中国科学: 数学　2026 年　第 56 卷　第 ? 期: 1 ∼ 14
SCIENTIA SINICA Mathematica
综　述
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

锥乘子简述

贺丹青[1], 李晓春[2*]

1. 复旦大学数学科学学院, 上海 200433;
2. Department of Mathematics, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL 61801, USA
E-mail: hedanqing@fudan.edu.cn, xcli@illinois.edu

收稿日期: 2026-02-03; 接受日期: 2026-04-15; 网络出版日期: 2026-05-13; * 通信作者
国家重点研发计划 (批准号: 2021YFA1002500)、国家自然科学基金 (批准号: 12322105)、上海市自然科学基金 (批准号: 23QA1400300) 和美国国家科学基金 (批准号: NSF2350101) 资助项目

摘要　本文介绍锥乘子的起源、主要结果以及锥乘子与调和分析中一些猜想的联系.

关键词　锥乘子　极大函数　平方函数　Bochner-Riesz 乘子

MSC (2020) 主题分类　42B05, 42B15, 42B25

1　锥乘子的起源

通过 Fourier 变换, 众所周知 $n+1$ 维 Euclid 空间上的波方程

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = f(x), \quad \partial_t u(x,0) = g(x), & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

的解可表示为

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\widehat{f}(\xi)\cos(2\pi t|\xi|) + \frac{\widehat{g}(\xi)}{2\pi|\xi|}\sin(2\pi t|\xi|) \right] \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi} d\xi,$$

其中 $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi} d\xi$ 为 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的 Fourier 变换. 若引入记号

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t|\xi|}\widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(x,t)\cdot(\xi,|\xi|)} d\xi,$$

则 $u(x,t)$ 可表示为形如 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}t\sqrt{-\Delta}} f(x)$ 的有限和. 作为 (x,t) 的函数, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta}} f(x)$ 的 Fourier 支集为光锥

$$\Gamma := \{(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : |\xi| = |\tau|\},$$

英文引用格式: He D Q, Li X C. A brief introduction to the cone multiplier (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 1–14, doi: 10.1360/SSM-2026-0028

© 2026《中国科学》杂志社

因此与光锥相关的调和分析结论便成为了研究波方程的有力工具. 鉴于波方程在物理学和偏微分方程中的重要地位, 光锥上的调和分析因而也成为了当代调和分析的重要研究对象, 其中的典型例子包括锥乘子的有界性、锥上的限制性估计和波方程的局部光滑估计等问题.

高维 Fourier 级数的点态收敛性是调和分析最核心的问题之一, 也是调和分析中最困难的问题. 由其衍生的一个经典问题为 Bochner-Riesz 猜想. Bochner-Riesz 乘子的定义为

$$\tilde{m}^\alpha(\xi) = (1-|\xi|^2)_+^\alpha,$$

其中 $\alpha \geqslant 0$, $t_+ = \max\{t, 0\}$. Bochner-Riesz 算子 (也称为 Bochner-Riesz 平均) 的定义为

$$B^\alpha(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{m}^\alpha(\xi)\widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}x\cdot\xi}d\xi.$$

Bochner-Riesz 猜想的具体表述如下:

猜想 1.1 (Bochner-Riesz 猜想) $B^\alpha(f)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界当且仅当 $\alpha > \max\{n|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}| - \frac{1}{2}, 0\}$.

这一问题与限制性猜想、Kakeya 猜想等重要问题联系密切 (参见文献 [15, 42]), 例如, Tao [42] 证明了这一猜想可推导出 Stein 限制性猜想. 对于这一系列问题的深入研究极大地推动了当代调和分析的发展 (参见文献 [22, 24, 45, 46]). 文献 [35] 对于这些著名猜想之间的关联关系以及相关的技术手段进行了详尽的介绍.

锥乘子的研究最早由 Stein [41] 发起. 作为经典 Bochner-Riesz 乘子在锥面上的推广, 其定义为

$$m^\alpha(\xi) = \left(1 - \frac{|\xi'|^2}{|\xi_n|^2}\right)_+^\alpha,$$

其中 $\xi = (\xi', \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. 这一乘子的奇异性集中于锥面 Γ. m^α 相应的算子即为

$$T^\alpha(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)m^\alpha(\xi)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}x\cdot\xi}d\xi.$$

根据 deLeeuw 定理 [12], 若 T^α 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界, 则 $(n-1)$- 维 Bochner-Riesz 算子 B^α 在 $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ 上有界. 基于此观察, Stein [41] 于 1979 年猜想 $\mathbb{R}^n$ 中 T^α 的有界范围与 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中 B^α 的有界范围一致:

猜想 1.2 (锥乘子猜想) $T^\alpha(f)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界当且仅当 $\alpha > \max\{(n-1)|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}| - \frac{1}{2}, 0\}$.

类似于 Bochner-Riesz 猜想与限制性猜想等重要问题的关系, 锥乘子猜想也与锥面上的其他调和分析问题联系密切.

设 g 为支撑在截段锥面 $\Gamma_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+1} : |\xi'| = \xi_{n+1} \in [1, 2]\}$ 上的函数, 可以定义 Fourier 扩张算子 (Fourier extension operator)

$$E_{\Gamma_0}(g)(x) := \int_{\Gamma_0} g(\xi)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}x\cdot\xi}d\sigma(\xi),$$

其中 σ 为 Γ_0 上的 n- 维 Hausdorff 测度. 锥上的限制性猜想主要关心 E_{Γ_0} 的有界性. 具体地, 人们猜想

$$\|E_{\Gamma_0}(g)\|_{L^q(\mathbb{R}^{n+1})} \leqslant C\|g\|_{L^p(\Gamma_0)}$$

等价于 $q > \frac{2n}{n-1}$ 且 $\frac{1}{p'} \geqslant \frac{n+1}{n-1}\frac{1}{q}$. 对 E_{Γ_0} 有界性的研究等价于考虑算子

$$E(f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}x\cdot(\xi,|\xi|)}d\xi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_{n+1}\sqrt{-\Delta}}(\widehat{f})(x')$$

的有界性, 其中 f 为支撑在 $B^n(0,1):=\{\xi\in\mathbb{R}^n:\ |\xi|\leqslant 1\}$ 的函数. 锥上的限制性估计可以被用于改进锥乘子的有界性 (参见文献 [2, 13, 43, 44]), 用于研究锥乘子的观察也可被用于推动锥面上的限制性猜想的研究 (参见文献 [49]).

波方程的局部光滑猜想是另一与锥面相关的重要猜想. 1991 年, Sogge [40] 在研究圆环极大函数时提出了这一猜想:

猜想 1.3 (局部光滑猜想) 设 $n\geqslant 2$, $p\geqslant 2$. 定义

$$\alpha(p)=\begin{cases}(n-1)\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{p}\right)-\dfrac{1}{p}, & p\geqslant\dfrac{2n}{n-1},\\ 0, & p\in\left[2,\dfrac{2n}{n-1}\right].\end{cases}$$

当 $s>\alpha(p)$ 时, 有

$$\left(\int_1^2\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta}}f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}dt\right)^{1/p}\leqslant C\|f\|_{L^p_s(\mathbb{R}^n)},$$

其中 $\|f\|_{L^p_s(\mathbb{R}^n)}:=\|(\widehat{f}(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2})^\vee\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ 为 Sobolev 范数.

这一猜想可以推导出 Bochner-Riesz 猜想 (参见文献 [42]) 等重要猜想. 虽然目前尚不明确锥乘子猜想是否与波方程的局部光滑猜想等价, 但用于建立锥乘子有界性的方法往往可被用于改进局部光滑估计 (参见文献 [25]). 关于局部光滑猜想的研究, 可参见文献 [17–19, 37, 38].

2 锥乘子的历史

本节简述锥乘子的发展历史, 并在以下几节就部分结果进行详细介绍.

Mockenhaupt [36] 系统地研究了锥乘子的有界性. 在这一工作中, Mockenhaupt 将锥乘子猜想归结为锥面反向平方函数估计 (见 (3.2)), 建立了这一问题与局部光滑猜想的联系, 并证明了当 $\alpha>\frac{1}{8}$ 时 T^α 在 $L^4(\mathbb{R}^3)$ 上有界. Bourgain [2] 引入了双线性方法, 通过建立双线性 Kakeya 估计, 改进了 Mockenhaupt 的结论. Tao 和 Vargas [43, 44] 发展了双线性方法, 证明了当 $\alpha>\frac{1}{8}-\frac{1}{476}$ 时 T^α 的 $L^4(\mathbb{R}^3)$ 有界性.

Wolff [48] 引入了锥面的解耦不等式 (decoupling 不等式) 来研究锥乘子和局部光滑估计, 证明了当 $p>74$ 时 $\mathbb{R}^3$ 中锥乘子的最佳有界范围. 此后, Łaba 和 Wolff [31] 将文献 [48] 中的方法推广到了高维. Garrigós 和 Seeger [20] 改进了锥面的 decoupling 不等式, 拓宽了锥乘子的有界范围, 还研究了球面上的 decoupling 不等式. Heo [26] 利用锥面的限制性估计和 Calderón-Zygmund 分解改进了高维锥乘子的有界性.

Bennett 等 [1] 证明了多线性限制性猜想 (猜想 4.1) 的所有非端点估计. Bourgain 和 Guth [4] 引入 Broad-Narrow 方法, 成功地将线性限制性估计归结为多线性估计, 从而改进了经典的限制性估计. Lee 和 Vargas [34] 利用 Broad-Narrow 方法证明了当 $p=3$ 时 $\mathbb{R}^3$ 中锥乘子的最佳有界性. Lee [32] 利用文献 [34] 中的方法建立了当 $\alpha>\frac{1}{16}$ 时 $\mathbb{R}^3$ 中锥乘子的 L^4 有界性.

Guth 等 [25] 引入了高低频方法 (high-low 方法), 证明了 3 维空间中锥面上的反向平方函数估计, 从而成功解决了 $\mathbb{R}^3$ 中的锥乘子猜想和局部光滑猜想. Chen 等 [7] 研究了极大锥乘子, 通过建立锥面上的迹定理, 得到了当 $\alpha>\max\{n|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|,0\}$ 时 $\mathbb{R}^n$ 中锥乘子的点态收敛性. Fang 等 [13] 利用密度算子将极大锥乘子的有界性归结为一类与锥面相关的 L^p 混合范数估计, 并利用关联几何部分地证明了这一估计, 改进了高维空间中锥乘子和极大锥乘子的 L^p 有界范围.

锥乘子的其他类型有界性也得到了大量研究. Hong [30] 建立了当 $p<1$ 时锥乘子的 H^p-$L^{p,\infty}$ 估计. Lee [33] 建立了 $\alpha<0$ 时 $\mathbb{R}^3$ 中锥乘子 T^α 的 L^p-L^q 有界性. Heo 等 [27] 建立了当 $n\geqslant 5$ 时 $T^{(n-2)/2}$ 的弱 $(1,1)$ 有界性. Heo 等 [28] 研究了径向 Fourier 乘子的有界性, 并在文献 [29] 中利用其建立了当 $n\geqslant 5$ 时锥乘子的部分弱有界性.

3 L^4 方法

Mockenhaupt [36] 于 1993 年发展了 Fefferman [16] 和 Cordoba [10] 的 L^4 方法以及文献 [14] 中的方法, 建立了锥乘子有界性研究的初步框架. Mockenhaupt 主要建立了如下两个结论.

定理 3.1 若对于 $p\in[1,p_0]$ 均有限制性估计

$$\|E_{\Gamma_0}(f)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|f\|_{L^2(B^{n-1}(0,1))},$$

则当 $\alpha>n|\frac12-\frac1p|-\frac12$ 且 $p\in[1,p_0]$ 时, 有

$$\|T^\alpha(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

定理 3.1 建立了锥上的 (Stein-Tomas 型) 限制性估计与锥乘子有界性的联系.

定理 3.2 若 $\alpha>\frac18$, 则 T^α 在 $L^4(\mathbb{R}^3)$ 上有界.

下面简述定理 3.2 的证明. 对于 m^α, 根据 ξ 与锥面的距离作二进分解, 可以将 T^α 的有界性归结为建立估计

$$\|T_\delta(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\leqslant C_p(\delta)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}, \tag{3.1}$$

其中 T_δ 为与 $m_\delta(\xi):=\varphi_\delta(\frac{|\xi'|^2}{\xi_3^2})\psi(\xi_3)$ 相关的线性算子. 这里 $\varphi_\delta\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $\operatorname{spt}\varphi_\delta\subset[1-\delta,1+\delta]$ 且 $|(\varphi_\delta)^{(k)}|\leqslant C_k\delta^{-k}$, $\psi\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $\operatorname{spt}\psi\subset[\frac12,4]$ 且 $\psi(t)=1$, $t\in[1,2]$. m_δ 的支集为

$$\Gamma_0(\delta):=\{\xi\in\mathbb{R}^3:\operatorname{dist}(\xi,\Gamma_0)\leqslant\delta\}.$$

利用 m_δ 的支集信息, 可以对 m_δ 进行合适的单位分解. 首先将 $S_\delta:=\{\xi'\in\mathbb{R}^2:|\xi'|\in[1-\delta,1+\delta]\}$ 分解为 $\{\theta\}$, 其中每个 θ 与一个尺度为 $\sqrt{\delta}\times\delta$ 的长方形类似. 进而有相应的光滑分解 $\varphi_\delta(|\xi'|^2)=\sum_\theta\tilde\varphi_\theta(\xi')$, 其中 $\operatorname{supp}\tilde\varphi_\theta\subset 2\theta$. 相应地, 有如下的光滑化单位分解:

$$m_\delta=\sum_\theta\varphi_\theta,$$

其中 $\varphi_\theta(\xi)=\tilde\varphi_\theta(\xi'/\xi_3)\psi(\xi_3)$. φ_θ 的支集 $P_\theta:=\{\xi\in\mathbb{R}^3:|\xi'/\xi_3|\in\theta,\xi_3\in[\frac12,4]\}$ 为边长为 $\delta\times\sqrt{\delta}\times1$ 的板片 (plates), 其位置在光锥附近.

利用角向 Littlewood-Paley 理论 [11] 和板片的 Kakeya 估计 [8], 可以将 (3.1) 归结为如下的反向平凡函数估计:

$$\Big\|\sum_\theta S_\theta(f)\Big\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}\leqslant C_4(\delta)\Big\|\Big(\sum_\theta|S_\theta(f)|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}, \tag{3.2}$$

其中 S_θ 为以 φ_θ 为乘子的线性算子. 尤其是, 若 (3.2) 中 $C_4(\delta)\leqslant C_\epsilon\delta^{-\epsilon}$ 对于任意 $\epsilon>0$ 成立, 则对于任意 $\alpha>0$, T^α 在 $L^4(\mathbb{R}^3)$ 上有界.

对于 P_θ, 有如下估计:

$$C_4(\delta) \leqslant \left(\sum_{\theta} \sum_{\theta'} \chi_{P_\theta + P_{\theta'}} \right)^{1/4} \leqslant C\delta^{-1/8}. \tag{3.3}$$

不同于 $\mathbb{R}^2$ 中圆环时 $\sum_\theta \sum_{\theta'} \chi_{\theta+\theta'} \leqslant C$, 由于 P_θ 中沿着锥面的主方向有一个长度为 1 的尺度, 这使得 (3.3) 要复杂一些, 且 $\sum_\theta \sum_{\theta'} \chi_{P_\theta+P_{\theta'}} \leqslant C\delta^{-1/2}$ 中 $-1/2$ 是最佳指标.

反向平凡函数估计 (3.2) 是调和分析中的另一重要猜想. 实际上, Mockenhaupt 等 [37] 证明了这一估计蕴含波方程的局部光滑估计. 此外, 球面上的反向平方函数估计还蕴含了 Bochner-Riesz 猜想等重要结论 (参见文献 [5]).

Bourgain [2] 引入了双线性方法来改进锥乘子的有界性. 具体地, 他改进了锥上的平方函数估计, 证明了存在 $\tau > 0$ 使得

$$C_4(\delta) \leqslant C\delta^{-(\frac{1}{8}-\tau)}. \tag{3.4}$$

Bourgain 的主要想法是对 (θ, θ') 分类. 取定待确定的参数 $\gamma = \delta^\beta \in (0,1)$, 其中 $\beta > 0$ 足够小. 若 $|\theta - \theta'| \leqslant C\gamma$, 则可以使用 Mockenhaupt 的方法将这一部分的贡献控制在 $\gamma^{1/4}\delta^{-1/8}$. 当 $|\theta - \theta'| \geqslant C\gamma$ 时, Bourgain 建立了一类新的双线性限制性估计, 其主要观察来源于 θ 与 θ' 的距离较大这一性质所蕴含的正交性. 实际上, Bourgain 证明了如下估计: 存在 $p < 2$ 使得

$$\|\widehat{fd\sigma}\widehat{gd\sigma}\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\Gamma_0)}\|g\|_{L^2(\Gamma_0)}, \tag{3.5}$$

其中

$$\mathrm{dist}\ (\mathrm{supp} f, \mathrm{supp} g) \sim 1.$$

利用这种双线性估计, Bourgain 证明了 $|\theta - \theta'| \geqslant C\gamma$ 的部分的贡献不超过 $\delta^{-(\frac{1}{8}-\tau)}$.

Bourgain 在研究锥乘子的有界性时引入的双线性方法在此后相关研究中被系统地发展并取得了大量的应用. Tao 和 Vargas [43, 44] 发展了双线性方法, 并大幅改进了 (3.4) 中 τ 的取值. Wolff 将双线性方向的研究推向高峰. Wolff [47, 49] 成功引入了两端方法 (two-ends 方法). 通过该方法, Wolff 对尺度 $R = 1/\delta$ 进行归纳, 并利用锥面的特殊几何性质, 最终完全解决关于锥面限制性算子的最佳双线性估计. 这个工作在现代调和分析中有着深远的影响.

4 Decoupling 不等式

从上一节的讨论中可知, 研究锥乘子有界性可以归结于建立反向平方函数估计 (3.2). Wolff [48] 引入了这一不等式的弱化版本, 即

$$\left\| \sum_\theta S_\theta(f) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_\epsilon \delta^{-\epsilon} \delta^{-(\frac{1}{2}-\frac{2}{p})} \left(\sum_\theta \|S_\theta(f)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} \right)^{1/p}. \tag{4.1}$$

这一不等式就是后来人们所描述的 decoupling 不等式, 文献 [48] 说明了这一不等式可以部分推导出局部光滑猜想和锥乘子猜想, 并证明了 (4.1) 在 $p > 74$ 时成立.

定义 $\Gamma_N := \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |(\xi_1, \xi_2)| = \xi_3 \in [\frac{N}{2}, N]\}$, $\Gamma_N(1) := \{\xi \in \mathbb{R}^3 : \mathrm{dist}(\xi, \Gamma_N) \leqslant 1\}$, $\delta = N^{-1}$. Wolff [48] 证明了如下的 decoupling 不等式.

定理 4.1 设 $p>74$, 且 $\operatorname{spt}\widehat{f}\in\Gamma_N(1)$, 则

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\leqslant N^{\epsilon+\frac{1}{2}-\frac{2}{p}}\|f\|_{p,\mathrm{mic}},$$

其中

$$\|f\|_{p,\mathrm{mic}}=\left(\sum_{\theta}\|f_\theta\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)}\right)^{1/p}.$$

我们将简述 Wolff 如何将这一定理归结为一个几何上的关联估计 (incidence estimate).

记 $W_\lambda:=\{x:|f(x)|\geqslant\lambda\}$. 若

$$|W_\lambda|\leqslant\delta^{-\alpha}\lambda^{-p}\delta^{-(\frac{p}{2}-2)}\|f\|_2^2,\quad\forall\operatorname{spt}\widehat{f}\subset\Gamma_N(1),\quad\|f\|_{\infty,\mathrm{mic}}\leqslant 1,$$

则称 $A(\alpha)$ 成立.

令 $\{\theta\}$ 为 $\Gamma_N(1)$ 的一个分割, 使得 θ 的角长度为 $N^{-1/2}$. 相应地有分解 $\widehat{f}=\sum_\theta\widehat{f_\theta}$, 其中 $\operatorname{supp}\widehat{f_\theta}\subset 2\theta$. 固定 θ, 可以定义其对偶

$$\theta^*=\{x\in\mathbb{R}^n:|x\cdot(y-y_0)|\leqslant 1,\forall\, y\in\theta\}.$$

若 T 为 θ^* 的一个平移, 则记 $T//\theta^*$. f_θ 有如下分解:

$$f_\theta=\sum_{T//\theta^*}a_T\tilde{\varphi}_T,$$

其中 $\operatorname{supp}\widehat{\tilde{\varphi}}_T\subset 3\theta$, 且 $\operatorname{ess\,supp}\tilde{\varphi}_T\subset T$, $\|\varphi_T\|_\infty\sim 1$. 这一分解被称为波包分解. 若 $f=\sum_{T\in\mathcal{P}}\tilde{\varphi}_T$, 其中 $\mathcal{P}$ 为包含有限个 δ- 板片的集合, 则称 f 为 N- 函数.

利用波包分解和 Lorentz 变换, 只需要考虑满足

$$|\mathcal{P}|\leqslant t^{10000}\delta^{\frac{11}{4}}\lambda^9$$

的 N- 函数, 其中 $t=\delta^\epsilon$, $\epsilon>0$ 为一个很小的常数.

Wolff 的主要想法是证明

$$|W_\lambda|\leqslant\left|\bigcup_Q\{|f_Q|\gtrapprox\lambda\}\right|,$$

此处 $f_Q:=\psi_Q f$, Q 为边长为 $\sqrt{N}$ 的立方体, ψ_Q 为本质支撑在 Q 里的一个光滑函数. 对每个 Q, 可以借助 Lorentz 变换来应用 $A(\alpha)$. 为了对 Q 求和, 还需要说明

$$\sum_Q|\mathcal{P}_Q|\lessapprox|\mathcal{P}|.$$

根据不确定原理, W_λ 本质上是由 δ- 立方体组成的, 即 $W_\lambda=\bigcup_{B_\delta\subset W_\lambda}B_\delta$, 因而考察 $\{B_\delta\}$ 与 $\mathcal{P}=\{T\}$ 的关联性, 即 $B_\delta\cap T\neq\emptyset$, 便十分关键. 实际上, Wolff 建立了以下关联估计.

引理 4.1 设 $\mathcal{W},\mathcal{B}\subset\mathbb{R}^3$ 为 δ- 分离的集合, 且 $d(w,b)\geqslant t$, $d(w,w'),d(b,b')\leqslant t$. 令 $\mathcal{P}$ 为一族分离的 δ- 板片, 每个板片包含大于等于 μ 个 $\mathcal{W}$ 中的点和大于等于 ν 个 $\mathcal{B}$ 中的点, 则

$$|\mathcal{P}|\leqslant\delta^{-\epsilon}t^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\max(|\mathcal{W}|,|\mathcal{B}|)}{\min(\mu,\nu)}\right)^{3/2}.\tag{4.2}$$

记 $x'=(x_1,x_2)$. $(x',x_3)\in T$ 当且仅当圆 $C(x',x_3)$ 与 $R:=T\cap\{x:x_3=0\}$ 是 δ- 相切的. 因此, (4.2) 可以由一个圆切性估计得到. 为了证明这一圆切性估计, Wolff 利用了文献 [9] 引入的单元分解 (cell decomposition).

利用现在大家习惯的语言, 将定理 4.1 重述如下. 设 $\operatorname{supp}\widehat{f}\subset\Gamma_0(\delta)$. 定义 $\widehat{f_\theta}=\widehat{f}\tilde{\varphi}_\theta$, 则对于 $p>74$ 有

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\leqslant C_\epsilon\delta^{-\epsilon}\delta^{-(\frac{1}{2}-\frac{2}{p})}\Big(\sum_\theta\|f_\theta\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)}\Big)^{1/p}. \tag{4.3}$$

对于 $p=2$ 和 $p=\infty$, 作插值, 可以证明

$$\Big(\sum_\theta\|f_\theta\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)}\Big)^{1/p}\lesssim_\epsilon\delta^{-\epsilon}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

利用上述两个不等式, 可以说明当 $p>74$ 时 (3.1) 中的 $C_p(\delta)$ 满足

$$C_p(\delta)\lesssim\delta^{-\epsilon}\delta^{-(\frac{1}{2}-\frac{2}{p})},$$

即当 $\alpha>\frac{1}{2}-\frac{2}{p}$ 时,

$$\|T^\alpha(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\lesssim\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.4}$$

从以上介绍可以看到, Wolff[48] 系统性地引入了 decoupling 不等式、单元分解、关联几何等重要工具和思想. 调和分析学家在此基础上建立了最佳的 decoupling 不等式[3]、多项式分解[22,23] 和两端方法[45], 这些工具和方法极大地推动了 Bochner-Riesz 猜想等相关问题的研究.

Wolff 未能建立最佳的 decoupling 不等式, 部分原因在于当时人们对于多线性限制性估计的理解尚不够深刻. 这一估计于 2006 年由 Bennett 等[1] 证明. 下面详述这一估计如下.

设 $\Sigma_j\subset S^{n-1}$, $j=1,\dots,n$ 为光滑子流形, 并令 $n_j(x)$ 表示在 $x\in\Sigma_j$ 处 Σ_j 的单位法向量. 若对于所有 $x_j\in\Sigma_j$, 有

$$|\det(n_1(x_1),\dots,n_n(x_n))|\geqslant\kappa>0,$$

则称族 $\{\Sigma_j\}_{j=1}^n$ 是 κ- 横截的 (κ-transverse).

定义与 Σ_j 关联的延拓算子为

$$Eg_j(x)=\int_{\Sigma_j}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi}g_j(\xi)\,d\sigma(\xi),\quad\operatorname{supp}g_j\subset\Sigma_j.$$

多线性限制猜想 (multilinear restriction conjecture) 表述如下:

猜想 4.1 (多线性限制猜想) 若 $\{\Sigma_j\}_{j=1}^n$ 是 κ- 横截的, 且 $g_j\in L^p(\Sigma_j)$, 则对所有满足 $q\geqslant\frac{2n}{n-1}$ 和 $q\geqslant\frac{n}{n-1}p'$ (p' 是 p 的对偶指数) 的 q, 有

$$\Big\|\prod_{j=1}^n|Eg_j|^{1/n}\Big\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\leqslant C_\kappa\prod_{j=1}^n\|g_j\|^{1/n}_{L^p(\Sigma_j)}. \tag{4.5}$$

p 和 q 的必要性可以通过基于 Knapp 的例子构造适当的反例来得到.

文献 [1] 证明了 (4.5) 在端点之外都成立. 通过 ϵ- 移除 (ϵ-removal) 和插值, (4.5) 的非端点情形等价于如下形式的不等式:

$$\Big\|\prod_{j=1}^n|Eg_j|^{\frac{1}{n}}\Big\|_{L^{2n/(n-1)}(B_R)}\leqslant CR^\epsilon\prod_{j=1}^n\|g_j\|^{\frac{1}{n}}_{L^2(\Sigma_j)}.$$

假设多线性限制估计对 $p=2$ 和 $q=\frac{2n}{n-1}$ 成立, 则有如下多线性 Kakeya 型估计.

猜想 4.2 (多线性 Kakeya 猜想)　设 $\{T_{j,a}\}_{a=1}^{N_j}$ 是一族 δ- 管, 其方向位于 S^{n-1} 中 e_j 的一个固定 δ- 邻域内, 则

$$\left\| \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{a=1}^{N_j} \chi_{T_{j,a}} \right)^{\frac{1}{n}} \right\|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \prod_{j=1}^{n} (\delta^{\frac{n-1}{n} \cdot n} N_j)^{\frac{1}{n}}. \tag{4.6}$$

同样地, 文献 [1] 证明了 (4.6) 端点之外的所有情形. 文献 [21] 证明了 (4.6) 的端点情形.

Bourgain 和 Guth [4] 引入了 Broad-Narrow 方法, 证明了多线性限制性估计可以部分推导出线性限制性估计. 在此工作的基础上, Bourgain 和 Demeter [3] 证明了抛物面和锥面上最佳的 ℓ^2-decoupling 不等式. 例如, 对于锥面, 他们证明了当 $p \in [2, 2\frac{n}{n-2}]$ 时,

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_\epsilon \delta^{-\epsilon} \left(\sum_\theta \|f_\theta\|^2_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/2}.$$

这一结果蕴含着当 $p > \frac{2n}{n-2}$ 时锥乘子的有界性, 即当 $\alpha > \frac{n-2}{2} - \frac{n-1}{p}$ 时,

$$\|T^\alpha(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

5　$\mathbb{R}^3$ 中的锥乘子

Guth 等 [25] 在 3 维空间中证明了锥面上的反向平方函数估计.

定理 5.1　对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 $C_\epsilon > 0$ 使得

$$\|f\|^4_{L^4(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_\epsilon R^\varepsilon \|S(f)\|^4_{L^4(\mathbb{R}^3)}, \tag{5.1}$$

其中

$$S(f)(x) = \left(\sum_\theta |f_\theta(x)|^2 \right)^{1/2}, \quad f = \sum_\theta f_\theta, \quad \operatorname{supp} \widehat{f_\theta} \subset 2\theta.$$

这一结论蕴含了 3 维空间中的锥乘子猜想和局部光滑猜想.

为了证明 (5.1), 文献 [25] 证明了如下的球膨胀不等式:

$$\sum_{B_r} (|B_r|^{-1} \|S_{B_r} f\|_2^4) \lesssim S(r,R) \sum_{R^{-1/2} \lesssim s \lesssim 1} \sum_{d(\tau)=s} \sum_{U // U_\tau} |U|^{-1} \|S_U f\|_2^4, \tag{5.2}$$

其中

$$S_U f(x) = \left(\sum_{\theta \subset \tau} |f_\theta|^2 \right)^{1/2} \Big|_U,$$

并且 $U // U_\tau // \tau^*$ 是一个板片, 其维度为 $R \times Rs \times Rs^2$.

根据局部常数性质与局部 L^2- 正交性, 有

$$\|f\|_4^4 \lesssim \sum_{B_1} (\|f\|^2_{L^2(B_1)})^2 \lesssim \sum_{B_1} \left(\int_{B_1} \sum_\theta |f_\theta|^2 \right)^2, \quad d(\theta) \sim 1.$$

因而, 当 $r = 1$ 时, (5.2) 蕴含了 (5.1).

一个基本的球膨胀不等式是在 $R=r^2$ 时的 (5.2). 在这种情形下, (5.2) 的左端可由 $\int_{\mathbb{R}^3}(\sum_\theta |f_\theta|^2)^2$ 控制, 通过证明

$$\int |g|^2 := \int \left(\sum_\theta |f_\theta|^2\right)^2 \leqslant C \sum_{r^{-1}\lesssim s\lesssim 1} \sum_{d(\tau)=s} \sum_{U\|U_\tau} \|S_U f\|_2^4 \tag{5.3}$$

即可得到 $S(r,r^2)\leqslant C$. 由于 $\operatorname{supp}\widehat{g}\subset\Omega:=\bigcup_\theta \tilde{\theta}$, $\tilde{\theta}:=\theta+(-\theta)$, 所以有

$$\int |g|^2 = \int |\widehat{g}|^2 = \int \left(\sum_\theta (|f_\theta|^2)^\wedge(w)\right)^2 \chi_\Omega(w).$$

可以通过估计

$$\sum_{\tilde{\theta}} \chi_{\tilde{\theta}}(w) \tag{5.4}$$

来建立合适的正交性, 进而得到 (5.3).

为了对固定的 ε 证明 (5.1), 只需要在 $\operatorname{supp}\widehat{f}\subset N_{R^{-1}}(\Gamma_K)$ 的情形下证明它, 其中 Γ_K 是一个高度为 $\frac{1}{K}$ 的锥, $N_{R^{-1}}(\Gamma_K)=\{x\in\mathbb{R}^3:\operatorname{dist}(x,\Gamma_K)<R^{-1}\}$ 为其 R^{-1} 邻域, 并且 $K=K(\varepsilon)\ll R$ 仅依赖于 ε.

令 $S_K(r,R)$ 表示在 $\operatorname{supp}\widehat{f}\subset N_{R^{-1}}(\Gamma_K)$ 时 (5.2) 中的常数. 如果能证明 $S_K(1,R)\leqslant C_\varepsilon R^\varepsilon$, 则论证结束.

应用 Córdoba-Fefferman 论证, 实际上可以证明

$$S_K(r,K)\leqslant C_\delta K^\delta, \quad \forall\, r\leqslant K. \tag{5.5}$$

当 $\operatorname{supp}\widehat{f}\subset N_{r_3^{-1}}(\Gamma_K)$ 且 $r_1\leqslant r_2\leqslant r_3$ 时, 应用 Lorentz 变换, 得到

$$S_K(r_1,r_3)\leqslant (\log r_2)\, S_K(r_1,r_2) \max_{r_2^{-1/2}\lesssim s\lesssim 1} S_K(s^2r_2,s^2r_3). \tag{5.6}$$

基于 (5.3), (5.5) 和 (5.6), 可以利用如下的归纳讨论建立 (5.1). 注意到 $S_K(1,R)\leqslant R^\varepsilon$ 是 $S_K(r,R)\leqslant (\frac{R}{r})^\varepsilon$ (对 $1\leqslant r\leqslant R$) 的一个特例; 当 $R\geqslant K$ 时, 可对 $\frac{R}{r}$ 作归纳来证明. 实际上, 归纳的基础情况是 (5.3), 它推导出当 $r\in[\sqrt{R},R]$ 时 $S(r,R)\leqslant C$. 当 $r\in[\sqrt{K},\sqrt{R}]$ 时的情形, 可通过在 $r\leqslant r^2\leqslant R$ 下应用 (5.6) 得到. 当 $1\leqslant r\leqslant\sqrt{K}$ 时的情形, 可在使用 (5.5) 的同时, 于 $r\leqslant K\leqslant R$ 下应用 (5.6) 得到. 如果 $R\leqslant K$, 则应用 (5.5) .

至此完成了 (5.1) 的证明.

6 极大锥乘子

在文献 [7] 中, 本文作者和合作者研究了锥乘子的收敛性.

令

$$T_t^\alpha(f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \left(1-\frac{t^{-2}|\xi'|^2}{\xi_n^2}\right)_+^\alpha \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi}\, d\xi.$$

我们关心的是使得

$$\lim_{t\to\infty} T_t^\alpha(f)(x) = f(x) \quad \text{a.e. } \forall\, f\in L^p(\mathbb{R}^n) \tag{6.1}$$

成立的 p 的范围. 这一问题与极大锥乘子

$$T_*^\alpha(f)(x) := \sup_{t>0} |T_t^\alpha(f)(x)|$$

的有界性密切相关.

定义

$$\alpha(n,p) = \max\left\{(n-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2},\, 0,\, n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)\right\}. \tag{6.2}$$

猜想 6.1 [7,13] 设 $n \geqslant 3$, $p \in (1,\infty)$. 若 $\alpha > \alpha(n,p)$, 则 (6.1) 成立, 且 $\|T_*^\alpha\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty$.

对于 T_t^α 的点态收敛性, 我们建立了如下结论.

定理 6.1 设 $n \geqslant 3$, $p \geqslant 2$, 且 $\alpha > \max\{n|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}, 0\}$. 若 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 且 $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1 < \xi_n < 2\}$, 则

$$\lim_{t\to\infty} T_t^\alpha(f)(x) = f(x) \text{ a.e.}$$

为了建立 T_t^α 的点态收敛性, 采用文献 [6] 中的思路将其归结为建立 T_*^α 的加权 L^2 有界性. 由于 T_*^α 中的拉伸为各向异性的, 我们需要考虑相应的齐次权

$$w_{a,b}(x) := |x'|^{-a}|x_n|^{-b},$$

其中

$$x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

定义

$$\tilde{T}_t^\alpha(f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} m^\alpha(t^{-1}\xi', \xi_n)\psi(\xi_n)\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi}\,d\xi,$$
$$\tilde{T}_*^\alpha(f)(x) := \sup_{t>0} |\tilde{T}_t^\alpha(f)(x)|,$$

则定理 6.1 是如下结果的推论.

定理 6.2 设 $n \geqslant 3$, $a \in [0, n-1)$, $b \in [0,1)$, 且 $\alpha > \max\{\frac{a+b-1}{2}, 0\}$, 则对任意 Schwartz 函数 f 有

$$\|\tilde{T}_*^\alpha(f)\|_{L^2(w_{a,b})} \leqslant C\|f\|_{L^2(w_{a,b})}.$$

定义

$$m_\delta(\xi', \xi_n) = \varphi_\delta(\xi'/\xi_n)\psi(2^{-1}\xi_n)$$

及

$$\boldsymbol{G}_\delta(f)(x) := \left(\int_0^\infty \left|\int_{\mathbb{R}^n} m_\delta(t^{-1}\xi', \xi_n)\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi}\,d\xi\right|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}. \tag{6.3}$$

本质上有

$$T_*^\alpha(f)(x) \leqslant \sum_{\gamma\geqslant 1} 2^{-\gamma\alpha}2^{\gamma/2}\boldsymbol{G}_{2^{-\gamma}}(f)(x). \tag{6.4}$$

显然,

$$\|\boldsymbol{G}_\delta(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \delta^{1/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{6.5}$$

并且当 $\alpha > 0$ 时, T_*^α 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界.

为了研究 $\boldsymbol{G}_\delta$ 在 $L^2(w_{a,b})$ 上的有界性, 需要建立锥面上相应的迹定理.

令 $a,b\geqslant 0$. 我们研究了如下形式的迹不等式:

$$\int_{N_\delta(\Gamma_0)}|\widehat{f}(\xi)|^2\leqslant C_{a,b}C_\delta(a,b)\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2w_{a,b}^{-1}(x)\,dx, \tag{6.6}$$

并通过其证明了

$$\|\boldsymbol{G}_\delta(f)\|_{L^2(w_{a,b})}\leqslant CA_\delta(a,b)\|f\|_{L^2(w_{a,b})}, \tag{6.7}$$

其中

$$A_\delta(a,b)=\delta^{\frac{1-(a+b)}{2}}C_\delta(a,b)^{1/2}\sim\begin{cases}\delta^{1/2}, & a+b<1,\\ \delta^{1/2}\left(\log\dfrac{1}{\delta}\right)^{1/2}, & a+b=1,\\ \delta^{(2-a-b)/2}, & a+b>1.\end{cases}$$

这一估计和 (6.4) 可以推导出定理 6.2.

本文作者和合作者在文献 [16] 中考虑了极大锥乘子的 L^p 有界性, 并证明了如下结论:

$$p(n)=\begin{cases}4, & \text{当 } n=3 \text{ 时},\\ 2+\dfrac{8}{3n-6}, & \text{当 } n\geqslant 4 \text{ 且为偶数时},\\ 2+\dfrac{8(3n^2+n+6)}{9n^3-12n^2-7n-18}, & \text{当 } n\geqslant 5 \text{ 且为奇数时}.\end{cases} \tag{6.8}$$

定理 6.3 (i) 设 $n\geqslant 3$ 且 $p\geqslant p(n)$. 若 $\alpha>\alpha(n,p)$, 则极大算子 T_*^α 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界.

(ii) 设 $1<p\leqslant 2$ 且 $n\geqslant 3$, 则极大算子 T_*^α 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界当且仅当 $\alpha>\alpha(n,p)=n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})$.

传统上, g 函数是研究极大算子的有力工具, 但与极大锥乘子相关的 g 函数 $\boldsymbol{G}_\delta(f)$ 并不能被用于解决极大锥乘子的有界性问题. 利用极大锥乘子的拉伸结构, 可以构造反例说明: 当 $p\geqslant 2$ 时, 若对于任意 L^p 函数 f 有估计

$$\|\boldsymbol{G}_\delta(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C_\varepsilon\,\delta^{\frac{1}{2}-\gamma(n,p)-\varepsilon}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{6.9}$$

则必有

$$\gamma(n,p)\geqslant n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}.$$

这说明传统的 Littlewood-Paley 理论不能用来解决该问题. 为了克服这一困难, 我们引入环形不等式 (annular inequality). 下面介绍该不等式.

对于 $t\in[1,2]$, 定义

$$\Gamma_t=\{(\xi',\xi_n)\in\mathbb{R}^n:\xi_n=t|\xi'|,1/4\leqslant\xi_n\leqslant 5/4\}.$$

将 $[1,2]$ 分割为长度为 δ 的小区间 $[1,2]=\bigcup_j I_j$, 其中

$$I_j=[t_j,t_{j+1}],\quad t_j=1+(j-1)\delta.$$

取定一个 Schwartz 函数 ϕ 满足如下性质: $\operatorname{supp}\phi\subset(1/20,21/20)$, 且当 $s\in(1/16,1)$ 时 $\phi(s)=1$. 定义

$$\widehat{f_{N_\delta(\Gamma_t)}}(\xi)=\widehat{f}(\xi)\phi_\delta(t\xi_n-|\xi'|)\psi(\xi_n).$$

如下的不等式被称为环形不等式:

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{\delta^{-1}} |f_{N_\delta(\Gamma_{t_j})}|^p \right)^{1/p} \right\|_p \leqslant C\|f\|_p. \tag{6.10}$$

关于这一不等式, 有如下猜想.

猜想 6.2 [13] 设 $n \geqslant 3$, $p > 2$, 则对于每个 $\varepsilon > 0$ 都存在 $C_\epsilon > 0$ 使得

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{\delta^{-1}} |f_{N_\delta(\Gamma_{t_j})}|^p \right)^{1/p} \right\|_p \leqslant C_\epsilon \delta^{-\alpha(n,p)-\epsilon}\|f\|_p. \tag{6.11}$$

这一猜想可以推导出定理 6.1 中 $p \geqslant 2$ 的部分.

为了研究猜想 6.2, 定义密度算子

$$\mathrm{Dense}(f) = \sup_{R^{-1}\lesssim s\lesssim 1} \sup_{d(\tau)=s} \sup_{U//U_\tau} \left(\frac{1}{|U|} \sum_{\theta\subset\tau} \int_U |f_\omega(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.12}$$

这一算子的类似形式首次出现于文献 [17] 中. 利用这一定义, 我们提出以下猜想.

猜想 6.3 [13] 设 $n \geqslant 3$, $2 \leqslant p \leqslant \infty$, 则

$$\|f_{N_\delta(\Gamma)}\|_p \leqslant C_\epsilon \delta^{-\alpha(n,p)-\epsilon}\|f\|_2^{\frac{2}{p}} (\mathrm{Dense}(f))^{1-\frac{2}{p}}. \tag{6.13}$$

实际上, 利用这一概念, 可以说明, 与多个锥相关联的环形不等式 (6.11) 可以由单个锥上的 L^p 混合范数推导出, 即猜想 6.3 蕴含猜想 6.2. 这一蕴含关系可以由 $\mathrm{Dense}(f) \lessapprox_\delta \|f\|_\infty$ 及 Lorentz 空间插值证明.

应用文献 [25] 建立的不等式 (5.2), 可以验证当 $n = 3$ 时猜想 (6.3) 成立, 进而得到了定理 6.3(i) 中 $n = 3$ 的结论.

为了证明定理 6.3(i) 中的高维情形, 我们需要利用文献 [45] 引入的关联几何方法. 具体地, 利用宽窄方法 (broad-narrow 方法) 和两端方法讨论, 我们只需要考虑相应的宽部两端 (broad two-ends) 估计. 为了建立这一估计, 我们考虑了 $p = 2$, $p = 2\frac{n}{n-2}$ 和 $p = p_{n,k} := \frac{2(n+k)}{n+k-2}$ 三处的估计. 当 $p = 2$ 时, 我们利用了 L^2 正交性; 当 $p = 2\frac{n}{n-2}$ 时, 我们利用了精细化解耦不等式 (refined decoupling 不等式) [17] 和板片的头梳 (hairbrush) 结构; 当 $p = p_{n,k}$ 时, 我们利用了文献 [39] 中建立的宽部 (broad) 估计. 对以上三种情况插值, 就可以得到定理 6.3(i) 中的高维结果.

致谢 感谢审稿人对本文提出的诸多宝贵的修改建议.

参考文献

1 Bennett J, Carbery A, Tao T. On the multilinear restriction and Kakeya conjectures. Acta Math, 2006, 196: 261–302
2 Bourgain J. Estimates for cone multipliers. In: Geometric Aspects of Functional Analysis (Israel, 1992–1994). Operator Theory: Advances and Applications, vol. 77. Basel: Birkhäuser, 1995, 41–60
3 Bourgain J, Demeter C. The proof of the ℓ^2 decoupling conjecture. Ann of Math (2), 2015, 182: 351–389
4 Bourgain J, Guth L. Bounds on oscillatory integral operators based on multilinear estimates. Geom Funct Anal, 2011, 21: 1239–1295
5 Carbery A. A remark on reverse Littlewood-Paley, restriction and Kakeya. arXiv:1507.02515, 2015
6 Carbery A, Rubio de Francia J L, Vega L. Almost everywhere summability of Fourier integrals. J Lond Math Soc (2), 1988, 38: 513–524
7 Chen P, He D, Li X, et al. On pointwise convergence of cone multipliers. J Funct Anal, 2025, 288: 110853

8 Christ M, Duoandikoetxea J, Rubio de Francia J L. Maximal operators related to the Radon transform and the Calderon-Zygmund method of rotations. Duke Math J, 1986, 53: 189–209
9 Clarkson K L, Edelsbrunner H, Guibas L J, et al. Combinatorial complexity bounds for arrangements of curves and spheres. Discrete Comput Geom, 1990, 5: 99–160
10 Córdoba A. A note on Bochner-Riesz operators. Duke Math J, 1979, 46: 505–511
11 Córdoba A. Geometric Fourier analysis. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1982, 32: 215–226
12 de Leeuw K. On L^p multipliers. Ann of Math (2), 1965, 81: 364–379
13 Fang S, He D, Li X. Maximal cone multipliers: Sharp L^p estimates in $\mathbb{R}^3$ and beyond. Math Ann, 2026, in press
14 Fefferman C. Inequalities for strongly singular convolution operators. Acta Math, 1970, 124: 9–36
15 Fefferman C. The multiplier problem for the ball. Ann of Math (2), 1971, 94: 330–336
16 Fefferman C. A note on spherical summation multipliers. Israel J Math, 1973, 15: 44–52
17 Gan S, He D, Li X, et al. On local smoothing estimates for wave equations. arXiv:2502.05973, 2025
18 Gao C, Liu B, Miao C, et al. Improved local smoothing estimate for the wave equation in higher dimensions. J Funct Anal, 2023, 284: 109879
19 Gao C, Liu B, Miao C, et al. Square function estimates and local smoothing for Fourier integral operators. Proc Lond Math Soc (3), 2023, 126: 1923–1960
20 Garrigós G, Seeger A. On plate decompositions of cone multipliers. Proc Edinb Math Soc (2), 2009, 52: 631–651
21 Guth L. The endpoint case of the Bennett-Carbery-Tao multilinear Kakeya conjecture. Acta Math, 2010, 205: 263–286
22 Guth L. A restriction estimate using polynomial partitioning. J Amer Math Soc, 2016, 29: 371–413
23 Guth L. Restriction estimates using polynomial partitioning II. Acta Math, 2018, 221: 81–142
24 Guth L, Hickman J, Iliopoulou M. Sharp estimates for oscillatory integral operators via polynomial partitioning. Acta Math, 223: 251–376
25 Guth L, Wang H, Zhang R. A sharp square function estimate for the cone in $\mathbb{R}^3$. Ann of Math (2), 2020, 192: 551–581
26 Heo Y. Improved bounds for high dimensional cone multipliers. Indiana Univ Math J, 58: 1187–1202
27 Heo Y, Hong S, Yang C. An endpoint estimate for the cone multiplier. Proc Amer Math Soc, 2010, 138: 1333–1347
28 Heo Y, Nazarov F, Seeger A. Radial Fourier multipliers in high dimensions. Acta Math, 2011, 206: 55–92
29 Heo Y, Nazarov F, Seeger A. On radial and conical Fourier multipliers. J Geom Anal, 2011, 21: 96–117
30 Hong S. Weak type estimates for cone multipliers on H^p spaces, $p < 1$. Proc Amer Math Soc, 2000, 128: 3529–3539
31 Łaba I, Wolff T. A local smoothing estimate in higher dimensions. J Anal Math, 2002, 88: 149–171
32 Lee J. A trilinear approach to square function and local smoothing estimates for the wave operator. Indiana Univ Math J, 2020, 69: 2005–2033
33 Lee S. Some sharp bounds for the cone multiplier of negative order in $\mathbb{R}^3$. Bull Lond Math Soc, 2003, 35: 373–390
34 Lee S, Vargas A. On the cone multiplier in $\mathbb{R}^3$. J Funct Anal, 2012, 263: 925–940
35 Miao C X. Open problems in harmonic analysis and related fields (in Chinese). Chinese Ann Math Ser A, 2025, 46: 1–54 [苗长兴. 调和分析及相关领域中的公开问题. 数学年刊 A 辑, 2025, 46: 1–54]
36 Mockenhaupt G. A note on the cone multiplier. Proc Amer Math Soc, 1993, 117: 145–152
37 Mockenhaupt G, Seeger A, Sogge C D. Wave front sets, local smoothing and Bourgain's circular maximal theorem. Ann of Math (2), 1992, 136: 207–218
38 Mockenhaupt G, Seeger A, Sogge C D. Local smoothing of Fourier integral operators and Carleson-Sjölin estimates. J Amer Math Soc, 1993, 6: 65–130
39 Ou Y, Wang H. A cone restriction estimate using polynomial partitioning. J Eur Math Soc (JEMS), 2022, 24: 3557–3595
40 Sogge C D. Propagation of singularities and maximal functions in the plane. Invent Math, 1991, 104: 349–376
41 Stein E. Some problems in harmonic analysis. In: Harmonic Analysis in Euclidean Spaces. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Part 1, vol. 35. Providence: Amer Math Soc, 1979, 3–20
42 Tao T. The Bochner-Riesz conjecture implies the restriction conjecture. Duke Math J, 1999, 96: 363–375
43 Tao T, Vargas A. A bilinear approach to cone multipliers I. Restriction estimates. Geom Funct Anal, 2000, 10: 185–215
44 Tao T, Vargas A. A bilinear approach to cone multipliers II. Applications. Geom Funct Anal, 2000, 10: 216–258
45 Wang H, Wu S. Restriction estimates using decoupling theorems and two-ends Furstenberg inequalities. arXiv:2411.08871, 2024
46 Wang H, Zahl J. Volume estimates for unions of convex sets, and the Kakeya set conjecture in three dimensions. arXiv:2502.17655, 2025
47 Wolff T. An improved bound for Kakeya type maximal functions. Rev Mat Iberoam, 1995, 11: 651–674
48 Wolff T. Local smoothing type estimates on L^p for large p. Geom Funct Anal, 2000, 10: 1237–1288
49 Wolff T. A sharp bilinear cone restriction estimate. Ann of Math (2), 2001, 153: 661–698

A brief introduction to the cone multiplier

Danqing He & Xiaochun Li

Abstract In this paper, we introduce the origin of the cone multiplier, its main results, and its connections to several conjectures in harmonic analysis.

Keywords **cone multipliers, maximal functions, square functions, Bochner-Riesz multipliers**

MSC(2020) **42B05, 42B15, 42B25**

doi: 10.1360/SSM-2026-0028