



导出范畴的 n -黏合及上(下)黏合

秦永云

曲靖师范学院数学与统计学院, 曲靖 655011

E-mail: qinyongyun2006@126.com

收稿日期: 2018-03-29; 接受日期: 2018-04-25; 网络出版日期: 2018-10-11

国家自然科学基金(批准号: 11701321)、云南省应用基础研究(批准号: 2016FD077)和贵州省科技计划黔科合基础(批准号: [2016]1038)资助项目

摘要 本文将 Artin 代数的无界导出范畴的 1-黏合和 2-黏合用其子范畴的上(下)黏合来刻画. 作为应用, 本文阐明了导出范畴的上(下)黏合与代数的整体维数(有限维数)的有限性之间的关系, 这推广了 Yin 和 Gao (2016) 的结果. 设 A 、 B 和 C 均为域 k 上的代数, 且 DA 有一个关于 DB 和 DC 的 3-黏合, 本文证明了 A 是有限维的当且仅当 B 和 C 也如此.

关键词 n -黏合 上(下)黏合 整体维数 有限维数

MSC (2010) 主题分类 16G10, 18E30

1 引言

三角范畴的黏合 (recollement) 由 Beilinson 等^[1] 所引入, 现已成为代数几何及表示论中的重要工具. 设 $\mathcal{T}$ 、 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 是 3 个三角范畴, 称 $\mathcal{T}$ 有一个关于 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 的黏合, 如果这 3 个范畴通过 6 个特定的函子联系起来 (详细定义见第 2 节). 特别地, 如果有更多函子连接这 3 个三角范畴, 称它们构成一个 n -黏合^[2]. n -黏合的概念不仅统一了代数的无界 (上有界、下有界、有界) 导出范畴的黏合, 还在讨论导出范畴的黏合与代数的同调性质的关系时起到重要作用^[2]. 现如今, n -黏合受到很多专家学者的关注, 参见文献 [3–5].

上(下)黏合 (有时也称左(右)黏合) 是黏合的基础, 它只涉及黏合的上(下)半部分的 4 个函子. 最近, 上(下)黏合在很多方面发挥了作用 (参见文献 [6, 7]), 与此同时, 一些关于黏合的结论被推广到上(下)黏合 (参见文献 [8, 9]). 特别地, 设 3 个代数的有界导出范畴构成一上(下)黏合, Yin 和 Gao^[9] 考虑了它们的整体维数 (有限维数) 的有限性之间的关系. 其中文献 [9, 命题 4.4] 与 [10, 推论 3.11] 很相似, 后者是用 2-黏合的语言来表达. 受此启发, 一个自然的课题是, 探究代数的无界导出范畴的 n -黏合与其子范畴的上(下)黏合之间的关系. 本文将 Artin 代数的无界导出范畴的 1-黏合和 2-黏合用其子范畴的上(下)黏合来刻画, 证明了如下定理:

英文引用格式: Qin Y Y. n -Recollements and upper recollements of derived module categories (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 11–20, doi: 10.1360/N012018-00075

定理 1.1 设 A, B 和 C 都是交换 Artin 环 R 上的 Artin 代数. 考虑以下叙述:

- (1) $\mathcal{D}A$ 有一个关于 $\mathcal{D}B$ 和 $\mathcal{D}C$ 的黏合;
- (2) $\mathcal{D}^-(\text{mod}A)$ 有一个关于 $\mathcal{D}^-(\text{mod}B)$ 和 $\mathcal{D}^-(\text{mod}C)$ 的上黏合;
- (3) $\mathcal{D}^+(\text{mod}A)$ 有一个关于 $\mathcal{D}^+(\text{mod}B)$ 和 $\mathcal{D}^+(\text{mod}C)$ 的下黏合.

我们有 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). 特别地, 若 A 是域 k 上的有限维代数, 则以上叙述等价.

定理 1.2 设 A, B 和 C 都是交换 Artin 环 R 上的 Artin 代数. 考虑以下叙述:

- (1) $\mathcal{D}A$ 有一个关于 $\mathcal{D}B$ 和 $\mathcal{D}C$ 的 2-黏合;
- (2) $K^b(\text{proj}A)$ 有一个关于 $K^b(\text{proj}B)$ 和 $K^b(\text{proj}C)$ 的上黏合;
- (3) $\mathcal{D}^b(\text{mod}A)$ 有一个关于 $\mathcal{D}^b(\text{mod}B)$ 和 $\mathcal{D}^b(\text{mod}C)$ 的下黏合;
- (4) $K^b(\text{inj}A)$ 有一个关于 $K^b(\text{inj}B)$ 和 $K^b(\text{inj}C)$ 的上黏合.

我们有 (4) $\Leftarrow$ (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). 特别地, 若 A 是域 k 上的有限维代数, 则以上叙述等价.

作为定理 1.1 和 1.2 的应用, 我们减弱了文献 [9, 命题 4.4] 中的条件, 完善并改进了 Yin 和 Gao 关于导出范畴的上(下)黏合与代数的整体维数(有限维数)间的关系的结果(详见命题 4.2 和 4.3).

本文的另一个方面是, 在黏合的框架下讨论三个代数的同调性质. 在黏合框架下, 已被研究的同调性质包括整体维数的有限性 [3, 11, 12]、有限维数的有限性 [10, 13]、同调光滑性 [2] 和 Gorenstein 性 [2, 14] 等. 特别地, 设三个环 A, B 和 C 的无界导出范畴 $(\mathcal{D}B, \mathcal{D}A, \mathcal{D}C)$ 构成一黏合, Angeleri Hügel 等在文献 [3, 定理 I(b)] 中证明了, 若 A 为域 k 上的有限维代数, 则 B 和 C 也如此. 但是, 反之不成立, 即 B 和 C 是有限维代数不能推出 A 也是有限维的—无限维 Kronecker 代数就是一个典型的例子(参见文献 [3, 注记 2.11]). 这样, 一个自然的问题是, 是否有更强的条件, 确保 B 和 C 是有限维代数可推出 A 也是有限维的. 本文将证明 3-黏合恰好是我们想要的条件, 即有如下定理:

定理 1.3 设 A, B 和 C 为域 k 上的代数, 且 $\mathcal{D}A$ 有一个关于 $\mathcal{D}B$ 和 $\mathcal{D}C$ 的 3-黏合. 若 B 和 C 都是有限维的, 则 A 亦如此.

2 预备知识

设 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}_2$ 是 3 个三角范畴. 以下出现的函子均为三角函子.

定义 2.1 [1] 一个 $\mathcal{T}$ 关于 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 的黏合由以下图给出:

$$\begin{array}{ccc} \xleftarrow{i^*} & \xleftarrow{j^!} & \\ \mathcal{T}_1 \xrightarrow{i_* = i_!} \mathcal{T} \xrightarrow{j^! = j^*} \mathcal{T}_2 & & \\ \xleftarrow{i^!} & \xleftarrow{j_*} & \end{array} \quad (\text{R})$$

使得

- (R1) (i^*, i_*) 、 $(i_!, i^!)$ 、 $(j_!, j^!)$ 和 (j^*, j_*) 是伴随函子;
- (R2) i_* 、 $j_!$ 和 j_* 是满嵌入函子;
- (R3) $j^! i_* = 0$ (此时 $i^! j_* = 0$ 且 $i^* j_! = 0$);
- (R4) 对任意 $X \in \mathcal{T}$, 存在三角

$$\begin{aligned} j_! j^! X &\rightarrow X \rightarrow i_* i^* X \rightarrow \\ i_! i^! X &\rightarrow X \rightarrow j_* j^* X \rightarrow, \end{aligned}$$

其中从 X 出发和到 X 的映射是由伴随对的单位和余单位给出的.

定义 2.2 ^[11, 15, 16] 一个 $\mathcal{T}$ 关于 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 的上黏合由以下图给出:

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{i^*} & & \xleftarrow{j_!} & \\ \mathcal{T}_1 & \xrightarrow{i_* = i_!} & \mathcal{T} & \xrightarrow{j^! = j^*} & \mathcal{T}_2 \end{array}$$

使得

- (R1) (i^*, i_*) 和 $(j_!, j^!)$ 是伴随函子;
- (R2) i_* 和 $j_!$ 是满嵌入函子;
- (R3) $j^! i_* = 0$ (此时 $i^* j_! = 0$);
- (R4) 对任意 $X \in \mathcal{T}$, 存在三角

$$j_! j^! X \rightarrow X \rightarrow i_* i^* X \rightarrow,$$

其中从 X 出发和到 X 的映射是由伴随对的单位和余单位给出的.

类似地, 一个 $\mathcal{T}$ 关于 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 的下黏合是图 (R) 中的下两行, 使得 i_* 、 $i^!$ 、 $j^!$ 和 j_* 满足定义 2.1 相应的条件.

显然, 一个 $\mathcal{T}$ 关于 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 的上黏合也可看作 $\mathcal{T}$ 关于 $\mathcal{T}_2$ 和 $\mathcal{T}_1$ 的下黏合, 反之亦然. 上 (下) 黏合在一些文献中也被称为左 (右) 黏合 (参见文献 [11, 16]).

定义 2.3 ^[2, 3, 15] 设 n 是一个正整数. 一个 $\mathcal{T}$ 关于 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 的 n -黏合由以下 $n+2$ 层函子给出:

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{\quad} & & \xleftarrow{\quad} & \\ \mathcal{T}_1 & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{T} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{T}_2 \\ & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \\ & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

使得每连续三层构成一个黏合.

显然, 一个 1-黏合就是通常意义的黏合, 一个 2-黏合等价于一个完备黏合, 即黏合中第二层函子保持紧对象 (参见文献 [3, 命题 3.2]). 更多关于 n -黏合的例子和应用参见文献 [2-5].

定义 2.4 ^[1] 设 $\mathcal{T}$ 是一个三角范畴, $[1]$ 为平移函子. $\mathcal{T}$ 的一个 t -结构是一对满子范畴 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, 且满足以下性质:

- (i) $\mathcal{U}[1] \subseteq \mathcal{U}$ 且 $\mathcal{V}[-1] \subseteq \mathcal{V}$;
- (ii) 对任意 $X \in \mathcal{U}$ 和 $Y \in \mathcal{V}[-1]$, 有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) = 0$;
- (iii) 对任意 $X \in \mathcal{T}$, 存在三角 $X_1 \rightarrow X \rightarrow X_2 \rightarrow$, 其中 $X_1 \in \mathcal{U}$, $X_2 \in \mathcal{V}[-1]$.

定义 2.5 ^[17] 设 $\mathcal{T}$ 是一个三角范畴. $\mathcal{T}$ 的一个 TTF (torsion torsionfree) 三元组是三个满子范畴 $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W})$, 使得 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 和 $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ 都是 $\mathcal{T}$ 的 t -结构.

由文献 [17], 上 (下) 黏合与 t -结构一一对应, 而黏合与 TTF 三元组一一对应.

对于一个诺特环 (Noetherian ring) A , 我们记它的右 A -模范畴为 $\mathrm{Mod} A$, 记 $\mathrm{mod} A$ ($\mathrm{proj} A$ 、 $\mathrm{Proj} A$ 、 $\mathrm{inj} A$ 、 $\mathrm{Inj} A$) 为由所有有限生成模 (有限生成投射模、投射模、有限生成内射模、内射模) 构成的满子范畴, 记 $K^b(\mathrm{proj} A)$ 、 $K^b(\mathrm{Proj} A)$ 、 $K^b(\mathrm{inj} A)$ 和 $K^b(\mathrm{Inj} A)$ 为相应的有界同伦范畴. 对 $*$ $\in \{b, -, +, \emptyset\}$, 记 $\mathcal{D}^*(\mathrm{Mod} A)$ 为 $\mathrm{Mod} A$ 中的对象构成的复形的导出范畴, 且满足 $*$ 对应的边界条件. 当 A 是一个 Artin 代数时, 我们也考虑 $\mathrm{mod} A$ 中的对象的导出范畴 $\mathcal{D}^*(\mathrm{mod} A)$. 通常, 我们将 $\mathcal{D}(\mathrm{Mod} A)$ 简记为 $\mathcal{D}A$.

$\mathcal{D}A$ 中的一个对象 X 称为紧对象, 如果 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}A}(X, -)$ 与无限直和可交换. 众所周知, 在同构意义下 $K^b(\mathrm{proj} A)$ 恰好是 $\mathcal{D}A$ 中的所有紧对象 (参见文献 [18]).

3 n -黏合与上(下)黏合

本节将代数的无界导出范畴的 1-黏合和 2-黏合用其子范畴的上(下)黏合来刻画. 为此, 我们沿着文献 [3] 的思路, 将代数的无界导出范畴的黏合中的函子限制到某些子范畴上.

命题 3.1 设 A 、 B 和 C 是环, 且

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{i^*} & & \xleftarrow{j_!} & \\ DB & \xrightarrow{i_*} & DA & \xrightarrow{j^!} & DC \\ & \xleftarrow{i^!} & & \xleftarrow{j_*} & \end{array}$$

是一黏合, 则以下叙述成立:

(1) i^* 和 $j_!$ 可限制到 $K^b(\text{proj})$ 、 $K^b(\text{Proj})$ 和 $\mathcal{D}^-(\text{Mod})$ (也即, i^* 将 $K^b(\text{proj}A)$ 中的对象映到 $K^b(\text{proj}B)$ 中, 其余类似);

(2) i_* 和 $j^!$ 可限制到 $\mathcal{D}^b(\text{Mod})$ 、 $\mathcal{D}^-(\text{Mod})$ 和 $\mathcal{D}^+(\text{Mod})$;

(3) $i^!$ 和 j_* 可限制到 $K^b(\text{Inj})$ 和 $\mathcal{D}^+(\text{Mod})$.

证明 (1) 由文献 [3, 引理 2.9(e)] 可知, i^* 和 $j_!$ 可限制到 $K^b(\text{proj})$, 且 i_* 和 $j^!$ 可限制到 $\mathcal{D}^b(\text{Mod})$. 依据文献 [3, 引理 2.4(c)] 和 [19, 命题 6.2], $K^b(\text{Proj}A)$ 可描述为 $\mathcal{D}A$ 的由满足下述条件的 X 构成的满子范畴: 对任意 $Y \in \mathcal{D}^b(\text{Mod}A)$, 只有有限个 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $\text{Hom}_{\mathcal{D}A}(X, Y[n]) \neq 0$. 依据伴随性质, i_* 和 $j^!$ 限制到 $\mathcal{D}^b(\text{Mod})$ 表明 i^* 和 $j_!$ 可限制到 $K^b(\text{Proj})$.

为证明最后一个结论, 令 $(-)^{\vee} := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. 显然, 一个 $\mathbb{Z}$ -模 $M = 0$ 当且仅当 $M^{\vee} = 0$, 因为 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}\text{-Mod}$ 的内射余生成子. 对任意 $X \in \mathcal{D}^-(\text{Mod}C)$ 和 $n \in \mathbb{Z}$, 有

$$H^n(j_!X)^{\vee} \cong H^{-n}((j_!X)^{\vee}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}\mathbb{Z}}(j_!X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}[-n]) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}A}(j_!X, A^{\vee}[-n]),$$

这里最后一个同构用到伴随性质. 再次用伴随性质, 我们得到

$$H^n(j_!X)^{\vee} \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}A}(j_!X, A^{\vee}[-n]) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}C}(X, j^!(A^{\vee})[-n]).$$

由文献 [3, 引理 2.9(e)], 有 $j^!(A^{\vee}) \in \mathcal{D}^b(\text{Mod}C)$. 因此, 对充分大的 n , 有

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}C}(X, j^!(A^{\vee})[-n]) = 0.$$

这样, $j_!X$ 的上同调有上界, 也即 $j_!X \in \mathcal{D}^-(\text{Mod}A)$. 类似地, 我们可以证明 i^* 可限制到 $\mathcal{D}^-(\text{Mod})$.

(2) 根据文献 [3, 引理 2.9(e)], i_* 和 $j^!$ 可限制到 $\mathcal{D}^b(\text{Mod})$. 对任意 $X \in \mathcal{D}B$ 和 $n \in \mathbb{Z}$, 有

$$H^n(i_*X) = \text{Hom}_{\mathcal{D}A}(A, i_*X[n]) = \text{Hom}_{\mathcal{D}B}(i^*A, X[n]).$$

由于 $i^*A \in K^b(\text{Proj}B)$, 因此, 对任意 $X \in \mathcal{D}^-(\text{Mod}B)$ (或 $\mathcal{D}^+(\text{Mod}A)$), 对充分大 (或小) 的 n , 有

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}B}(i^*A, X[n]) = 0,$$

这样, i_* 可限制到 $\mathcal{D}^-(\text{Mod})$ 和 $\mathcal{D}^+(\text{Mod})$. 类似地, 可证明 $j^!$ 限制到 $\mathcal{D}^-(\text{Mod})$ 和 $\mathcal{D}^+(\text{Mod})$.

(3) 用 $\mathcal{D}A$ 中的复形的同伦内射解, 可将 $K^b(\text{Inj}A)$ 描述为 $\mathcal{D}A$ 由满足以下条件的 X 构成的满子范畴: 对任意 $Y \in \mathcal{D}^b(\text{Mod}A)$, 只有有限多个 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $\text{Hom}_{\mathcal{D}A}(Y, X[n]) \neq 0$. 用伴随性质, i_* 和 $j^!$ 限制到 $\mathcal{D}^b(\text{Mod})$ 表明 $i^!$ 和 j_* 可限制到 $K^b(\text{Inj})$.

对任意 $X \in \mathcal{D}^+(\text{Mod}A)$ 和 $n \in \mathbb{Z}$, 有

$$H^n(i^!X) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}B}(B, i^!X[n]) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}A}(i_*B, X[n]).$$

由于 $i_*B \in \mathcal{D}^b(\text{Mod}A)$, 因此, 对充分小的 n , 有 $\text{Hom}_{\mathcal{D}A}(i_*B, X[n]) = 0$. 这样, $i^!X$ 的上同调有下界, 也即 $i^!X \in \mathcal{D}^+(\text{Mod}A)$. 类似地, 我们可证明 j_* 限制到 $\mathcal{D}^+(\text{Mod})$. $\square$

命题 3.2 设 A, B 和 C 都是交换 Artin 环 R 上的 Artin 代数, 且

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{i^*} & & \xleftarrow{j^!} & \\ DB & \xrightarrow{i_*} & DA & \xrightarrow{j^!} & DC \\ & \xleftarrow{i^!} & & \xleftarrow{j_*} & \end{array}$$

是一黏合, 则以下叙述成立:

- (1) i^* 和 $j_!$ 可限制到 $\mathcal{D}^-(\text{mod})$;
- (2) i_* 和 $j^!$ 可限制到 $\mathcal{D}^b(\text{mod})$ 、 $\mathcal{D}^-(\text{mod})$ 和 $\mathcal{D}^+(\text{mod})$;
- (3) $i^!$ 和 j_* 可限制到 $K^b(\text{inj})$ 和 $\mathcal{D}^+(\text{mod})$.

证明 (1) 由文献 [3, 引理 2.9(e)] 可知, i_* 和 $j^!$ 限制到 $\mathcal{D}^b(\text{mod})$. 令 $D := \text{Hom}_R(-, J)$ 为标准对偶, 即 J 为所有单 R -模的内射包的直和. 对任意 $X \in \mathcal{D}^-(\text{mod}C)$ 和 $n \in \mathbb{Z}$, 与命题 3.1 类似, 我们有

$$DH^n(j_!X) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}A}(j_!X, DA[-n]) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}C}(X, j^!(DA)[-n]).$$

由于 $j^!(DA) \in \mathcal{D}^b(\text{mod})$, 故对任意 n , R -模 $\text{Hom}_{\mathcal{D}C}(X, j^!(DA)[-n])$ 总有有限长度, 并且, 对充分大的 n , 有 $\text{Hom}_{\mathcal{D}C}(X, j^!(DA)[-n]) = 0$. 因此, $j_!X \in \mathcal{D}^-(\text{mod}A)$. 同样地, 我们可证明 i^* 限制到 $\mathcal{D}^-(\text{mod})$.

(2) 依据文献 [3, 引理 2.9(e)], i_* 和 $j^!$ 限制到 $\mathcal{D}^b(\text{mod})$. 对任意 $X \in DB$ 和 $n \in \mathbb{Z}$, 有

$$H^n(i_*X) = \text{Hom}_{\mathcal{D}A}(A, i_*X[n]) = \text{Hom}_{\mathcal{D}B}(i^*A, X[n]).$$

若 $X \in \mathcal{D}^-(\text{mod}B)$ (或 $\mathcal{D}^+(\text{mod}A)$), 由 $i^*A \in K^b(\text{proj}B)$ 可推断出, 对任意 n , $\text{Hom}_{\mathcal{D}B}(i^*A, X[n])$ 作为 R -模总有有限长度, 并且, 对充分大 (或小) 的 n , 有

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}B}(i^*A, X[n]) = 0.$$

因此, i_* 可限制到 $\mathcal{D}^-(\text{mod})$ 和 $\mathcal{D}^+(\text{mod})$. 类似地, 我们可证明 $j^!$ 限制到 $\mathcal{D}^-(\text{mod})$ 和 $\mathcal{D}^+(\text{mod})$.

(3) $K^b(\text{inj}A)$ 可看作 DA 的由满足以下条件的 X 构成的满子范畴: 对任意 $Y \in \mathcal{D}^b(\text{mod}A)$, R -模 $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{D}A}(Y, X[n])$ 总有有限长度. 利用伴随, i_* 和 $j^!$ 限制到 $\mathcal{D}^b(\text{mod})$ 可推断出 $i^!$ 和 j_* 可限制到 $K^b(\text{inj})$.

对任意 $X \in \mathcal{D}^+(\text{mod}A)$ 和 $n \in \mathbb{Z}$, 有

$$H^n(i^!X) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}B}(B, i^!X[n]) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}A}(i_*B, X[n]).$$

由于 $i_*B \in \mathcal{D}^b(\text{mod}A)$, 故对任意 n , R -模 $\text{Hom}_{\mathcal{D}A}(i_*B, X[n])$ 总有有限长度, 并且, 对充分小的 n , 有

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}A}(i_*B, X[n]) = 0.$$

这样, $i^!X$ 的上同调有下界, 也即 $i^!X \in \mathcal{D}^+(\text{mod}A)$. 类似地, 我们可证明 j_* 限制到 $\mathcal{D}^+(\text{mod})$. $\square$

下面将代数的无界导出范畴的 1-黏合用其子范畴的上 (下) 黏合来刻画.

定理 3.1 设 A, B 和 C 都是交换 Artin 环 R 上的 Artin 代数. 考虑以下叙述:

- (1) $\mathcal{D}A$ 有一个关于 $\mathcal{D}B$ 和 $\mathcal{D}C$ 的黏合;
- (2) $\mathcal{D}^-(\text{mod}A)$ 有一个关于 $\mathcal{D}^-(\text{mod}B)$ 和 $\mathcal{D}^-(\text{mod}C)$ 的上黏合;
- (3) $\mathcal{D}^+(\text{mod}A)$ 有一个关于 $\mathcal{D}^+(\text{mod}B)$ 和 $\mathcal{D}^+(\text{mod}C)$ 的下黏合.

我们有 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). 特别地, 若 A 是域 k 上的有限维代数, 则以上叙述等价.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 和 (1) $\Rightarrow$ (3) 由命题 3.2 可得.

(2) $\Rightarrow$ (1) 设

$$\mathcal{D}^-(\text{mod}B) \begin{array}{c} \xleftarrow{i^*} \\ \xrightarrow{i_*} \end{array} \mathcal{D}^-(\text{mod}A) \begin{array}{c} \xleftarrow{j^!} \\ \xrightarrow{j^!} \end{array} \mathcal{D}^-(\text{mod}C)$$

是一个上黏合, 则 $(\text{Im}j_!, \text{Im}i_*)$ 是 $\mathcal{D}^-(\text{mod}A)$ 的一个 t -结构. 由文献 [17, 引理 4.4.8 和注记 5.2.6], $(\text{Im}j_!, \text{Im}i_*)$ 可完备为 $\mathcal{D}A$ 中的 TTF 三元组当且仅当 $\text{Im}j_!$ 的一紧生成子是 $\mathcal{D}A$ 中的紧对象. 另一方面, 范畴 $K^b(\text{proj}A)$ 可看作 $\mathcal{D}^-(\text{mod}A)$ 的由满足以下条件的 X 构成的满子范畴: 对任意 $Y \in \mathcal{D}^-(\text{mod}A)$ 和充分大的 n , 总有

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^-(\text{mod}A)}(X, Y[n]) = 0.$$

因此, $j_!$ 可限制到 $K^b(\text{proj})$. 这样, $j_!C \in K^b(\text{proj}A)$. 因此, $(\text{Im}j_!, \text{Im}i_*)$ 可提升为 $\mathcal{D}A$ 的 TTF 三元组. 这样, 我们得到一个 $\mathcal{D}A$ 关于 $\mathcal{D}B$ 和 $\mathcal{D}C$ 的黏合.

(3) $\Rightarrow$ (1) 设

$$\mathcal{D}^+(\text{mod}B) \begin{array}{c} \xrightarrow{i_*} \\ \xleftarrow{i^!} \end{array} \mathcal{D}^+(\text{mod}A) \begin{array}{c} \xrightarrow{j^!} \\ \xleftarrow{j_*} \end{array} \mathcal{D}^+(\text{mod}C) \quad (\text{R}^+)$$

是一个下黏合, 令 $D_A := \text{Hom}_k(-, k) : \text{mod}A \rightarrow \text{mod}A^{\text{op}}$ 为标准对偶, 则它诱导出对偶

$$D_A : \mathcal{D}^+(\text{mod}A) \rightarrow \mathcal{D}^-(\text{mod}A^{\text{op}}).$$

因此, 下黏合 R^+ 在对偶作用下变为上黏合

$$\mathcal{D}^-(\text{mod}B^{\text{op}}) \begin{array}{c} \xleftarrow{\tilde{i}^!} \\ \xrightarrow{\tilde{i}_*} \end{array} \mathcal{D}^-(\text{mod}A^{\text{op}}) \begin{array}{c} \xleftarrow{\tilde{j}_*} \\ \xrightarrow{\tilde{j}^!} \end{array} \mathcal{D}^-(\text{mod}C^{\text{op}}), \quad (\text{R}^-)$$

其中

$$\tilde{i}_* = D_A i_* D_B^-, \quad \tilde{i}^! = D_B i^! D_A^-, \quad \tilde{j}^! = D_C j^! D_A^-, \quad \tilde{j}_* = D_A j_* D_C^-.$$

利用叙述 (2) $\Rightarrow$ (1), 我们得到一个 $\mathcal{D}(A^{\text{op}})$ 关于 $\mathcal{D}(B^{\text{op}})$ 和 $\mathcal{D}(C^{\text{op}})$ 的黏合. 再由文献 [20, 命题 3 和定理 2], 我们得到一个 $\mathcal{D}A$ 关于 $\mathcal{D}B$ 和 $\mathcal{D}C$ 的黏合. 这里, 应用文献 [20, 命题 3] 时要求 A 是域上的有限维代数. $\square$

接下来考虑 2-黏合, 它用上(下)黏合的语言有更多的解释.

定理 3.2 设 A, B 和 C 都是交换 Artin 环 R 上的 Artin 代数. 考虑以下叙述:

- (1) $\mathcal{D}A$ 有一个关于 $\mathcal{D}B$ 和 $\mathcal{D}C$ 的 2-黏合;
- (2) $K^b(\text{proj}A)$ 有一个关于 $K^b(\text{proj}B)$ 和 $K^b(\text{proj}C)$ 的上黏合;
- (3) $\mathcal{D}^b(\text{mod}A)$ 有一个关于 $\mathcal{D}^b(\text{mod}B)$ 和 $\mathcal{D}^b(\text{mod}C)$ 的下黏合;
- (4) $K^b(\text{inj}A)$ 有一个关于 $K^b(\text{inj}B)$ 和 $K^b(\text{inj}C)$ 的上黏合.

我们有 (4) $\Leftarrow$ (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). 特别地, 若 A 是域 k 上的有限维代数, 则以上叙述等价.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2)、(1) $\Rightarrow$ (3) 和 (1) $\Rightarrow$ (4) 由命题 3.2 可得.

(2) $\Rightarrow$ (1) 设

$$K^b(\text{proj} B) \begin{array}{c} \xleftarrow{i^*} \\ \xrightarrow{i_*} \end{array} K^b(\text{proj} A) \begin{array}{c} \xleftarrow{j_!} \\ \xrightarrow{j^!} \end{array} K^b(\text{proj} C)$$

是一个上黏合. 依据文献 [17, 引理 4.4.8 和注记 5.2.6], t -结构 $(\text{Im} j_!, \text{Im} i_*)$ 可以完备为 $\mathcal{D}A$ 的 TTF 元组 $(\text{Im} j_!, \text{Im} i_*, \mathcal{U}, \mathcal{V})$. 由于 TTF 三元组与黏合一一对应, 我们得到一个 $\mathcal{D}A$ 关于 $\mathcal{D}B$ 和 $\mathcal{D}C$ 的 2-黏合.

(3) $\Rightarrow$ (1) 设

$$\mathcal{D}^b(\text{mod} B) \begin{array}{c} \xrightarrow{i_*} \\ \xleftarrow{i^!} \end{array} \mathcal{D}^b(\text{mod} A) \begin{array}{c} \xrightarrow{j^!} \\ \xleftarrow{j_*} \end{array} \mathcal{D}^b(\text{mod} C) \quad (\text{R}^b)$$

是一个下黏合. 与之前类似, $K^b(\text{proj} A)$ 可看作 $\mathcal{D}^b(\text{mod} A)$ 的由满足以下条件的 X 构成的满子范畴: 对任意 $Y \in \mathcal{D}^b(\text{mod} A)$, 只有有限多个 $n \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\text{mod} A)}(X, Y[n]) \neq 0.$$

因此, $i_* B \in K^b(\text{proj} A)$, 进而, t -结构 $(\text{Im} i_*, \text{Im} j_*)$ 可提升为 $\mathcal{D}A$ 中的 TTF 三元组. 所以, 上黏合 (R^b) 可向下扩充一步, 得到一个 $\mathcal{D}A$ 关于 $\mathcal{D}C$ 和 $\mathcal{D}B$ 的黏合. 由文献 [3, 命题 2.3(b)], 这个黏合可向上扩充一步, 得到一个 $\mathcal{D}A$ 关于 $\mathcal{D}B$ 和 $\mathcal{D}C$ 的 2-黏合.

(4) $\Rightarrow$ (1) 设

$$K^b(\text{inj} B) \begin{array}{c} \xleftarrow{i^*} \\ \xrightarrow{i_*} \end{array} K^b(\text{inj} A) \begin{array}{c} \xleftarrow{j_!} \\ \xrightarrow{j^!} \end{array} K^b(\text{inj} C)$$

是一个上黏合. 应用对偶 D , 我们得到一个下黏合

$$K^b(\text{proj} B^{\text{op}}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{i}_*} \\ \xleftarrow{\tilde{i}^*} \end{array} K^b(\text{proj} A^{\text{op}}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{j}^!} \\ \xleftarrow{\tilde{j}_!} \end{array} K^b(\text{proj} C^{\text{op}}),$$

它也可看作一个 $K^b(\text{proj} A^{\text{op}})$ 关于 $K^b(\text{proj} C^{\text{op}})$ 和 $K^b(\text{proj} B^{\text{op}})$ 的上黏合. 利用叙述 (2) $\Rightarrow$ (1), 我们得到一个 $\mathcal{D}(A^{\text{op}})$ 关于 $\mathcal{D}(C^{\text{op}})$ 和 $\mathcal{D}(B^{\text{op}})$ 的 2-黏合. 由文献 [2, 命题 1 和 3], 我们得到一个 $\mathcal{D}A$ 关于 $\mathcal{D}B$ 和 $\mathcal{D}C$ 的 2-黏合. $\square$

4 上(下)黏合及同调维数

本节将考虑导出范畴的上(下)黏合与代数的整体维数(有限维数)之间的关系. 有关这方面的讨论参见文献 [9], 详见文献 [9, 命题 4.1、4.3 和 4.4]. 现在将推广和完善这些结果.

命题 4.1 设 A 、 B 和 C 为 Artin 代数, 且 $\mathcal{D}^-(\text{mod} A)$ 有一个关于 $\mathcal{D}^-(\text{mod} B)$ 和 $\mathcal{D}^-(\text{mod} C)$ 的上(下)黏合, 那么, A 是整体维数有限的当且仅当 B 和 C 如此.

证明 设 $\mathcal{D}^-(\text{mod}A)$ 有一个关于 $\mathcal{D}^-(\text{mod}B)$ 和 $\mathcal{D}^-(\text{mod}C)$ 的上黏合. 利用定理 3.1, $\mathcal{D}A$ 有一个关于 $\mathcal{D}B$ 和 $\mathcal{D}C$ 的黏合, 从而, 由文献 [3, 定理 1(a)] 知该命题成立. 下黏合的情形也容易得证, 因为一个 $\mathcal{D}^-(\text{mod}A)$ 关于 $\mathcal{D}^-(\text{mod}B)$ 和 $\mathcal{D}^-(\text{mod}C)$ 的下黏合亦可看作 $\mathcal{D}^-(\text{mod}A)$ 关于 $\mathcal{D}^-(\text{mod}C)$ 和 $\mathcal{D}^-(\text{mod}B)$ 的上黏合. $\square$

下面将阐明有界导出范畴的上(下)黏合与代数的整体维数的有限性之间的关系. 该命题改进了文献 [9, 命题 4.1], 减弱了那里的条件.

命题 4.2 (对比文献 [9, 命题 4.1]) 设 A 、 B 和 C 是 Artin 代数, 且 $\mathcal{D}^b(\text{mod}A)$ 有一个关于 $\mathcal{D}^b(\text{mod}B)$ 和 $\mathcal{D}^b(\text{mod}C)$ 的上(下)黏合, 则 A 是整体维数有限的当且仅当 B 和 C 如此.

证明 由定理 3.2 中 (3) $\Rightarrow$ (1) 的证明过程可知, 该上黏合可提升为一个 $\mathcal{D}A$ 关于 $\mathcal{D}B$ 和 $\mathcal{D}C$ 的黏合, 这样, 由文献 [3, 定理 (a)] 知该命题成立. 下黏合的情形可如同命题 4.1 中处理. $\square$

接下来考虑有限维数, 记为 $\text{fin.dim}A$, 它是所有投射维数有限的有限生成右 A -模的投射维数的上确界. 以下命题完善了文献 [9, 命题 4.4].

命题 4.3 设 A 、 B 和 C 是 Artin 代数.

(1) 假定 $\mathcal{D}^b(\text{mod}A)$ 有一个关于 $\mathcal{D}^b(\text{mod}B)$ 和 $\mathcal{D}^b(\text{mod}C)$ 的上黏合. 若 $\text{fin.dim}A < \infty$, 则

$$\text{fin.dim}C < \infty.$$

(2) 假定 $\mathcal{D}^b(\text{mod}A)$ 有一个关于 $\mathcal{D}^b(\text{mod}B)$ 和 $\mathcal{D}^b(\text{mod}C)$ 的下黏合. 若 $\text{fin.dim}A < \infty$, 则

$$\text{fin.dim}B < \infty.$$

(3) 设 A 是域 k 上的有限维代数, 且 $\mathcal{D}^b(\text{mod}A)$ 有一个关于 $\mathcal{D}^b(\text{mod}B)$ 和 $\mathcal{D}^b(\text{mod}C)$ 的上(下)黏合. 若 $\text{fin.dim}B < \infty$ 和 $\text{fin.dim}C < \infty$, 则

$$\text{fin.dim}A < \infty.$$

证明 (1) 和 (2) 由文献 [9, 命题 4.4]) 可得.

(3) 假定 $\mathcal{D}^b(\text{mod}A)$ 有一个关于 $\mathcal{D}^b(\text{mod}B)$ 和 $\mathcal{D}^b(\text{mod}C)$ 的上黏合. 由定理 3.2 知, $\mathcal{D}A$ 有一个关于 $\mathcal{D}C$ 和 $\mathcal{D}B$ 的 2-黏合. 这样, 由文献 [10, 推论 3.11(2)(b)] 知本结论成立. 该命题也可由定理 3.4 及文献 [10, 命题 3.10] 推出. 下黏合的情形可类似地证明. $\square$

5 3-黏合与有限维代数

本节将在黏合的框架下研究环作为域上代数维数的有限性. 在这方面, Angeleri Hügel 等有如下结果:

命题 5.1 (参见文献 [3, 定理 I(b)]) 设 A 、 B 和 C 为域 k 上的代数, 且 $\mathcal{D}A$ 有一个关于 $\mathcal{D}B$ 和 $\mathcal{D}C$ 的黏合. 若 A 是有限维的, 则 B 和 C 亦如此.

然而, 正如文献 [3, 注记 2.11] 所指出, 命题 5.1 的逆命题不成立, 即由 B 和 C 都是域上的有限维代数不能推出 A 也是有限维的: 无限维 Kronecker 代数有一个关于 $\mathcal{D}k$ 和 $\mathcal{D}k$ 的黏合. 因此, 一个自然的问题是, 是否有更强的条件, 确保由 B 和 C 是域上的有限维代数推出 A 也是有限维的. 现在将证明 3-黏合恰好是我们想要的条件.

定理 5.1 设 A, B 和 C 为域 k 上的代数, 且 $\mathcal{D}A$ 有一个关于 $\mathcal{D}B$ 和 $\mathcal{D}C$ 的 3-黏合. 若 B 和 C 都是有限维的, 则 A 亦如此.

证明 记 $\mathcal{D}_{fd}(A)$ 为 $\mathcal{D}A$ 的由满足以下条件的 X 构成的满子范畴: $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^n(X)$ 是有限维 k -向量空间. 假设

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{i^*} & & \xleftarrow{j^*} & \\ & \xrightarrow{i_*} & & \xrightarrow{j_*} & \\ \mathcal{D}B & \xleftarrow{i^!} & \mathcal{D}A & \xleftarrow{j^!} & \mathcal{D}C \\ & \xrightarrow{i^!} & & \xrightarrow{j^!} & \\ & \xleftarrow{i^!} & & \xleftarrow{j^!} & \end{array}$$

是一个 3-黏合, 则有如下 $\mathcal{D}A$ 中的三角:

$$i_* i^! A \rightarrow A \rightarrow j_* j^* A \rightarrow .$$

由文献 [3, 引理 2.9(e)] 知,

$$i^* A, i^! A \in K^b(\text{proj} B) \subseteq \mathcal{D}^b(\text{mod} B).$$

因此,

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H^i(i_* i^! A) \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{D}A}(A, i_* i^! A[i]) \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{D}B}(i^* A, i^! A[i])$$

是有限维 k -向量空间, 即 $i_* i^! A \in \mathcal{D}_{fd}(A)$, 类似地, $j_* j^* A \in \mathcal{D}_{fd}(A)$. 所以, 我们得到 $A \in \mathcal{D}_{fd}(A)$, 这样, A 是域 k 上的有限维代数. $\square$

注 5.1 设 A 是无限维 Kronecker 代数, 也即, 箭图有两个顶点 1 和 2, 从 1 到 2 有无穷多个箭向, 从 2 到 1 没有箭向. 依据文献 [20, 注记 4], $\mathcal{D}A$ 有一个关于 $\mathcal{D}k$ 和 $\mathcal{D}k$ 的 2-黏合. 因此, 定理 5.1 中 3-黏合是最优的选择.

致谢 感谢审稿人的仔细审阅.

参考文献

- 1 Beilinson A A, Bernstein J, Deligne P. Faisceaux Pervers. Luminy: Soc Math France, 1982
- 2 Qin Y Y, Han Y. Reducing homological conjectures by n -recollements. *Algebr Represent Theory*, 2016, 19: 377–395
- 3 Angeleri Hügel L, Koenig S, Liu Q, et al. Ladders and simplicity of derived module categories. *J Algebra*, 2017, 472: 15–66
- 4 Gao N, Psaroudakis C. Ladders of compactly generated triangulated categories and preprojective algebras. *Appl Categ Structures*, 2018, 26: 657–679
- 5 Zhang P, Zhang Y H, Zhou G D, et al. Unbounded ladders induced by Gorenstein algebras. *Colloq Math*, 2018, 151: 37–56
- 6 Lu M. Gorenstein defect categories of triangular matrix algebras. *J Algebra*, 2017, 480: 346–367
- 7 Zhang P. Gorenstein-projective modules and symmetric recollements. *J Algebra*, 2013, 388: 65–80
- 8 Gao N, Yin Y Q, Zhang P. Comparisons of left recollements. *Algebr Represent Theory*, 2017, 20: 659–673
- 9 Yin Y Q, Gao N. Upper recollements and triangle expansions. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2016, 32: 1323–1336
- 10 Chen H X, Xi C C. Recollements of derived categories, III: Finitistic dimensions. *J Lond Math Soc (2)*, 2017, 95: 633–658
- 11 König S. Tilting complexes, perpendicular categories and recollements of derived module categories of rings. *J Pure Appl Algebra*, 1991, 73: 211–232
- 12 Wiedemann A. On stratifications of derived module categories. *Canad Math Bull*, 1991, 34: 275–280
- 13 Happel D. Reduction techniques for homological conjectures. *Tsukuba J Math*, 1993, 17: 115–130
- 14 Pan S Y. Recollements and Gorenstein algebras. *Int J Algebra*, 2013, 7: 829–832
- 15 Beilinson A A, Ginsburg V A, Schechtman V V. Koszul duality. *J Geom Phys*, 1988, 5: 317–350

- 16 Parshall B J. Finite dimensional algebras and algebraic groups. *Contemp Math*, 1989, 82: 97–114
- 17 Nicolás P. On torsion torsionfree triples. PhD thesis. Murcia: Universidad de Murcia, 2007
- 18 Bökstedt M, Neeman A. Homotopy limits in triangulated categories. *Compos Math*, 1993, 86: 209–234
- 19 Rickard J. Morita theory for derived categories. *J Lond Math Soc (2)*, 1989, 39: 436–456
- 20 Han Y. Recollements and Hochschild theory. *J Algebra*, 2014, 397: 535–547

n -Recollements and upper recollements of derived module categories

Yongyun Qin

Abstract For Artin algebras, we characterize 1-recollements and 2-recollements of their unbounded derived categories in terms of upper (respectively lower) recollements of certain subcategories. As a result, we clarify the relationship between upper (respectively lower) recollements of derived categories and the finiteness of global (respectively finiteness) dimension of algebras, which generalizes a result of Yin and Gao (2016). Let A , B , and C be algebras over a field k , and $\mathcal{D}A$ admit a 3-recollement relative to $\mathcal{D}B$ and $\mathcal{D}C$. We prove that A is finite-dimensional if and only if so are B and C .

Keywords n -recollements, upper (lower) recollements, global dimension, finitistic dimension

MSC(2010) 16G10, 18E30

doi: 10.1360/N012018-00075