中国科学: 数学 2021 年 第 51 卷 第 12 期: 1975 ~ 1982
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

四元数空间中的正则逆紧映射

徐正华[1], 王尔敏[2*]

1. 合肥工业大学数学学院, 合肥 230601;
2. 岭南师范学院数学与统计学院, 湛江 524048
E-mail: zhxu@hfut.edu.cn, wem0913@sina.com

收稿日期: 2018-11-29; 接受日期: 2020-02-13; 网络出版日期: 2020-07-16; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11801125)、中央高校基本科研业务费 (批准号: JZ2019HGTB0054 和 JZ2018HGBZ0118) 和广东省普通高校青年创新人才类 (批准号: 2019KQNCX077) 资助项目

摘要 全纯逆紧映射的研究是多复变函数论中一个重要且非常活跃的课题. 本文研究四元数空间中的逆紧映射. 特别地, 对于四元数切片正则函数, 本文利用其 Hardy 空间的分解定理证明四元数单位球上的自逆紧映射正是有限 Blaschke 乘积. 此外, 本文确定了此函数类中 4 维球壳上的自逆紧映射.

关键词 切片正则函数 逆紧映射 Blaschke 乘积 四元数

MSC (2020) 主题分类 30G35, 32H35, 30J10

1 引言

受 Cullen[1] 工作的启发, Gentili 和 Struppa[2,3] 于 2006 年开始了对四元数 (切片) 正则函数理论的研究. 该理论是将复分析推广到非交换领域, 使其研究对象包含四元数多项式和幂级数. 此理论发展十分迅速, 有关该理论的更详细的研究进展可以参见文献 [4–6] 及其引用文献.

设 X 和 Y 是拓扑空间, $f: X \to Y$ 是连续映射, 如果对于 Y 中的每个紧子集 K, $f^{-1}(K)$ 都是 X 中的紧子集, 则称 f 是 X 到 Y 上的逆紧映射. 特别地, 当 $X = Y$ 时, 称 f 是 X 上的自逆紧映射. 给定 $\mathbb{C}^n$ 中的两个域 Ω_1 和 Ω_2, 全纯逆紧映射 $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ 也被称为有限映射. 这是因为对于任意 $w \in \Omega_2$, 其原像 $f^{-1}(w)$ 必然是紧解析子簇, 而紧解析子簇是一个有限点集 (参见文献 [7, 定理 14.3.1]). 此外, 全纯逆紧映射 f 是开映射, 即 f 将 Ω_1 的任意开集映射到 $\mathbb{C}^n$ 中的开集.

上述两种现象在四元数 $\mathbb{H}$ 中均不会出现. 为此, 考虑 $\mathbb{H}$ 到 $\mathbb{H}$ 上的逆紧映射 $f(q) = q^2 + 1$. 注意, 无限点集合 $\mathbb{S} = f^{-1}(0)$ 是 2 维单位纯虚四元数球面. 此外, 正则函数 $f(q) = q^2 + 1$ 不是开映射, 具体分析可以参见文献 [6, 例 7.8].

本文将对四元数空间上的正则函数建立如下结果.

英文引用格式: Xu Z H, Wang E M. Proper slice regular functions over quaternions (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1975–1982, doi: 10.1360/SCM-2018-0858

© 2020《中国科学》杂志社

定理 1.1 设正则函数 $f:\Omega_1\to\Omega_2$ 是逆紧映射, 其中 Ω_1 为四元数 $\mathbb{H}$ 中的轴对称切片域, Ω_2 为 $\mathbb{H}$ 中的域, 则 f 是满射且对于任意的 $w\in\Omega_2$, 其原像 $f^{-1}(w)$ 由有限个点集和有限个形如 $x+y\mathbb{S}$ 的 2 维球面组成, 其中 $x,y\in\mathbb{R}$, $y\neq 0$.

由定理 1.1 可以发现, 不存在四元数单位开球 $\mathbb{B}$ 到四元数空间 $\mathbb{H}$ 上的逆紧正则函数. 事实上, 正则函数 f 可以被分解成两个正则函数的正则乘积. 更准确地来说, 由定理 1.1 和文献 [6, 定理 3.36] 可得到分解 $f=h*g$, 其中 h 是四元数正则多项式, g 是 $\mathbb{B}$ 上恒不为 0 的正则函数, $*$ 是正则乘积. 注意, 此时正则函数 $g:\mathbb{B}\to\mathbb{H}$ 仍是逆紧的, 这与定理 1.1 推出的 g 是满射的结论相矛盾.

由逆紧的定义易知, $\mathbb{C}^n$ 中的域 Ω_1 到域 Ω_2 上的双全纯映射皆逆紧. 但是, 反之不然. 在单复变中, 人们很早就发现单位圆盘 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 上的全纯自逆紧映射正是有限 Blaschke 乘积, 即

$$f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\prod_{j=1}^{n}\frac{a_j-z}{1-z\overline{a}_j},\quad \theta\in\mathbb{R},$$

其中 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 可以相同且恰为 f 在 $\mathbb{D}$ 上的全部零点 (参见文献 [8, 第 152 页]).

然而, 此结论在多复变中的推广一直不为人所知, 直到 1977 年, Alexander [9] 才发现 $\mathbb{C}^n$ $(n>1)$ 中的单位球 B^n 上不存在非平凡的全纯自逆紧映射.

定理 1.2 (Alexander) 设 $n>1$. $\mathbb{C}^n$ 中的单位球 B^n 上的全纯自逆紧映射必是自同构.

Alexander 定理得到了广泛关注, 被推广到各种区域上, 如强拟凸域 [10]、具有实解析边界的拟凸域 [11,12]、推广的椭球体 [13]、秩大于 2 的不可约有界对称域 [14–16]、有界圆型域 [17]、平衡域 [18,19] 和华域 [20]. 关于全纯逆紧映射的更多研究成果可以参见早期的综述文献 [21,22].

在四元数空间中, 单位球 $\mathbb{B}$ 上的一一对应的正则函数是正则 Möbius 变换 (参见文献 [23, 定理 1.9]), 它自然是逆紧的. 给定 $a\in\mathbb{B}$, 四元数 Blaschke 因子定义为正则 Möbius 变换, 即

$$M_a(q)=\begin{cases}(1-q\overline{a})^{-*}*(a-q)\dfrac{\overline{a}}{|a|}, & a\neq 0,\\ q, & a=0,\end{cases}$$

其中 $(\cdot)^{-*}$ 是正则倒数.

更多关于四元数 Blaschke 因子和 Blaschke 乘积的内容可参见文献 [24,25]. 四元数 Blaschke 乘积是将单位球映入单位球, 且保持其边界. 因此, 它是逆紧的. 基于四元数 Hardy 空间的分解 (参见文献 [25, 定理 5.13]), 将证明单位球 $\mathbb{B}$ 上的正则逆紧映射全体为四元数有限 Blaschke 乘积.

定理 1.3 设正则函数 $f:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ 是逆紧映射, 其中 $\mathbb{B}$ 是四元数中的开单位球, 则 f 是四元数有限 Blaschke 乘积, 即

$$f(q)=M_{a_1}*M_{a_2}*\cdots*M_{a_n}(q)u, \tag{1.1}$$

其中 $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{B}$, $u\in\partial\mathbb{B}$.

与单复变全纯函数不同, 定理中的 $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{B}$ 未必是正则函数 f 的零点, 但 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是其对称化函数 f^s 的球面零点.

作为定理 1.3 的应用, 我们确定了去心单位球上的正则自逆紧映射.

定理 1.4 设正则函数 $f:\mathbb{B}\setminus\{0\}\to\mathbb{B}\setminus\{0\}$ 是逆紧映射, 则

$$f(q)=q^n u,\quad n\in\mathbb{Z}^+,\quad u\in\partial\mathbb{B}.$$

最后, 证明 4 维球壳 $A(r,s)=\{q\in\mathbb{H}:r<|q|<s\}$ $(0<r<s<+\infty)$ 上的正则自逆紧映射是自同构.

定理 1.5 设 $0<r<s<+\infty$. 若正则函数 $f:A(r,s)\to A(r,s)$ 是逆紧映射, 则 f 是自同构, 且

$$f(q)=qu \quad 或 \quad f(q)=q^{-1}rsu, \quad u\in\partial\mathbb{B}.$$

余下内容安排如下. 第 2 节介绍本文涉及的正则函数理论的基本概念和所需结论. 第 3 节给出定理 1.1 和 1.3–1.5 的证明.

2 预备知识

本节介绍正则函数理论中的一些基本概念, 以及在证明主要定理过程中需要用到的一些结论. 更多有趣的知识可参见正则函数理论方面的专著 [5,6].

记非交换、可结合的实四元数代数为 $\mathbb{H}$, 其标准基 $\{1,\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}\}$ 满足乘法关系

$$\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=\mathrm{ijk}=-1.$$

每个四元数 $q=x_0+x_1\mathrm{i}+x_2\mathrm{j}+x_3\mathrm{k}\in\mathbb{H}$ 可以写成其实部 $\mathrm{Re}\,(q)=x_0$ 与虚部 $\mathrm{Im}\,(q)=x_1\mathrm{i}+x_2\mathrm{j}+x_3\mathrm{k}$ 的和, 其共轭为 $\bar{q}=\mathrm{Re}\,(q)-\mathrm{Im}\,(q)$, 模为 $|q|=\sqrt{q\bar{q}}=\sqrt{|\mathrm{Re}\,(q)|^2+|\mathrm{Im}\,(q)|^2}$. 四元数是可除代数, 且每个非零元 q 的逆元素可表示为 $q^{-1}=|q|^{-2}\bar{q}$. 注意, 每个四元数可表示为 $q=x+yI$, 其中 $x,y\in\mathbb{R}$, 当 $\mathrm{Im}\,q\neq 0$ 时, $I=\frac{\mathrm{Im}\,(q)}{|\mathrm{Im}\,(q)|}$, 否则任取 I 属于 2 维单位球面

$$\mathbb{S}=\big\{q\in\mathbb{H}:q^2=-1\big\}.$$

对于任意的 $I\in\mathbb{S}$, 记复平面 $\mathbb{R}\oplus I\mathbb{R}$ 为 $\mathbb{C}_I$, 它同构于复数域 $\mathbb{C}$.

现在给出四元数正则函数的概念.

定义 2.1 设 Ω 为 $\mathbb{H}$ 中的域. 如果函数 $f:\Omega\to\mathbb{H}$ 对于任意的 $I\in\mathbb{S}$, 其在 $\Omega_I=\Omega\cap\mathbb{C}_I$ 的限制 f_I 全纯, 即 f_I 具有连续的偏导数且满足

$$\bar{\partial}_I f(x+yI):=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+I\frac{\partial}{\partial y}\right)f_I(x+yI)=0, \quad \forall\, x+yI\in\Omega_I,$$

则称 f 是 Ω 上的左切片正则函数, 简称为正则函数.

类似于全纯函数, 正则函数也存在幂级数展开.

定理 2.1 设 $f:\mathbb{B}\to\mathbb{H}$ 是正则函数, 则

$$f(q)=\sum_{n=0}^{\infty}q^n a_n, \quad \forall\, q\in\mathbb{B}, \quad a_n\in\mathbb{H}.$$

特别地, f 是光滑函数.

由于两个正则函数的普通逐点乘积不再保持正则性, 为此引入如下正则乘积.

定义 2.2 设 $f,g:\mathbb{B}\to\mathbb{H}$ 为正则函数, 其 Taylor 展开分别为

$$f(q)=\sum_{n=0}^{\infty}q^n a_n, \quad g(q)=\sum_{n=0}^{\infty}q^n b_n,$$

则 f 和 g 的正则乘积定义为

$$f*g(q)=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\Big(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\Big).$$

正则乘积与逐点乘积有下列关系.

命题 2.1 设 $f,g:\mathbb{B}\to\mathbb{H}$ 为正则函数, 则对于任意的 $q\in\mathbb{B}$, 有

$$f*g(q)=\begin{cases}f(q)g(f(q)^{-1}qf(q)), & f(q)\neq 0,\\ 0, & f(q)=0.\end{cases}$$

同样, 正则函数的普通倒数不再正则, 我们将引入正则倒数的概念. 为此, 先介绍两个辅助函数.

定义 2.3 设 $f(q)=\sum_{n=0}^{\infty}q^na_n$ 是 $\mathbb{B}$ 上的正则函数. 定义 f 的正则共轭 $f^c:\mathbb{B}\to\mathbb{H}$ 为

$$f^c(q)=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\bar{a}_n,$$

其对称化 $f^s:\mathbb{B}\to\mathbb{H}$ 为

$$f^s(q)=f*f^c(q)=f^c*f(q)=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\Big(\sum_{k=0}^{n}a_k\bar{a}_{n-k}\Big).$$

对于函数 $f:\mathbb{B}\to\mathbb{H}$, 记 f 在 $\mathbb{B}$ 的全部零点为 $\mathcal{Z}_f$. 现在给出正则倒数的定义.

定义 2.4 设 $f:\mathbb{B}\to\mathbb{H}$ 是不恒为 0 的正则函数. 定义 f 的正则倒数 $f^{-*}:\mathbb{B}\setminus\mathcal{Z}_{f^s}\to\mathbb{H}$ 为

$$f^{-*}(q):=f^s(q)^{-1}f^c(q).$$

诚然, f^c、f^s 和 f^{-*} 均为对应定义域上的正则函数.

命题 2.2 设 $f,g:\mathbb{B}\to\mathbb{H}$ 是正则函数, 则

$$f^{-*}*g(q)=f(T_f(q))^{-1}g(T_f(q)),\quad q\in\mathbb{B}\setminus\mathcal{Z}_{f^s},$$

其中 $T_f:\mathbb{B}\setminus\mathcal{Z}_{f^s}\to\mathbb{B}\setminus\mathcal{Z}_{f^s}$, $T_f(q)=f^c(q)^{-1}qf^c(q)$, 且 T_f 与 T_{f^c} 互逆.

定义 2.5 设 Ω 为 $\mathbb{H}$ 中的域. 如果 Ω 与实轴 $\mathbb{R}$ 相交, 且对任意的 $I\in\mathbb{S}$, Ω_I 仍是 $\mathbb{C}_I$ 中的域, 则称 Ω 为切片域. 如果对任意的 $x+yI\in\Omega$, 其中 $x,y\in\mathbb{R}$, $I\in\mathbb{S}$, 均有 $x+y\mathbb{S}\subseteq\Omega$, 则称 Ω 为轴对称域.

注 2.1 定义 2.2–2.4 依赖四元数单位球 $\mathbb{B}$ 上正则函数的 Taylor 展开, 存在一定局限性. 事实上, 这 3 个定义中的定义域可以扩展到一般轴对称切片域, 但需要借助正则函数的分裂引理 (splitting lemma) 和唯一性原理 (identity principle). 命题 2.1 和 2.2 在轴对称切片域仍然成立, 有兴趣的读者可以参见文献 [6,26].

正如引言所述, 正则函数的零点结构与单复变全纯函数有所不同, 具体如下:

定理 2.2 (零点结构定理) 设 f 是轴对称切片域 Ω 上不恒为 0 的正则函数, 则 f 的零点是孤立的点集或孤立的形如 $x+y\mathbb{S}$ 的 2 维球面, 其中 $x,y\in\mathbb{R}$, $y\neq 0$.

定理 2.3 (最大模原理) 设 f 是轴对称切片域 Ω 上的正则函数, 则 $|f|$ 在 Ω 内任意点都不能达到最大值, 除非 f 在 Ω 内恒等于常数.

定理 2.4 (弱开映照定理) 设 f 是轴对称切片域 Ω 上的非常值正则函数. 如果 U 是 Ω 内的轴对称子集, 那么 $f(U)$ 是开集. 特别地, $f(\Omega)$ 是开集.

3 主要定理的证明

首先, 利用定理 2.2 和 2.4 证明定理 1.1.

定理 1.1 的证明 首先注意到 Ω_1 和 Ω_2 是 $\mathbb{R}^4$ 空间中的区域. 根据题设知, 连续映射 $f:\Omega_1\to\Omega_2$ 是逆紧的等价于任意 Ω_1 中的序列 $\{q_n\}$ 的像序列 $\{f(q_n)\}$ 在 Ω_2 中没有极限点. 因此, f 不是常值函数. 根据定理 2.4 可知, 轴对称切片域 Ω_1 在四元数正则函数 f 下的像 $f(\Omega_1)$ 是开的.

假定 $f(\Omega_1)\subsetneqq\Omega_2$. 取 $p_0\in\Omega_2\setminus f(\Omega_1)$ 使得 $p_0\in\partial f(\Omega_1)$, 则存在 Ω_1 中的序列 $\{q_n\}$ 使得 $f(q_n)\to p_0$ $(n\to+\infty)$. 注意, 此时集合 $\Omega=\{p_0,f(q_1),\ldots,f(q_n),\ldots\}$ 是 Ω_2 中的紧子集, 则 f 的逆紧性可推出 $f^{-1}(\Omega)$ 是紧的, 所以, $\{q_n\}\subseteq f^{-1}(\Omega)$ 在 Ω_1 中有极限点, 记作 q_0. 取 $\{q_n\}$ 的子列 $\{q_{n_m}\}$ 使其收敛于 q_0. 至此, 得到

$$p_0=\lim_{m\to+\infty}f(q_{n_m})=f(q_0)\in f(\Omega_1),$$

与假设矛盾, 即 f 是满射.

给定 $w\in\Omega_2$. 由于独点集是紧的, 因此, 函数 f 的逆紧性意味着 $f^{-1}(\Omega)$ 是紧的. 再根据正则函数的零点结构定理 (定理 2.2) 可知, $f^{-1}(w)$ 是由有限个点集或有限个形如 $x+y\mathbb{S}$ 的 2 维球面组成, 其中 $x,y\in\mathbb{R}$, $y\neq0$. 证毕. □

类比于复数情形, 四元数正则函数中的 Hardy 空间也可以建立分解定理 (参见文献 [25, 定理 5.13] 或 [27, 定理 6.38]). 特别地, 有界的正则函数有如下分解.

定理 3.1 设 $f:\mathbb{B}\to\mathbb{H}$ 是有界的正则函数, 则 f 可以分解为

$$f(q)=h*g(q),$$

其中 h 是 $\mathbb{B}$ 上恒不为 0 的正则函数, g 是 $\mathbb{B}$ 上的四元数 Blaschke 乘积.

下面证明主要结论.

定理 1.3 的证明 由定理 1.1 可知, 逆紧正则函数 f 的零点 $f^{-1}(0)$ 是由有限个点集或有限个 2 维球面组成, 因此存在 $r\in(0,1)$ 使得 $f^{-1}(0)\subset r\mathbb{B}$. 再结合定理 3.1 知, 有界正则函数 f 可以分解为

$$f(q)=h*g(q),$$

其中 h 是 $\mathbb{B}$ 上恒不为 0 的正则函数, g 是 $\mathbb{B}$ 上的四元数有限 Blaschke 乘积, 且 $g^{-1}(0)\subseteq(f^s)^{-1}(0)\subset r\mathbb{B}$. 不妨设

$$g(q)=M_{a_1}*M_{a_2}*\cdots*M_{a_n}(q),\quad a_1,a_2,\ldots,a_n\in r\mathbb{B}.$$

一方面, 考虑 $\mathbb{B}$ 上的正则函数 $h(q)=f*g^{-*}$. 注意到 $(g^c)^{-1}(0)\subset r\mathbb{B}$. 由命题 2.1 和 2.2 可知,

$$h(q)=f*g^{-*}(q)=f(q)g^{-*}(p)=f(q)g(T_g(p))^{-1},\quad r\leqslant|q|<1,$$

其中 $p=f(q)^{-1}qf(q)$, $T_g(p)=g^c(p)^{-1}pg^c(p)$.

注意, $\mathbb{B}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 中的有界域. 连续映射 $f:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ 的逆紧性等价于对于任意序列 $q_n\to\partial\mathbb{B}$ 都有 $f(q_n)\to\partial\mathbb{B}$ (参见文献 [8, 第 13 页]). 因此,

$$\lim_{|q|\to1^-}|h(q)|=\lim_{|q|\to1^-}\frac{|f(q)|}{|g(T_g(p))|}=1.$$

结合正则函数的最大模原理 (定理 2.3) 可知, 对于任意 $q\in\mathbb{B}$, 都有 $|h(q)|\leqslant1$ 成立.

另一方面, 考虑 $\mathbb{B}$ 上的正则函数 $h^{-*}=g^{-*}*f$. 命题 2.2 告诉我们,

$$h^{-*}(q)=g^{-*}*f(q)=g(T_g(q))^{-1}f(T_g(q)),\quad r\leqslant|q|<1,$$

其中 $T_g(q)=g^c(q)^{-1}qg^c(q)$, 则

$$\lim_{|q|\to1^-}|h^{-*}(q)|=\lim_{|q|\to1^-}\frac{|f(T_g(q))|}{|g(T_g(q))|}=1.$$

再次利用正则函数的最大模原理 (定理 2.3), 得到 $|h^{-*}(q)|\leqslant1$ 对于任意 $q\in\mathbb{B}$ 成立. 结合文献 [28, 命题 3.6] 可知, 对于任意的 $q\in\mathbb{B}$, 恒有 $|h(q)|\geqslant1$.

综上, $|h(q)|$ 在 $\mathbb{B}$ 上恒为 1, 定理 2.3 推出 h 为常值函数且模长为 1. 证毕. □

为了证明定理 1.4 和 1.5, 先对定义在 4 维球壳上的逆紧正则函数建立一个边界型引理.

引理 3.1 设 $0\leqslant r<s<+\infty$, $0\leqslant r'<s'<+\infty$. 如果正则函数 $f:A(r,s)\to A(r',s')$ 是逆紧映射, 则

$$\lim_{|q|\to r^+}|f(q)|=r'\quad\text{且}\quad\lim_{|q|\to s^-}|f(q)|=s',$$

或

$$\lim_{|q|\to r^+}|f(q)|=s'\quad\text{且}\quad\lim_{|q|\to s^-}|f(q)|=r'.$$

证明 给定 $l\in(r',s')$, 记紧球面 $\{q\in\mathbb{H}:|q|=l\}$ 为 L. 由 f 的逆紧性可知, $f^{-1}(L)$ 是 $A(r,s)$ 中的紧集. 选取适当的 a 和 b 使得 $r<a<b<s$, 且

$$A(r,a)\cap f^{-1}(L)=A(b,s)\cap f^{-1}(L)=\emptyset.$$

因为 $A(r,a)$ 和 $A(b,s)$ 连通, 且 f 连续, 所以, $f(A(r,a))$ 和 $f(A(b,s))$ 也连通, 从而得到

$$\begin{aligned}&f(A(r,a))\subset A(r',l)\quad\text{或}\quad f(A(r,a))\subset A(l,s'),\\&f(A(b,s))\subset A(r',l)\quad\text{或}\quad f(A(b,s))\subset A(l,s').\end{aligned}$$

由 $l\in(r',s')$ 的任意性可知,

$$\begin{aligned}&\lim_{|q|\to r^+}|f(q)|=r'\quad\text{或}\quad\lim_{|q|\to r^+}|f(q)|=s',\\&\lim_{|q|\to s^-}|f(q)|=r'\quad\text{或}\quad\lim_{|q|\to s^-}|f(q)|=s'.\end{aligned}$$

注意, 4 维球壳 $A(r,s)=\bigcup_{I\in\mathbb{S}}\{x+yI\in\mathbb{H}:r^2<x^2+y^2<s^2\}$ 是轴对称切片域. 利用定理 1.1 可知, 正则函数 $f:A(r,s)\to A(r',s')$ 是满射. 因此, $\lim_{|q|\to r^+}|f(q)|$ 和 $\lim_{|q|\to s^-}|f(q)|$ 互异. 证毕. □

定理 1.4 的证明 考虑去心单位球 $A(0,1)=\mathbb{B}\setminus\{0\}$ 上的正则自逆紧映射 f. 由引理 3.1 可知,

$$\lim_{|q|\to0^+}|f(q)|=0\quad\text{且}\quad\lim_{|q|\to1^-}|f(q)|=1,$$

或

$$\lim_{|q|\to0^+}|f(q)|=1\quad\text{且}\quad\lim_{|q|\to1^-}|f(q)|=0.\tag{3.1}$$

因此, 0 是 f 的可去奇点. 由定理 2.3 可知, (3.1) 不成立. 所以, 由定理 1.3 可得 f 是四元数有限 Blaschke 乘积, 即

$$f(q)=M_{a_1}*M_{a_2}*\cdots*M_{a_n}(q)u,$$

其中 $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{B}$ 且 $u\in\partial\mathbb{B}$.

特别地, 对于任意的 $q\in\mathbb{R}$, 有 $f(q)=M_{a_1}(q)M_{a_2}(q)\cdots M_{a_n}(q)u$, 则 $f(0)=|a_1a_2\cdots a_n|u=0$, $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$. 故 $f(q)=q^nu$, 其中 $u\in\partial\mathbb{B}$. 定理得证. □

定理 1.5 的证明 记恒等正则函数为 $g(q)=q$, 并定义正则函数 $h:A(r,s)\to\mathbb{H}$ 为

$$h(q)=\begin{cases}g^{-*}*f(q), & \lim\limits_{|q|\to r^+}|f(q)|=r,\\ g*f(q)/(rs), & \lim\limits_{|q|\to r^+}|f(q)|=s.\end{cases}\tag{3.2}$$

由引理 3.1 可知,

$$\lim_{|q|\to r^+}|h(q)|=1=\lim_{|q|\to s^-}|h(q)|,$$

则由定理 2.3 可知, $|h(q)|\leqslant 1$ 对于所有的 $q\in A(r,s)$ 成立.

注意, f 在 $A(r,s)$ 恒不为 0, 可以考虑正则函数 h 在 $A(r,s)$ 上的正则倒数 h^{-*}. 利用定理 1.3 中同样的手段可以得出, $h(q)$ 在 $A(r,s)$ 上为常值函数 $u\in\partial\mathbb{B}$. 证毕. □

致谢 感谢审稿人提供的宝贵意见.

参考文献

1 Cullen C G. An integral theorem for analytic intrinsic functions on quaternions. Duke Math J, 1965, 32: 139–148
2 Gentili G, Struppa D C. A new approach to Cullen-regular functions of a quaternionic variable. C R Math Acad Sci Paris, 2006, 342: 741–744
3 Gentili G, Struppa D C. A new theory of regular functions of a quaternionic variable. Adv Math, 2007, 216: 279–301
4 Alpay D, Colombo F, Sabadini I. Slice Hyperholomorphic Schur Analysis. Operator Theory: Advances and Applications, vol. 256. Basel: Springer, 2017
5 Colombo F, Sabadini I, Struppa D C. Noncommutative Functional Calculus: Theory and Applications of Slice Hyperholomorphic Functions. Progress in Mathematics, vol. 289. Basel: Birkhäuser/Springer, 2011
6 Gentili G, Stoppato C, Struppa D C. Regular Functions of a Quaternionic Variable. Springer Monographs in Mathematics. Heidelberg: Springer, 2013
7 Rudin W. Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$. Reprint of the 1980 edition. Berlin: Springer-Verlag, 2008
8 D'Angelo J P. Several Complex Variables and the Geometry of Real Hypersurfaces. Boca Raton: CRC Press, 1993
9 Alexander H. Proper holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$. Indiana Univ Math J, 1977, 26: 137–146
10 Pinčuk S I. Proper holomorphic maps of strictly pseudoconvex domains. Sibirsk Mat Z, 1974, 15: 909–917
11 Bedford E. Proper holomorphic mappings from domains with real analytic boundary. Amer J Math, 1984, 106: 745–760
12 Bedford E, Bell S. Proper self maps of weakly pseudoconvex domains. Math Ann, 1982, 261: 47–49
13 Hamada H. On proper holomorphic self-maps of generalized complex ellipsoids. J Geom Anal, 1998, 8: 441–446
14 Henkin G M, Novikov R. Proper mappings of classical domains. In: Linear and Complex Analysis Problem Book. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1043. Berlin: Springer, 1984, 625–627
15 Mok N, Ng S C, Tu Z. Factorization of proper holomorphic maps on irreducible bounded symmetric domains of rank $\geqq 2$. Sci China Math, 2010, 53: 813–826
16 Tu Z. Rigidity of proper holomorphic mappings between equidimensional bounded symmetric domains. Proc Amer Math Soc, 2002, 130: 1035–1042
17 Coupet B, Pan Y, Sukhov A. Proper holomorphic self-maps of quasi-circular domains in $\mathbb{C}^2$. Nagoya Math J, 2001, 164: 1–16
18 Janardhanan J. Proper holomorphic mappings of balanced domains in $\mathbb{C}^n$. Math Z, 2015, 280: 257–268
19 Li F, Rong F. Proper holomorphic self-maps of quasi-balanced domains. J Geom Anal, 2017, 27: 2889–2893

20 Tu Z, Wang L. Rigidity of proper holomorphic mappings between equidimensional Hua domains. Math Ann, 2015, 363: 1–34
21 Bell S, Narasimhan R. Proper holomorphic mappings of complex spaces. In: Several Complex Variables, VI. Berlin: Springer, 1990, 1–38
22 Forstnerič F. Proper holomorphic mappings: A survey. In: Several Complex Variables, Math Notes, vol. 38. Princeton: Princeton University Press, 1993, 297–363
23 Stoppato C. Regular Moebius transformations of the space of quaternions. Ann Global Anal Geom, 2011, 39: 387–401
24 Alpay D, Colombo F, Sabadini I. Pontryagin-de Branges-Rovnyak spaces of slice hyperholomorphic functions. J Anal Math, 2013, 121: 87–125
25 de Fabritiis C, Gentili G, Sarfatti G. Quaternionic Hardy spaces. Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci, 2018, 18: 697–733
26 Xu Z H. Theory of slice regular functions (in Chinese). PhD Thesis. Hefei: University of Science and Technology of China, 2017 [徐正华. Slice 正则函数论. 博士学位论文. 合肥: 中国科学技术大学, 2017]
27 Sarfatti G. Elements of function theory in the unit ball of quaternions. PhD Thesis. Università di Firenze, 2013
28 Xu Z, Ren G. Slice starlike functions over quaternions. J Geom Anal, 2018, 28: 3775–3806

Proper slice regular functions over quaternions

Zhenghua Xu & Ermin Wang

Abstract The study of proper holomorphic mappings is an important and very active topic in several complex variables. In this paper, we investigate the proper mapping in the quaternionic setting. In particular, the proper self-mappings of the open unit ball of quaternions are precisely finite Blaschke products by a factorization of Hardy spaces for quaternionic slice regular functions. In addition, the proper self-mappings of the four-dimensional spherical shell are determined for quaternionic slice regular functions.

Keywords **slice regular function, proper mapping, Blaschke products, quaternion**

MSC(2020) **30G35, 32H35, 30J10**

doi: 10.1360/SCM-2018-0858