



球外域上含梯度项算子的 Dirichlet 特征值问题

程敏¹, 方飞^{1*}, 谭忠²

1. 北京工商大学数学与统计学院, 北京 102488;

2. 厦门大学数学科学学院, 厦门 361005

E-mail: chengmin0828@163.com, fangfei202106@163.com, tan85@xmu.edu.cn

收稿日期: 2024-05-27; 接受日期: 2024-12-13; 网络出版日期: 2025-01-10; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12071391 和 12231016) 和北京工商大学学科建设经费 (批准号: STKY202307) 资助项目

摘要 本文研究在球外区域上带有梯度项算子 L 的 Dirichlet 特征值问题. 首先证明算子 L 第一特征值的存在性、简单性和孤立性, 其次建立特征值与半径 R 之间的递增关系, 最后进一步讨论特征函数的有界性.

关键词 二阶椭圆方程 特征值问题 变分法

MSC (2020) 主题分类 35J15, 93B60, 35A15

1 引言

本文研究如下在外域上的 Dirichlet 特征值问题:

$$\begin{cases} -\Delta u - \frac{1}{2}(x \cdot \nabla u) = \lambda u, & x \in B_R^c, \\ u = 0, & x \in \partial B_R^c, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $R < \infty$, B_R^c 表示 $\mathbb{R}^N$ 中半径为 R 的封闭球的外域且是连通的, $N \geq 3$,

$$x \cdot \nabla u = x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n}.$$

注意到, 方程 (1.1) 中的第一个式子等价于

$$L(u) := -\frac{1}{K(x)} \operatorname{div}(K(x) \nabla u) = \lambda u,$$

其中, $K(x) = e^{|x|^2/4}$. 算子 L 的出现与 Escobedo 和 Kavian^[12] 研究热方程的自相似解密切相关, 其研究的非线性热方程如下:

$$v_t - \Delta v = |v|^{p-1}v, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^N. \quad (1.2)$$

英文引用格式: Cheng M, Fang F, Tan Z. Dirichlet eigenvalue problems with gradient term operators on the exterior of a ball (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 763–774, doi: 10.1360/SSM-2024-0174

Escobedo 和 Kavian^[12] 通过自相似变换寻找方程 (1.2) 自相似解, 即

$$v(x, t) = t^{-1/(p-1)} u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad (1.3)$$

再将 (1.3) 代入 (1.2) 中, 最终会得到 $u: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$-\Delta u - \frac{1}{2}(x \cdot \nabla u) = \frac{1}{p-1}u + |u|^{p-1}u, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

自此之后, 形如 $-\Delta u - \frac{1}{2}(x \cdot \nabla u) = f(x, u)$ 的方程引起了学者们的广泛研究, 并取得了很大的进展 (详见文献 [2, 6, 9, 13, 18, 19]). 例如, Furtado 等^[14] 研究了方程

$$-\Delta u - \frac{1}{2}(x \cdot \nabla u) = f(u) + \beta|u|^{2^*-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.4)$$

其中, $\beta > 0$, f 是超线性的, $2^* = \frac{2N}{N-2}$, $N \geq 3$. 他们证明了对每个 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $\beta^* = \beta^*(k) > 0$ 使得当 $\beta \in (0, \beta^*)$ 时, 方程 (1.4) 至少存在 k 对解. Bandeira 等^[3] 研究了方程

$$-\Delta u - \frac{1}{2}(x \cdot \nabla u) = \lambda h(x) + H(x-a)|u|^{2^*-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.5)$$

其中, $a > 0$, $N \geq 3$, $2^* = \frac{2N}{N-2}$, $h: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个非负函数且 H 是 Heaviside 函数. 当 $a > 0$ 足够小时, 他们证明了方程 (1.5) 有两个非负解. 不难看出, 这些学者研究的重点是, 探索非线性项 $f(x, u)$ 在不同形式下, 对应方程解的存在性及多重性等性质.

我们由此受到启发, 希望回归到算子 L 本身, 探索算子 L 的特征值与特征函数的相关性质. 众所周知, Laplace 算子和 p -Laplace 算子在特征值方面的研究上已经有了丰富的成果 (详见文献 [4, 7, 8, 10, 20]). 通过阅读众多文献, 我们发现在外域上讨论 Laplace 算子或 p -Laplace 算子特征值问题是近几年的热点之一. 例如, Anoop 和 Biswas^[1] 于 2019 年考虑如下外域 B_1^c 上加权 Neumann 特征值问题:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda g|u|^{p-2}u, & x \in B_1^c, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & x \in \partial B_1^c, \end{cases} \quad (1.6)$$

其中, Δ_p 是 p -Laplace 算子, $p \in (1, \infty)$, $g \in L_{\text{loc}}^1(B_1^c)$ 是不定权函数. 他们建立了相关空间的嵌入定理并得到了方程 (1.6) 特征值的一些性质. Krejčířík 和 Lotoreichik^[16] 于 2020 年研究了紧集外域上 Laplace 算子最小 Robin 特征值的优化问题. Bundrock^[5] 于 2023 年在他的博士学位论文中详细地研究了外域上 Laplace 算子 Robin 特征值相关的一系列问题.

因此, 我们决定研究球外域上 L 算子的 Dirichlet 特征值问题. 为了更好地表述我们的主要结果, 首先引入一些符号和集合. 定义如下集合:

$$L_K^p(B_R^c) := \left\{ u: B_R^c \rightarrow \mathbb{R}, \int_{B_R^c} K(x)|u|^p dx < \infty \right\},$$

并配备范数

$$|u|_{K,p} := \left(\int_{B_R^c} K(x)|u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

定义集合

$$L_K^\infty(B_R^c) := \{u: B_R^c \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ 是可测的且存在一个常数 } C' \text{ 使得 } |K(x)u| \leq C' \text{ 在 } B_R^c \text{ 上几乎处处成立}\},$$

并配备以下范数:

$$\|u\|_{K,\infty} = \inf\{C', |K(x)u| \leq C' \text{ 在 } B_R^c \text{ 上几乎处处成立}\}.$$

定义空间 $D_K^{1,2}(B_R^c)$ 为空间 $C_0^\infty(B_R^c)$ 在如下范数下的闭包:

$$\|u\|_{K,2} := \left(\int_{B_R^c} K(x) |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

定义 $(u, v) := \int_{B_R^c} K(x) uv dx$, $u \perp v$ 表示 $(u, v) = 0$. 文献 [12] 中的嵌入定理保证 $D_K^{1,2}(B_R^c)$ 和 $L_K^p(B_R^c)$ 是一个“良定义”的函数空间, 并且 $D_K^{1,2}(B_R^c)$ 能连续嵌入到 $L_K^{p^*}(B_R^c)$ 中, 其中 $p^* = \frac{2N}{N-2}$.

定义 1.1 称 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是方程 (1.1) 的一个特征值, 如果存在 $u \in D_K^{1,2}(B_R^c)$, $u \neq 0$ 使得

$$\int_{B_R^c} K(x) \nabla u \nabla \phi dx = \lambda \int_{B_R^c} K(x) u \phi dx \quad (1.7)$$

对于任意 $\phi \in D_K^{1,2}(B_R^c)$ 成立. u 被称为 $\lambda \in \mathbb{R}$ 对应的特征函数.

本文的主要定理如下:

定理 1.1 设 $\lambda_1 = \inf\{\int_{B_R^c} K(x) |\nabla u|^2 dx, \int_{B_R^c} K(x) |u|^2 dx = 1\}$ 是方程 (1.1) 的第一特征值, 且有

(1) 若 u_1 是 λ_1 对应的特征函数, 则在 B_R^c 中, $u_1 > 0$ 或 $u_1 < 0$;

(2) λ_1 是简单的;

(3) λ_1 是孤立的且与 $\lambda \neq \lambda_1$ 相对应的特征函数都是变号的.

定理 1.2 $R \mapsto \lambda_l(B_R^c)$ 是递增的, 其中 $\lambda_l(B_R^c)$ 为方程 (1.1) 在 B_R^c 上的第 l ($l \geq 1$) 个特征值.

定理 1.3 令 (u, λ) 是方程 (1.1) 对应的特征函数和特征值, 则 $u \in L_K^\infty(B_R^c)$.

2 预备引理

本节将提供证明主要定理所需要的引理.

引理 2.1 令 $\theta(x) = \frac{|x|^2}{4}$, 则对于任意 $u \in C_c^1(B_R^c)$, 有

$$\frac{1}{2} \int_{B_R^c} K(x) |u|^2 \left(\Delta \theta + \frac{1}{2} |\nabla \theta|^2 \right) dx \leq \int_{B_R^c} K(x) |\nabla u|^2 dx.$$

证明 令 $v = e^{\frac{\theta}{2}} u$, 则通过一个简单的计算有

$$K^{\frac{1}{2}}(x) \nabla u = \nabla v - \frac{1}{2} v \nabla \theta.$$

因此,

$$\int_{B_R^c} K(x) |\nabla u|^2 dx = \int_{B_R^c} |\nabla v|^2 dx - \int_{B_R^c} v \nabla v \nabla \theta dx + \frac{1}{4} \int_{B_R^c} |v|^2 |\nabla \theta|^2 dx. \quad (2.1)$$

然后对 (2.1) 右边的第二项进行分部积分, 有

$$- \int_{B_R^c} v \nabla v \nabla \theta dx = -\frac{1}{2} \int_{B_R^c} \nabla \theta dv^2 = \frac{1}{2} \int_{B_R^c} v^2 \Delta \theta dx. \quad (2.2)$$

将 (2.2) 代入 (2.1) 中, 得到

$$\int_{B_R^c} K(x) |\nabla u|^2 dx = \int_{B_R^c} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{B_R^c} v^2 \Delta \theta dx + \frac{1}{4} \int_{B_R^c} |v|^2 |\nabla \theta|^2 dx$$

$$= \int_{B_R^c} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{B_R^c} K(x) u^2 \left(\Delta \theta + \frac{1}{2} |\nabla \theta|^2 \right) dx.$$

因此, 有

$$\frac{1}{2} \int_{B_R^c} K(x) |u|^2 \left(\Delta \theta + \frac{1}{2} |\nabla \theta|^2 \right) dx \leq \int_{B_R^c} K(x) |\nabla u|^2 dx.$$

证毕. $\square$

引理 2.2 嵌入 $D_K^{1,2}(B_R^c) \hookrightarrow L_K^2(B_R^c)$ 是紧的.

证明 我们将证明 $D_K^{1,2}(B_R^c)$ 中任何有界序列在 $L_K^2(B_R^c)$ 中都有一个强收敛子列. 令 $\{u_n\}$ 是 $D_K^{1,2}(B_R^c)$ 中的有界序列, 在 $D_K^{1,2}(B_R^c)$ 中有 $u_n \rightharpoonup u$ 且 $\|u_n\|_{k,2} \leq 1$. 由 Rellich 定理可知, 存在 $\{u_n\}$ 的一个子列 $\{u_{n_k}\}$, 使得在 $L_{\text{loc}}^2(B_R^c)$ 中有 $u_{n_k} \rightarrow u$. 对于任意给定的正数 ε , 我们选择足够大的 R' . 则由 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (\Delta \theta + \frac{1}{2} |\nabla \theta|^2) = +\infty$ ($\theta(x) = \frac{|x|^2}{4}$), 我们能保证对于任意 $x \in B_R^c$, $|x| \geq R'$, 有

$$\Delta \theta + \frac{1}{2} |\nabla \theta|^2 \geq \frac{2}{\varepsilon}.$$

最后, 根据引理 2.1, 可以得到

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq R'} K(x) |u_{n_k} - u|^2 dx &= \frac{\varepsilon}{2} \int_{|x| \geq R'} K(x) |u_{n_k} - u|^2 \cdot \frac{2}{\varepsilon} dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{|x| \geq R'} K(x) |u_{n_k} - u|^2 \left(\Delta \theta + \frac{1}{2} |\nabla \theta|^2 \right) dx \\ &\leq \varepsilon \int_{|x| \geq R'} K(x) |\nabla(u_{n_k} - u)|^2 dx \\ &\leq \varepsilon C. \end{aligned}$$

因此, 在 $L_K^2(B_R^c)$ 中有 $u_{n_k} \rightarrow u$. $\square$

引理 2.3 (参见文献 [11, 引理 1.3]) 令 $p \geq 2$, 则对于任意 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^N$, 有

$$|\gamma_2|^p - |\gamma_1|^p \geq p |\gamma_1|^{p-2} \gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_1) + \frac{|\gamma_2 - \gamma_1|^p}{2^{p-1} - 1}.$$

3 主要定理的证明

本节讨论算子 L 在 Dirichlet 边界条件下的特征值问题. 对于方程 (1.1), 首先考虑 $D_K^{1,2}(B_R^c)$ 上的以下泛函:

$$J(u) = \int_{B_R^c} K(x) |\nabla u|^2 dx, \quad G(u) = \int_{B_R^c} K(x) |u|^2 dx.$$

显然, 对于任意 $u, \varphi \in D_K^{1,2}(B_R^c)$, 有

$$\langle J'(u), \varphi \rangle = 2 \int_{B_R^c} K(x) \nabla u \nabla \varphi dx, \quad \langle G'(u), \varphi \rangle = 2 \int_{B_R^c} K(x) u \varphi dx.$$

同时定义集合

$$M = \left\{ u \in D_K^{1,2}(B_R^c), \int_{B_R^c} K(x) |u|^2 dx = 1 \right\}.$$

定理 1.1 的证明 首先证明值 $\lambda_1 = \inf\{\int_{B_R^c} K(x)|\nabla u|^2 dx, \int_{B_R^c} K(x)|u|^2 dx = 1\}$ 在 $u_1 \in D_K^{1,2}(B_R^c)$ 且 $u_1 \not\equiv 0$ 处达到. 考虑极小化序列 $\{u_n\} \subset D_K^{1,2}(B_R^c)$,

$$|u_n|_{K,2} = 1, \quad \int_{B_R^c} K(x)|u_n|^2 dx \rightarrow \lambda_1,$$

则 $\{u_n\}$ 在 $D_K^{1,2}(B_R^c)$ 中是有界的. 由 $D_K^{1,2}(B_R^c)$ 的自反性可知, 存在 $u_1 \in D_K^{1,2}(B_R^c)$ 使得 $u_n \rightharpoonup u_1$. 通过引理 2.2, 有

$$\int_{B_R^c} K(x)|u_n|^2 dx \rightarrow \int_{B_R^c} K(x)|u_1|^2 dx,$$

因此 M 是弱闭的. 进一步地, 根据 $J(u)$ 的弱下半连续性, 有

$$\lambda_1 \leq J(u_1) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = \lambda_1.$$

所以, 存在 $u_1 \in M$ 使得

$$\lambda_1 = \int_{B_R^c} K(x)|\nabla u_1|^2 dx.$$

同时, 这也表明 $\lambda_1 > 0$ 且 $u_1 \not\equiv 0$.

(1) 假设存在 $x_0 \in B_R^c$ 使得 $u_1(x_0) = 0$. 选择 $x_1 \in B_R^c$ 使得 $u_1(x_1) \neq 0$. 令 $V = B_R^c \cap B_{R'}$, 其中 $R' > 0$ 满足 $\overline{B_R} \subset B_{R'}$ 且 $x_0, x_1 \in B_{R'}$. 因此, V 是 B_R^c 中的相对紧致子集. 由 Harnack 不等式 (参见文献 [22, 定理 1.1]), 得到

$$0 < |u_1(x_1)| \leq \sup_{x \in V} |u_1(x)| \leq C \inf_{x \in V} |u_1(x)| = 0.$$

这产生了矛盾, 说明 $u_1(x)$ 没有零点, 即对于任意 $x \in B_R^c$, 有 $u_1(x) > 0$ 或 $u_1(x) < 0$.

(2) 假设 $u_1, u_2 \in D_K^{1,2}(B_R^c)$ 是 λ_1 对应的两个特征函数. 同时, 通过定理 1.1(1), 可以进一步假设 $u_1 > 0, u_2 > 0$. 下面构造函数 $w = (\frac{u_1^2 + u_2^2}{2})^{\frac{1}{2}}$, 则有

$$\int_{B_R^c} K(x)|w|^2 dx = \frac{1}{2} \left(\int_{B_R^c} K(x)|u_1|^2 dx + \int_{B_R^c} K(x)|u_2|^2 dx \right) = 1.$$

因此, $w \in M$. 通过计算, 可以得到

$$\begin{aligned} |\nabla w|^2 &= \eta^{-1} \left| \frac{1}{2} (u_1 \nabla u_1 + u_1 \nabla u_1) \right|^2 \\ &= \eta \left| \frac{1}{2} \left(\frac{u_1^2}{\eta} \cdot \frac{\nabla u_1}{u_1} + \frac{u_2^2}{\eta} \cdot \frac{\nabla u_2}{u_2} \right) \right|^2 \\ &= \eta \left| z \cdot \frac{\nabla u_1}{u_1} + (1-z) \cdot \frac{\nabla u_2}{u_2} \right|^2 \\ &\leq \eta \left(z \cdot \left| \frac{\nabla u_1}{u_1} \right|^2 + (1-z) \cdot \left| \frac{\nabla u_2}{u_2} \right|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(u_1^2 \left| \frac{\nabla u_1}{u_1} \right|^2 + u_2^2 \left| \frac{\nabla u_2}{u_2} \right|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2), \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $\eta = \frac{u_1^2 + u_2^2}{2}$, $z = \frac{u_1^2}{u_1^2 + u_2^2} \in (0, 1)$. 在 (3.1) 两边同乘以 $K(x)$ 并在 B_R^c 上积分, 有

$$\int_{B_R^c} K(x) |\nabla w|^2 dx \leq \frac{1}{2} \left(\int_{B_R^c} K(x) |\nabla u_1|^2 dx + \int_{B_R^c} K(x) |\nabla u_2|^2 dx \right) = \lambda_1. \quad (3.2)$$

因为 $w \in M$, 所以由 λ_1 的定义可知 $\int_{B_R^c} K(x) |\nabla w|^2 dx \geq \lambda_1$. 因此, 在 (3.2) 中必须取等号. 这表明, 在 (3.1) 中, 等号在 B_R^c 中几乎处处成立. 再结合 $t \rightarrow |t|^2$ 的严格凸性, 得到 $\frac{\nabla u_1}{u_1} = \frac{\nabla u_2}{u_2}$ 在 B_R^c 中几乎处处成立, 即 $\nabla(\frac{u_1}{u_2}) = 0$ 在 B_R^c 中处处成立. 因为 B_R^c 是连通的, 所以会存在一个 $C_1 > 0$ 使得在 B_R^c 中处处有 $u_1 = C_1 u_2$. 由 $u_1, u_2 \in M$ 知 $C = 1$. 换言之, $u_1 = u_2$.

(3) 首先用反证法证明相关特征函数的变号性. 假设 $u_i \geq 0$ 是与特征值 λ_i ($i = 2, \dots, n$) 相对应的特征函数. 显然通过第一特征值的变分表征, 有 $\lambda_i > \lambda_1$. 由 (1.7) 可知, 对于任意 $\varphi, \psi \in D_K^{1,2}(B_R^c)$, 都有

$$\int_{B_R^c} K(x) \nabla u_1 \nabla \varphi dx = \lambda_1 \int_{B_R^c} K(x) u_1 \varphi dx, \quad (3.3)$$

$$\int_{B_R^c} K(x) \nabla u_i \nabla \psi dx = \lambda_i \int_{B_R^c} K(x) u_i \psi dx, \quad (3.4)$$

其中 u_i 是 λ_i 对应的特征函数. 对于 $\varepsilon > 0$, 令

$$u_{1\varepsilon} = u_1 + \varepsilon, \quad u_{i\varepsilon} = u_i + \varepsilon.$$

进一步地, 令

$$\varphi = \frac{u_{1\varepsilon}^2 - u_{i\varepsilon}^2}{u_{1\varepsilon}}, \quad \psi = \frac{u_{i\varepsilon}^2 - u_{1\varepsilon}^2}{u_{i\varepsilon}}.$$

通过计算得到

$$\nabla \varphi = \left[1 + \left(\frac{u_{i\varepsilon}}{u_{1\varepsilon}} \right)^2 \right] \nabla u_1 - 2 \left(\frac{u_{i\varepsilon}}{u_{1\varepsilon}} \right) \nabla u_i$$

和

$$\nabla \psi = \left[1 + \left(\frac{u_{1\varepsilon}}{u_{i\varepsilon}} \right)^2 \right] \nabla u_i - 2 \left(\frac{u_{1\varepsilon}}{u_{i\varepsilon}} \right) \nabla u_1.$$

将上述 $\nabla \varphi$ 和 $\nabla \psi$ 的表达式分别代入 (3.3) 和 (3.4) 再相加, 有

$$\begin{aligned} & \int_{B_R^c} K(x) \left\{ \left[1 + \left(\frac{u_{i\varepsilon}}{u_{1\varepsilon}} \right)^2 \right] |\nabla u_1|^2 + \left[1 + \left(\frac{u_{1\varepsilon}}{u_{i\varepsilon}} \right)^2 \right] |\nabla u_i|^2 \right\} dx \\ & - 2 \int_{B_R^c} \left[K(x) \left(\frac{u_{i\varepsilon}}{u_{1\varepsilon}} + \frac{u_{1\varepsilon}}{u_{i\varepsilon}} \right) \nabla u_1 \nabla u_i \right] dx \\ & = \int_{B_R^c} K(x) \left(\lambda_i \frac{u_i}{u_{i\varepsilon}} - \lambda_1 \frac{u_1}{u_{1\varepsilon}} \right) (u_{i\varepsilon}^2 - u_{1\varepsilon}^2) dx. \end{aligned} \quad (3.5)$$

因为 $|\nabla \log u_{1\varepsilon}| = \frac{|\nabla u_1|}{u_{1\varepsilon}}$, $|\nabla \log u_{i\varepsilon}| = \frac{|\nabla u_i|}{u_{i\varepsilon}}$, 所以 (3.5) 可以化简为

$$\begin{aligned} & \int_{B_R^c} K(x) (u_{1\varepsilon}^2 - u_{i\varepsilon}^2) (|\nabla \log u_{1\varepsilon}|^2 - |\nabla \log u_{i\varepsilon}|^2) dx \\ & - 2 \int_{B_R^c} K(x) u_{i\varepsilon}^2 \nabla \log u_{1\varepsilon} (\nabla \log u_{i\varepsilon} - \nabla \log u_{1\varepsilon}) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \int_{B_R^c} K(x) u_{1\varepsilon}^2 \nabla \log u_{i\varepsilon} (\nabla \log u_{1\varepsilon} - \nabla \log u_{i\varepsilon}) dx \\
& = \int_{B_R^c} K(x) \left(\lambda_i \frac{u_i}{u_{i\varepsilon}} - \lambda_1 \frac{u_1}{u_{1\varepsilon}} \right) (u_{i\varepsilon}^2 - u_{1\varepsilon}^2) dx.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

我们利用引理 2.3 估计 (3.6) 的左侧, 取 $p = 2$. 先令 $\gamma_1 = \nabla \log u_{i\varepsilon}$, $\gamma_2 = \nabla \log u_{1\varepsilon}$, 再令 $\gamma_1 = \nabla \log u_{1\varepsilon}$, $\gamma_2 = \nabla \log u_{i\varepsilon}$. 然后通过计算, 得到

$$\begin{aligned}
(3.6) \text{ 的左边} & \geq \int_{B_R^c} K(x) u_{1\varepsilon}^2 [2 \nabla \log u_{i\varepsilon} (\nabla \log u_{1\varepsilon} - \nabla \log u_{i\varepsilon}) + |\nabla \log u_{1\varepsilon} - \nabla \log u_{i\varepsilon}|^2] dx \\
& + \int_{B_R^c} K(x) u_{i\varepsilon}^2 [2 \nabla \log u_{1\varepsilon} (\nabla \log u_{i\varepsilon} - \nabla \log u_{1\varepsilon}) + |\nabla \log u_{i\varepsilon} - \nabla \log u_{1\varepsilon}|^2] dx \\
& - 2 \int_{B_R^c} K(x) u_{i\varepsilon}^2 \nabla \log u_{1\varepsilon} (\nabla \log u_{i\varepsilon} - \nabla \log u_{1\varepsilon}) dx \\
& - 2 \int_{B_R^c} K(x) u_{1\varepsilon}^2 \nabla \log u_{i\varepsilon} (\nabla \log u_{1\varepsilon} - \nabla \log u_{i\varepsilon}) dx \\
& = \int_{B_R^c} K(x) |\nabla \log u_{1\varepsilon} - \nabla \log u_{i\varepsilon}|^2 (u_{1\varepsilon}^2 + u_{i\varepsilon}^2) dx.
\end{aligned}$$

因此, 有

$$\int_{B_R^c} K(x) \left(\lambda_i \frac{u_i}{u_{i\varepsilon}} - \lambda_1 \frac{u_1}{u_{1\varepsilon}} \right) (u_{i\varepsilon}^2 - u_{1\varepsilon}^2) dx \geq 0.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 可以得到

$$(\lambda_i - \lambda_1) \int_{B_R^c} K(x) (u_i^2 - u_1^2) dx \geq 0. \tag{3.7}$$

若 u_i 不改变符号, 则 (3.7) 的左侧可能为负, 这就与 (3.7) 矛盾. 因此, u_i 必须是变号的.

下面同样使用反证法证明 λ_1 是孤立的. 假设 $\{\lambda_n\}$ 是对应于方程 (1.1) 且收敛于 λ_1 的特征值序列, $\{u_n\}$ 是其对应的特征函数序列, 且 $G(u_n) = 1$. 因此, 有

$$\int_{B_R^c} K(x) \nabla u_n \nabla \phi dx = \lambda_n \int_{B_R^c} K(x) u_n \phi dx, \quad \forall \phi \in D_K^{1,2}(B_R^c). \tag{3.8}$$

令 $\phi = u_n$, 得到 $\|u_n\|_{K,2}^2 = \lambda_n$. 则在 $D_K^{1,2}(B_R^c)$ 中有 $u_n \rightharpoonup \tilde{u}$, 由这种弱收敛性和 λ_1 的简单性可知 $\tilde{u} = u_1$ 或 $\tilde{u} = -u_1$. 不妨进一步假设 $u_n \rightharpoonup u_1 \geq 0$. 由引理 2.2 可知, 在 $L_K^2(B_R^c)$ 中有 $u_n \rightarrow u_1$. 因此根据 Egorov 定理 (参见文献 [15]), 存在 $A \in B_R^c$ 且 $|A| > 0$ 使得 u_n 在 A 上一致收敛于 u_1 , 即存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得对于所有 $n \geq n_0$, 在 A 上几乎处处有 $u_n^- = 0$. 在 (3.8) 中令 $\phi = u_n^-$, 则有

$$\int_{B_R^c} K(x) |\nabla u_n^-|^2 dx = \lambda_n \int_{B_R^c} K(x) |u_n^-|^2 dx.$$

由 u_n 的变号性可知 $u_n^- \neq 0$, 因此 $G(u_n^-) > 0$. 令 $v_n = \frac{u_n^-}{G^{\frac{1}{2}}(u_n^-)}$, 可以看出

$$\int_{B_R^c} K(x) |v_n|^2 dx = 1, \quad \int_{B_R^c} K(x) |\nabla v_n|^2 dx = \lambda_n \rightarrow \lambda_1.$$

因此, 显然在 $D_K^{1,2}(B_R^c)$ 中有 $v_n \rightarrow u_1$. 但这与当 $n \geq n_0$ 时, 在 A 上几乎处处有 $v_n = 0$ 矛盾. $\square$

在证明定理 1.2 之前, 需要引入 3 个引理, 这在证明定理 1.2 的过程中将发挥巨大的作用.

引理 3.1 假设 $u \in D_k^{1,2}(B_R^c)$ 且 $u \neq 0$, 令 $R(u) = \frac{\|u\|_K^2}{|u|_K^2}$. 则有

- (1) $\lambda_1 = \inf_{u \in D_K^{1,2}, u \neq 0} R(u)$;
 (2) 对于 $m \geq 2$, 有

$$\lambda_m = \inf_{\substack{(u, \phi_i)=0, i=1, \dots, m-1 \\ u \neq 0}} R(u),$$

其中 $\phi_1, \dots, \phi_{m-1}$ 是方程 (1.1) 的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ 对应的特征函数.

证明 这部分的证明同文献 [21, 第 11 章, 第 1 节] 中定理 1 和 2 的证明. $\square$

引理 3.2 令 $R(u) = \frac{\|u\|_K^2}{|u|_K^2}$, $Gr_{n-1}(D)$ 为 $D_K^{1,2}(B_R^c)$ 上所有 $n-1$ 维线性子空间所构成的集合, 其中 $n \geq 1$. 对于 $P \in Gr_{n-1}(D)$, 令 $\mu(P) = \inf_{u \perp P, u \neq 0} R(u)$, 则

$$\lambda_n = \sup_{P \in Gr_{n-1}(D)} \mu(P).$$

证明 令 $P_n = \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_{n-1}$ 表示由 $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ 所张成的 $n-1$ 维线性子空间, 其中 $\phi_1, \dots, \phi_n$ 是方程 (1.1) 前 n 个特征值对应的特征函数. 则由引理 3.1(2) 有 $\lambda_n = \mu(P_n)$. 因此,

$$\lambda_n \leq \sup_{P \in Gr_{n-1}(D)} \mu(P).$$

下面证明 $\lambda_n \geq \sup_{P \in Gr_{n-1}(D)} \mu(P)$. 首先断言, 对于每一个 $P \in Gr_{n-1}(D)$, 总有不全为零的 $a_1, \dots, a_n$ 使得 $(a_1\phi_1 + \dots + a_n\phi_n) \perp P$. 假设 $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ 是 P 的一组基, 则这个垂直的条件等价于

$$\begin{cases} a_1(\phi_1, \eta_1) + \dots + a_n(\phi_n, \eta_1) = 0, \\ \vdots \\ a_1(\phi_1, \eta_{n-1}) + \dots + a_n(\phi_n, \eta_{n-1}) = 0. \end{cases}$$

此方程组含有 n 个未知数和 $n-1$ 个方程, 故有解. 不失一般性, 假设 $\phi_1, \dots, \phi_n$ 是正交且标准化的. 通过计算, 得到

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^n a_j \phi_j \right\|_K^2 &= \left(\sum_{j=1}^n a_j \nabla \phi_j, \sum_{j=1}^n a_j \nabla \phi_j \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_j \phi_j, \sum_{j=1}^n a_j L(\phi_j) \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_j \phi_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j \phi_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n (a_j \phi_j, \lambda_j a_j \phi_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j^2 \end{aligned}$$

和

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j \phi_j \right|_K^2 = \left(\sum_{j=1}^n a_j \phi_j, \sum_{j=1}^n a_j \phi_j \right) = \sum_{j=1}^n (a_j \phi_j, a_j \phi_j) = \sum_{j=1}^n a_j^2.$$

因此, 由 $\mu(P)$ 和 λ_n 的定义, 有

$$\mu(P) \leq R(a_1\phi_1 + \cdots + a_n\phi_n) = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j a_j^2}{\sum_{j=1}^n a_j^2} \leq \lambda_n.$$

两边取极大, 得到

$$\lambda_n \geq \sup_{P \in Gr_{n-1}(D)} \mu(P).$$

证毕. $\square$

引理 3.3 令 $R(u) = \frac{\|u\|_K^2}{|u|_K^2}$, $Gr_n(D)$ 为 $D_K^{1,2}(B_R^c)$ 上所有 n 维线性子空间所构成的集合, 其中 $n \geq 1$. 对于 $Q \in Gr_n(D)$, 令 $\sigma(Q) = \sup_{u \in Q, u \neq 0} R(u)$, 则

$$\lambda_n = \inf_{Q \in Gr_n(D)} \sigma(Q).$$

证明 令 $\phi_1, \dots, \phi_n$ 是方程 (1.1) 前 n 个特征值对应的特征函数. 选取 $Q_n = \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$, 则类似于引理 3.2 中的计算过程, 有

$$\sigma(Q_n) = \sup_{u \in Q_n, u \neq 0} R(b_1\phi_1 + \cdots + b_n\phi_n) \leq \lambda_n.$$

两边取极小, 则 $\inf_{Q \in Gr_n(D)} \sigma(Q) \leq \lambda_n$.

下面证明 $\inf_{Q \in Gr_n(D)} \sigma(Q) \geq \lambda_n$. 参照引理 3.2 中的断言, 可知对于任意一个 $Q \in Gr_n(D)$, 总有不为零的 $u \in Q$ 使得 $u \perp \phi_1, \dots, u \perp \phi_{n-1}$. 因此, 由引理 3.1 和 $\sigma(Q)$ 的定义, 有 $\lambda_n \leq R(u) \leq \sigma(Q)$, 即两边取极小会产生

$$\inf_{Q \in Gr_n(D)} \sigma(Q) \geq \lambda_n.$$

证毕. $\square$

定理 1.2 的证明 我们只需要证明, 若 $R_1 < R_2$, 则 $\lambda_l(B_{R_1}^c) \leq \lambda_l(B_{R_2}^c)$. 我们将用零来延拓, 构造下面的连续映射:

$$\chi: D_K^{1,2}(B_{R_2}^c) \rightarrow D_K^{1,2}(B_{R_1}^c).$$

用 $\{\phi_j\}_{j \geq 1}$ 表示 L 算子在 $B_{R_2}^c$ 上的特征函数. 由引理 3.2 可知

$$\lambda_l(B_{R_2}^c) = \sup_{u \in \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n, u \neq 0} R(u) = \sup_{u \in \chi(\phi_1) \wedge \cdots \wedge \chi(\phi_n), u \neq 0} R(u).$$

由引理 3.3 可知

$$\lambda_l(B_{R_2}^c) = \sup_{u \in \chi(\phi_1) \wedge \cdots \wedge \chi(\phi_n), u \neq 0} R(u) = \sigma(\chi(\phi_1) \wedge \cdots \wedge \chi(\phi_n)) \geq \lambda_l(B_{R_1}^c).$$

证毕. $\square$

最后, 使用 Moser 迭代技术 (参见文献 [17] 中定理 4.1 的证明) 来证明方程 (1.1) 特征函数的有界性.

定理 1.3 的证明 先假设 $u \geq 0$, 对 $N \geq 0$, 定义 $v_N(x) = \min\{u(x), N\}$. 令 $\phi = v_N^{2\alpha+1}$, $\alpha > 0$, 则 $\nabla \phi = (2\alpha+1)v_N^{2\alpha} \nabla v_N$. 将其代入 (1.7) 中, 有

$$(2\alpha+1) \int_{B_R^c} K(x) \nabla u \nabla v_N \cdot v_N^{2\alpha} dx = \lambda \int_{B_R^c} K(x) u v_N^{2\alpha+1} dx \leq \lambda \int_{B_R^c} K(x) u^2 dx. \quad (3.9)$$

由 Sobolev 嵌入定理, 可得

$$\begin{aligned}
 (3.9) \text{ 的左边} &= (2\alpha + 1) \int_{B_R^c} K(x) v_N^{2\alpha} |\nabla v_N|^2 dx \\
 &= \frac{2\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2} \int_{B_R^c} K(x) |\nabla v_N^{\alpha+1}|^2 dx \\
 &\geq \frac{1}{C_1^2} \frac{2\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2} \left(\int_{B_R^c} K(x) v_N^{(\alpha+1)2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

结合 (3.9) 和 (3.10), 得到

$$\frac{1}{C_1^2} \frac{2\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2} \left(\int_{B_R^c} K(x) v_N^{(\alpha+1)2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \lambda \int_{B_R^c} K(x) u^{2(\alpha+1)} dx,$$

即

$$|v_N|_{K,(\alpha+1)2^*} \leq C_1^{\frac{1}{\alpha+1}} \left[\lambda \frac{(\alpha+1)^2}{2\alpha+1} \right]^{\frac{1}{2(\alpha+1)}} |u|_{K,2(\alpha+1)}.$$

我们可以选择 $C_2 > 0$ 使得 $[\lambda \frac{(\alpha+1)^2}{2\alpha+1}]^{\frac{1}{2\sqrt{\alpha+1}}} \leq C_2$, 则

$$|v_N|_{K,(\alpha+1)2^*} \leq C_1^{\frac{1}{\alpha+1}} C_2^{\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}} |u|_{K,2(\alpha+1)}.$$

令 $N \rightarrow \infty$, 由 Fatou 引理可知

$$|u|_{K,(\alpha+1)2^*} \leq C_1^{\frac{1}{\alpha+1}} C_2^{\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}} |u|_{K,2(\alpha+1)}. \tag{3.11}$$

首先选取 α_1 使得 $2(\alpha_1 + 1) = 2^*$, 则 (3.11) 可化简为

$$|u|_{K,(\alpha_1+1)2^*} \leq C_1^{\frac{1}{\alpha_1+1}} C_2^{\frac{1}{\sqrt{\alpha_1+1}}} |u|_{K,2^*}.$$

接下来选取 α_2 使得 $2(\alpha_2 + 1) = (\alpha_1 + 1)2^*$, 则有

$$|u|_{K,(\alpha_2+1)2^*} \leq C_1^{\frac{1}{\alpha_2+1}} C_2^{\frac{1}{\sqrt{\alpha_2+1}}} |u|_{K,2(\alpha_2+1)} = C_1^{\frac{1}{\alpha_2+1}} C_2^{\frac{1}{\sqrt{\alpha_2+1}}} |u|_{K,(\alpha_1+1)2^*}.$$

最后, 通过归纳, 得到

$$|u|_{K,(\alpha_n+1)2^*} \leq C_1^{\frac{1}{\alpha_n+1}} C_2^{\frac{1}{\sqrt{\alpha_n+1}}} |u|_{K,(\alpha_{n-1}+1)2^*}.$$

序列 $\{\alpha_n\}$ 满足 $2(\alpha_n + 1) = (\alpha_{n-1} + 1)2^*$ 且 $\alpha_0 = 1$. 通过计算, 可知 $\alpha_n + 1 = (\frac{2^*}{2})^n$, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $r_n = (\alpha_n + 1)2^* \rightarrow \infty$. 因此,

$$|u|_{K,(\alpha_n+1)2^*} \leq C_1^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i+1}} C_2^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\alpha_i+1}}} |u|_{K,2^*}.$$

这表明存在 $\tilde{C} > 0$ 使得对 $n = 1, 2, \dots$, 有

$$|u|_{K,(\alpha_n+1)2^*} \leq \tilde{C} |u|_{K,2^*}. \tag{3.12}$$

我们使用反证法证明 $u \in L_K^\infty(B_R^c)$. 假设 $u \notin L_K^\infty(B_R^c)$, 则存在 $\varepsilon > 0$ 和一个在 B_R^c 中的正测度集合 A_1 , 使得对于任意 $x \in A_1$ 有 $K(x)|u| > C''|u|_{K,2^*} + \varepsilon$ 成立. 所以,

$$\liminf_{r_n \rightarrow \infty} \left(\int_{B_R^c} K(x) |u|^{r_n} dx \right)^{\frac{1}{r_n}} \geq \liminf_{r_n \rightarrow \infty} \left(\int_{A_1} K(x) |u|^{r_n} dx \right)^{\frac{1}{r_n}}$$

$$\begin{aligned} &\geq \liminf_{r_n \rightarrow \infty} (C''|u|_{K,2^*} + \varepsilon)(\text{meas } A_1)^{\frac{1}{r_n}} \\ &= C''|u|_{K,2^*} + \varepsilon, \end{aligned}$$

其中 $\text{meas } A_1$ 表示集合 A_1 的测度. 这与 (3.12) 矛盾, 因此 $u \in L_K^\infty(B_R^c)$. $\square$

致谢 衷心感谢审稿人细致的审查和宝贵建议.

参考文献

- 1 Anoop T V, Biswas N. Neumann eigenvalue problems on the exterior domains. *Nonlinear Anal*, 2019, 187: 339–351
- 2 Bandeira V P, Figueiredo G M. On a critical and a supercritical system with fast increasing weights. *Nonlinear Anal Real World Appl*, 2022, 64: 103431
- 3 Bandeira V P, Figueiredo G M, dos Santos G C G. Existence of positive solutions for a class of elliptic problems with fast increasing weights and critical exponent discontinuous nonlinearity. *Positivity*, 2023, 27: 34–59
- 4 Bhattacharya T. Some results concerning the eigenvalue problem for the p -Laplacian. *Ann Acad Sci Fenn Ser I Math*, 1989, 14: 325–343
- 5 Bundrock L. The Robin eigenvalue in exterior domains. PhD Thesis. Aachen: RWTH Aachen University, 2023
- 6 Catrina F, Furtado M, Montenegro M. Positive solutions for nonlinear elliptic equations with fast increasing weights. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 2007, 137: 1157–1178
- 7 Cheng Q M, Yang H. Estimates on eigenvalues of Laplacian. *Math Ann*, 2005, 331: 445–460
- 8 Chhetri M, Drábek P. Principal eigenvalue of p -Laplacian operator in exterior domain. *Results Math*, 2014, 66: 461–468
- 9 Deng Y, Shi L. On the existence of positive solution for a Neumann problem with double critical exponents in half-space. *J Differential Equations*, 2024, 401: 376–427
- 10 Drábek P, Ho K, Sarkar A. On the eigenvalue problem involving the weighted p -Laplacian in radially symmetric domains. *J Math Anal Appl*, 2018, 468: 716–756
- 11 Drábek P, Kufner A, Nicolosi F. *Quasilinear Elliptic Equations with Degenerations and Singularities*. Berlin: Walter de Gruyter, 2011
- 12 Escobedo M, Kavian O. Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation. *Nonlinear Anal*, 1987, 11: 1103–1133
- 13 Figueiredo G M, Furtado M F, Ruviano R. Nodal solution for a planar problem with fast increasing weights. *Topol Methods Nonlinear Anal*, 2019, 54: 793–805
- 14 Furtado M F, Da Silva J P P, Xavier M S. Multiplicity of self-similar solutions for a critical equation. *J Differential Equations*, 2013, 254: 2732–2743
- 15 Hewitt E, Stromberg K. *Real and Abstract Analysis*. Berlin: Springer-Verlag, 1969
- 16 Krejčířík D, Lotoreichik V. Optimisation of the lowest Robin eigenvalue in the exterior of a compact set, II: Non-convex domains and higher dimensions. *Potential Anal*, 2020, 52: 601–614
- 17 Lê A. Eigenvalue problems for the p -Laplacian. *Nonlinear Anal*, 2006, 64: 1057–1099
- 18 Li L, Tang C L. Ground state solutions for a class of nonlinear elliptic equations with fast increasing weight. *Bull Iranian Math Soc*, 2017, 43: 2111–2124
- 19 Qian X, Chen J. Multiple positive and sign-changing solutions of an elliptic equation with fast increasing weight and critical growth. *J Math Anal Appl*, 2018, 465: 1186–1208
- 20 Schlenk F, Sicbaldi P. Bifurcating extremal domains for the first eigenvalue of the Laplacian. *Adv Math*, 2012, 229: 602–632
- 21 Strauss W A. *Partial Differential Equations: An Introduction*, 2nd ed. Hoboken: Wiley, 2008
- 22 Tolksdorf P. Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations. *J Differential Equations*, 1984, 51: 126–150

Dirichlet eigenvalue problems with gradient term operators on the exterior of a ball

Min Cheng, Fei Fang & Zhong Tan

Abstract In this paper, we study the Dirichlet eigenvalue problems for the operator L with the gradient term on the off-sphere region. We prove the existence, simplicity, and isolation of the first eigenvalue of the operator L , establish an increasing relation between the eigenvalue and the radius R , and further discuss the boundedness of the eigenfunction.

Keywords second-order elliptic equation, eigenvalue problem, variational method

MSC(2020) 35J15, 93B60, 35A15

doi: 10.1360/SSM-2024-0174