中国科学: 数学 2026 年 第 56 卷 第 ? 期: 1 ∼ 16
SCIENTIA SINICA Mathematica
综 述

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark click for updates

次椭圆 Dirichlet 边值问题的新进展

陈化[1*], 陈洪葛[2]

1. 武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072;
2. 华中师范大学数学与统计学学院, 武汉 430079
E-mail: chenhua@whu.edu.cn, hongge_chen@whu.edu.cn

收稿日期: 2025-10-28; 接受日期: 2026-03-04; 网络出版日期: 2026-04-22; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12131017, 12221001 和 12201607) 资助项目

摘要 本文介绍 Hörmander 向量场的背景和性质, 并给出一类次椭圆 Dirichlet 边值问题的相关研究结果. 对于这类问题, 在次临界增长的情形下, 本文对多重解和多重变号解的存在性分别给出两种充分条件, 并揭示这两种条件在不同退化情形下各有其优势. 我们最新的研究结果表明, 较之经典椭圆方程的边值问题, 退化椭圆方程边值问题在解的存在性研究方面具有本质性区别, 这方面依赖于算子的退化点是正则的还是奇异的. 此外, 本文还讨论具临界增长条件下, 一般情形的 Baouendi-Grushin 型拟线性次椭圆边值问题, 给出其非负解及 Brezis-Nirenberg 型问题正解的存在性和正则性结果.

关键词 退化椭圆方程 Hörmander 条件 边值问题

MSC (2020) 主题分类 35J70, 35J92, 35G30

1 引言

20 世纪 60 年代, 瑞典著名数学家 Hörmander 在研究具有非负特征形式的变系数微分算子时, 引入了一类由光滑向量场生成的二阶退化椭圆算子, 这类算子后来被称为 Hörmander 型退化椭圆算子 (也称为次椭圆算子). 在其开创性工作中, Hörmander[33] 建立了著名的亚椭圆性定理 (也称 Hörmander 定理), 并提出了这类退化椭圆算子满足亚椭圆性的充分条件 (即 Hörmander 条件).

Hörmander 算子是一类非常广泛的有限阶退化椭圆算子, 其理论在偏微分方程、随机微分方程、次 Riemann 几何和复几何等领域均具有深远应用 (参见文献 [1, 9, 27, 41, 52, 54]). 例如, 在偏微分方程 (PDE) 领域, Hörmander 的亚椭圆性定理为研究弱解的正则性和先验估计提供了强有力的工具; 在随机微分方程 (SDE) 领域, 尤其是在 Malliavin 随机分析中, Hörmander 条件确保了扩散过程的光滑性, 从而推动了随机动力系统理论在金融数学、物理学和生物系统随机建模中的广泛应用. 在次 Riemann 几何中, Hörmander 算子涵盖了次 Riemann 流形上的 sub-Laplace 算子, 为研究由非完整分布定义的次 Riemann 结构 (如 Heisenberg 群和分层 Lie 群) 提供了重要工具. 同时, Hörmander 条件在几何上

英文引用格式: Chen H, Chen H G. Recent developments in subelliptic Dirichlet boundary value problems (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 1–16, doi: 10.1360/SSM-2025-0270

© 2026《中国科学》杂志社

也称为 Chow-Rashevskii 条件, 对次 Riemann 流形上的测地 Hamilton 流和切触几何上的 Reeb 向量场的研究具有重要意义. 此外, 在复几何中, Hörmander 算子与 $\bar{\partial}$-Neumann 算子及 Cauchy-Riemann (CR) 流形的研究密切相关, 充分展现了其丰富的理论价值与广泛的应用前景.

自 20 世纪 60 年代以来, Hörmander 算子的研究吸引了 Bony[8], Folland[26], Fefferman 和 Phong[24], Fefferman 和 Sánchez-Calle[25], Rothschild[58], Rothschild 和 Stein[59], Nagel 等[53], Kohn[40], Oleĭnik 和 Radkevich[54], Métivier[51], Jerison 和 Sánchez-Calle[38], Jerison[36], Varopoulos 等[66], Xu[70] 等诸多数学家的广泛关注. 他们在该领域建立了包括向量场的提升逼近理论、最优次椭圆估计、Carnot-Carathéodory 度量球体积估计、退化 Poincaré 不等式和 Sobolev 不等式、特征值估计、拟基本解的局部估计, 以及热核的 Gauss 上下界等一系列重要基本定理, 这些结果极大地丰富了退化椭圆方程的理论框架. 但是, 由于 Hörmander 算子具有高度的抽象性, 与经典的椭圆算子相比, 其相关理论尚显得很不完备.

本文介绍次椭圆边值问题的相关结果, 包括具次临界增长情形的半线性次椭圆边值问题和具临界增长情形的 Baouendi-Grushin 型拟线性次椭圆边值问题.

2 Hörmander 向量场和次椭圆算子

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为开区域, 其中 $n \geqslant 2$. 令 $X = (X_1, \ldots, X_m)$ 为一组定义在 U 上的实光滑向量场, 其满足如下 Hörmander 条件:

条件 2.1 (Hörmander 条件)　存在一个最小的正整数 r 使得向量场 $X_1, \ldots, X_m$ 及其长度不超过 r 的交换子在 U 的每一点 x 处都能张成切空间 $T_x(U)$. 这个最小的正整数 r 称为向量场 X 在区域 U 上的 Hörmander 指标.

对任意 $x \in U$, 记 $V_k(x)$ 为由 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ 及其长度不超过 k 的交换子在点 x 处张成的切空间的子空间, 定义如下逐点齐性维数:

$$\nu(x) := \sum_{j=1}^{r} j(\dim V_j(x) - \dim V_{j-1}(x)) \quad (\dim V_0(x) = 0). \tag{2.1}$$

注意到各层向量空间的维数 $(\dim V_1(x), \ldots, \dim V_r(x))$ 通常与点 x 的选取有关. 1976 年, 法国数学家 Métivier[51] 提出了如下的一致性条件:

条件 2.2 (Métivier 条件)　对任意 $x \in U$, 存在一个开邻域 U_x, 使得 $\dim V_j(y)$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ 在 $y \in U_x$ 为定常不变的.

在此条件下, 逐点齐性维数 $\nu(x)$ 在 U 上为固定的常数 ν, 该常数在 PDE 上被称为 Métivier 指标, 在次 Riemann 几何上被称为齐性维数 (或 Hausdorff 维数). 在次 Riemann 几何领域, 满足 Métivier 条件也称为满足等度正则假设 (参见文献 [1]). 若流形 U 不满足 Métivier 条件, 则也称为非等度正则的, 这时 $\nu(x)$ 依赖点 x 的选取而非常值. 对任意有界开集 $\Omega \subset\subset U$, 定义

$$\tilde{\nu} = \max_{x \in \overline{\Omega}} \nu(x) \tag{2.2}$$

为广义 Métivier 指标, 它在几何上也称为 Ω 的非各向同性维数 (non-isotropic dimension).

在 Métivier 条件下, 向量场的退化点称为正则的退化点, 而不满足此条件时 (即非等度正则的情形), 退化点称为奇异的退化点. Métivier 条件在许多基本结果的证明中发挥了至关重要的作用. 例如,

Métivier[51] 首次给出了 Hörmander 算子特征值的 Weyl 型首项渐近式, Rothschild[58] 建立了 Rockland 算子的极大亚椭圆性, Montgomery[52] 证明了 Popp 测度是次 Riemann 流形上固有的体积形式. 然而, 虽然 Métivier 条件涵盖了许多退化算子 (如 Carnot 群上的 sub-Laplace 算子), 但对一般 Hörmander 算子而言, 其适用性仍存在很大的局限性. 例如, 在复几何中研究弱拟凸 CR 流形, 以及在次 Riemann 几何中研究 Grushin 算子和 Martinet 算子等这些常见的退化椭圆算子时, 经常会遇到 Métivier 条件不成立的非等度正则情形. 在此情形下, 各层向量空间的维数可能在某些退化点处出现不连续的突变现象. 含有这类奇异退化点的流形被称为非等度正则次 Riemann 流形. 值得注意的是, 在奇异退化点附近, 由 Hörmander 向量场诱导的次 Riemann 结构失去了一致性, 这为许多问题的研究带来了极大的困难与挑战, 这方面还有许多基本的结果目前仍是空白.

除了等度正则情形外, 在 Hörmander 向量场中还存在一个非常广泛的子类, 即所谓的齐性 Hörmander 向量场. 特别地, 令 $X=(X_1,X_2,\dots,X_m)$ 为定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的向量场并满足以下条件.

(H.1) 存在一族非各向同性的伸缩变换 $\{\delta_t\}_{t>0}$, 其形式为

$$\delta_t:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\quad \delta_t(x)=(t^{\alpha_1}x_1,\dots,t^{\alpha_n}x_n),$$

使得 $X_1,\dots,X_m$ 是 δ_t- 齐 1 次的, 其中 $1=\alpha_1\leqslant\cdots\leqslant\alpha_n$ 为正整数. 具体而言, 对于任意 $t>0$ 和 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 有

$$X_i(f\circ\delta_t)=t(X_if)\circ\delta_t,\quad \forall\, 1\leqslant i\leqslant m.$$

(H.2) 作为线性微分算子, 向量场 $X_1,\dots,X_m$ 在 $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ 中是线性无关的, 并且在 $0\in\mathbb{R}^n$ 处满足 Hörmander 条件, 即

$$\dim\{Y(0)\mid Y\in \mathrm{Lie}(X)\}=n,$$

这里 $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中所有光滑向量场的集合, $\mathrm{Lie}(X)$ 是包含 $X=(X_1,\dots,X_m)$ 的 $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ 的最小 Lie 子代数, $Y(0)$ 是向量场 Y 在原点处的值.

对于齐性 Hörmander 向量场 X, 令

$$Q:=\sum_{j=1}^n\alpha_j$$

为对应的齐性维数. 由条件 (H.1) 和 (H.2) 可证明 X 在 $\mathbb{R}^n$ 上满足 Hörmander 条件, 并且 Hörmander 指标 $r=\alpha_n$, 齐性维数 $Q=\max_{x\in\mathbb{R}^n}\nu(x)=\nu(0)$ (参见文献 [13]).

例 2.1 (Baouendi-Grushin 型向量场) 设

$$X_i=\begin{cases}\partial_{x_i}, & 1\leqslant i\leqslant N_1,\\ (\alpha+1)\Big(\sum\limits_{j=1}^{N_1}x_j^2\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\partial_{x_i}, & N_1+1\leqslant i\leqslant N_1+N_2,\end{cases}\tag{2.3}$$

其中 $1\leqslant i\leqslant n$, α 为正偶数且 $n=N_1+N_2$. 此时, $X=(X_1,\dots,X_n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑的 Baouendi-Grushin 型向量场, 其满足条件 (H.1) 和 (H.2) 但并不满足 Métivier 条件, 且 $Q=N_1+(\alpha+1)N_2$, 故为非等度正则情形下的齐性 Hörmander 向量场.

Hörmander 向量场 X 可定义广义 (或称带权的) Sobolev 空间 [14, 70]

$$W_X^{1,p}(U)=\{u\in L^p(U)\mid X_iu\in L^p(U),1\leqslant i\leqslant m\},$$

其中 $1 \leqslant p < +\infty$. 该空间在范数 $\|u\|_{W_X^{1,p}(U)} = \|u\|_{L^p(U)} + \|Xu\|_{L^p(U)}$ 下为一个 Banach 空间. 特别地, 若 $p=2$, 记 $H_X^1(U) := W_X^{1,2}(U)$. 显然, $H_X^1(U)$ 为 Hilbert 空间. 此外, 若 $\Omega \subset\subset U$ 为有界开集, 记 $W_{X,0}^{1,p}(\Omega)$ 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W_X^{1,p}(U)$ 中的完备化空间. 当 $p=2$ 时, 令 $H_{X,0}^1(\Omega) := W_{X,0}^{1,2}(\Omega)$.

齐性 Hörmander 向量场 X 在 $\mathbb{R}^n$ 上满足如下 Sobolev 不等式 [15]:

$$C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p_Q^*} dx\right)^{\frac{p}{p_Q^*}} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |Xu|^p dx, \quad \forall\, u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{2.4}$$

其中 $1 \leqslant p < Q$, $p_Q^* := \frac{pQ}{Q-p}$ 为对应于齐性维数 Q 的临界 Sobolev 指标, $C>0$ 为正常数. 记

$$c_0 := \inf_{u \in M_{X,0}^{p,Q}(\mathbb{R}^n),\ \|u\|_{L^{p_Q^*}(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} |Xu|^p dx > 0 \tag{2.5}$$

为最佳 Sobolev 常数, 其中 $M_{X,0}^{p,Q}(\mathbb{R}^n)$ 为 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在范数 $\|u\|_{M_X^{p,Q}(\mathbb{R}^n)} := \|u\|_{L^{p_Q^*}(\mathbb{R}^n)} + \|Xu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ 下的完备化空间.

对 $x, y \in U$, $\delta > 0$, 令 $C(x,y,\delta)$ 为一簇绝对连续的曲线 $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ 构成的集合, 其满足 $\varphi(0)=x$, $\varphi(1)=y$ 和 $\varphi'(t) = \sum_{i=1}^m a_i(t) X_i(\varphi(t))$ 且对几乎处处的 $t \in [0,1]$, 有 $\sum_{k=1}^m |a_k(t)|^2 \leqslant \delta^2$. 借助该集合, 可定义 Carnot-Carathéodory 度量 [9, 53]

$$d(x,y) := \inf\{\delta > 0 \mid \text{存在 } \varphi \in C(x,y,\delta) \text{ 满足 } \varphi(0)=x, \varphi(1)=y\}.$$

对任意 $u \in L^\infty(\Omega)$ 和 $0<\alpha<1$, 可定义广义 Hölder 空间 [14, 70]

$$S^\alpha(\overline{\Omega}) := \{u \in L^\infty(\Omega) \mid [u]_\alpha < +\infty\},$$

其中 $[u]_\alpha := \sup_{x \neq y,\ x,y \in \Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)^\alpha}$, $\|u\|_{S^\alpha} = \|u\|_{L^\infty} + [u]_\alpha$ 为 Hölder 范数.

对 Hörmander 向量场 $X = (X_1, \ldots, X_m)$, 定义

$$\triangle_X := -\sum_{i=1}^m X_i^* X_i$$

为对应的 Hörmander 算子, 其中 X_i^* 表示 X_i 的伴随算子. 此外, 对齐性 Hörmander 向量场 $X = (X_1, \ldots, X_m)$, 其对应的 p-sub-Laplace 算子定义为

$$\triangle_{p,X} u := \sum_{i=1}^m X_i(|Xu|^{p-2} X_i u),$$

其中 $1 < p < Q$.

3 具次临界增长情形的半线性次椭圆边值问题

本节对一般的 Hörmander 算子, 考虑如下的半线性次椭圆 Dirichlet 边值问题:

$$\begin{cases} -\triangle_X u = f(x,u) + g(x,u), & x \in \Omega, \\ u \in H_{X,0}^1(\Omega), \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $\Omega \subset\subset U$ 为有界开区域, $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ 为连续函数, 扰动项 $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为 Carathéodory 函数.

3.1 解的多重性问题

假设函数 f 和 g 满足如下条件.

(F.1) f 关于 u 是奇函数, 即 $f(x,-u)=-f(x,u)$.

(F.2) 存在 $2<p<2^*_{\tilde{\nu}}:=\frac{2\tilde{\nu}}{\tilde{\nu}-2}$ 和正常数 $C>0$ 使得对任意的 $x\in\overline{\Omega}$ 和 $u\in\mathbb{R}$, 有

$$|f(x,u)|\leqslant C(1+|u|^{p-1}),$$

其中广义 Métivier 指标 (即 non-isotropic dimension) $\tilde{\nu}\geqslant n+r-1\geqslant 3$, $r\geqslant 2$ 为 Hörmander 指标.

(F.3) 存在 $\mu>2$ 和 $R_0>0$ 使得对任意 $x\in\overline{\Omega}$ 以及满足 $|u|\geqslant R_0$ 的任意实数 u, 有

$$0<\mu F(x,u)\leqslant f(x,u)u,$$

其中 $F(x,u)=\int_0^u f(x,v)dv$ 为 $f(x,u)$ 的原函数.

(G.1) 存在 $0\leqslant\sigma<\mu-1$ 和 $\beta\geqslant 0$ 使得对任意的 $x\in\Omega$ 和 $u\in\mathbb{R}$, 有

$$|g(x,u)|\leqslant\alpha(x)+\beta|u|^{\sigma},$$

其中 $\alpha(x)\in L^{\frac{\mu}{\mu-1}}(\Omega)$ 为非负函数.

值得注意的是, 扰动项 $g(x,u)$ 并不一定关于 u 是奇对称的, 从而破坏了相应泛函的对称性.

3.1.1 经典椭圆情形的相关结果

若 $X=(\partial_{x_1},\ldots,\partial_{x_n})$, 则 $\triangle_X$ 即为经典的 Laplace 算子 $\triangle$, 此时广义 Métivier 指标 $\tilde{\nu}$ 等于空间的拓扑维数 n. 在此情形下, 半线性椭圆方程 (3.1) 从 20 世纪 80 年代至今已经有了较为深入的研究.

在 1981 年, Bahri 和 Berestycki [4] 对 $f(x,u)=|u|^{p-2}u$ 和 $g(x,u)=g(x)\in L^2(\Omega)$ 的特殊情形, 证明了若条件

$$2<p<\frac{5n-2+\sqrt{9n^2-4n+4}}{4(n-1)}<\frac{2n}{n-2} \tag{3.2}$$

成立, 则方程 (3.1) 存在无穷多个弱解. 条件 (3.2) 表明, 对次临界增长的半线性椭圆边值问题, 若加上一个扰动项, 则需要对非线性项的增长阶距离临界的情形附加更强的条件才能得到解的存在性结果. 此外, 当 $2<p<\frac{2n}{n-2}$ 时, Bahri [3] 证明了对 $H^{-1}(\Omega)$ 中一个残差集内的 g, 方程 (3.1) 有无穷多个弱解. 同时, Struwe [63] 及 Dong 和 Li [21] 利用对称山路引理的思想也得到了类似多重性结果. 接着, Rabinowitz [55,56] 利用对称性扰动方法研究了方程 (3.1) 并给出了如下一般性结果:

定理 3.1 [55,56] 假设 f 满足条件 (F.1)–(F.3), $g(x,u)=g(x)\in L^2(\Omega)$, 若条件

$$2<p<\frac{\mu n+(\mu-1)(n+2)}{\mu n+(\mu-1)(n-2)}+1<\frac{2n}{n-2} \tag{3.3}$$

成立, 则边值问题 (3.1) 在 $H_0^1(\Omega)$ 存在一个无界的弱解序列.

值得指出的是, 指标 p 的范围 (3.3) 源自能量泛函的某一特定的极小 - 极大值的下界估计, 该估计依赖于 Laplace 算子的第 k 个 Dirichlet 特征值 λ_k 的下界估计: $\lambda_k\geqslant Ck^{\frac{2}{n}}$.

随后, Bahri 和 Lions [5] 借助 Cwikel-Lieb-Rozenblum 不等式以及对相应临界点的 Morse 指标的估计, 在 $f(x,u)=|u|^{p-2}u$ 情形下给出了极小 - 极大值的精确估计, 从而改进了 Rabinowitz 的多重解的存在性结果. 具体而言, 他们证明了如下结果:

定理 3.2 [5] 假设 $f(x,u)=|u|^{p-2}u$, g 满足条件 (G.1), 若

$$2<p<\frac{2n-2\sigma-2}{n-2}, \tag{3.4}$$

则边值问题 (3.1) 在 $H_0^1(\Omega)$ 存在一个无界的弱解序列.

特别地, 当 $f(x,u)=|u|^{p-2}u$ 和 $g(x,u)=g(x)\in L^2(\Omega)$ 时, 有 $\mu=p$ 和 $\sigma=0$. 此时, (3.4) 给出的指标 p 的范围是

$$2<p<\frac{2n-2}{n-2}<\frac{2n}{n-2}. \tag{3.5}$$

此时由 (3.2) 和 (3.3) 给出的 p 的范围相同, 但小于 (3.5) 所给的范围, 因为当 $n\geqslant 3$ 时, 有

$$\frac{5n-2+\sqrt{9n^2-4n+4}}{4(n-1)}<\frac{2n-2}{n-2}.$$

该结果表明, 在研究经典次临界增长情形的半线性椭圆 Dirichlet 边值问题 (3.1) 的多重解时, 采用 Morse 指标的方法来估计极小 - 极大值的下界, 较之用特征值的下界估计, 对非线性项的增长阶 p 的限制通常能得到更为宽泛的结果 (即用 Morse 指标方法会优于用特征值的下界估计方法). 关于带扰动项的半线性椭圆方程的相关多重性结果, 可参见文献 [6, 62, 64, 65] 及其中的参考文献.

3.1.2 一般退化椭圆情形的相关结果

近年来, 次 Riemann 流形上的非线性退化椭圆方程逐渐成为偏微分方程和几何分析领域的热点. 在退化情形下, $\triangle_X$ 是一个次椭圆算子, 其广义 Métivier 指标 $\tilde{\nu}>n\geqslant 2$. 在 Métivier 条件下 (即 Hörmander 向量场的退化点是正则的), 关于 Hörmander 向量场的非线性退化椭圆方程的弱解存在性和多重性问题得到了 Jerison 和 Lee [37], Garofalo 和 Lanconelli [30], Xu [71–73], Xu 和 Zuily [74], Citti [19], Maalaoui 和 Martino [50], Loiudice [46] 和 Venkatesha Murthy [68] 等的关注.

在 Métivier 条件不成立的非等度正则情形下, Hörmander 向量场有奇异的退化点, 这时 Rellich-Kondrachov 紧嵌入和 Hörmander 算子 Dirichlet 特征值精确下界的缺失给方程 (3.1) 的研究带来了很多新的困难. 长期以来, 在此情形下的次椭圆边值问题的结果非常有限. Luyen 和 Tri [49] 曾对一些特殊的 Grushin 型算子研究了其弱解的多重性. 随后, 文献 [18] 建立了退化的 Rellich-Kondrachov 紧嵌入结果, 将 Rabinowitz [55, 56] 的经典结果推广到一般的 Hörmander 算子, 并给出了对自由扰动项 $g(x,u)=g(x)\in L^2(\Omega)$ 情形下的多重性结果.

定理 3.3 [18] 假设区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 为 C^∞ 光滑的, 且对向量场 $X=\{X_1,\ldots,X_m\}$ 是非特征的 (即对任意的 $x_0\in\partial\Omega$, 至少存在一个向量场 X_{j_0} $(1\leqslant j_0\leqslant m)$ 使得 $X_{j_0}(x_0)\notin T_{x_0}(\partial\Omega)$), f 满足条件 (F.1)–(F.3), 且 $g(x,u)=g(x)\in L^2(\Omega)$. 若

$$2<p<\frac{\mu\tilde{\nu}+(\mu-1)(\tilde{\nu}+2)}{\mu\tilde{\nu}+(\mu-1)(\tilde{\nu}-2)}+1<\frac{2\tilde{\nu}}{\tilde{\nu}-2}, \tag{3.6}$$

则边值问题 (3.1) 在 $H_{X,0}^1(\Omega)$ 中存在一个无界的弱解序列.

值得指出的是, (3.6) 中指标 p 的范围依赖于文献 [11] 中得到的 Hörmander 算子 $\triangle_X$ 的第 k 个 Dirichlet 特征值 λ_k 的显式下界 $\lambda_k\geqslant Ck^{\frac{2}{\tilde{\nu}}}$ 估计 (此下界在 Métivier 条件成立时是精确的). 但定理 3.3 中要求边界是 C^∞ 光滑并对向量场 X 是非特征的, 这对区域的要求会造成较大的局限性. 例如, 若取 $X=\{X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_n\}$ 为 Heisenberg 群上的 $2n$ 个左不变向量场, Ω 为 Heisenberg 群上的单位球, 则该球边界上的北极点和南极点均是该向量场的特征点. 另外, 对缺少 Métivier 条件的一般退化

情形, Hörmander 算子 Dirichlet 特征值的 Weyl 渐近公式尚不得而知, 上述 λ_k 的下界在某些退化情形下可能并不精确. 例如, 文献 [13] 证明了对于一般区域上的齐性 Hörmander 算子, 其 Dirichlet 特征值 λ_k 在 $k\to+\infty$ 时具有渐近行为 $\lambda_k\approx k^{\frac{2}{\vartheta}}(\ln k)^{-\frac{2d}{\vartheta}}$, 其中 $n\leqslant\vartheta\leqslant\tilde{\nu}$ 是一个正有理数, $0\leqslant d\leqslant n-1$ 是一个整数.

最近, 文献 [16] 对一般有界区域 Ω 建立了关于 Hörmander 向量场的 Friedrichs-Poincaré 型不等式. 利用该结论, 我们可以去掉区域边界关于向量场的非特征假设. 再结合文献 [13], 我们将文献 [18] 中结果推广到了如下更一般的情形:

定理 3.4 [16] 设 λ_k 为 Hörmander 算子 $-\triangle_X$ 在区域 Ω 上的第 k 个 Dirichlet 特征值, 并对充分大的 k 满足如下的下界估计:

$$\lambda_k\geqslant Ck^{\frac{2}{\vartheta}}(\ln k)^{-\kappa},\tag{L}$$

其中 $n\leqslant\vartheta\leqslant\tilde{\nu}$, $\kappa\geqslant 0$, $C>0$ 为依赖 X 和 Ω 的常数. 若 (3.1) 中的函数 f 和 g 满足条件 (F.1)–(F.3) 和 (G.1), 并且

$$\frac{2p}{\vartheta(p-2)}-\frac{\tilde{\nu}}{\vartheta}>\frac{\mu}{\mu-\sigma-1},\tag{A1}$$

则边值问题 (3.1) 在 $H^1_{X,0}(\Omega)$ 中存在一个无界的弱解序列.

注 3.1 由文献 [13] 中结果可知, 对齐性 Hörmander 算子, 特征值的下界估计条件 (L) 成立. 而齐性 Hörmander 算子蕴涵了许多具有几何和物理背景的退化算子, 如 Grushin 算子、Bony 算子和 Martinet 算子等, 这些次椭圆算子均具有奇异的退化点.

注 3.2 定理 3.4 中的不等式 (A1) 等价于

$$2<p<\frac{\vartheta\mu+(\tilde{\nu}+2)(\mu-\sigma-1)}{\vartheta\mu+(\tilde{\nu}-2)(\mu-\sigma-1)}+1<\frac{2\tilde{\nu}}{\tilde{\nu}-2}.\tag{3.7}$$

由 $n\leqslant\vartheta\leqslant\tilde{\nu}$ 可知

$$\frac{\tilde{\nu}\mu+(\tilde{\nu}+2)(\mu-\sigma-1)}{\tilde{\nu}\mu+(\tilde{\nu}-2)(\mu-\sigma-1)}\leqslant\frac{\vartheta\mu+(\tilde{\nu}+2)(\mu-\sigma-1)}{\vartheta\mu+(\tilde{\nu}-2)(\mu-\sigma-1)}.$$

因此, 定理 3.4 中的结果较之文献 [18,49] 中的结果对指标 p 给出了更为宽泛的范围.

其次, 利用 Morse 指标理论以及退化的 Cwikel-Lieb-Rozenblum 不等式, 在没有条件 (L) 的情况下, 可以得到如下结果:

定理 3.5 [16] 若 (3.1) 中的函数 f 和 g 满足条件 (F.1)–(F.3) 和 (G.1), 并且

$$\frac{2p}{\tilde{\nu}(p-2)}>\frac{\mu}{\mu-\sigma-1},\tag{A2}$$

则边值问题 (3.1) 在 $H^1_{X,0}(\Omega)$ 中存在一个无界的弱解序列.

注 3.3 不等式 (A2) 等价于

$$2<p<\frac{\mu\tilde{\nu}+2(\mu-\sigma-1)}{\mu\tilde{\nu}-2(\mu-\sigma-1)}+1<\frac{2\tilde{\nu}}{\tilde{\nu}-2}.\tag{3.8}$$

由于 $n\leqslant\vartheta\leqslant\tilde{\nu}$, 比较 (3.7) 和 (3.8) 可得

$$\frac{\vartheta\mu+(\tilde{\nu}+2)(\mu-\sigma-1)}{\vartheta\mu+(\tilde{\nu}-2)(\mu-\sigma-1)}-\frac{\mu\tilde{\nu}+2(\mu-\sigma-1)}{\mu\tilde{\nu}-2(\mu-\sigma-1)}$$

$$= \frac{4(\mu-\sigma-1)((\sigma+1)\tilde{\nu}-\vartheta\mu)}{(\vartheta\mu+(\tilde{\nu}-2)(\mu-\sigma-1))(\mu\tilde{\nu}-2(\mu-\sigma-1))}. \tag{3.9}$$

若 $(\sigma+1)\tilde{\nu}<\vartheta\mu$ (例如, 在 Métivier 条件成立时的情形, 这时估计式 (L) 中 $\vartheta=\tilde{\nu}$ 和 $\kappa=0$), (3.9) 意味着定理 3.5 给出的指标 p 的范围比定理 3.4 中的更为宽泛, 因为 (3.8) 中 p 的上界更接近于临界指标 $\frac{2\tilde{\nu}}{\tilde{\nu}-2}$. 在这种情况下, 定理 3.5 改进了定理 3.4, 也改进了文献 [18, 49] 中的结果, 这表明当 Hörmander 向量场的退化点为正则点时, 次临界增长情形下的次椭圆边值问题的可解性研究与经典的椭圆情形是类似的, 用 Morse 指标方法均会优于用特征值的下界估计方法 [5, 55, 56].

然而, 当 Hörmander 向量场的退化点为奇异点时, 会发生一些满足 $(\sigma+1)\tilde{\nu}>\vartheta\mu$ 的退化例子 (见下文中例 3.1). (3.7) 给出的指标 p 的范围会比 (3.8) 中 p 的范围更为宽泛, 因而定理 3.5 中的结果并不能涵盖定理 3.4 中结果 (在这种情形下, 从特征值的下界估计得到的结果会优于用 Morse 指标方法得到的结果). 这表明对退化椭圆算子边值问题的研究, 当退化点为奇异点时, 会有与经典的椭圆算子边值问题完全不同的现象产生. 这也是具奇异退化点时次椭圆边值问题与具正则退化点时的情形 (以及与经典的椭圆边值问题情形) 相比, 在本质上的不同所在.

例 3.1 设 $X=(\partial_{x_1}, x_1\partial_{x_2})$ 为定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的 Grushin 向量场. 其对应的 Grushin 算子为

$$\triangle_X := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+x_1^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为包含 0 点的有界开区域. 易知, X 满足 Hörmander 条件但不满足 Métivier 条件, 其 Ω 上的广义 Métivier 指标 $\tilde{\nu}=3>n=2$. 令 λ_k 为 $-\triangle_X$ 在 Ω 上的第 k 个 Dirichlet 特征值, 由文献 [11, 例 8.4] 可知, 对充分大的 k 有

$$\lambda_k \geqslant C\left(\frac{k}{\ln k}\right)^{\frac{2}{\tilde{\nu}-1}} = C\left(\frac{k}{\ln k}\right). \tag{3.10}$$

这表明在定理 3.4 的条件 (L) 中, 参数 $(\vartheta,\kappa)=(2,1)$.

令

$$f(x,u)=u|u|^{p-2}$$

和

$$g(x,u)=|u|^{\sigma},$$

其中

$$\sigma=\frac{3}{4}p-1$$

满足

$$0\leqslant\sigma<\mu-1=p-1.$$

容易验证 $f(x,u)$ 满足条件 (F.1)–(F.3), 并且 $p=\mu>2$. 此外, $g(x,u)$ 满足条件 (G.1) 以及

$$(\sigma+1)\tilde{\nu}=\frac{9p}{4}>2p=\vartheta\mu,$$

这表明对于指标 p, 不等式 (A1) 给出的范围比不等式 (A2) 给出的范围更宽泛.

3.2 变号解的存在性问题

为研究半线性次椭圆方程 (3.1) 的变号解, 设 f 满足条件 (F.1)–(F.3) 及如下的两个条件:

(F.4) $\lim_{u\to 0}\frac{f(x,u)}{u}=0$ 关于 $x\in\overline{\Omega}$ 一致成立;

(F.5) 对任意的 $(x,u)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$, 有 $f(x,u)u\geqslant 0$.

此外, 设 g 满足如下的三个条件:

(G.2) $\lim_{u\to 0}\frac{g(x,u)}{u}=0$ 关于 $x\in\overline{\Omega}$ 一致成立;

(G.3) 存在 $0<\sigma<\mu-1$ 和 $C>0$ 使得

$$|g(x,u)|\leqslant C(1+|u|^{\sigma}),\quad \forall\,(x,u)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R};$$

(G.4) 对任意的 $(x,u)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$, 有 $g(x,u)u\geqslant 0$.

变号解相较于正负解体现出更为复杂的几何性质, 如节点域的数量和形状以及节点集的测度. 因此, 对变号解的研究在数学上具有重要的意义.

3.2.1 经典椭圆情形的相关结果

对于经典椭圆情形下的方程 (3.1), 其变号解的存在性最早是在对称情形下考虑的, 相关结果可参见 Bartsch 等 [7] 及 Li 和 Wang [43] 的研究. 在非对称情形下, Schechter 和 Zou [60] 结合不变集和临界点理论对该问题进行了研究, 得到了如下结果:

定理 3.6 [60] 设 f 满足条件 (F.1)–(F.5), g 满足条件 (G.2)–(G.4). 若

$$\frac{2p}{n(p-2)}-1>\frac{\mu}{\mu-\sigma-1},\tag{3.11}$$

则方程 (3.1) 在 $H_0^1(\Omega)$ 中存在一列无界的变号解.

随后, Ramos 等 [57] 改进了上述结果, 并证明了如下定理:

定理 3.7 设 f 满足条件 (F.1)–(F.5), g 满足条件 (G.2)–(G.4). 若

$$\frac{2p}{n(p-2)}>\frac{\mu}{\mu-\sigma-1},\tag{3.12}$$

则方程 (3.1) 在 $H_0^1(\Omega)$ 中存在一列无界的变号解.

通过分析文献 [57, 60] 中的证明可知, 条件 (3.11) 同样依赖于 Laplace 算子的第 k 个 Dirichlet 特征值 λ_k 的下界估计 $\lambda_k\geqslant Ck^{\frac{2}{n}}$, 而条件 (3.12) 是通过对相关变号临界点的 Morse 指标估计得到的. 这与第 3.1.1 小节中所述的解的多重性结果类似. 因此, 在经典椭圆情形下, Morse 指标方法能提供更宽泛的充分条件, 使得方程 (3.1) 存在一列变号解. 关于经典椭圆方程变号解的相关结果还可参见文献 [44, 45, 61].

3.2.2 一般退化情形的相关结果

最近, 我们在退化情形下对方程 (3.1) 的变号解问题进行了研究, 得到了如下结果:

定理 3.8 [17] 设 f 满足条件 (F.1)–(F.5), g 满足条件 (G.2)–(G.4), 且特征值 λ_k 满足定理 3.4 中的下界估计条件 (L). 若定理 3.4 中的条件 (A1) 成立, 则边值问题 (3.1) 在 $H^1_{X,0}(\Omega)$ 中存在一个无界的变号解序列.

为证明定理 3.8, 我们结合了 Rabinowitz [56] 的对称扰动方法以及 Ramos 等 [57] 在限制锥中的流不变技术. 然而, 与经典椭圆情形相比, Hörmander 算子的抽象性和退化性造成了许多本质上的困难. 例如, 在构造变号临界点的极小 - 极大值时, 我们需要一个在变号框架下的相交引理. 在经典椭圆情形下, 此相交引理可由 Castro 和 Clapp [10] 的奇连续延拓得到, 而该方法无法应用于变系数的退化椭圆算子. 受 Liu 等 [44] 的启发, 我们在退化框架下建立了相应的相交引理并定义了与变号临界点相关的极小 - 极大值. 因此, 在特征值的下界条件 (L) 下, 扰动方法对于方程 (3.1) 的变号解问题仍然是有效的.

在没有特征值的下界条件 (L) 的情形下, 基于 Bartsch 等 [7] 的工作, 通过相对亏格引入能够刻画变号临界点的极小 - 极大值. 接着, 利用 Marino-Prodi 扰动技巧 [45], 选取具有有限个非退化变号临界点的扰动泛函. 然后, 结合 Morse-Palais 引理以及 Lazer 和 Solimini [42] 提出的变换, 我们为这些变号临界点上的增广 Morse 指标 (the augmented Morse index) 建立了一个显式下界. 最后, 通过将 Morse 指标类型的估计与退化 Cwikel-Lieb-Rozenblum 不等式相结合, 得到如下结果:

定理 3.9 [17] 设 f 满足条件 (F.1)–(F.5), g 满足条件 (G.2)–(G.4). 若定理 3.5 中的条件 (A2) 成立, 则边值问题 (3.1) 在 $H^1_{X,0}(\Omega)$ 中存在一个无界的变号解序列.

注 3.4 定理 3.8 和 3.9 分别推广了先前由 Schechter 和 Zou [60] 及 Ramos 等 [57] 建立的关于变号解的经典结果. 特别地, 如果向量场 $X = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$ 为梯度场, 则算子 $\triangle_X = \triangle$ 且 $\tilde{\nu} = n$. 在此经典椭圆情形下, 条件 (A1) 与条件 (3.11) 一致, 而条件 (A2) 则与条件 (3.12) 一致.

与第 3.1.2 小节中对条件 (A1) 和 (A2) 的比较讨论类似, 对等度正则情形 (即 Hörmander 向量场的退化点为正则的), 这时 $\vartheta = \tilde{\nu}$, 定理 3.9 的结果可以涵盖定理 3.8 的结果, 这表明 Morse 指标方法会优于特征值下界估计方法; 而对非等度正则情形 (即 Hörmander 向量场的退化点为奇异的), 会发现上述结果会反转过来. 下面的例子说明定理 3.9 的结果并不能涵盖定理 3.8 的结果, 这也表明具奇异退化点时次椭圆边值问题的研究与具正则退化点时的情形 (以及与经典的椭圆边值问题的情形) 的研究相比有着本质上的不同.

例 3.2 设 $X = (X_1, X_2) = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2} + x_1^2 \partial_{x_3})$ 是定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的 Martinet 型向量场, 其生成的 Martinet 算子为

$$\triangle_M := \partial_{x_1}^2 + (\partial_{x_2} + x_1^2 \partial_{x_3})^2.$$

假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个包含原点的光滑有界开区域. 易知, X 在 $\mathbb{R}^3$ 中满足 Hörmander 条件, 但在 Ω 上不满足 Métivier 条件. 此时 $\tilde{\nu} = 5 > 3 = n$. 由文献 [13] 可知, 对于充分大的 k, 特征值 λ_k 满足

$$\lambda_k \geqslant C\left(\frac{k}{\ln k}\right)^{\frac{2}{\tilde{\nu}-1}} = C\left(\frac{k}{\ln k}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

因此, 特征值的下界估计条件 (L) 中的参数 $(\vartheta, \kappa) = (4, \frac{1}{2})$.

考虑方程 (3.1), 其中非线性项 $f(x,u) = u|u|^{p-2}$ 满足条件 (F.1)–(F.5), 且 $p = \mu > 2$. 另设

$$g(x,u) = \begin{cases} u|u|, & |u| < 1, \\ u|u|^{\sigma-1}, & |u| \geqslant 1, \end{cases} \tag{3.13}$$

其中 $\sigma = \frac{9}{10}p - 1$ 满足

$$0 \leqslant \sigma < \mu - 1 = p - 1.$$

由此可见 $g(x,u)$ 满足条件 (G.2)–(G.4). 此时,

$$(\sigma + 1)\tilde{\nu} = \frac{9}{2}p > 4p = \vartheta\mu,$$

定理 3.9 的结果并不能涵盖定理 3.8 的结果. 进一步计算条件 (A1), 可见

$$\frac{p}{2(p-2)}-\frac{5}{4}>\frac{\mu}{\mu-\sigma-1}=10,$$

而对条件 (A2) 也有

$$\frac{2p}{5(p-2)}>\frac{\mu}{\mu-\sigma-1}=10.$$

若取

$$p=\frac{1}{2}\left(\frac{25}{12}+\frac{90}{43}\right)=\frac{2155}{1032}\in\left(2,\frac{2\tilde{\nu}}{\tilde{\nu}-2}\right),$$

则

$$\frac{p}{2(p-2)}-\frac{5}{4}=\frac{3855}{364}>\frac{\mu}{\mu-\sigma-1}=10,$$

但是

$$\frac{2p}{5(p-2)}=\frac{862}{91}<\frac{\mu}{\mu-\sigma-1}=10.$$

这表明参数组 $(p,\mu,\sigma)=(p,p,\frac{9}{10}p-1)$ 满足条件 (A1) 但不满足条件 (A2).

4 具临界增长情形的 Baouendi-Grushin 型拟线性次椭圆边值问题

本节考虑 Baouendi-Grushin 型拟线性次椭圆边值问题

$$\begin{cases}-\triangle_{p,X}u=|u|^{p_Q^*-2}u+g(x,u), & x\in\Omega,\\ u\geqslant 0,\\ u\in W_{X,0}^{1,p}(\Omega),\end{cases}\tag{4.1}$$

其中 $X=(X_1,\ldots,X_n)$ 为例 2.1 中的 Baouendi-Grushin 向量场, Q 为齐性维数, $1<p<Q$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为有界开集且 $\Omega\cap\Pi\neq\emptyset$, 其中

$$\Pi:=\left\{x\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,\sum_{j=1}^{N_1}x_j^2=0\right\}$$

表示向量场的奇异退化点集. 方程 (4.1) 中的函数 $g\in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$ 是一个满足以下条件的低阶扰动.

(C.1) 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在一个函数 $a_\varepsilon\in L^\infty(\Omega)$ 使得对几乎处处的 $z\in\Omega$ 和任意 $s\in\mathbb{R}$ 满足

$$|g(z,s)|\leqslant a_\varepsilon(z)+\varepsilon|s|^{p_Q^*-1}.$$

(C.2) 原函数 $G(z,s)=\int_0^s g(z,t)dt$ 对几乎处处的 $z\in\Omega$ 和任意 $s\in\mathbb{R}$ 满足 $G(z,s)\geqslant 0$.

(C.3) 存在一个开子集 $\Omega_0\subset\Omega$ 且 $\Omega_0\cap\Pi\neq\emptyset$, 以及常数 $\delta>0$, $\mu>0$, $0<a<b$ 和 $\sigma\in(0,\lambda_1)$, 使得

$$G(z,s)\leqslant\frac{1}{p}(\lambda_1-\sigma)|s|^p\quad\text{对于几乎处处的 } z\in\Omega \text{ 和任意的 } |s|\leqslant\delta \text{ 成立},$$

并且 $G(z,s)\geqslant\mu$ 对几乎处处的 $z\in\Omega_0$ 和任意 $s\in[a,b]$ 成立, 其中 λ_1 表示 Dirichlet 特征值问题

$$\begin{cases}-\triangle_{p,X}u=\lambda|u|^{p-2}u & \text{于 } \Omega,\\ u\in W^{1,p}_{X,0}(\Omega)\end{cases}\tag{4.2}$$

的第一个特征值. 由 Sobolev 不等式 (2.4) 可知 $\lambda_1>0$.

(C.4) $\lim_{s\to+\infty}\frac{G(z,s)}{s^\beta}=+\infty$ 在 Ω_0 上一致成立, 其中 $\beta:=\frac{p(Qp+p-2Q)}{(p-1)(Q-p)}$, 并且 Ω_0 是条件 (C.3) 中给出的开集.

若 $\alpha=0$, $X=\{\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_n}\}$ 为梯度场, 这时 $Q=n$, 方程 (4.1) 中的算子 $\triangle_{p,X}$ 即为经典的 p-Laplace 算子. 对于这类拟线性椭圆方程, 目前已有了较多的研究结果 (参见文献 [2,29,32]).

在 Carnot 群的框架下 (这时 Métivier 条件成立, 向量场为等度正则的), 具有临界 Sobolev 指数和一般幂次型非线性项的次椭圆方程得到了广泛关注 (参见文献 [19,30,31,46]). 对于拟线性的情形, Vassilev [67] 研究了如下临界拟线性退化椭圆边值问题:

$$-\triangle_{p,\mathbb{G}}u=|u|^{p_Q^*-2}u,\quad u\in\dot{W}^{p,Q}_{X,0}(\mathbb{G}),\tag{4.3}$$

其中 $\triangle_{p,\mathbb{G}}$ 是 Carnot 群 G 上的 p-sub-Laplace 算子, $\Omega\subset G$ 为开子集, $\dot{W}^{p,Q}_{X,0}(\mathbb{G})$ 为齐性 Sobolev 空间. 文献 [67] 证明了如下结果:

定理 4.1 [67] 设 $\mathbb{G}$ 为一个 Carnot 群, 临界拟线性退化椭圆边值问题 (4.3) 存在一个非平凡的非负解 $u\in\dot{W}^{p,Q}_{X,0}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$.

随后, Loiudice [47] 进一步对 $\mathbb{G}$ 上方程 $-\triangle_{p,\mathbb{G}}u=|u|^{p_Q^*-2}u$ 的正解, 证明了解的渐近行为满足

$$u(x)\approx\frac{1}{\|x\|_{\mathbb{G}}^{\frac{Q-p}{p-1}}},\quad \text{当 } \|x\|_{\mathbb{G}}\to+\infty \text{ 时},\tag{4.4}$$

其中 $\|\cdot\|_{\mathbb{G}}$ 为 Carnot 群 $\mathbb{G}$ 上的齐性范数. 这一衰减估计对于建立 p-sub-Laplace 算子的 Brezis-Nirenberg 型问题的存在性结果起着至关重要的作用, 尤其是在对应的 Sobolev 极值函数缺乏显式表达式的情形下. 基于 Vassilev [67] 的存在性结果以及该衰减估计 (4.4), Loiudice [48] 进一步证明了拟线性次椭圆方程 (4.1) 的解的存在性, 此结果推广了文献 [2] 中的经典椭圆情形. 关于 Carnot 群上拟线性方程的相关结果, 可参见文献 [20,22,28,39].

对 p-sub-Laplace 算子的研究也进一步延伸到了非等度正则情形, 如由 Baouendi-Grushin 型向量场生成的拟线性次椭圆方程 (4.1), 这方面的结果可参见文献 [23,34,35,69]. 最近, 我们得到了如下结果:

定理 4.2 [12] 假设条件 (C.1)–(C.3) 成立, 则当以下三个条件之一成立时, 临界拟线性退化椭圆边值问题 (4.1) 存在一个非平凡的非负解:

(1) $1<p^2<Q$;

(2) $p^2=Q$ 且条件 (C.3) 中的 μ 充分大;

(3) $1<p<Q<p^2$ 且条件 (C.4) 成立.

特别地, 我们还对 Brezis-Nirenberg 型问题得到了如下的存在性和正则性结果:

定理 4.3 [12] 若条件

(1) $1<p^2\leqslant Q$, $p=q$ 且 $0<\lambda<\lambda_1$,

(2) $1<p^2<Q$, $p<q<p_Q^*$ 且 $\lambda>0$,

(3) $1<p<Q<p^2$, $p=q$ 且 $\lambda_1-c_0|\Omega|^{-\frac{p}{Q}}<\lambda<\lambda_1$

中有一个成立, 则临界拟线性退化椭圆边值问题

$$\begin{cases}-\triangle_{p,X}u=|u|^{p_Q^*-2}u+\lambda|u|^{q-2}u & \text{于 } \Omega,\\ u\in W_{X,0}^{1,p}(\Omega)\end{cases} \tag{4.5}$$

存在一个正解 $u\in W_{X,0}^{1,p}(\Omega)\cap S^{\alpha}(\overline{\Omega})$, 其中 $\alpha\in(0,1)$, $S^{\alpha}(\overline{\Omega})$ 为广义 Hölder 空间, c_0 为 (2.5) 中定义的最佳 Sobolev 常数.

注 4.1 定理 4.2 和 4.3 推广了椭圆情形的经典结果 [2, 29]. 但是否能像研究次临界增长情形下的退化椭圆边值问题那样将这方面的研究推广到更一般的非等度正则情形下的具临界增长的半线性或拟线性退化椭圆边值问题, 目前仍有许多问题有待研究.

参考文献

1 Agrachev A, Barilari D, Boscain U. A Comprehensive Introduction to Sub-Riemannian Geometry. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2020

2 Arioli G, Gazzola F. Some results on p-Laplace equations with a critical growth term. Differential Integral Equations, 1998, 11: 311–326

3 Bahri A. Topological results on a certain class of functionals and application. J Funct Anal, 1981, 41: 397–427

4 Bahri A, Berestycki H. A perturbation method in critical point theory and applications. Trans Amer Math Soc, 1981, 267: 1–32

5 Bahri A, Lions P L. Morse index of some min-max critical points. I. Application to multiplicity results. Comm Pure Appl Math, 1988, 41: 1027–1037

6 Bahri A, Lions P L. Solutions of superlinear elliptic equations and their Morse indices. Comm Pure Appl Math, 1992, 45: 1205–1215

7 Bartsch T, Liu Z, Weth T. Sign changing solutions of superlinear Schrödinger equations. Comm Partial Differential Equations, 2004, 29: 25–42

8 Bony J M. Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du probléme de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1969, 19: 277–304

9 Bramanti M. An Invitation to Hypoelliptic Operators and Hörmander's Vector Fields. Cham: Springer, 2014

10 Castro A, Clapp M. Upper estimates for the energy of solutions of nonhomogeneous boundary value problems. Proc Amer Math Soc, 2006, 134: 167–175

11 Chen H, Chen H G. Estimates of Dirichlet eigenvalues for a class of sub-elliptic operators. Proc Lond Math Soc (3), 2021, 122: 808–847

12 Chen H, Chen H G. Existence results for critical problems involving Baouendi-Grushin-type p-sub-Laplacians. Complex Anal Synerg, 2026, 12: 12–80

13 Chen H, Chen H G, Li J N. Asymptotic behaviour of Dirichlet eigenvalues for homogeneous Hörmander operators and algebraic geometry approach. arXiv:2203.10450v2, 2022

14 Chen H, Chen H G, Li J N. Sharp embedding results and geometric inequalities for Hörmander vector fields. arXiv:2404.19393, 2024

15 Chen H, Chen H G, Li J N. Sobolev inequality and its extremal functions for homogeneous Hörmander vector fields. arXiv:2506.16125v2, 2025

16 Chen H, Chen H G, Li J N, et al. Multiplicity of solutions for the semilinear subelliptic Dirichlet problem. Sci China Math, 2024, 67: 475–504

17 Chen H, Chen H G, Li J N, et al. Multiple sign-changing solutions for semilinear subelliptic Dirichlet problem. arXiv:2510.10120, 2025

18 Chen H, Chen H G, Yuan X R. Existence and multiplicity of solutions to Dirichlet problem for semilinear subelliptic equation with a free perturbation. J Differential Equations, 2022, 341: 504–537

19 Citti G. Semilinear Dirichlet problem involving critical exponent for the Kohn Laplacian. Ann Mat Pura Appl (4), 1995, 169: 375–392

20 D'Ambrosio L, Mitidieri E. Quasilinear elliptic equations with critical potentials. Adv Nonlinear Anal, 2017, 6: 147–164

21 Dong G C, Li S J. On the existence of infinitely many solutions of the Dirichlet problem for some nonlinear elliptic equations. Sci Sinica Ser A, 1982, 25: 468–475

22 Dou J. Picone inequalities for p-sub-Laplacian on the Heisenberg group and its applications. Commun Contemp Math, 2010, 12: 295–307

23 Dou J, Han Y. Ostrowski type inequalities related to the generalized Baouendi-Grushin vector fields. Rend Semin Mat Univ Padova, 2013, 129: 225–244

24 Fefferman C, Phong D H. Subelliptic eigenvalue problems. In: Proceedings of Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund. Berlin: Springer, 1981, 590–606

25 Fefferman C, Sánchez-Calle A. Fundamental solutions for second order subelliptic operators. Ann of Math (2), 1986, 124: 247–272

26 Folland G B. Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups. Ark Mat, 1975, 13: 161–207

27 Folland G B, Stein E M. Estimates for the $\overline{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group. Comm Pure Appl Math, 1974, 27: 429–522

28 Garain P, Ukhlov A. Singular subelliptic equations and Sobolev inequalities on Carnot groups. Anal Math Phys, 2022, 12: 67

29 García Azorero J P, Peral Alonso I. Existence and nonuniqueness for the p-Laplacian. Comm Partial Differential Equations, 1987, 12: 1387–1430

30 Garofalo N, Lanconelli E. Existence and nonexistence results for semilinear equations on the Heisenberg group. Indiana Univ Math J, 1992, 41: 71–98

31 Garofalo N, Vassilev D. Regularity near the characteristic set in the non-linear Dirichlet problem and conformal geometry of sub-Laplacians on Carnot groups. Math Ann, 2000, 318: 453–516

32 Guedda M, Veron L. Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. Nonlinear Anal, 1989, 13: 879–902

33 Hörmander L. Hypoelliptic second order differential equations. Acta Math, 1967, 119: 147–171

34 Huang J Z, Yang X X. P-Laplace equation for the Grushin type operator. Acta Math Sin (Engl Ser), 2023, 39: 923–938

35 Huang X, Ma F, Wang L. L^q regularity for p-Laplace type Baouendi-Grushin equations. Nonlinear Anal, 2015, 113: 137–146

36 Jerison D. The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition. Duke Math J, 1986, 53: 503–523

37 Jerison D, Lee J M. The Yamabe problem on CR manifolds. J Differential Geom, 1987, 25: 167–197

38 Jerison D, Sánchez-Calle A. Estimates for the heat kernel for a sum of squares of vector fields. Indiana Univ Math J, 1986, 35: 835–854

39 Kassymov A, Suragan D. Existence of solutions for p-sub-Laplacians with nonlinear sources on the Heisenberg group. Complex Var Elliptic Equ, 2021, 66: 614–625

40 Kohn J J. Pseudo-differential operators and hypoellipticity. In: Partial Differential Equations. Providence: Amer Math Soc, 1973, 61–69

41 Kusuoka S, Stroock D. Applications of the Malliavin calculus, Part III. J Fac Sci Univ Tokyo Sect IA Math, 1987, 34: 391–442

42 Lazer A C, Solimini S. Nontrivial solutions of operator equations and Morse indices of critical points of min-max type. Nonlinear Anal, 1988, 12: 761–775

43 Li S, Wang Z Q. Ljusternik-Schnirelman theory in partially ordered Hilbert spaces. Trans Amer Math Soc, 2002, 354: 3207–3227

44 Liu J Q, Liu X Q, Wang Z Q. Multiple sign-changing solutions for quasilinear elliptic equations via perturbation method. Comm Partial Differential Equations, 2014, 39: 2216–2239

45 Liu J Q, Liu X Q, Wang Z Q. Sign-changing solutions for coupled nonlinear Schrödinger equations with critical growth. J Differential Equations, 2016, 261: 7194–7236

46 Loiudice A. Semilinear subelliptic problems with critical growth on Carnot groups. Manuscripta Math, 2007, 124: 247–259

47 Loiudice A. Optimal decay of p-Sobolev extremals on Carnot groups. J Math Anal Appl, 2019, 470: 619–631

48 Loiudice A. Existence results for critical problems involving p-sub-Laplacians on Carnot groups. In: Harmonic Analysis and Partial Differential Equations. Cham: Springer, 2022, 135–151

49 Luyen D T, Tri N M. On the existence of multiple solutions to boundary value problems for semilinear elliptic degenerate operators. Complex Var Elliptic Equ, 2019, 64: 1050–1066

50 Maalaoui A, Martino V. Multiplicity result for a nonhomogeneous Yamabe type equation involving the Kohn Laplacian. J Math Anal Appl, 2013, 399: 333–339

51 Métivier G. Fonction spectrale et valeurs propres d'une classe d'operateurs non elliptiques. Comm Partial Differential Equations, 1976, 1: 467–519

52 Montgomery R. A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications. Providence: Amer Math Soc, 2002

53 Nagel A, Stein E M, Wainger S. Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties. Acta Math, 1985, 155: 103–147

54 Oleĭnik O A, Radkevich E V. Second Order Equations with Nonnegative Characteristic Form. New York-London: Plenum Press, 1973

55 Rabinowitz P H. Multiple critical points of perturbed symmetric functionals. Trans Amer Math Soc, 1982, 272: 753–769

56 Rabinowitz P H. Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. Providence: Amer Math Soc, 1986

57 Ramos M, Tavares H, Zou W M. A Bahri-Lions theorem revisited. Adv Math, 2009, 222: 2173–2195

58 Rothschild L P. A criterion for hypoellipticity of operators constructed from vector fields. Comm Partial Differential Equations, 1979, 4: 645–699

59 Rothschild L P, Stein E M. Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. Acta Math, 1976, 137: 247–320

60 Schechter M, Zou W M. Infinitely many solutions to perturbed elliptic equations. J Funct Anal, 2005, 228: 1–38

61 Schechter M, Zou W M. Sign-changing critical points from linking type theorems. Trans Amer Math Soc, 2006, 358: 5293–5319

62 Squassina M. Existence, Multiplicity, Perturbation, and Concentration Results for a Class of Quasi-linear Elliptic Problems. San Marcos: Texas State Univ, 2006

63 Struwe M. Infinitely many critical points for functionals which are not even and applications to superlinear boundary value problems. Manuscripta Math, 1980, 32: 335–364

64 Struwe M. Variational Methods. New York: Springer, 2000

65 Tanaka K. Morse indices at critical points related to the symmetric mountain pass theorem and applications. Comm Partial Differential Equations, 1989, 14: 99–128

66 Varopoulos N T, Saloff-Coste L, Coulhon T. Analysis and Geometry on Groups. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1992

67 Vassilev D. Existence of solutions and regularity near the characteristic boundary for sub-Laplacian equations on Carnot groups. Pacific J Math, 2006, 227: 361–397

68 Venkatesha Murthy M K. A class of subelliptic quasilinear equations. J Global Optim, 2008, 40: 245–260

69 Wei Y, Chen C, Chen Q, et al. Liouville-type theorem for nonlinear elliptic equations involving p-Laplace-type Grushin operators. Math Methods Appl Sci, 2020, 43: 320–333

70 Xu C J. Regularity for quasilinear second-order subelliptic equations. Comm Pure Appl Math, 1992, 45: 77–96

71 Xu C J. Semilinear subelliptic equations and Sobolev inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition. Chinese J Contemp Math, 1994, 15: 183–192

72 Xu C J. Existence of bounded solutions for quasilinear subelliptic Dirichlet problems. J Partial Differ Equ, 1995, 8: 97–107

73 Xu C J. Dirichlet problems for the quasilinear second order subelliptic equations. Acta Math Sin (Engl Ser), 1996, 12: 18–32

74 Xu C J, Zuily C. Higher interior regularity for quasilinear subelliptic systems. Calc Var Partial Differential Equations, 1997, 5: 323–343

Recent developments in subelliptic Dirichlet boundary value problems

Hua Chen & Hongge Chen

Abstract In this paper, we introduce the background and properties of Hörmander vector fields and present relevant research results for a class of subelliptic Dirichlet boundary value problems. For the subcritical growth case, we propose two distinct sufficient conditions for the multiplicity of weak solutions and sign-changing solutions, respectively. Our findings reveal that these two conditions each have their own advantages in different degenerate cases. Our latest research findings indicate that for the boundary value problems of degenerate elliptic equations, there are essential differences in the study of the existence of solutions compared with those of classical elliptic equations. This aspect depends on whether the degeneracy points of the operators are regular or singular. Furthermore, we discuss quasilinear subelliptic boundary value problems of the Baouendi-Grushin type with critical growth, establishing existence and regularity results for non-negative solutions and for positive solutions to Brezis-Nirenberg type problems.

Keywords **degenerate elliptic equation, Hörmander condition, boundary value problem**

MSC(2020) **35J70, 35J92, 35G30**

doi: 10.1360/SSM-2025-0270