分别选择一个成员作为自己的影响目标, 使得其影响力通过网络中成员之间的相互作用而传播, 从而影响整个社交网络中所有成员的观点. 局中人的目标是使全体成员的平均观点 (值) 尽可能接近自己的固有观点 (0 或 1). 本文引入一个新的影响力传播矩阵来刻画局中人对成员的影响作用, 当两个局中人具有相同影响力时, 给出 Nash 均衡存在的充分条件, 并证明在具有均匀权重的双向树网络中 Nash 均衡一定存在. 对网络实例特别是随机网络的模拟实验结果显示: 与 Grabisch 等的模型相比, 新的影响力传播矩阵放宽了一系列网络中 Nash 均衡的存在性条件.

关键词 社交网络 影响力博弈 重归一化 Nash 均衡

MSC (2020) 主题分类 91A05, 91A43, 91D30

1 引言

社交网络在人们的日常生活中扮演着重要的角色, 如信息交换、知识分享和沟通交流等, 其相关问题引起了人们的广泛关注和研究. 其中一个重要问题是观点 (或称意见) 是如何形成的, 被简称为观点形成问题, 其聚焦于社交网络中成员观点的动态演化.

英文引用格式: Chen X J, Hu X D, Song Y Y, et al. The equilibrium existence of strategic influence games in social networks (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 199–220, doi: 10.1360/SSM-2024-0148

Degroot^[7] 针对观点形成问题提出了一个简单易行的模型, 被广泛应用于后续相关研究. 基于 Degroot 模型, Grabisch 等^[17] 通过对社交网络引入两个局中人, 定义了一种非合作博弈, 称为策略影响博弈. 在该博弈中, n 个成员 $1, 2, \dots, n$ 作为强连通有向图 G (即社交网络) 中的顶点, 其中每个成员 i 和它的出邻居 j 通过从 i 到 j 的弧, 即有向边 (i, j) 连接. 在 0 时刻, 每个成员都有一个初始观点, 用区间 $[0, 1]$ 中的数字表示. 在这 n 个成员之外, 有两个局中人 p_0 和 p_1 , 他们分别有固定的“对立”观点 0 和 1. 两个局中人分别选择一个成员作为自己的影响目标, 其影响力通过网络中成员之间的相互作用而传播, 从而影响整个社交网络中所有成员的观点. 两个局中人的目标都是使全体 n 个成员的平均观点尽可能接近自己的固有观点 0 或 1. 每个局中人 p_h ($h = 0, 1$) 都具有一个正影响因子 f_h , 表示他的影响强度; 影响因子越大则其目标成员越容易受其影响.

成员的观点会受到其出邻居的观点的影响而发生动态演变, 由于成员之间的相互作用, 局中人的影响力会在网络中扩散. 观点更新的过程遵循 Degroot 模型^[7]. 具体而言, 每个成员 i 会吸收采纳其出邻居的观点, 即仅当 (i, j) 为网络 G 中的一条弧时成员 j 的观点才能直接影响到成员 i . 图 G 的每条弧 (i, j) 都具有一个正的权重 w_{ij} , 它表示成员 i 在形成新观点时听取出邻居 j 观点 (意见) 的程度, 称 i 对 j (的观点) 赋予了权重 w_{ij} . 成员 i 可能对自己也赋予权重, 即他现有观点会影响其新观点, 此时, i 也是他自己的一个出邻居, 即 (i, i) 是 G 中的一个自环. 权重是归一化的, 即每个成员的出弧的总权重等于 1. 在博弈中, 每个局中人选择了他的影响目标, 因而局中人被当作他目标成员的一个新添加的出邻居, 即从目标成员到局中人的弧被添加到网络中. 因此, 目标成员的出弧权重需要根据局中人的影响因子进行重归一化, 使总权重保持为 1. 在每个时刻 $t = 1, 2, \dots$, 每个成员 i 更新其观点: 第 t 步的观点等于该成员所有出邻居在第 $t-1$ 步的观点的加权和, 其中每个出邻居 v 贡献了他在第 $t-1$ 步的观点值乘以弧 (i, v) 的 (重归一化的) 权重. 需要注意的是, v 可能是局中人之一, 他在任何时刻的观点都固定为他的初始观点 0 或 1. 图 G 的强连通性确保更新过程收敛到一个唯一的稳定状态, 在这个状态下, 每个成员都达到其极限观点—该观点再次更新保持不变 (参见文献 [17] 或 [24, 命题 1]). 注意到所有的极限观点值仍然在 $[0, 1]$ 中, 它们的和代表了局中人对网络影响的成功程度. 拥有观点 1 的局中人 p_1 希望总和尽可能大, 而拥有观点 0 的局中人 p_0 则希望总和尽可能小. 因此, 一个自然的做法是, 将局中人 p_1 的收益定义为所有 n 个成员的极限观点总和, 将 p_0 的收益定义为 n 减去该总和. 不同的目标选择会产生不同的稳定状态, 因此也会产生不同的收益. 两个局中人都试图选择自己的目标成员来最大化自己的收益.

本文研究的博弈模型与 Grabisch 等^[17] 的博弈模型都同属于上述基本框架. 不同之处在于目标成员的出弧权重的重归一化方式 (由重归一化矩阵指定) 不同. 假设局中人 p_h 选择成员 i 作为他的目标, 简单地令弧 (i, p_h) 的权重等于该局中人影响因子 f_h (> 0) 显然会破坏权重的归一化属性, 因此 i 的出弧权重必须重归一化, 以使它们的总和恰好为 1. 本文提出的策略影响力博弈 (strategic influence game, SIG) 模型, 采用了最直接的归一化方法, 称其为直接重归一化. 在这种方式下, 成员 i 在更新自己的观点时, 如果 i 被局中人 p_h 选中而没有被 p_{1-h} 选中作为目标, 则出弧 (i, p_h) 的权重为 $\frac{f_h}{1+f_h}$, 其他出弧 (i, j) 的权重为 $\frac{w_{ij}}{1+f_h}$; 如果 i 被两个局中人同时选择, 则出弧 (i, p_h) 和 (i, p_{1-h}) 的权重分别为 $\frac{f_h}{1+f_0+f_1}$ 和 $\frac{f_{1-h}}{1+f_0+f_1}$, 而其他出弧 (i, j) 的权重为 $\frac{w_{ij}}{1+f_0+f_1}$. 这一归一化背后暗含的假设是, 不管成员在原始网络有多少个出邻居 (不包括局中人), 他的出邻居对他的总影响是一个固定值, 且每个成员的该固定值相等; 此外, 一个成员听取越多人的观点, 则每个人对他的影响就越小. 相比之下, Grabisch 等使用了不同的基于度的重归一化, 在他们的模型中 (缩写为 SIG_d), 若一个成员的出邻居较少, 则他可能更容易受到局中人的影响. 具体而言, 如果具有 d_i 个出邻居的成员 i 被局中人 p_h 而非 p_{1-h} 选择, 则出弧 (i, p_h) 的权重为 $\frac{f_h}{d_i+f_h}$, 而其他出弧 (i, j) 的权重为 $\frac{d_i w_{ij}}{d_i+f_h}$. Grabisch 等^[17] 研究了 SIG_d 博弈模

型中的 (纯策略) Nash 均衡, 在 Nash 均衡状态下, 局中人单方面偏离自己当前选择 (即改变其所选择的目标成员) 不会给自己带来更高的收益. Grabisch 等对 Nash 均衡进行了刻画, 并证明了如果两个局中人的影响因子相等, 则一些依赖于网络结构的充分条件可以保证 Nash 均衡的存在性; 如果不相等, 则博弈只有混合策略 Nash 均衡.

本文结果 本文研究了上述直接重归一化方式下的策略影响博弈 SIG. 当两个局中人具有相等的影响因子 $f_0 = f_1$ 时, 对 (纯策略) Nash 均衡存在性给出一个依赖于网络结构 G 的充分条件. 如果 G 中的途径 (walk) 具有不同起点和终点, 则称其为开的, 否则称为闭的. 定义一条途径的权重是它所有弧的权重的乘积. 本文证明, 在影响因子相等的情形下, “两个局中人选择相同成员 i ” 是一个 Nash 均衡当且仅当, 对于任意 $j \neq i$, 某些特定开途径的权重差至少是某些特定闭途径的权重差的 $\frac{n}{f_0}$ 倍. 具体而言, 前者的差值是包含 i 且结束于 j 的所有开途径的总权重减去包含 j 且结束于 i 的所有开途径的总权重, 而后的差值是包含 j 且只经过 i 一次的所有闭途径的总权重减去包含 i 且只经过 j 一次的所有闭途径的总权重 (详见定理 3.1). 而对于 SIG_d 博弈模型, Grabisch 等^[17] 给出的 “两个局中人选择相同的成员 i ” 是 Nash 均衡的充分条件则依赖于 i 和任意 $j \neq i$ 的出度. 此外, 本文还证明了对于等影响因子的 SIG 博弈, 如果 “一人选择 i 、另一人选择 j ” 是 Nash 均衡, 则 “两人都选择 i ” 和 “两人都选择 j ” 也是 Nash 均衡, 这与文献 [17] 对 SIG_d 博弈的结果一致.

对于特殊网络中的 SIG, 本文重点考虑了一类基本网络—双向树, 它是将无向树的每条 (无向) 边用一对具有相同端点方向相反的弧代替得到的有向图. 当每个成员对其出邻居有相等的信任程度时 (即所有出弧的权重相等), 本文证明了在双向树中具有相等影响因子的 SIG 至少存在一个 Nash 均衡. 该证明是本文主要的技术上的贡献.

本文对策略影响博弈 SIG 和 SIG_d 中 Nash 均衡的存在性进行了比较研究. 若干实例表明, 在某些情形下, SIG 的直接重归一化比 SIG_d 的基于度的重归一化允许更多的 Nash 均衡存在. 此外, 针对 3 种随机网络—Erdős-Renyi 随机图^[14]、Watts-Strogatz 模型生成的小世界网络^[28] 和 Barabási-Albert 模型生成的无标度网络^[4]—进行了实验研究, 比较了两种博弈模型的均衡存在性方面的表现. 在所有测试的实例中, 当局中人的影响因子都为 1 时, SIG 和 SIG_d 的 Nash 均衡总存在; 而当影响因子变得不均匀时, Nash 均衡存在的频率将会迅速下降. 对于 Nash 均衡不存在的一种可能解释是, 高影响力局中人希望选择与低影响力局中人相同的目标成员, 以抑制低影响力局中人对成员的影响; 而低影响力局中人则希望选择与高影响力局中人的目标不同的成员, 以逃避抑制. 在对小世界和无标度网络所随机生成的 1,000 个测试实例中, SIG 允许 Nash 均衡存在的概率显著高于 SIG_d , 在一定程度上表明在现实世界社交网络中 SIG 比 SIG_d 更具有优势.

相关工作 社交网络中的用户互动通常被模拟为观点的传播. Acemoglu 和 Ozdaglar^[1] 综述了社交网络中观点形成或更新问题的研究工作, 并根据是否在观点更新过程中使用 Bayes 方法来将模型分为 Bayes 和非 Bayes 两类.

在本文和文献 [17] 的研究中, 观点更新遵循 Degroot^[7] 的非 Bayes 动态模型, 其中每个成员更新其观点为他的出邻居观点的加权平均值. Degroot 模型还有许多变体^[2, 8, 10, 11, 15], 其中 Acemoglu 等^[2] 研究了两类成员: 常规成员 (他们与邻居交换信息) 和强势成员 (他们在不同程度上影响他人, 但自己的观点保持固定); 该模型在网络信息传播方面突出了主体成员的影响, 在相关研究中发挥了重要作用.

Degroot 模型及其变体被广泛用于研究网络中的影响力博弈. 在 Degroot 模型的基础上, Grabisch 等^[17] 引入了双人博弈 SIG_d , 这是与本文的 SIG 最相关的模型. 模型方面唯一的区别是, SIG_d 使用了前面提到的基于顶点度的重归一化. Grabisch 等给出了两名局中人在任意给定策略下的收益函数表达

式. 在影响因子相等时, 他们给出了“两名局中人选择相同的目标成员”是 Nash 均衡的一个 (依赖于网络结构的) 充分条件, 并证明了如果“一人选择 i 、另一人选择 j ”是 Nash 均衡, 则“两人都选择 i ”和“两人都选择 j ”也是 Nash 均衡. 对于极不均匀的影响因子, SIG_d 则只有混合策略的 Nash 均衡. 与之相比, 本文对 SIG 模型同样给出了收益函数表达式, 给出了等影响因子情形下两人选择相同目标成员是 Nash 均衡的充分必要条件; 也证明了如果两人选择不同成员是 Nash 均衡, 则两人选择其中一个成员必定也是 Nash 均衡.

Rusinowska 和 Taalibekova^[23] 引入了具有 $1/2$ 观点值的第三个局中人, 并研究了当所有局中人具有相同影响因子时纯策略 Nash 均衡的存在性及其刻画. Mandel 和 Venel^[20] 介绍了一类类似于 SIG_d 的双人博弈—两名局中人通过动态目标进行竞争. Degroot 模型的其他一些应用可参见文献 [12, 21, 26, 27].

影响力传播的一个相关优化问题是, 在不考虑任何策略性竞争的情形下, 选取社交网络中合适的目标成员施加初始影响以实现影响力最大化 (参见文献 [3, 6, 18, 22]), 如最大化客户的产品采用率 [9, 19, 25]. 当存在两个或多个个体或阵营相互竞争、争夺势力影响范围时, 该问题通常被认为是一个策略博弈, 而非纯优化问题. Bimpikis 等^[5] 提出了两家公司通过社交网络进行营销竞争的博弈模型. 他们的研究表明, 在 Nash 均衡中, 企业在定向广告上的投资都是低效的, 而且低效程度随企业所选取目标成员的网络中心性增强而增加. Goyal 等^[16] 研究了一类博弈, 其中两家公司竞相利用它们的资源以最大限度地提高社交网络中消费者对其产品的采用率. 企业收益的衡量指标是, 通过竞争性随机扩散影响, 其产品在网络中最终被采用的数量. Fazeli 和 Jadbabaie^[13] 考虑了一个类似的模型, 其中消费者根据与其同伴的局部协调博弈的结果来决定采用哪种产品.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节给出 Degroot 模型^[7]、策略影响博弈 SIG 和 SIG_d 的严格数学描述. 第 3 节研究两个局中人具有相等影响因子的 SIG, 给出 Nash 均衡存在的充分条件, 并证明在双向树网络中存在至少一个 Nash 均衡. 第 4 节介绍比较实验中, SIG 和 SIG_d 在 Nash 均衡存在性方面的差异, 并总结论文. 部分证明细节和实验结果见附录.

2 策略影响博弈模型

首先在第 2.1 小节中介绍 DeGroot 模型^[7], 它展示了社交网络中成员的观点是如何更新的. 然后在第 2.2 小节中, 基于该模型, 引入持固定对立观点的两个局中人, 描述本文研究的 SIG 博弈模型.

2.1 DeGroot传播模型

设 $G = (V, A)$ 是一个由顶点集 V 和弧集 A 组成的加权有向网络, 其中 $V = \{1, \dots, n\}$ 由 $n (\geq 2)$ 个非策略的成员组成, 弧集 A 允许自环但不允许有同一方向上的平行弧, 每条弧 $(i, j) \in A$ 有正权重 w_{ij} . 网络 G 可被表示为其权重矩阵 $W = [w_{ij}]$, 它是一个非负 $n \times n$ 随机矩阵 (每一行之和为 1), 满足: $w_{ij} > 0$ 当且仅当 $(i, j) \in A$, 即 j 是 i 的出邻居, 并且 w_{ij} 是 (i, j) 的权重.

每个成员 $i \in V$ 在时刻 (步长) 0 处有一个初始观点 $x_i(0) \in [0, 1]$, 并且在每个时刻 $t = 1, 2, \dots$ 更新他的观点. 对于任意 $j \in V$, 权重 w_{ij} 表示 i 在 t 时刻将自己的观点更新为 $x_i(t)$ 时会在多大程度上考虑 j 在 $t-1$ 时刻的观点. 设 $\mathbf{x}_V(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ 表示成员在时刻 t 的观点向量. 观点更新过程可以描述为

$$\mathbf{x}_V(t) = W\mathbf{x}_V(t-1) = W^t\mathbf{x}_V(0),$$

其中 $W^t = [w_{ij}^{(t)}]$ 是矩阵 W 的 t 次幂.

从成员 i 到成员 j 的途径, 或者简称 i - j 途径, 是一个从 i 开始到 j 结束的、成员和弧交替出现的序列, 其中每条弧都是从它的前驱成员指向它的后继成员. 在全文中, 假设 G 是强连通的, 即对于任意 $1 \leq i, j \leq n$, G 中存在 i - j 途径. 容易看出, W^t 中的元 $w_{ij}^{(t)}$ 是正的当且仅当 G 包含恰好有 t 条弧的 i - j 途径. 由于 G 是强连通的, 所以权重矩阵 W 是不可约的, 即对于任意 $1 \leq i, j \leq n$, 存在整数 t (其大小可能依赖于 i 和 j) 使得 $w_{ij}^{(t)} > 0$. 矩阵 W 的不可约性保证了更新过程的收敛性 (参见文献 [24]).

2.2 SIG 博弈模型

局中人与策略集 基于 Degroot 传播模型, 在策略影响博弈 SIG 中, 对网络 $G = (V, A)$ 进行如下拓展: 添加两个策略性局中人 (顶点) p_h ($h = 0, 1$) 和带有权重 1 的自环 (p_h, p_h) . 局中人 p_h 具有固定观点 h 和正影响因子 f_h , 他只选择一个成员 $\underline{h} \in V$ 作为他的目标, 并影响 $\underline{h}$ 的观点. 相应地, 加入一条弧 $(\underline{h}, p_h)$, $h = 0, 1$; 从而 $\underline{h}$ 的观点不仅受到原来图 G 中出邻居的影响, 而且也受到了新加入的局中人 p_h 影响.

信息传播方式 设 $(\underline{0}, \underline{1})$ 表示局中人 p_0 和 p_1 的策略组合. 将 f_h 视作弧 $(\underline{h}, p_h)$ 的权重, 对于扩展网络, SIG 采用 $n \times n$ 对角矩阵即直接重归一化矩阵

$$\Lambda_f(\underline{0}, \underline{1}) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{1 + f_0 \delta_{1, \underline{0}} + f_1 \delta_{1, \underline{1}}}, \dots, \frac{1}{1 + f_0 \delta_{n, \underline{0}} + f_1 \delta_{n, \underline{1}}} \right\}$$

进行重归一化, 其中, 如果 $i = \underline{h}$, 则 $\delta_{i, \underline{h}} = 1$; 否则 $\delta_{i, \underline{h}} = 0$. 矩阵 $\Lambda_f(\underline{0}, \underline{1})$ 的第 i 个对角元展示了成员 i 对他的出邻居在重归一化之后赋予了多大的权重. 更具体地, 弧 $(\underline{h}, p_h)$ 重归一化后的权重 $\frac{f_h}{1 + f_h + f_{1-h} \delta_{\underline{h}, 1-h}}$ 是下列矩阵的 $(\underline{h}, (h+1))$ 元, 即第 $h+1$ 列的唯一非零元:

$$L = L_f(\underline{0}, \underline{1}) = \Lambda_f(\underline{0}, \underline{1})[f_0 \underline{e}_0, f_1 \underline{e}_1], \quad (2.1)$$

其中 $\underline{e}_h$ ($h = 0, 1$) 是 n 维单位列向量, 在第 $\underline{h}$ 行有唯一的非零元素 1, 因而矩阵 L 是 n 行两列的. 弧 $(i, j) \in A$ 的重归一化权重是下面矩阵的 (i, j) 元:

$$R = R_f(\underline{0}, \underline{1}) = \Lambda_f(\underline{0}, \underline{1})W. \quad (2.2)$$

结合 L 和 R , 拓展网络的重归一化弧权重形成如下 $(n+2) \times (n+2)$ 行随机矩阵, 称为相互作用矩阵:

$$M = M_f(\underline{0}, \underline{1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0}^T \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^T \\ L_f(\underline{0}, \underline{1}) & R_f(\underline{0}, \underline{1}) \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

其行、列从上到下、从左到右分别依次对应于局中人 p_0, p_1 和成员 $1, 2, \dots, n$, 并且 $\mathbf{0}$ 为 n 维零向量. 设 $\mathbf{x}(t) = (0, 1, \mathbf{x}_V^T(t))^T$ 为 $p_0, p_1, 1, \dots, n$ 在 t 时刻的观点向量. 观点更新的动态如下:

$$\mathbf{x}(t) = M\mathbf{x}(t-1) = M^t\mathbf{x}(0), \quad t = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

更新动态的收敛性由下面的命题保证. 其特别表明, 每个成员的稳态观点是两个局中人观点的线性组合, 它与成员们的初始观点无关.

命题 2.1 给定策略组合 $\langle \underline{0}, \underline{1} \rangle \in V^2$ 和初始观点向量 $\mathbf{x}(0) = (0, 1, \mathbf{x}_V^T(0))^T$, 设

$$\tilde{\mathbf{x}}_V = (I - R)^{-1} L(0, 1)^T,$$

这里 L 和 R 分别为 (2.1) 和 (2.2) 定义, 则 SIG 中的动态收敛于稳态观点向量

$$\tilde{\mathbf{x}} := \lim_{t \rightarrow \infty} M^t \mathbf{x}(0) = (0, 1, \tilde{\mathbf{x}}_V^T)^T.$$

这个命题的正确性已经在文献 [17, 附录 A.1] 被证明, 它是基于 $(I - R)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} R^k$ 的标准结果被推导出的 (参见文献 [24]). 接下来, 通过示例来展示说明 SIG 模型的信息传播方式.

例 2.1 设网络 G 如图 1(a) 所示, 其中权重矩阵为

$$W = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

假设局中人 p_0 和 p_1 分别选择 $\underline{0} = 1$ 和 $\underline{1} = 2$ 作为目标成员. 拓展网络中的交互如图 1 所示. 相应地, 有

$$L = \begin{bmatrix} \frac{f_0}{1+f_0} & 0 \\ 0 & \frac{f_1}{1+f_1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2(1+f_0)} & 0 & \frac{1}{2(1+f_0)} & 0 \\ \frac{1}{3(1+f_1)} & \frac{2}{3(1+f_1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

设 $f_0 = 2$ 和 $f_1 = 1$, 则得到稳态观点向量 $\tilde{\mathbf{x}} = (0, 1, \frac{3}{19}, \frac{15}{19}, \frac{15}{19}, \frac{15}{19})^T$. 可以观察到, 虽然局中人 p_0 的影响因子 f_0 大于局中人 p_1 的影响因子 f_1 , 但成员的最终观点更接近于 p_1 的观点 1. 原因是 p_1 的目标成员 2 (其在 G 中) 从他人那里得到的“信任” $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ 比 p_0 的目标成员 1 从他人那里得到的“信任” $\frac{1}{3}$ 多.

注 2.1 策略影响博弈 SIG 中 $\Lambda_f(\underline{0}, \underline{1})$ 的直接重归一化与 SIG_d 中基于度的重归一化不同, 后者采用对角重归一化矩阵

$$\Delta_f(\underline{0}, \underline{1}) = \text{diag} \left\{ \frac{d_1}{d_1 + f_0 \delta_{1,\underline{0}} + f_1 \delta_{1,\underline{1}}}, \dots, \frac{d_n}{d_n + f_0 \delta_{n,\underline{0}} + f_1 \delta_{n,\underline{1}}} \right\}$$

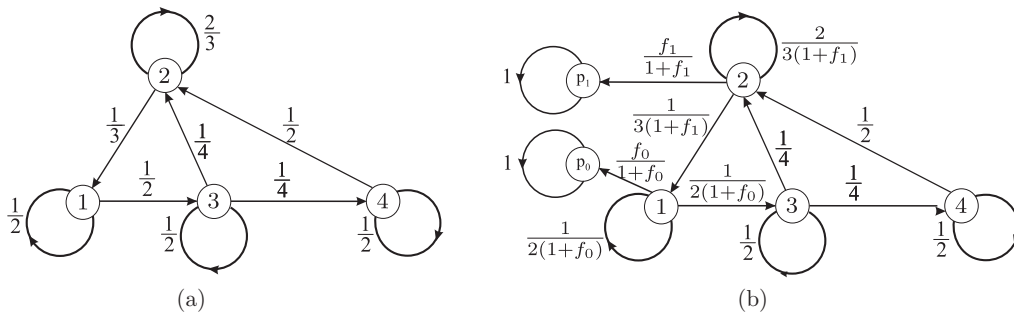


图 1 策略影响博弈 SIG 的示例. (a) 原始网络; (b) 局中人加入后的拓展网络

对扩展网络中的弧权进行重归一, 其中 d_i ($1 \leq i \leq n$) 为社交网络 G 中成员 (顶点) i 的出度. 在 SIG_d 中, 对于 $h = 0, 1$, 弧 (h, p_h) 重归一化的权重为 $\frac{f_h}{d_h + f_h + f_1 - h \delta_{h, 1-h}}$.

博弈模型 SIG_d 定义重归一化矩阵 $\Delta_f(\underline{0}, \underline{1})$ 的直观解释在于假定局中人更容易 (或更快) 去影响那些较少听取其他人观点的成员. 然而, 在实践中并非总是如此: 出邻居的数量不一定是成员容易受影响程度的指标. 因而, 本文转而使用直接重归一化矩阵 $\Lambda_f(\underline{0}, \underline{1})$, 这大致意味着每个潜在目标同样地容易受到局中人的影响. 稍后将比较这两种重归一化方式对于 Nash 均衡存在性的影响. 为方便起见, 分别使用 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{I}_d$ 来表示博弈 SIG 和 SIG_d 的实例.

局中人收益 本文除非另有说明, 考虑具有直接重归一化矩阵 $\Lambda_f(\underline{0}, \underline{1})$ 的 SIG 实例 $\mathcal{I}$. 给定策略组合 $(\underline{0}, \underline{1})$, 局中人 p_1 (其具有固定观点 1) 的收益定义为

$$\pi_f(\underline{0}, \underline{1}) := \mathbf{1}^T \cdot \tilde{\mathbf{x}}_V = \mathbf{1}^T \cdot (I - R_f(\underline{0}, \underline{1}))^{-1} L_f(\underline{0}, \underline{1})(0, 1)^T, \quad (2.5)$$

即 G 中所有成员稳态观点之和. 注意到, 局中人 p_0 (其具有固定观点 0) 的收益等于 $n - \pi_f(\underline{0}, \underline{1})$. 两个局中人都以最大化自己的收益为目的. 如果局中人 p_0 和 p_1 都不想偏离当前所选择的目标成员, 则称策略组合 $(\underline{0}, \underline{1})$ 是实例 $\mathcal{I}$ 的一个 Nash 均衡, 即对于每个 $i \in V$ 都有 $n - \pi_f(i, \underline{1}) \leq n - \pi_f(\underline{0}, \underline{1})$ 和 $\pi_f(\underline{0}, i) \leq \pi_f(\underline{0}, \underline{1})$ 成立.

为了 (稍后在命题 2.2 中) 对收益函数 $\pi_f(\underline{0}, \underline{1})$ 给出关于策略组合 $(\underline{0}, \underline{1})$ 和网络参数更具体的表示, 需要对图结构定义更多符号. 对于任意 $i, j \in V$, 图 G 最多包含一条从 i 到 j 的弧. 因此, 给定 G 中的任意途径 K , 可以将其写成一个序列 $K = (i_0, i_1, \dots, i_\ell)$, 将 K 理解为一条按照顺序 $i_0, (i_0, i_1), i_1, (i_1, i_2), \dots, (i_{\ell-1}, i_\ell), i_\ell$ 依次通过的 i_0 - i_ℓ 途径. 序列中弧的个数 ℓ (计数弧重复出现的次数) 就是 K 的长度. 如果 $K = (i_0)$ 没有弧, 则称 K 为平凡的, 并设其权重 $w(K)$ 为 1. 对于非平凡途径 K , 它的权重 $w(K)$ 定义为其弧的权重的乘积, 即 $w(K) := \prod_{g=0}^{\ell-1} w_{i_g i_{g+1}}$; 该权重可以被看作 K 在 G 的随机途径中出现的概率, 这里随机途径的概率转移矩阵是 W . 如果 K 是非平凡的并且 $i_0 \neq i_\ell$, 则称途径 K 是开的 (否则是闭的). 如果 $i_0, i_1, \dots, i_\ell$ 是不同的, 则 K 被称为 i_0 - i_ℓ 路. 如果一条起始于成员 i 的闭途径 K 只经过 i 一次, 则称 K 是围绕 i 的. 对于任意成员 $i, j \in V$, 因为 W 是不可约的, 所以沿着随机途径从 i 到 j 的概率为 1, 即所有 i - j 开途径的权重和为 1. 关于 (原) 网络 G 及 (未重归一化的) 权重 w , 定义符号如下:

- 令 $\tau(i, K)$ 表示途径 K 包含 i 的出弧的数量;
- 令 $\mathcal{O}_i$ 表示起始于 V 中某个成员结束于 i , 且满足 $\tau(i, K) = 0$ 的所有开途径 K 组成的集合;
- 设 $o_i := \sum_{K \in \mathcal{O}_i} w(K)$;
- 设 $o_i^j := \sum_{K \in \mathcal{O}_i: j \in K} w(K)$;
- 令 $\mathcal{C}_i$ 表示所有围绕 i 的闭途径组成的集合;
- 设 $c_i := \sum_{K \in \mathcal{C}_i} w(K)$;
- 设 $c_i^j := \sum_{K \in \mathcal{C}_i: j \in K} w(K)$;
- 设 $\mathcal{X}_{i,j}$ 为所有 i - j 途径组成的 (无限) 集合 (注意, 平凡途径 (i) 属于 $\mathcal{X}_{i,i}$);
- 令 $\mathcal{O}_{i,j}$ 表示所有满足 $\tau(j, K) = 0$ 的 i - j 开途径 K 组成的集合.

通过与文献 [17] 类似的分析 (以下呈现大致梗概), 将文献 [17] 中基于度的重归一化矩阵 $\Delta_f(\underline{0}, \underline{1})$ 替换为 $\Lambda_f(\underline{0}, \underline{1})$, 可以立即得到局中人 p_1 的收益表达式如下面命题所述.

命题 2.2 对于任意不同的 $i, j \in V$, 局中人 p_1 在 SIG 实例 $\mathcal{I}$ 中的收益满足

$$\pi_f(i, i) = \left(\sum_{k \in V} \sum_{K \in \mathcal{X}_{k,i}} \frac{w(K)}{(1 + f_0 + f_1)^{\tau(i, K)}} \right) \frac{f_1}{1 + f_0 + f_1} \quad (2.6a)$$

$$= \frac{f_1(1+o_i)}{1+f_0+f_1-c_i} = \frac{nf_1}{f_0+f_1}, \quad (2.6b)$$

$$\pi_f(i, j) = \left(\sum_{k \in V} \sum_{K \in \mathcal{K}_{k,j}} \frac{w(K)}{(1+f_0)^{\tau(i,K)}(1+f_1)^{\tau(j,K)}} \right) \frac{f_1}{1+f_1} \quad (2.7a)$$

$$= \frac{f_1(f_0 o_i^j + n c_i^j)}{f_0 c_j^i + f_1 c_i^j + f_0 f_1}. \quad (2.7b)$$

证明 从命题 2.1 中很容易看出, (2.5) 所定义的收益 $\pi_f(\underline{0}, \underline{1}) = \mathbf{1}^T \cdot \tilde{\mathbf{x}}_V$, 其中 $\langle \underline{0}, \underline{1} \rangle$ 等于 $\langle i, i \rangle$ 或 $\langle i, j \rangle$, 可以改写为 (2.6a) 或 (2.7a) 中的和. 这个和表示在重归一化的扩展网络中通过所有途径传递的总影响力, 而 (回顾 (2.2)–(2.4) 可知) 该扩展网络为 $\Lambda_f(\underline{0}, \underline{1})W$ 所表达. 每当途径 K 经过从目标成员发出的弧 (其权重已使用乘数 $\frac{1}{1+f_0+f_1}$ 或 $\frac{1}{1+f_0}$ 或 $\frac{1}{1+f_1}$ 重归一化) 时, 原始权重 $w(K)$ 应使用相同的乘数重新加权, 以应对相应局中人的影响. 对于任意正整数 d , 在文献 [17] 中已经证明

$$\left(\sum_{k \in V} \sum_{K \in \mathcal{K}_{k,i}} \frac{w(K)}{((d+f_0+f_1)/d)^{\tau(i,K)}} \right) \frac{f_1}{d+f_0+f_1} = \frac{f_1(1+o_i)}{d+f_0+f_1-c_i d} = \frac{nf_1}{f_0+f_1},$$

这暗含了 (2.6b) 的正确性. 而 (2.7b) 的有效性可逐字改编 [17] 中定理 1(ii) 的证明来建立—用 1 代替了那里的 b_i 和 b_j . $\square$

命题 2.2 与 Grabisch 等 [17] 用基于度的重归一化矩阵 $\Delta_f(\underline{0}, \underline{1})$ 给出的表达式相比, 不同之处出现在 p_0 和 p_1 选择不同目标成员时. Grabisch 等证明了 SIG_d 实例 $\mathcal{I}_d$ 中策略组合 $\langle i, j \rangle$ 下局中人 p_1 的收益满足 $\pi_f(i, j) = \frac{f_1(f_0 o_i^j + n d_i c_i^j)}{f_0 d_j c_j^i + f_1 d_i c_i^j + f_0 f_1}$. 观察到, 在这个表达式中, 目标成员 i (或者 j) 的度 d_i (或者 d_j) 与 c_i^j (或者 c_j^i) 一起出现, 而 (2.7b) 中对应的位置处的数值都等于 1. 主要原因是 SIG 中使用的直接重归一化矩阵 $\Lambda_f(\underline{0}, \underline{1})$ 将成员出邻居对其的总影响归一化为 1, 与其邻居数量无关; 而基于度的重归一化矩阵 $\Delta_f(\underline{0}, \underline{1})$ 假设成员拥有的出邻居越多, 它们对该成员的影响就越大.

3 等影响因子下的博弈均衡

本节考虑策略影响博弈 SIG 实例 $\mathcal{I}$, 其中两个局中人具有相同的影响因子 (即 $f_0 = f_1$). 本节给出 Nash 均衡存在的充分条件, 然后证明如果网络是双向树, 则 SIG 的 Nash 均衡总是存在的.

3.1 Nash 均衡存在的充分条件

根据命题 2.2, 当 $f_0 = f_1$ 时, 局中人 p_1 在策略组合 $\langle i, j \rangle$ 下的收益是

$$\pi_f(i, j) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & i = j, \\ \frac{f_1 o_i^j + n c_i^j}{c_j^i + c_i^j + f_1}, & i \neq j. \end{cases} \quad (3.1)$$

由此得到以下定理.

定理 3.1 给定影响因子 $f_0 = f_1$ 相等的 SIG 实例 $\mathcal{I}$, 对于任意 $i, j \in V$, 以下性质成立:

- (i) $\pi_f(i, j) + \pi_f(j, i) = n$;
- (ii) $\langle i, i \rangle$ 是 Nash 均衡当且仅当对所有的 $k \in V \setminus \{i\}$, 满足 $f_1(o_k^i - o_i^k) \geq n(c_i^k - c_k^i)$;
- (iii) 若 $\langle i, j \rangle$ 是 Nash 均衡, 则 $\langle i, i \rangle$ 和 $\langle j, j \rangle$ 也是 Nash 均衡.

证明 由 W 的不可约性可知, 到从任意成员出发, 经过 i 到 j 结束或者经过 j 到 i 结束的所有开途径的权重和为 1. 共有 n 个成员可以作为出发点, 所以所有这样经过 i 到 j 结束或者经过 j 到 i 结束的开途径的总权重为 n , 给出 $o_i^j + o_j^i = n$ (该等式的另外一个复杂一些的证明参见文献 [17, 引理 2]). 此等式与 (3.1) 联立可推导出 (i). 对于 (ii), 注意到 $\langle i, i \rangle$ 是 Nash 均衡当且仅当 $\pi_f(i, k) \leq \pi_f(i, i) = \frac{n}{2} \leq \pi_f(k, i)$ 对所有 $k \in V \setminus \{i\}$ 成立. 由 (i) 可知, 这个条件等价于 $\pi_f(k, i) \geq \frac{n}{2}$. 注意到 $o_i^k + o_k^i = n$, 由 (3.1) 可知 $\pi_f(k, i) \geq \frac{n}{2}$ 等价于 (ii) 中的条件. 为了证明 (iii), 观察到在 Nash 均衡 $\langle i, j \rangle$ 下, 双方局中人的收益正好是 $\frac{n}{2}$ (否则, 收益较小的一方会偏离现在的目标成员, 通过选择与另一方相同的目标成员, 而获得大于 $\frac{n}{2}$ 收益). 由于 p_0 和 p_1 都不能从偏离中获益, 因此对于任意 $k \in V$, 有 $n - \pi_f(k, j) \leq \frac{n}{2}$ 和 $\pi_f(i, k) \leq \frac{n}{2}$. 考虑策略 $\langle i, i \rangle$, 在该策略下, 两个局中人都获得了 $\frac{n}{2}$ 的收益. 显然, 局中人 p_1 没有偏离的动机. 假设 p_0 可以通过偏离并选择成员 k 而将收益增加到 $n - \pi_f(k, i) > \frac{n}{2}$, 从 (i) 中得出 $\pi_f(i, k) > \frac{n}{2}$, 矛盾. 因此, $\langle i, i \rangle$ 是 $\mathcal{I}$ 的 Nash 均衡. 使用对称的论证可证明 $\langle j, j \rangle$ 也是一个 Nash 均衡. $\square$

上面的证明可以被视为文献 [17] 中相应部分的改编. 对于博弈模型 SIG_d , Grabisch 等^[17] 证明了上述定理中的 (i) 和 (iii) 对任意实例 $\mathcal{I}_d$ 也成立, 而 (ii) 中的条件则需要变为 $f_1(o_k^i - o_i^k) \geq n(d_i c_i^k - d_k c_k^i)$. 这种差异是由 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{I}_d$ 中收益函数的表达式不同造成的. 具体而言, 对于 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{I}_d$, $\langle i, i \rangle$ 是一个 Nash 均衡当且仅当 $\pi_f(i, k) \leq \pi_f(i, i) = \frac{n}{2} \leq \pi_f(k, i)$ 对所有的 $k \in V \setminus \{i\}$ 成立, 其中对于 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{I}_d$, 用 $\pi_f(i, j)$ 表示局中人 p_1 在策略组合 $\langle i, j \rangle$ 下的收益. 注意到, 对于 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{I}_d$ 都有 $\pi_f(i, i) = \frac{n}{2}$; 而在 $\mathcal{I}_d$ 中, 收益函数 $\pi_f(i, j)$ 中的 $d_i c_i^j$ (或者 $d_j c_j^i$) 对应于 $\mathcal{I}$ 中的 c_i^j (或者 c_j^i), 导致了 (ii) 的不同.

3.2 双向树网络中的 Nash 均衡

在本小节中, 策略影响博弈 SIG 具有等影响因子的实例 $\mathcal{I}$ 在双向树网络上展开. 所谓双向树就是通过将 (无向) 树的每条无向边替换为连接该边两个端点的两条相反方向的弧而得到的有向图. 用 $T_w = (V, A)$ 表示双向树, 并假设任意弧 $(i, j) \in A$ 的权重 w_{ij} 等于 i 的出度的倒数. 因此, 每个成员将在 T_w 中对其出邻居赋予均匀权重 (信任). 为了证明 T_w 中博弈 SIG 的 Nash 均衡存在, 核心思想是证明局中人的一系列最佳应对 (best response) 最终收敛于 Nash 均衡.

首先介绍一些讨论所需的定义和符号. 设 $n \times n$ 矩阵 S 表示策略矩阵, 其第 i 行第 j 列元为策略组合 $\langle i, j \rangle \in V^2$. S 的每个对角元 $\langle i, i \rangle$ 称为一个对角策略组合. (策略组合) 链是一个序列 $\varsigma = (\langle i_0^0, i_1^0 \rangle, \langle i_1^0, i_1^1 \rangle, \langle i_1^1, i_1^2 \rangle, \dots)$ 使得, 对于每一个 $g \in \mathbb{Z}^+$,

– $\langle i_0^g, i_1^g \rangle \in \varsigma$ 是一个策略组合, 其中局中人 p_h ($h = 0, 1$) 以成员 i_h^g 为选择目标 (为了方便, 经常将策略组合写成无序对 $\{i_{-i}^g; i_h^g\}$);

– 基于 $\langle i_0^g, i_1^g \rangle$, 两个局中人的正好其中之一 p_h 改变其选择, 从 i_h^g 偏离到 i_h^{g+1} , 导致策略组合由 $\langle i_0^g, i_1^g \rangle$ 变为 $\langle i_0^{g+1}, i_1^{g+1} \rangle = \{i_h^{g+1}; i_{1-h}^g\}$ (称 p_h 是策略组合 $\langle i_0^g, i_1^g \rangle$ 的偏离者, 而 $\langle i_0^{g+1}, i_1^{g+1} \rangle$ 是由 p_h 偏离达到的).

如果链上的偏离没有让偏离者的收益减少, 则称该偏离为合理的.

令 $\varsigma = (\langle i_0^0, i_1^0 \rangle, \langle i_1^0, i_1^1 \rangle, \dots, \langle i_1^m, i_1^m \rangle)$ 为一条长度为 m 的有限链, 如果 $\langle i_0^0, i_1^0 \rangle = \langle i_1^m, i_1^m \rangle$ 并且 $\langle i_0^1, i_1^1 \rangle, \dots, \langle i_0^m, i_1^m \rangle$ 是两两不同的, 则称它是一个回路. 注意到每个回路的长度都是偶数, 即它由偶数个不同的策略组合组成.

对角回路是指形式为 $(\langle i, i \rangle, \langle i, j \rangle, \langle j, j \rangle, \dots, \langle k, k \rangle, \langle k, i \rangle, \langle i, i \rangle)$ 的回路, 其中两个局中人交替成为偏离者, p_h (或 p_{1-h}) 的偏离总是使策略组合离开 (或返回) 策略矩阵 S 的对角线, 每个偏离都是合理的,

并且偏离者的收益至少在一次偏离中发生严格的增加. 图 2 给出了对角回路的一个说明性示例.

根据 (3.1), 在任意对角策略组合 $\langle i, i \rangle$ 下, 双方局中人的收益正好是 $\frac{n}{2}$. 在下面的引理 (其证明见附录 B) 中, 证明对于双向树 T_w 上的博弈, 没有对角回路. 结合两个局中人之间的对称性, 这意味着没有合理的交替偏离序列可以从一个对角策略组合出发并返回到它自身.

引理 3.1 对于 T_w 上影响因子相等的策略影响博弈 SIG, 不存在对角回路.

为方便起见, 用 $\Pi_h(i, j)$ 表示策略组合 $\langle i, j \rangle$ 下局中人 p_h 的收益. 任给策略组合链 $\varsigma = (\langle i_0^0, i_1^0 \rangle, \langle i_0^1, i_1^1 \rangle, \dots)$, 如果对于所有 $g \in \mathbb{Z}^+$, 设 p_h 是 $\langle i_0^g, i_1^g \rangle$ 的偏离者 (这里 $h = 0$ 或 $h = 1$), 均有

$$\Pi_h(i_0^{g+1}, i_1^{g+1}) > \Pi_h(i_0^g, i_1^g), \quad i_h^{g+1} = \operatorname{argmax}_{i_h \in V} \{\Pi_h(i_0, i_1) : i_{1-h} = i_{1-h}^g = i_{1-h}^{g+1}\},$$

则称 ς 是完全改进链. 完全改进链是由短视偏离者产生的—每个偏离者都尽最大可能地寻求提高自己当前的收益, 对另一位局中人的当前选择作出最佳响应. 显然, 在这样的策略组合链中, 局中人 p_0 和 p_1 交替偏离. 下面的引理表明, 无论图结构如何, 从每个完全改进回路都可以推导出一个对角回路.

引理 3.2 对于 T_w 上影响因子相等的策略影响博弈 SIG, 如果有一条完全改进回路存在, 则也有一条对角回路存在.

证明 令 $\varsigma = (\langle i_0^0, i_1^0 \rangle, \langle i_0^1, i_1^1 \rangle, \dots, \langle i_0^m, i_1^m \rangle)$ 为一条完全改进回路, 对此不失一般性地假设 $\langle i, j \rangle$ 是初始策略组合, 局中人 p_0 首先偏离 (选择 i_0^1), 然后两个局中人交替偏离生成链 ς . 需要注意的是 ς 由偶数 m 个策略组合组成, 最后一个偏离者必然是 p_1 , 其在 $\langle i_0^{m-1}, i_1^{m-1} \rangle$ 处偏离而导致 $\langle i_0^m, i_1^m \rangle = \langle i_0^0, i_1^0 \rangle$, 并且对于每个 $g = 0, \dots, m$, 策略组合 $\langle i_0^g, i_1^g \rangle$ 是由 p_1 的偏离达到的当且仅当 g 是偶数. 由于每个局中人在任何对角线上都可以获得收益 $\frac{n}{2}$ (根据 (3.1)), 因此偏离者 p_h 的收益在偏离后至少为 $\frac{n}{2}$, 而非偏离者 p_{1-h} 的收益则至多为 $\frac{n}{2}$. 想要从 ς 推导出一个对角回路, 基本思路是在不改变链的始端和末端策略组合的前提下, 将 ς 中的每个 2-长链转化为 4-长链, 并将它们组合成一个对角回路.

考虑 ς 的任一条 2-长子链

$$\varsigma^g := (\langle i_0^g, i_1^g \rangle, \langle i_0^{g+1}, i_1^{g+1} \rangle, \langle i_0^{g+2}, i_1^{g+2} \rangle) = (\langle i_0^g, i_1^g \rangle, \langle i_0^{g+2}, i_1^{g+2} \rangle, \langle i_0^{g+2}, i_1^{g+2} \rangle) = (\langle i, j \rangle, \langle k, j \rangle, \langle k, l \rangle),$$

其中 g 是偶数. 显然, p_0 的收益满足 $\Pi_0(i, j) \leq \frac{n}{2}$ (因为 $\langle i, j \rangle$ 是通过 p_1 的偏离达到的), $\Pi_0(k, j) \geq \frac{n}{2}$ (因为 $\langle k, j \rangle$ 是通过 p_0 的偏离达到的) 和 $\Pi_0(k, l) \leq \frac{n}{2}$ (因为 $\langle k, l \rangle$ 是通过 p_1 的偏离达到的). 相应地, p_1 的收益满足 $\Pi_1(i, j) \geq \frac{n}{2}$, $\Pi_1(k, j) \leq \frac{n}{2}$ 和 $\Pi_1(k, l) \geq \frac{n}{2}$. 令 $\varsigma_+^g = (\langle i, j \rangle, \langle j, j \rangle, \langle j, k \rangle, \langle k, k \rangle, \langle k, l \rangle)$ 表示一条拓展的 4-长链, 它具有与 $\varsigma^g = (\langle i, j \rangle, \langle k, j \rangle, \langle k, l \rangle)$ 相同的始端和末端策略组合, 但额外包含两个对角线策略 $\langle j, j \rangle$ 和 $\langle k, k \rangle$. ς_+^g 可能包含重复的策略组合. 通过定理 3.1(i) 可知 $\Pi_1(j, k) = n - \Pi_1(k, j) \geq \frac{n}{2}$, 因而容易看出拓展链 ς_+^g 上的每个偏离都是合理的, 即每次偏离时偏离者的收益不会减小.

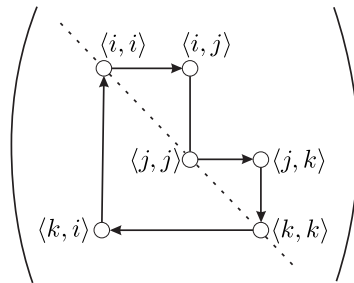


图 2 $(\langle i, i \rangle, \langle i, j \rangle, \langle j, j \rangle, \langle j, k \rangle, \langle k, k \rangle, \langle k, i \rangle, \langle i, i \rangle)$ 是对角回路. 矩阵 S 的对角线用虚线表示

将完全改进回路 ς 分解为 $\frac{m}{2}$ 条 2- 长度链的序列 $\varsigma^0, \varsigma^2, \varsigma^4, \dots, \varsigma^m$, 其形如 $(\langle i, j \rangle, \langle k, j \rangle, \langle k, l \rangle)$, 接着将每条 2- 长链 $\varsigma^g, g = 0, 2, \dots, m$ 拓展至如上所述的 4- 长链 ς_+^g . 然后将这 $\frac{m}{2}$ 个拓展的 4- 长链串联在一起, 形成一条回路 $\varsigma_+ = (\dots, \langle i_0^g, i_1^g \rangle, \langle i_1^g, i_1^g \rangle, \langle i_1^g, i_0^{g+2} \rangle, \langle i_0^{g+2}, i_0^{g+2} \rangle, \dots)$, 其中每次偏离都是合理的. 对于 ς_+ 中的每一对重复的策略组合 (如果有的话), 去掉其中的一个和它们之间的所有策略组合, 这样就得到了一条对角回路. $\square$

定理 3.2 对于具有均匀权重的双向树网络中的策略影响博弈 SIG, 任意影响因子相等的实例 $\mathcal{I}$ 都具有 Nash 均衡.

证明 将引理 3.1 和 3.2 结合在一起, 可以立即推导出不存在完全改进回路. 由于策略组合的数量是有限的, 所以任何完全改进链的长度必然是有限的, 进而必然存在一个策略组合 (作为某个完全改进链的末端), 其中任何局中人都不能通过单方面偏离来提高自己的收益, 这表明该策略组合是一个 Nash 均衡. $\square$

此外, 根据定理 3.1(iii), T_w 中的策略影响博弈 SIG 必定具有对角 Nash 均衡.

推论 3.1 任给具有均匀权重的双向树网络 (V, A) , 若 (V, A) 中策略影响博弈 SIG 具有相等影响因子, 则存在某个 $i \in V$ 使得 $\langle i, i \rangle$ 是该博弈的一个 (对角) Nash 均衡.

注意, 附录 C 证明了博弈 SIG_d 有与推论 3.1 类似的结论.

4 结论

社交网络中的影响力传播是一类重要的实际问题, 尤其是网络成员观点的动态演化频频出现在很多实际应用中. 本文基于 Degroot 模型, 研究了一类二人策略影响博弈: 两个局中人具有对立的观点, 分别从网络中选择一个成员作为自己的影响目标, 从而通过网络传播动态尽可能地扩散自己的影响力. 本文提出了新的重归一化来定义传播影响动态. 当两个局中人具有相等的影响因子时, 本文对纯策略 Nash 均衡的存在性给出了一个依赖于网络结构的充分条件, 对一类特殊网络—具有均匀权重的双向树—证明了该博弈具有至少一个纯策略 Nash 均衡. 此外, 通过实验 (详见附录 D), 对随机网络中的均衡存在性进行了模拟分析. 结果表明, 模型 SIG 和 SIG_d 的均衡存在性条件之间没有相互蕴含的关系, 对于不同类型的网络各有优势. 虽然在 Erdős-Renyi 随机图^[14] 这种分布比较均匀的网络中, SIG_d 表现较好, 但对于小世界^[28] 和无标度^[4] 这些更能反映真实社交网络的结构, SIG 的优势明显, 具有更多的 Nash 均衡, 可能更具实用价值.

未来的研究方向包括: (1) 研究均衡的唯一性、稳定性以及不同参数对均衡的影响; (2) 考虑具有至少 3 个局中人的策略影响博弈, 其中多个局中人分属两个对立阵营的情形可以作为研究的出发点.

参考文献

- 1 Acemoglu D, Ozdaglar A. Opinion dynamics and learning in social networks. *Dyn Games Appl*, 2011, 1: 3–49
- 2 Acemoglu D, Ozdaglar A, ParandehGheibi A. Spread of (mis)information in social networks. *Games Econom Behav*, 2010, 70: 194–227
- 3 Ballester C, Calvó-Armengol A, Zenou Y. Who's who in networks. Wanted: The key player. *Econometrica*, 2006, 74: 1403–1417
- 4 Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 1999, 286: 509–512
- 5 Bimpikis K, Ozdaglar A, Yildiz E. Competitive targeted advertising over networks. *Oper Res*, 2016, 64: 705–720
- 6 Bonacich P. Power and centrality: A family of measures. *Amer J Soc*, 1987, 92: 1170–1182
- 7 Degroot M H. Reaching a consensus. *J Amer Statist Assoc*, 1974, 69: 118–121

- 8 Demarzo P M, Vayanos D, Zwiebel J. Persuasion bias, social influence, and unidimensional opinions. *Q J Econ*, 2003, 118: 909–968
- 9 Domingos P, Richardson M. Mining the network value of customers. In: *Proceedings of the Seventh ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, KDD'01*. New York: ACM, 2001, 57–66
- 10 Ellison G, Fudenberg D. Rules of thumb for social learning. *J Polit Econ*, 1993, 101: 612–643
- 11 Ellison G, Fudenberg D. Word-of-mouth communication and social learning. *Levin's Working Paper Arch*, 1995, 110: 93–125
- 12 Fagnani F, Zampieri S. Randomized consensus algorithms over large scale networks. *IEEE J Sel Areas Commun*, 2007, 26: 634–649
- 13 Fazeli A, Jadbabaie A. Targeted marketing and seeding products with positive externality. In: *Proceedings of the 50th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*. Champaign-Urbana: IEEE, 2012, 1111–1117
- 14 Gilbert E N. Random graphs. *Ann of Math Stud*, 1959, 30: 1141–1144
- 15 Golub B, Jackson M O. How homophily affects diffusion and learning in networks. *arXiv:0811.4013*, 2008
- 16 Goyal S, Heidari H, Kearns M. Competitive contagion in networks. *Games Econom Behav*, 2019, 113: 58–79
- 17 Grabisch M, Mandel A, Rusinowska A, et al. Strategic influence in social networks. *Math Oper Res*, 2018, 43: 29–50
- 18 Kempe D, Kleinberg J. Maximizing the spread of influence through a social network. In: *ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. Washington: ACM, 2003, 137–146
- 19 Kempe D, Kleinberg J, Tardos E. Influential nodes in a diffusion model for social networks. In: *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*. Lisbon: Springer, 2005, 1127–1138
- 20 Mandel A, Venel X. Dynamic competition on social networks. *European J Oper Res*, 2020, 280: 597–608
- 21 Nedic A, Ozdaglar A. Distributed subgradient methods for multi-agent optimization. *IEEE Trans Automat Control*, 2009, 54: 48–61
- 22 Richardson M, Domingos P. Mining knowledge-sharing sites for viral marketing. In: *Proceedings of the Eighth ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, KDD '02*. Edmonton: ACM, 2002, 61–70
- 23 Rusinowska A, Taalaibekova A. Opinion formation and targeting when persuaders have extreme and centrist opinions. *J Math Econom*, 2019, 84: 9–27
- 24 Seneta E. *Non-negative Matrices and Markov Chains*. New York: Springer, 2006
- 25 Tsakas N. Optimal influence under observational learning. *Gecomplexity Discussion Paper*, 2014
- 26 Tsitsiklis J. *Problems in decentralized decision making and computation*. PhD Thesis. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1984
- 27 Tsitsiklis J, Bertsekas D, Athans M. Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms. *IEEE Trans Automat Control*, 2003, 31: 803–812
- 28 Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, 1998, 393: 440–442

附录

附录 A 研究双向树网络的结构性质, 附录 B 考虑双向树中的 SIG 博弈, 附录 C 考虑双向树中的 SIG_d 博弈, 附录 D 通过示例和实验来比较 SIG 和 SIG_d 两个模型在 Nash 均衡存在性方面的表现.

附录 A 双向树结构性质

本节研究具有均匀权重的双向树 $T_w = (V, A)$ 的参数化结构性质. 设每个成员 $i \in V$ 的出度为 d_i , 则每条弧 $(i, j) \in A$ 的权重为 $w_{ij} = \frac{1}{d_i}$. 对于不同的 $i, j \in V$, 设 $\bar{c}_i^j := \sum_{K \in \mathcal{C}_i: j \notin K} w(K)$ 为所有围绕 i 且不经过 j 的闭途径的总权重, 下面引理陈述的事实是由文献 [17, 引理 1 和 2] 及其证明观察到的.

引理 A.1 ^[17] 对于 V 中不同的 i 和 j , 有 $c_i = 1$, $\bar{c}_i^j + c_i^j = 1$ 和 $\sigma_i^j + \sigma_j^i = n$.

特别地, 上面的 $c_i = 1$ 是由权重矩阵 W 的不可约性保证的, 这大致意味着通过某些 (闭) 途径从 i 出发并返回 i 的概率等于 1. 如果途径中任何顶点不重复出现, 则称该途径为路. 令 $\text{dis}_{i,j}$ 表示 $T_w = (V, A)$ 中唯一 i - j 路的长度 (即其弧的数目), 也通常被称为 i 和 j 之间的距离. 接下来, 在引理 A.2 和 A.3 中建立双向树 T_w 的相关参数 c_i^j 和 σ_i^j 的一些性质.

引理 A.2 对于 V 中不同的 i 和 j , 有 $c_i^j = \frac{1}{d_i} \cdot \frac{1}{\text{dis}_{i,j}}$.

证明 一条围绕 i 的闭途径 $(i, i', \dots, i)$ 只有当 i' 包含在 T_w 的唯一 i - j 路中时, 该途径才能通过 j . 因此, $\mathcal{C}_i$ 中包含 j 的所有途径的第二个成员是 i 的同一个出邻居, 设为 i' . 由 T_w 的均匀权重设置可知, T_w 中随机途径离开 i 到达 i' 的概率为 $\frac{1}{d_i}$. 因此, 只需考虑 $d_i = 1$ 时的情形, 并证明 $c_i^j = \frac{1}{\text{dis}_{i,j}}$. 假设 $\text{dis}_{i,j} = \ell - 1$, 需要证明 $c_i^j = \frac{1}{\ell - 1}$. 根据 $c_i^j + \bar{c}_i^j = 1$ 这个事实 (参见引理 A.1), 只需证明 $\bar{c}_i^j = \frac{\ell - 2}{\ell - 1}$.

不失一般性, 假设 $i = 1, j = \ell$, 且唯一 i - j 路是 $(1, 2, \dots, \ell - 1, \ell)$. 对于 $2 \leq g \leq \ell - 1$, 令 $\omega_g = \sum_{K \in \mathcal{C}_g: g-1, \ell \notin K} w(K)$ 表示所有围绕 g 且不经过 $g-1$ 的闭途径的总权重. 从树结构中可注意到, 所有这些途径都不经过 1, 因为它们不经过 $g-1$.

为了求 $\bar{c}_i^j = \bar{c}_1^\ell$ 的值, 考虑一个随机途径, 它从 1 开始, 不经过 ℓ , 一旦回到 1 就终止于 1. 因为 $d_1 = 1$, 所以途径离开起始成员 1 后, 先到达成员 2. 之后, 它以 $\frac{1}{d_2}$ 的概率直接返回到 1, 以 $\frac{\omega_2}{d_2}$ 的概率先形成一个围绕 2 的闭子途径 (中途不经过 1 和 ℓ), 然后返回到 1, 以此类推下去. 因此, 当 $\ell \geq 3$ 时, 有

$$\bar{c}_i^j = \bar{c}_1^\ell = \sum_{K \in \mathcal{C}_1: \ell \notin K} w(K) = \frac{1}{d_2} (1 + \omega_2 + \omega_2^2 + \dots) = \frac{1}{d_2(1 - \omega_2)}. \quad (\text{A.1})$$

当 $\ell \geq 4$ 时, 类似地有

$$\sum_{K \in \mathcal{C}_2: 1, \ell \notin K \ni 3} w(K) = \frac{1}{d_2} \cdot \frac{1 + \omega_3 + \omega_3^2 + \dots}{d_3} = \frac{1}{d_2 d_3 (1 - \omega_3)}.$$

因为成员 3 在 T_w 的唯一 1- ℓ 路上, 所以可得到

$$\sum_{K \in \mathcal{C}_2: 1, \ell, 3 \notin K} w(K) = \sum_{K \in \mathcal{C}_2: 1, 3 \notin K} w(K) = \frac{d_2 - 2}{d_2}, \quad (\text{A.2})$$

其中第二个等式由引理 A.1 得到. 为说明这一点, 考虑从 T_w 中移除成员 1 和 3 后包含 2 的连通分支. 在该分支中, 成员 2 的每条出弧的权重从 $\frac{1}{d_2}$ 变为 $\frac{1}{d_2 - 2}$, 并且每个围绕 2 的途径都恰好包含成员 2 的一条出弧. 引理 A.1 中的第一个等式应用于修改权重后的分支, 给出 $\sum_{K \in \mathcal{C}_2: 1, 3 \notin K} \frac{d_2}{d_2 - 2} w(K) = 1$. 因此,

$$\omega_2 = \sum_{K \in \mathcal{C}_2: 1, \ell \notin K \ni 3} w(K) + \sum_{K \in \mathcal{C}_2: 1, \ell, 3 \notin K} w(K) = \frac{1}{d_2 d_3 (1 - \omega_3)} + \frac{d_2 - 2}{d_2}. \quad (\text{A.3})$$

将 (A.3) 代入 (A.1), 得到

$$\bar{c}_i^j = \frac{1}{2 - \frac{1}{d_3(1 - \omega_3)}}. \quad (\text{A.4})$$

与 (A.3) 相似, 对于每一个 $g = 3, \dots, \ell - 2$, 有

$$\omega_g = \sum_{K \in \mathcal{C}_g: g-1, \ell \notin K \ni g+1} w(K) + \sum_{K \in \mathcal{C}_g: g-1, \ell, g+1 \notin K} w(K) = \frac{1}{d_g d_{g+1} (1 - \omega_{g+1})} + \frac{d_g - 2}{d_g}.$$

将上面关于 $\omega_g, g = 3, \dots, \ell - 2$ 的表达式迭代地代入 (A.4), 得到

$$\bar{c}_i^j = \frac{1}{2 - \frac{1}{\frac{1}{\frac{\vdots}{2 - \frac{1}{d_{\ell-1}(1 - \omega_{\ell-1})}}}}},$$

其中, 等号右边总共有 $\ell - 2$ 个分数线. 与 (A.2) 类似, 容易看出 $\omega_{\ell-1} = \frac{d_{\ell-1}-2}{d_{\ell-1}}$. 这样就得到 $\bar{c}_i^j = \frac{\ell-2}{\ell-1}$, 完成证明. $\square$

给定任意不同的 $i, j \in V$, 令 $\bar{V}_j^i$ 表示使得 T_w 中唯一 k - j 路不经过 i 的所有成员 k 组成的集合. 对每个 $g = 1, \dots, \text{dis}_{i,j} - 1$, 集合 V_{ij}^g 由满足如下性质的所有成员 $k \in V$ 组成: k - i 路和 k - j 路都经过 i - j 路上与 i 距离为 g 的成员.

引理 A.3 对于不同成员 $i, j \in V$, 有 $o_i^j = |\bar{V}_j^i| - \sum_{g=1}^{\text{dis}_{i,j}-1} \frac{\text{dis}_{i,j}-g}{\text{dis}_{i,j}} \cdot |V_{ij}^g|$.

证明 不失一般性, 假设在 T_w 中唯一 i - j 路是 $(i, 1, 2, \dots, \ell - 1, j)$, 其中 $\ell = \text{dis}_{i,j}$. 对于任意 $k \in V$, 由 W 的不可约性可知 $\sum_{K \in \mathcal{O}_{k,i}} w(K) = 1$. 设 $o_k^* = \sum_{K \in \mathcal{O}_{k,i}: j \in K} w(K)$ 表示所有通过 j 且只访问 i 一次的 k - i 开途径的总权重. 值 o_k^* 可以被解释为沿着 $\mathcal{O}_{k,i}$ 中某条途径从 k 出发到达 i 且其间经过 j 的概率. 如果不存在这样的途径, 则定义 o_k^* 为 0. 由于 $o_i^j = \sum_{k \in V} o_k^*$, 下面对于所有 k 计算 o_k^* .

显然对于所有 $k \notin \bar{V}_j^i$, 在 $\mathcal{O}_{k,i}$ 中没有 k - i 途径可以经过 j , 这意味着 $o_k^* = 0$. 更进一步地, 对于每一个 $k \in \bar{V}_j^i \setminus (V_{ij}^1 \cup \dots \cup V_{ij}^{\ell-1})$, 所有 k - i 途径都必须经过 j , 且 $o_k^* = \sum_{K \in \mathcal{O}_{k,i}} w(K)$ 等于 T_w 中从 k 出发到达 i 的概率, 也就是 1. 下面还需要对于 $k \in V_{ij}^1 \cup \dots \cup V_{ij}^{\ell-1}$ 计算 o_k^* .

对于任意成员 $k \in V_{ij}^g$, $1 \leq g \leq \ell - 1$, 根据 V_{ij}^g 的定义以及 i - j 路的顶点标号方式, 在 $\mathcal{O}_{k,i}$ 中每条包含 j 的 k - i 途径必须先经过成员 g , 然后再经过 j . 由此可得 $o_k^* = o_g^*$. 接下来还需对 $1 \leq g \leq \ell - 1$ 计算 o_g^* .

首先, 通过对 ℓ 进行归纳来证明 $o_1^* = \frac{1}{\ell}$. 如果 $\ell = 1$, 则结论是平凡的. 当 $\ell = 2$ 时, 用与证明 (A.2) 的第二个等式类似的论证, 有

$$c := \sum_{K \in \mathcal{O}_{1,i}: j \notin K} w(K) = \frac{d_1 - 2}{d_1} \quad \text{和} \quad o_1^* = 1 - \sum_{K \in \mathcal{O}_{1,i}: j \notin K} w(K) = 1 - \frac{1}{d_1} \sum_{g=0}^{\infty} c^g = \frac{1}{2},$$

即为所需. 假设 $o_1^* = \frac{1}{\ell}$ 对 $\ell = 1, 2, \dots, m$ 成立, 其中 $m \geq 2$. 当 $\ell = m+1$ 时, 设 $o := \sum_{K \in \mathcal{O}_{2,1}: j \in K} w(K)$. 通过归纳假设, 有 $o = \frac{1}{m}$. 现在计算 $\mathcal{O}_{1,i}$ 中不经过 j 的所有途径的总权重, 其等于从 1 开始的随机途径在到达 j 之前到达 i 的概率, 即

$$\begin{aligned} 1 - o_1^* &= \sum_{K \in \mathcal{O}_{1,i}: 2 \notin K} w(K) + \sum_{K \in \mathcal{O}_{1,i}: j \notin K \ni 2} w(K) \\ &= \frac{1}{d_1} \sum_{g=0}^{\infty} c^g + \Pr[\text{随机 } 1\text{-}i \text{ 途径在到达 } i \text{ 之前到达 } 2] \sum_{K \in \mathcal{O}_{2,i}: j \notin K} w(K) \\ &= \frac{1}{d_1} \sum_{g=0}^{\infty} c^g + \left(1 - \frac{1}{d_1} \sum_{g=0}^{\infty} c^g\right) \cdot \left(\sum_{K \in \mathcal{O}_{2,1}: j \notin K} w(K)\right) \cdot \left(\sum_{K \in \mathcal{O}_{1,i}: j \notin K} w(K)\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - o)(1 - o_1^*). \end{aligned}$$

由上述等式可得到 $o_1^* = \frac{1}{m+1}$. 因此, $o_1^* = \frac{1}{\ell}$ 对所有 $\ell \geq 1$ 都成立.

现在对于 $g = 2, \dots, \ell - 1$ 考虑 o_g^* . 应用 o_1^* 的结果, 得到

$$\begin{aligned} 1 - o_g^* &= \sum_{K \in \mathcal{O}_{g,i}: j \notin K} w(K) \\ &= \left(\sum_{K \in \mathcal{O}_{g,g-1}: j \notin K} w(K)\right) \cdot \left(\sum_{K \in \mathcal{O}_{g-1,g-2}: j \notin K} w(K)\right) \cdots \left(\sum_{K \in \mathcal{O}_{1,i}: j \notin K} w(K)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{1}{\ell - g + 1}\right) \left(1 - \frac{1}{\ell - g + 2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{\ell}\right) \\
&= \frac{\ell - g}{\ell}.
\end{aligned}$$

由此可得 $o_g^* = g/\ell$.

综上所述,

$$o_i^j = \sum_{k \in V} o_k^* = \sum_{k \in \bar{V}_j^i \setminus \bigcup_{g=1}^{\ell-1} V_{ij}^g} o_k^* + \sum_{k \in \bigcup_{g=1}^{\ell-1} V_{ij}^g} o_k^* = |\bar{V}_j^i| - \sum_{g=1}^{\ell-1} |V_{ij}^g| + \sum_{g=1}^{\ell-1} \frac{g}{\ell} \cdot |V_{ij}^g| = |\bar{V}_j^i| - \sum_{g=1}^{\ell-1} \frac{\ell - g}{\ell} \cdot |V_{ij}^g|,$$

从而证明了引理成立. $\square$

对于不同的 $i, j \in V$, 令 $\varpi(i, j) := \frac{\text{dis}_{i,j} \cdot n}{2} - \text{dis}_{i,j} \cdot |\bar{V}_j^i| + \sum_{g=1}^{\text{dis}_{i,j}-1} g \cdot |V_{ij}^g|$.

引理 A.4 对于不同的 $i, j, k \in V$, 有 $\varpi(i, j) + \varpi(j, k) = \varpi(i, k)$.

证明 为了表示方便, 不失一般性假设 i, j 和 k 分别为 1, 2 和 3; 对于任意 $a, b \in V$, 用 ℓ_b^a 表示 $\text{dis}_{a,b}$. 需要证明 $\varpi(1, 2) + \varpi(2, 3) = \varpi(1, 3)$, 即

$$(\ell_2^1 + \ell_3^2 - \ell_3^1) \cdot \frac{n}{2} = \ell_3^2 |\bar{V}_3^2| + \ell_2^1 |\bar{V}_2^1| - \ell_3^1 |\bar{V}_3^1| - \left(\sum_{g=1}^{\ell_3^2-1} g |V_{32}^g| + \sum_{g=1}^{\ell_2^1-1} g |V_{21}^g| - \sum_{g=1}^{\ell_3^1-1} g |V_{31}^g| \right). \quad (\text{A.5})$$

下面基于成员 1, 2 和 3 相对位置分 4 种情形来讨论.

情形 1 T_w 中唯一 1-2 途径、2-3 途径和 3-1 途径相交于 $V \setminus \{1, 2, 3\}$ 中的唯一成员, 记作 4. 注意到 $\ell_3^2 = \ell_4^3 + \ell_4^2$, $\ell_4^2 - \ell_4^3 = \ell_2^1 - \ell_3^1$ 以及

$$\begin{aligned}
&\sum_{g=1}^{\ell_3^2-1} g |V_{32}^g| + \sum_{g=1}^{\ell_2^1-1} g |V_{21}^g| - \sum_{g=1}^{\ell_3^1-1} g |V_{31}^g| \\
&= \ell_4^3 |V_{32}^{\ell_4^3}| - \ell_4^3 |V_{31}^{\ell_4^3}| + \left(\sum_{g=\ell_4^3+1}^{\ell_3^2-1} g |V_{32}^g| + \sum_{g=1}^{\ell_4^2-1} g |V_{21}^g| \right) + \ell_4^2 |V_{21}^{\ell_4^2}| + \left(\sum_{g=\ell_4^2+1}^{\ell_2^1-1} g |V_{21}^g| - \sum_{g=\ell_4^3+1}^{\ell_3^1-1} g |V_{31}^g| \right) \\
&= \sum_{g=\ell_4^3+1}^{\ell_3^2-1} (\ell_4^3 + \ell_4^2) |V_{32}^g| + \sum_{g=\ell_4^3+1}^{\ell_3^1-1} (\ell_4^2 - \ell_4^3) |V_{31}^g| + \ell_4^3 |V_{32}^{\ell_4^3}| - \ell_4^3 |V_{31}^{\ell_4^3}| + \ell_4^2 |V_{21}^{\ell_4^2}| \\
&= \ell_3^2 \sum_{g=\ell_4^3+1}^{\ell_3^2-1} |V_{32}^g| + (\ell_2^1 - \ell_3^1) \sum_{g=\ell_4^3+1}^{\ell_3^1-1} |V_{31}^g| + \ell_4^3 (|V_{32}^{\ell_4^3}| - |V_{31}^{\ell_4^3}|) + \ell_4^2 |V_{21}^{\ell_4^2}|. \quad (\text{A.6})
\end{aligned}$$

观察到, 对于每个 $g = 1, 2, 3$, $\bar{V}_g^4$ 的元素恰好是当从 T_w 中删除 4 时与 g 在同一连通分支中的成员. 而且, 集合 $\bar{V}_3^2$ 是 V_{32}^g , $g = \ell_4^3 + 1, \dots, \ell_3^2 - 1$ 和 $V \setminus \bar{V}_2^4$ 的不交并. 集合 $\bar{V}_3^1$ 是 $\bar{V}_{31}^g$, $g = \ell_4^3 + 1, \dots, \ell_3^1 - 1$ 和 $V \setminus \bar{V}_1^4$ 的不交并. 集合 $\bar{V}_2^1$ 是 $\bar{V}_{21}^g = \bar{V}_{31}^g$, $g = \ell_4^3 + 1, \dots, \ell_3^1 - 1$ 和 $V \setminus \bar{V}_1^4$ 不交并. 所以有

$$\sum_{g=\ell_4^3+1}^{\ell_3^2-1} |V_{32}^g| = |\bar{V}_3^2| - |V \setminus \bar{V}_2^4| \quad \text{和} \quad \sum_{g=\ell_4^3+1}^{\ell_3^1-1} |V_{31}^g| = |\bar{V}_3^1| - |V \setminus \bar{V}_1^4| = |\bar{V}_2^1| - |V \setminus \bar{V}_1^4|. \quad (\text{A.7})$$

于是得到

$$\sum_{g=1}^{\ell_3^2-1} g |V_{32}^g| + \sum_{g=1}^{\ell_2^1-1} g |V_{21}^g| - \sum_{g=1}^{\ell_3^1-1} g |V_{31}^g|$$

$$= \ell_3^2(|\bar{V}_3^2| - |V \setminus \bar{V}_2^4|) + (\ell_2^1 - \ell_3^1)(|\bar{V}_3^1| - |V \setminus \bar{V}_1^4|) + \ell_4^3(|V_{32}^{\ell_4^3}| - |V_{31}^{\ell_4^3}|) + \ell_4^2|V_{21}^{\ell_4^2}|$$

和

$$(A.5) \text{ 的右边} = \ell_3^2|V \setminus \bar{V}_2^4| + (\ell_2^1 - \ell_3^1)|V \setminus \bar{V}_1^4| - \ell_4^3(|V_{32}^{\ell_4^3}| - |V_{31}^{\ell_4^3}|) - \ell_4^2|V_{21}^{\ell_4^2}|.$$

令 $U = V \setminus \bigcup_{g=1}^3 \bar{V}_g^4$, 其成员 $l \in U$ 满足: 对于所有 $g = 1, 2, 3$, 树中的 l - g 路经过 4. 注意到 $n = |V \setminus \bar{V}_2^4| + |V_{31}^{\ell_4^3}| - |U|$, $|V \setminus \bar{V}_2^4| = |V_{21}^{\ell_4^2}| + |V_{32}^{\ell_4^3}| - |U|$ 和 $|V \setminus \bar{V}_1^4| = |V_{21}^{\ell_4^2}| + |V_{31}^{\ell_4^3}| - |U|$. 由此可见,

$$\begin{aligned} (A.5) \text{ 的右边} &= \ell_3^2(|V_{21}^{\ell_4^2}| + |V_{32}^{\ell_4^3}| - |U|) + (\ell_2^1 - \ell_3^1)(|V_{21}^{\ell_4^2}| + |V_{31}^{\ell_4^3}| - |U|) - \ell_4^3(|V_{32}^{\ell_4^3}| - |V_{31}^{\ell_4^3}|) - \ell_4^2|V_{21}^{\ell_4^2}| \\ &= (\ell_3^2 + \ell_2^1 - \ell_3^1 - \ell_4^2)|V_{21}^{\ell_4^2}| + (\ell_2^1 - \ell_3^1 + \ell_4^3)|V_{31}^{\ell_4^3}| + (\ell_3^2 - \ell_4^3)|V_{32}^{\ell_4^3}| + (\ell_3^1 - \ell_3^2 - \ell_2^1)|U| \\ &= \ell_4^2(|V_{21}^{\ell_4^2}| + |V_{31}^{\ell_4^3}| + |V_{32}^{\ell_4^3}| - 2|U|) \\ &= \ell_4^2 n. \end{aligned}$$

因为 $\ell_2^1 + \ell_3^2 - \ell_3^1 = \ell_4^2 + \ell_4^2 + \ell_4^2 - \ell_4^1 = 2\ell_4^2$, 所以 (A.5) 成立.

情形 2 成员 2 包含在 1-3 路中. 注意 $\ell_3^1 = \ell_3^2 + \ell_2^1$, $\bar{V}_2^1 = \bar{V}_3^1$ 以及 (A.5) 的左边等于 0. 现在有

$$\begin{aligned} &\sum_{g=1}^{\ell_3^2-1} g|V_{32}^g| + \sum_{g=1}^{\ell_2^1-1} g|V_{21}^g| - \sum_{g=1}^{\ell_3^1-1} g|V_{31}^g| \\ &= \sum_{g=1}^{\ell_3^2-1} g|V_{32}^g| + \sum_{g=1}^{\ell_2^1-1} g|V_{21}^g| - \left(\sum_{g=1}^{\ell_3^2-1} g|V_{31}^g| + \ell_3^2|V_{31}^{\ell_3^2}| + \sum_{g=\ell_3^2+1}^{\ell_3^1-1} g|V_{31}^g| \right) \\ &= \left(\sum_{g=1}^{\ell_3^2-1} g|V_{32}^g| - \sum_{g=1}^{\ell_3^2-1} g|V_{31}^g| \right) + \left(\sum_{g=1}^{\ell_2^1-1} g|V_{21}^g| - \sum_{g=\ell_3^2+1}^{\ell_3^1-1} g|V_{31}^g| \right) - \ell_3^2|V_{31}^{\ell_3^2}| \\ &= -\ell_3^2 \sum_{g=1}^{\ell_2^1-1} |V_{21}^g| - \ell_3^2|V_{31}^{\ell_3^2}| \end{aligned}$$

和

$$(A.5) \text{ 的右边} = \ell_3^2|\bar{V}_3^2| + (\ell_2^1 - \ell_3^1)|\bar{V}_3^1| + \ell_3^2 \sum_{g=1}^{\ell_2^1-1} |V_{21}^g| + \ell_3^2|V_{31}^{\ell_3^2}| = \ell_3^2 \left(|\bar{V}_3^2| - |\bar{V}_3^1| + \sum_{g=1}^{\ell_2^1-1} |V_{21}^g| + |V_{31}^{\ell_3^2}| \right).$$

观察到 $\bar{V}_3^1$ 是 $\bar{V}_{21}^g$ ($g = 1, \dots, \ell_2^1 - 1$), $V_{31}^{\ell_3^2}$ 和 $\bar{V}_3^2$ 的不交并. 所以 (A.5) 的右边为 0, 等于 (A.5) 的左边.

情形 3 成员 3 包含在 1-2 路中. 注意 $\ell_2^1 = \ell_3^1 + \ell_3^2$, $\bar{V}_2^1 = \bar{V}_3^1$ 以及 (A.5) 的左边等于 $\ell_3^2 \cdot n$. 现在在

$$\begin{aligned} &\sum_{g=1}^{\ell_3^2-1} g|V_{32}^g| + \sum_{g=1}^{\ell_2^1-1} g|V_{21}^g| - \sum_{g=1}^{\ell_3^1-1} g|V_{31}^g| \\ &= \sum_{g=1}^{\ell_3^2-1} g|V_{32}^g| + \left(\sum_{g=1}^{\ell_3^2-1} g|V_{21}^g| + \ell_3^2|V_{21}^{\ell_3^2}| + \sum_{g=\ell_3^2+1}^{\ell_2^1-1} g|V_{21}^g| \right) - \sum_{g=1}^{\ell_3^1-1} g|V_{31}^g| \\ &= \left(\sum_{g=1}^{\ell_3^2-1} g|V_{32}^g| + \sum_{g=1}^{\ell_3^2-1} g|V_{21}^g| \right) + \ell_3^2|V_{21}^{\ell_3^2}| + \left(\sum_{g=\ell_3^2+1}^{\ell_2^1-1} g|V_{21}^g| - \sum_{g=1}^{\ell_3^1-1} g|V_{31}^g| \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ell_3^2 \sum_{g=1}^{\ell_3^2-1} |V_{21}^g| + \ell_3^2 |V_{21}^{\ell_3^2}| + \ell_3^2 \sum_{g=\ell_3^2+1}^{\ell_2^1-1} |V_{21}^g| \\
&= \ell_3^2 \sum_{g=1}^{\ell_2^1-1} |V_{21}^g|
\end{aligned}$$

和

$$(A.5) \text{ 的右边} = \ell_3^2 |\bar{V}_3^2| + (\ell_2^1 |\bar{V}_2^1| - \ell_3^1 |\bar{V}_3^1|) - \ell_3^2 \sum_{g=1}^{\ell_2^1-1} |V_{21}^g| = \ell_3^2 \left(|\bar{V}_3^2| + |\bar{V}_2^1| - \sum_{g=1}^{\ell_2^1-1} |V_{21}^g| \right) = \ell_3^2 \cdot n.$$

因此, (A.5) 的右边等于 (A.5) 的左边.

情形 4 成员 1 包含在 2-3 路中. 注意情形 4 中成员 1 和 3 与成员 2 的相对位置对称于情形 3 中的相对位置. 通过交换情形 3 的证明中成员 1 和 3 的位置, 得到 (A.5) 的左边和右边在情形 4 中都等于 $\ell_2^1 \cdot n$. $\square$

附录 B 双向树中的等影响力博弈 SIG

本节关注具有均匀权重的双向树 $T_w = (V, A)$ 上的策略影响博弈 SIG, 其中两个局中人的影响因子相等, 每个成员 $i \in V$ 的出度为 d_i , 每条弧 $(i, j) \in A$ 的权重为 $w_{ij} = \frac{1}{d_i}$. 首先在引理 B.1 中给出关于局中人收益的一些性质, 然后证明引理 B.2: 对于双向树, 对角回路不存在, 即证明引理 3.1.

引理 B.1 对于不同的 $i, j \in V$, 下列结论成立:

- (i) $\pi_f(i, j) \geq \frac{n}{2}$ 当且仅当 $\varpi(i, j) \leq \frac{n}{2f_1} (\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_j})$;
- (ii) $\pi_f(i, j) > \frac{n}{2}$ 当且仅当 $\varpi(i, j) < \frac{n}{2f_1} (\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_j})$.

证明 由 (3.1) 和引理 A.1 中的 $o_i^j + o_j^i = n$, 得到 $\pi_f(i, j) = \frac{f_1(n - o_j^i) + nc_j^j}{c_j^i + c_j^j + f_1}$. 因此由引理 A.2 和 A.3, $\pi_f(i, j) \geq \frac{n}{2}$ 等价于

$$\text{dis}_{i,j} \cdot |\bar{V}_i^j| \leq \frac{\text{dis}_{i,j} \cdot n}{2} + \frac{n}{2f_1} \left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_j} \right) + \sum_{g=1}^{\text{dis}_{i,j}-1} (\text{dis}_{i,j} - g) \cdot |V_{ij}^g|.$$

注意到 $V_{ij}^g, g = 1, \dots, \text{dis}_{i,j} - 1$ 是 $\bar{V}_i^j$ 的不相交子集, 且 $\bar{V}_i^j - \bigcup_{g=1}^{\text{dis}_{i,j}-1} V_{ij}^g = V - \bar{V}_j^i$. 由上面的不等式可以得出 $\pi_f(i, j) \geq \frac{n}{2}$ 等价于 $\varpi(i, j) \leq \frac{n}{2f_1} (\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_j})$, 这建立了 (i). (ii) 的证明类似, 这里省略. $\square$

引理 B.2 (引理 3.1) 对于 T_w , 不存在对角回路.

证明 假设 ς 是一条对角回路. 不失一般性地假设

$$\varsigma = (\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \dots, \langle m-1, m \rangle, \langle m, m \rangle, \langle m, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle),$$

并且前 $2(m-1)$ 次偏离中至少有一个会导致偏离者收益的严格增加. 回顾 (3.1), 在每个对角策略组合下, 两个局中人的收益都是 $\frac{n}{2}$. 如果偏离者的收益增加发生在他从非对角策略组合 $\langle i, i+1 \rangle$ 偏离时, 则这个偏离者一定是局中人 p_0 , 而且在 $\langle i, i+1 \rangle$ 下 p_0 的收益小于 $\frac{n}{2}$, 因而局中人 p_1 在 $\langle i, i+1 \rangle$ 下的收益大于 $\frac{n}{2}$. 这说明 p_1 在从 $\langle i, i \rangle$ 偏离到 $\langle i, i+1 \rangle$ 时增加了他的收益. 因此, 存在 $1 \leq i^* \leq m-1$, 使得从对角策略组合 $\langle i^*, i^* \rangle$ 到非对角策略组合 $\langle i^*, i^*+1 \rangle$ 的偏离给偏离者 p_1 带来严格增加的收益.

对于局中人 p_1 从对角 $\langle i, i \rangle$ 到非对角 $\langle i, i+1 \rangle$ 的每一次偏离 ($i = 1, \dots, m-1$), 从对角回路的定义可推导出: 偏离者 p_1 在 $\langle i, i \rangle$ 下的收益 $\pi_f(i, i) = \frac{n}{2}$ 是其在 $\langle i, i+1 \rangle$ 下收益 $\pi_f(i, i+1)$ 的下界, 并

且当 $i = i^*$ 时此下界不是紧的. 因此, 对于 $i = 1, \dots, m-1$ 有 $\pi_f(i, i+1) \geq \frac{n}{2}$, 且 $\pi_f(i^*, i^*+1) > \frac{n}{2}$. 接下来, 定理 3.1(i) 对于 $i = 1, \dots, m-1$ 给出 $\pi_f(i+1, i) \leq \frac{n}{2}$ 和 $\pi_f(i^*+1, i^*) < \frac{n}{2}$. 由引理 B.1 可知 $\varpi(i+1, i) \geq \frac{n}{2f_1}(\frac{1}{d_{i+1}} - \frac{1}{d_i})$ 和 $\varpi(i^*+1, i^*) > \frac{n}{2f_1}(\frac{1}{d_{i^*+1}} - \frac{1}{d_{i^*}})$. 迭代地应用引理 A.4, 得到

$$\sum_{i=1}^{m-1} \varpi(i+1, i) = \varpi(2, 1) + \varpi(3, 2) + \sum_{i=3}^{m-1} \varpi(i+1, i) = \varpi(3, 1) + \sum_{i=3}^{m-1} \varpi(i+1, i) = \dots = \varpi(m, 1).$$

所以

$$\varpi(m, 1) = \sum_{i=1}^{m-1} \varpi(i+1, i) > \sum_{i=1}^{m-1} \frac{n}{2f_1} \left(\frac{1}{d_{i+1}} - \frac{1}{d_i} \right) = \frac{n}{2f_1} \left(\frac{1}{d_m} - \frac{1}{d_1} \right).$$

现在由引理 B.1 得到 $\pi_f(m, 1) < \frac{n}{2}$. 由此可见, 当局中人 p_0 从 $\langle m, 1 \rangle$ 偏离到 $\langle 1, 1 \rangle$ 时, 他的收益从 $n - \pi_f(m, 1) > \frac{n}{2}$ 减小到了 $\frac{n}{2}$. 这与 ς 的对角回路性质相矛盾. 这说明所加上的对角回路 ς 不可能存在. $\square$

附录 C 双向树中的等影响力博弈 SIG_d

本节研究双向树网络中的博弈 SIG_d , 证明在均匀权重和相等影响因子下 Nash 均衡存在. 首先, 给出均衡存在的充分条件如下.

引理 C.1 给定均匀权重的双向树网络 $T_w = (V, A)$, 设 $\mathcal{I}_d$ 是 T_w 中影响因子相等的 SIG_d 实例. 如果从 T_w 中删除 i 后不存在超过 $\frac{n}{2}$ 个顶点的连通分支, 则 $\langle i, i \rangle$ 为 $\mathcal{I}_d$ 的 Nash 均衡.

证明 文献 [17, 定理 2(i)] 证明了策略组合 $\langle i, i \rangle$ 是 Nash 均衡当且仅当它对所有 $j \in V \setminus \{i\}$ 成立

$$f_1(o_i^j - o_j^i) \geq n(d_j c_j^i - d_i c_i^j). \quad (\text{C.1})$$

引理 A.2 给出了对于所有不同的 $i, j \in V$, 都有 $c_i^j = \frac{1}{d_i} \cdot \frac{1}{\text{dis}_{i,j}}$, 这意味着 (C.1) 的右边等于 0. 注意对于所有 $j \neq i$, 都有 $o_i^j \leq |\bar{V}_j^i|$ 和 $o_j^i \geq n - |\bar{V}_j^i|$. 因此, 当 $|\bar{V}_j^i| \leq \frac{n}{2}$ 时, $o_i^j - o_j^i \geq 0$. 引理得证. $\square$

定理 C.1 任给均匀权重双向树网络中等影响因子的实例 $\mathcal{I}_d$, 存在某个 $i \in V$ 使得对角策略组合 $\langle i, i \rangle$ 是 $\mathcal{I}_d$ 的 Nash 均衡.

证明 由引理 C.1, 只需证明对于任何树 $T = (V, A)$, 存在某个顶点 $i \in V$, 称其为平衡顶点, 使得从 T 中除去 i 后, 不存在顶点数大于 $\frac{n}{2}$ 的连通分支.

下面通过对 $|V|$ 进行归纳来证明这一论断. 如果 $|V| = 2$, 结论显然成立. 假设该论断对 $|V| = k$ 成立, 考虑 $|V| = k+1$ 的情形. 令 $T' = T \setminus \{v\}$ 表示从 T 中去掉一个叶子顶点 v 后得到的树. 根据归纳假设, 在 T' 中存在某个平衡顶点 u . 如果 u 也是 T 的平衡顶点, 则证明完成. 否则, $T \setminus \{u\}$ 的包含 v 的连通分支 (其顶点集为 $\bar{V}_v^u$) 包含至少 $\frac{k+1}{2}$ 个顶点. 用 u' 表示 u 在唯一 $u-v$ 路上的邻居. 接下来证明 u' 是 T 的一个平衡顶点. 注意到在 T 中有 $\bar{V}_{u'}^u = V \setminus \bar{V}_u^u$ 成立. 由 $\bar{V}_{u'}^u = \bar{V}_v^u$ 和 $|\bar{V}_v^u| \geq \frac{k+1}{2}$, 可知 $T \setminus \{u'\}$ 中包含 u 的连通分支 (其顶点集为 $\bar{V}_{u'}^u$) 的大小满足

$$|\bar{V}_{u'}^u| = |V| - |\bar{V}_u^u| \leq n - \frac{k+1}{2} = \frac{k+1}{2}.$$

其他连通分支的顶点总数等于

$$|V| - 1 - |\bar{V}_{u'}^u| = |\bar{V}_u^u| - 1 \leq \left(\frac{k}{2} + 1 \right) - 1 = \frac{k}{2},$$

其中不等式成立是因为 u 是 T' 的平衡顶点. 这意味着其中的每个连通分支的顶点数不超过 $\frac{k}{2}$. 因此, u' 是 T 的一个平衡顶点. $\square$

附录 D 实验比较分析

在本节中, 将实验分析比较 SIG 和 SIG_d 这两个策略影响博弈模型在 Nash 均衡存在性方面的表现, 讨论这两类博弈实例 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{I}_d$ 中 Nash 均衡的存在性条件. 首先, 使用例 D.1 和 D.2 从直观上说明差异. 然后, 分别以 Erdős-Renyi 随机图^[14]、Watts-Strogatz 模型生成的小世界网络^[28] 和 Barabási-Albert 模型生成的无标度网络^[4] 这三类随机图来模拟社交网络 G , 探讨 Nash 均衡在 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{I}_d$ 中存在的概率.

局中人 p_1 在 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{I}_d$ 中的收益可分别由命题 2.2 和文献 [17, 定理 1] 计算, 从而得到收益矩阵 $\Pi = [\pi_{ij}]$, 其中 π_{ij} 是局中人 p_1 在策略 $\langle i, j \rangle$ 下的收益. 注意策略 $\langle i, j \rangle$ 是一个 Nash 均衡当且仅当 π_{ij} 是 Π 第 i 行的最大值, 第 j 列的最小值. 因此, 一旦收益矩阵 Π 给定, 就可以确定其对应的博弈是否具有 Nash 均衡. 在下面的例子中, 考虑一个双向链网络和一个双向星网络.

例 D.1 令双向链网络 G 如图 D1 所示, $\mathcal{I}_d$ 和 $\mathcal{I}$ 中 Nash 均衡的存在情形见表 D1. 对比条件不难看出, 为了保证该网络中 Nash 均衡存在, $\mathcal{I}_d$ 对影响因子 f_0 和 f_1 的比值要求更为严格.

表 D1 中数据的具体计算过程如下: 网络 G 的权重矩阵 W 为

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

对应的参数如下表 D2 所示, 将参数代入到命题 2.2 和文献 [17, 定理 1] 给出的局中人 p_1 的收益函数, 得到局中人 p_1 在 $\mathcal{I}_d$ 和 $\mathcal{I}$ 中的收益, 如表 D3 所示. 注意到, 策略组合 $\langle i, j \rangle$ 是 Nash 均衡, 当且仅当 p_1 的收益 $\pi_f(i, j)$ 对所有 $k \neq j$ 和 $h \neq i$ 都满足 $\pi_f(i, k) \leq \pi_f(i, j) \leq \pi_f(h, j)$. 然后将表 D3 中的收益代入条件, 得到表 D1 中的结果.

例 D.2 令双向星网络 G 如图 D2 所示, $\mathcal{I}_d$ 和 $\mathcal{I}$ 中 Nash 均衡的存在情形见表 D4. 再次表明, $\mathcal{I}$ 对影响因子 f_0 和 f_1 的比值要求较 $\mathcal{I}_d$ 更弱的条件, 以保证该网络中存在 Nash 均衡.

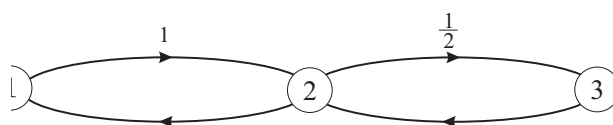
图 D1 例 D.1 中的双向链网络 G

表 D1 例 D.1 中双向链网络的 Nash 均衡存在情形

	条件	Nash 均衡
$\mathcal{I}_d$ 中 Nash 均衡的存在情形	$\frac{f_0}{f_1} < \frac{1}{2}$	无
	$\frac{f_0}{f_1} = \frac{1}{2}$	$\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle$
	$\frac{1}{2} < \frac{f_0}{f_1} < 2$	$\langle 2, 2 \rangle$
	$\frac{f_0}{f_1} = 2$	$\langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle$
	$\frac{f_0}{f_1} > 2$	无
$\mathcal{I}$ 中 Nash 均衡的存在情形	$\frac{f_0}{f_1} < \frac{1}{2} - \frac{3}{4f_1}$	无
	$\frac{f_0}{f_1} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4f_1}$ (即, $\frac{f_1}{f_0} = 2 + \frac{3}{2f_0}$)	$\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle$
	$\frac{1}{2} - \frac{3}{4f_1} < \frac{f_0}{f_1} < 2 + \frac{3}{2f_1}$	$\langle 2, 2 \rangle$
	$\frac{f_0}{f_1} = 2 + \frac{3}{2f_1}$ (即, $\frac{f_1}{f_0} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4f_0}$)	$\langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle$
	$\frac{f_0}{f_1} > 2 + \frac{3}{2f_1}$	无

表 D4 中数据的具体计算过程如下: 网络 G 的权重矩阵 W 为

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

表 D5 和 D6 分别给出了网络参数和局中人 p_1 在不同策略组合下的收益.

接下来, 进一步探讨了不同随机网络下 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{I}_d$ 中 Nash 均衡存在的概率. 在以下三类无向网络中检验 Nash 均衡在不同影响程度下的存在性: Erdős-Renyi 随机图^[14]、Watts-Strogatz 模型生成的小世界网络^[28] 和 Barabási-Albert 模型生成的无标度网络^[4]. 这三类网络一般都是无向图. 为了契合第 2 节所介绍的有向网络博弈环境, 可以将每条无向边想象 (替代) 成一对具有相反方向的弧 (两条弧的权重与对应无向边的相同). 为了符合惯例及叙述方便, 下文对网络结构和参数的表述仍然按无向图处理. 假设网络中的每个成员对其邻居赋予均匀 (即相同的) 权重, 在连通的网络中测试 Nash 均衡的存在性, 其中连通性保证了相应无向网络权重矩阵的不可约性. 对于每一类网络, 生成 1,000 个具有不同

表 D2 例 D.1 中网络的参数

(i, j)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,3)	(3,1)	(3,2)
$\alpha_{jj}^{[-i]}$	2	2	1	1	2	2
$\sum_{k \neq i,j} \alpha_{kj}^{[-i]}$	2	1	0	0	1	2
c_j^i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
o_j^i	1	$\frac{3}{2}$	2	2	$\frac{3}{2}$	1

表 D3 例 D.1 中局中人 p_1 在不同策略组合下的收益

策略 $\langle i, j \rangle$	在 $\mathcal{I}_d$ 中 p_1 的收益	在 $\mathcal{I}$ 中 p_1 的收益
$\langle 1, 1 \rangle$	$\frac{3f_1}{f_0+f_1}$	$\frac{3f_1}{f_0+f_1}$
$\langle 1, 2 \rangle$	$\frac{f_1(f_0+3)}{f_0+f_1+f_0f_1}$	$\frac{f_1(2f_0+3)}{\frac{1}{2}f_0+f_1+f_0f_1}$
$\langle 1, 3 \rangle$	$\frac{f_1(\frac{3}{2}f_0+\frac{3}{2})}{\frac{1}{2}f_0+\frac{1}{2}f_1+f_0f_1}$	$\frac{f_1(\frac{3}{2}f_0+\frac{3}{2})}{\frac{1}{2}f_0+\frac{1}{2}f_1+f_0f_1}$
$\langle 2, 1 \rangle$	$\frac{f_1(2f_0+3)}{f_0+f_1+f_0f_1}$	$\frac{f_1(f_0+\frac{3}{2})}{f_0+\frac{1}{2}f_1+f_0f_1}$
$\langle 2, 2 \rangle$	$\frac{3f_1}{f_0+f_1}$	$\frac{3f_1}{f_0+f_1}$
$\langle 2, 3 \rangle$	$\frac{f_1(2f_0+3)}{f_0+f_1+f_0f_1}$	$\frac{f_1(f_0+\frac{3}{2})}{f_0+\frac{1}{2}f_1+f_0f_1}$
$\langle 3, 1 \rangle$	$\frac{f_1(\frac{3}{2}f_0+\frac{3}{2})}{\frac{1}{2}f_0+\frac{1}{2}f_1+f_0f_1}$	$\frac{f_1(\frac{3}{2}f_0+\frac{3}{2})}{\frac{1}{2}f_0+\frac{1}{2}f_1+f_0f_1}$
$\langle 3, 2 \rangle$	$\frac{f_1(f_0+3)}{f_0+f_1+f_0f_1}$	$\frac{f_1(2f_0+3)}{\frac{1}{2}f_0+f_1+f_0f_1}$
$\langle 3, 3 \rangle$	$\frac{3f_1}{f_0+f_1}$	$\frac{3f_1}{f_0+f_1}$

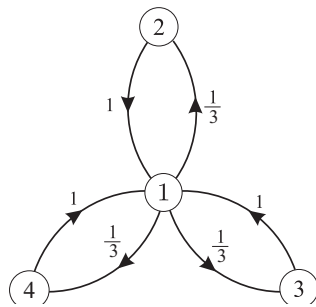


图 D2 例 D.2 中的双向星网络 G

参数的网络. 具体而言,

- 对于 Erdős-Renyi 随机图, 1,000 个网络通过 10 次独立随机采样来生成, 该随机图有 n 个顶点, 每条边产生的概率为 p , 其中 n 的取值为 $N = \{64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 96, 100\}$, 且 p 取值为 $P = \{0.09, 0.18, 0.27, 0.36, 0.45, 0.54, 0.63, 0.72, 0.81, 0.9\}$;

- 对于小世界网络, 1,000 个网络由 Watts-Strogatz 模型下 2 次独立采样生成, 每个网络是有 n 个顶点的正则图, 平均度为 k , 重新连接概率为 p , 其中 n 取值于 N , k 取值于 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$, p 取值于 P ;

表 D4 例 D.2 中双向星型网络的 Nash 均衡存在情形

	条件	Nash 均衡
$\mathcal{I}_d$ 中 Nash 均衡的存在情形	$\frac{f_0}{f_1} < \frac{1}{3}$	无
	$\frac{f_0}{f_1} = \frac{1}{3}$	$\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 1 \rangle$
	$\frac{1}{3} < \frac{f_0}{f_1} < 3$	$\langle 1, 1 \rangle$
	$\frac{f_0}{f_1} = 3$	$\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle$
	$\frac{f_0}{f_1} > 3$	无
$\mathcal{I}$ 中 Nash 均衡的存在情形	$\frac{f_0}{f_1} < \frac{1}{3} - \frac{8}{9f_1}$	无
	$\frac{f_0}{f_1} = \frac{1}{3} - \frac{8}{9f_1}$ (即 $\frac{f_1}{f_0} = 3 + \frac{8}{3f_0}$)	$\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 1 \rangle$
	$\frac{1}{3} - \frac{8}{9f_1} < \frac{f_0}{f_1} < 3 + \frac{8}{3f_1}$	$\langle 1, 1 \rangle$
	$\frac{f_0}{f_1} = 3 + \frac{8}{3f_1}$ (即 $\frac{f_1}{f_0} = \frac{1}{3} - \frac{8}{9f_0}$)	$\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle$
	$\frac{f_0}{f_1} > 3 + \frac{8}{3f_1}$	无

表 D5 例 D.2 中网络的参数

(i, j)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(3,1)	(3,2)	(3,4)	(4,1)	(4,2)	(4,3)
$\alpha_{jj}^{[-i]}$	1	1	1	3	2	2	3	2	2	3	2	2
$\sum_{k \neq i, j} \alpha_{kj}^{[-i]}$	0	0	0	6	2	2	6	2	2	6	2	2
c_j^i	1	1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
o_j^i	3	3	3	1	2	2	1	2	2	1	2	2

表 D6 例 D.2 中局中人 p_1 在 $\mathcal{I}_d$ 和 $\mathcal{I}$ 中不同策略组合下的收益

策略 $\langle i, j \rangle$	在 $\mathcal{I}_d$ 中 p_1 的收益	在 $\mathcal{I}$ 中 p_1 的收益
$\langle 1, 1 \rangle$	$\frac{4f_1}{f_0+f_1}$	$\frac{4f_1}{f_0+f_1}$
$\langle 1, 2 \rangle$	$\frac{f_1(3f_0+4)}{f_0+f_1+f_0f_1}$	$\frac{f_1(f_0+\frac{4}{3})}{f_0+\frac{1}{3}f_1+f_0f_1}$
$\langle 1, 3 \rangle$	$\frac{f_1(3f_0+4)}{f_0+f_1+f_0f_1}$	$\frac{f_1(f_0+\frac{4}{3})}{f_0+\frac{1}{3}f_1+f_0f_1}$
$\langle 1, 4 \rangle$	$\frac{f_1(3f_0+4)}{f_0+f_1+f_0f_1}$	$\frac{f_1(f_0+\frac{4}{3})}{f_0+\frac{1}{3}f_1+f_0f_1}$
$\langle 2, 1 \rangle$	$\frac{f_1(f_0+4)}{f_0+f_1+f_0f_1}$	$\frac{f_1(3f_0+4)}{\frac{1}{3}f_0+f_1+f_0f_1}$
$\langle 2, 2 \rangle$	$\frac{4f_1}{f_0+f_1}$	$\frac{4f_1}{f_0+f_1}$
$\langle 2, 3 \rangle$	$\frac{f_1(2f_0+2)}{\frac{1}{2}f_0+\frac{1}{2}f_1+f_0f_1}$	$\frac{f_1(2f_0+2)}{\frac{1}{2}f_0+\frac{1}{2}f_1+f_0f_1}$
$\langle 2, 4 \rangle$	$\frac{f_1(2f_0+2)}{\frac{1}{2}f_0+\frac{1}{2}f_1+f_0f_1}$	$\frac{f_1(2f_0+2)}{\frac{1}{2}f_0+\frac{1}{2}f_1+f_0f_1}$
$\langle 3, 1 \rangle$	$\frac{f_1(f_0+4)}{f_0+f_1+f_0f_1}$	$\frac{f_1(3f_0+4)}{\frac{1}{3}f_0+f_1+f_0f_1}$
$\langle 3, 2 \rangle$	$\frac{f_1(2f_0+2)}{\frac{1}{2}f_0+\frac{1}{2}f_1+f_0f_1}$	$\frac{f_1(2f_0+2)}{\frac{1}{2}f_0+\frac{1}{2}f_1+f_0f_1}$
$\langle 3, 3 \rangle$	$\frac{4f_1}{f_0+f_1}$	$\frac{4f_1}{f_0+f_1}$
$\langle 3, 4 \rangle$	$\frac{f_1(2f_0+2)}{\frac{1}{2}f_0+\frac{1}{2}f_1+f_0f_1}$	$\frac{f_1(2f_0+2)}{\frac{1}{2}f_0+\frac{1}{2}f_1+f_0f_1}$
$\langle 4, 1 \rangle$	$\frac{f_1(f_0+4)}{f_0+f_1+f_0f_1}$	$\frac{f_1(3f_0+4)}{\frac{1}{3}f_0+f_1+f_0f_1}$
$\langle 4, 2 \rangle$	$\frac{f_1(2f_0+2)}{\frac{1}{2}f_0+\frac{1}{2}f_1+f_0f_1}$	$\frac{f_1(2f_0+2)}{\frac{1}{2}f_0+\frac{1}{2}f_1+f_0f_1}$
$\langle 4, 3 \rangle$	$\frac{f_1(2f_0+2)}{\frac{1}{2}f_0+\frac{1}{2}f_1+f_0f_1}$	$\frac{f_1(2f_0+2)}{\frac{1}{2}f_0+\frac{1}{2}f_1+f_0f_1}$
$\langle 4, 4 \rangle$	$\frac{4f_1}{f_0+f_1}$	$\frac{4f_1}{f_0+f_1}$

表 D7 在变化的 f_1 且 $f_0 = 1$ 的条件下, $\mathcal{I}_d$ 中纯策略 Nash 均衡的占比

f_1	0.25	0.33	0.5	0.67	0.8	1	1.25	1.5	2	3	4
% ER 随机图的 Nash 均衡	64.2	68.2	74.2	81.5	89.2	99.8	86.3	75.9	55.5	32.6	16.8
% 小世界的 Nash 均衡	0	0	0.4	1.5	8.0	100	7.9	1.0	0.2	0	0
% 无标度的 Nash 均衡	0	0.4	1.9	8.7	28.0	100	30.6	10.5	1.1	0.3	0

表 D8 在变化的 f_1 且 $f_0 = 1$ 的条件下, $\mathcal{I}$ 中纯策略 Nash 均衡占比

f_1	0.25	0.33	0.5	0.67	0.8	1	1.25	1.5	2	3	4
% ER 随机图的 Nash 均衡	0.1	0.3	0.9	2.3	7.8	96.8	7.4	1.2	0.1	0	0
% 小世界的 Nash 均衡	0	0	1.0	6.2	24.6	100	22.3	2.7	0.5	0	0
% 无标度的 Nash 均衡	2.3	4.4	12.7	30.8	50.1	100	50.0	24.6	5.5	0.7	0.1

• 对于无标度网络, 1,000 个网络由 Barabási-Albert 模型的 5 次独立采样生成, 具有 n 个顶点, m_0 个初始顶点, 每个新顶点连接 m 个现有顶点, 其中 n 取值于 N , m_0 取值于 $\{4, 5, 6, 7, 8\}$, m 取值于 $\{1, 2, 3, 4\}$.

Nash 均衡存在的网络所占百分比如表 D7 和 D8 所示. 结果表明, 在 SIG_d 和 SIG 两种博弈中, 当影响因子相等时, 几乎始终存在 Nash 均衡, 当影响因子变得不均匀时, Nash 均衡的存在频率迅速下降. 一种可能的解释是, 高影响力局中人希望选择与低影响力局中人相同的成员以抑制低影响力局中人对目标成员的影响, 而低影响力局中人则希望规避高影响力局中人的抑制, 因此偏向于选择与高影响力局中人不同的目标成员. 此外, 可以看出 $\mathcal{I}_d$ 在 Erdős-Rényi 随机图中表现良好, 而在小世界和无标度网络中, $\mathcal{I}$ 允许更多的 Nash 均衡. 这可能与这两个现实世界网络中枢纽的形成和较短的平均链长有关. 当然, 新的重归一化和这些性质如何影响 Nash 均衡的存在性是一个值得进一步探究的问题.

Grabisch 等在文献 [17, 第 3.5 小节] 中给出了 $i \neq j$ 时计算 o_j^i 和 c_j^i 的直接方法. 对于任意权重矩阵 W 以及不同成员 i 和 j , 设 $W^{[-i]}$ 为从 W 中删除第 i 行和第 i 列得到的矩阵, $\alpha_{kj}^{[-i]}$ 是矩阵 $(I - W^{[-i]})^{-1}$ 的第 k 行第 j 列的元素, 则有 $c_j^i = \frac{1}{\alpha_{jj}^{[-i]}}$ 和 $o_j^i = n - 1 - \sum_{k \neq i, j} \frac{\alpha_{kj}^{[-i]}}{\alpha_{jj}^{[-i]}}$.

The equilibrium existence of strategic influence games in social networks

Xujin Chen, Xiaodong Hu, Yingying Song, Chenhao Wang & Xiaoying Wu

Abstract We study the game model proposed by Grabisch et al. in 2010. Given a set of (nonstrategic) agents in a strongly connected network each of whom has an initial opinion expressed by a number in $[0, 1]$, two (strategic) players with fixed opinions 0 and 1, respectively, compete for the support of the agents. Each player chooses one agent and influences the agent's opinion with an influence factor. Such influence may spread due to the interactions among agents in the network. The objective of each player is to make the sum of the resulting agents' opinions as close to their own (0 or 1) as possible. We develop the model by introducing a new renormalization matrix to evaluate the influence strength of players and exemplify that it relaxes the conditions for the existence of Nash equilibrium (NE) in a range of networks. For the new setting, when the two players have equal influence strength, we give a sufficient condition for NE existence and prove that there exists at least one equilibrium in bidirectional tree networks with uniform weights.

Keywords social networks, influence game, renormalization, Nash equilibria

MSC(2020) 91A05, 91A43, 91D30

doi: 10.1360/SSM-2024-0148