



一个联合连续定理

献给文兰教授 80 寿辰

代雄平*, 谢宇轩

南京大学数学学院, 南京 210093

E-mail: xpdai@nju.edu.cn, 201501005@smail.nju.edu.cn

收稿日期: 2024-12-26; 接受日期: 2025-03-10; 网络出版日期: 2025-03-26; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12271245) 资助项目

摘要 本文证明如下联合连续定理. 设 G 是一个局部可数紧的正则的 F -群, X 是一个满足 $X \times X$ 是局部可数紧的完全正则空间, $\pi: G \times X \rightarrow X$ 是一个抽象群作用, 若映射 π 是分别连续的, 则 π 是联合连续的.

关键词 联合连续 分别连续 局部可数紧空间

MSC (2020) 主题分类 54H11, 54C05, 26B35

设 X, Y 和 Z 是拓扑空间, $f: X \times Y \rightarrow Z$ 是一个映射. 若对任意 $(x, y) \in X \times Y$, 映射 $f_y: X \rightarrow Z, x \mapsto f(x, y)$ 和 $f_x: Y \rightarrow Z, y \mapsto f(x, y)$ 是连续的, 则称映射 f 是分别连续的; 若对于 $f(x, y)$ 在 Z 中的任一邻域 W , 都存在 x 的邻域 U 以及 y 的邻域 V 使得 $f(U \times V) \subseteq W$, 则称 f 在 (x, y) 处是联合连续的. 若 f 在 $X \times Y$ 中的任一点处都是联合连续的, 则称 f 是联合连续的. 考虑下述联合连续性问题:

问题 1^[1] 设 $f: X \times Y \rightarrow Z$ 是一个分别连续的映射. 拓扑空间 X, Y 和 Z 在何种条件下, f 在 $X \times Y$ 的一个“大”子集中的任一点处是联合连续的?

自 1899 年 Baire^[1] 提出这一问题以来, 许多学者在这一问题的研究上作出了贡献. 其中 Ellis^[6] 在 1957 年证明了下述定理:

定理 2 (Ellis 联合连续定理) 设 X 是一个局部紧的 Hausdorff 空间, G 是一个局部紧的 Hausdorff 半拓扑群. 若 $\pi: G \times X \rightarrow X$ 是一个分别连续的作用, 则 π 是联合连续的.

设 G 是一个定义在拓扑空间上的群. 若乘法运算 $G \times G \rightarrow G, (s, g) \mapsto sg$ 是分别连续 (联合连续) 的, 则称 G 是一个半拓扑群 (仿拓扑群). 若 G 是一个仿拓扑群且逆元映射 $G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$ 是连续的, 则称 G 是拓扑群. 若 G 是一个半拓扑群且 $g \mapsto g^{-1}$ 是连续的, 则称 G 是一个 F -群^[11].

英文引用格式: Dai X P, Xie Y X. A joint continuity theorem (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 503–506, doi: 10.1360/SSM-2024-0388

称一个正则空间 X 为是可数 Čech-完备的, 若存在 X 的一列开覆盖 $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 使得 X 的任意一列非增闭子集 $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 满足: 若对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $U_n \in \mathcal{U}_n$ 满足 $F_n \subseteq U_n$, 则 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. 称拓扑空间 X 为 σ -紧空间, 若存在 X 的一列紧子集 $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 满足 $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. 1974 年, Namioka^[9] 证明了下述联合连续定理:

定理 3 (Namioka 联合连续定理) 设 X 是一个可数 Čech-完备空间, Y 是一个局部紧且 σ -紧的空间, Z 是一个伪度量空间. 若 $f: X \times Y \rightarrow Z$ 是一个分别连续的映射, 则存在稠密的 G_δ 集 $A \subseteq X$, 使得 f 在 $A \times Y$ 中的任一点处是联合连续的.

一个空间是可数紧的当且仅当每个可数开覆盖有有限子覆盖, 一个空间是局部可数紧的当且仅当每个点有一个可数紧的邻域. 关于联合连续性问题, 受到拓扑博弈的相关结果的启发 (参见文献 [2-5, 10]), 我们对上述结论进行了如下改进:

引理 4 (Baire 曲线定理) 设 X 是一个局部可数紧的正则空间, Y 是一个满足 $Y \times Y$ 是局部可数紧的正则空间, Z 是一个伪度量空间. 若 $f: X \times Y \rightarrow Z$ 是一个分别连续的映射且 $\phi: X \rightarrow Y$ 是一个连续映射, 则存在稠密的 G_δ 集 $R \subseteq X$ 满足 f 在 $\{(x, \phi(x)) \mid x \in R\}$ 中的任一点处是联合连续的.

证明 设 $d: Z \times Z \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是与 Z 的拓扑相容的一个伪度量. 对任意点 $z_0 \in Z$ 和实数 $r \geq 0$, 记 $B(z_0, r) = \{z \in Z \mid d(z, z_0) < r\}$. 对任意 $n \geq 1$, 设

$$E_n = \{x \in X \mid \exists (U, V) \in \mathfrak{N}_x(X) \times \mathfrak{N}_{\phi(x)}(Y), \text{ s.t. } f(U \times V) \subseteq B(f(x, \phi(x)), 1/n)\},$$

其中 $\mathfrak{N}_x(X)$ 表示 x 点在 X 上的邻域系统. 则对任意 $n \geq 1$, E_n 为开集. 令 $R = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. 由于局部可数紧的正则空间是 Baire 空间^[7], 下面只需要证明对任意 $n \geq 1$, E_n 是 X 中的稠密子集. 假设存在 $n \geq 1$, 使得 $U = X \setminus \overline{E_n} \neq \emptyset$.

任取开集 U 中一点 x_0 , 设 U' 是 x_0 的一个可数紧邻域, 因为 X 是完全正则空间, 所以可以选取 x_0 的邻域 U_0 , 其闭包包含于 $U \cap U'$. 由于 $\overline{U_0}$ 是 U' 的闭子集, 因此 $\overline{U_0}$ 是可数紧的. 令 $y_0 = \phi(x_0)$, $W \times W \subseteq Y \times Y$ 为 (y_0, y_0) 的一个可数紧邻域且 W 是 y_0 的邻域. 由于 f 是分别连续的, 所以存在 x_0 的开邻域 $U'_1 \subseteq U_0 \cap \phi^{-1}[W]$ 使得 $f(U'_1 \times \{y_0\}) \subseteq B(f(x_0, y_0), \frac{1}{4n})$. 因此存在点 $(x'_0, y'_0) \in U'_1 \times W$ 以及 x'_0 的开邻域 $U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq U'_1$, 使得以下条件成立:

$$\begin{aligned} d(f(x_0, y_0), f(x'_0, y'_0)) &> \frac{1}{n}, \\ f(U_1 \times \{y_0\}) \subseteq f(U'_1 \times \{y_0\}) &\subseteq B\left(f(x_0, y_0), \frac{1}{4n}\right), \quad f(U_1 \times \{y'_0\}) \subseteq B\left(f(x'_0, y'_0), \frac{1}{4n}\right). \end{aligned}$$

我们可以通过归纳得到序列 $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{\infty}$, $\{(x'_i, y'_i)\}_{i=0}^{\infty}$ 和 $\{(U_i, U'_i)\}_{i=1}^{\infty}$, 使得对任意 $i \geq 0$, 以下条件成立:

$$\begin{aligned} x_i \in U'_{i+1} \subseteq U_i, \quad x'_i \in U_{i+1} \subseteq \overline{U_{i+1}} \subseteq U'_{i+1} \subseteq U_i, \quad y_i = \phi(x_i) \in W, \quad y'_i = \phi(x'_i) \in W, \\ d(f(x_i, y_i), f(x'_i, y'_i)) &> \frac{1}{n}, \\ f(U_{i+1} \times \{y_i\}) \subseteq f(U'_{i+1} \times \{y_i\}) &\subseteq B\left(f(x_i, y_i), \frac{1}{4n}\right), \quad f(U_{i+1} \times \{y'_i\}) \subseteq B\left(f(x'_i, y'_i), \frac{1}{4n}\right), \\ d(f(x_k, y_{i+1}), f(x_k, y'_{i+1})) &\leq \frac{1}{4n}, \quad k = 0, 1, \dots, i. \end{aligned}$$

由于 $\overline{U_0}$ 是可数紧的, 所以 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ 存在聚点 $x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{U_i}$, 即 $x \in \bigcap_{n \geq 0} \overline{\{x_i \mid i \geq n\}}$. 又由于 $W \times W$ 是

可数紧的, 因此 $\{(y_i, y'_i)\}_{i=0}^\infty$ 存在聚点 $(y, y') \in Y \times Y$. 由 $\{(y_i, y'_i)\}_{i=0}^\infty$ 和 $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ 所满足的条件, 可得

$$d(f(x, y), f(x, y')) \leq \frac{1}{4n}.$$

对任意 $i \in \mathbb{N}$, 以下不等式成立:

$$d(f(x, y_i), f(x_i, y_i)) \leq \frac{1}{4n}, \quad d(f(x, y'_i), f(x'_i, y'_i)) \leq \frac{1}{4n}.$$

由于 (y, y') 是 $\{(y_i, y'_i)\}_{i=0}^\infty$ 的一个聚点, 因此存在 $i \in \mathbb{N}$, 使得

$$d(f(x, y'), f(x, y'_i)) \leq \frac{1}{8n}, \quad d(f(x, y), f(x, y_i)) \leq \frac{1}{8n}.$$

因此, 存在 $i \in \mathbb{N}$, 使得

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &< d(f(x'_i, y'_i), f(x_i, y_i)) \\ &\leq d(f(x'_i, y'_i), f(x, y'_i)) + d(f(x, y'_i), f(x, y_i)) + d(f(x, y_i), f(x_i, y_i)) \\ &\leq \frac{1}{4n} + d(f(x, y'_i), f(x, y')) + d(f(x, y'), f(x, y)) + d(f(x, y), f(x, y_i)) + \frac{1}{4n} \\ &\leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

从而得到矛盾. 因此对任意 $n \geq 1$, E_n 是 X 中的稠密子集. $\square$

定理 5 设 G 是一个局部可数紧的正则的 F -群, X 是一个完全正则空间且满足 $X \times X$ 是局部可数紧的. 若 $\pi: G \times X \rightarrow X$ 是群 G 在 X 上的分别连续的作用, 则 π 是联合连续的.

证明 对于 $(g, x) \in G \times X$, 设 $\{(g_i, x_i)\}_{i \in I}$ 是 $G \times X$ 中的一个网并且 $(g_i, x_i) \rightarrow (g, x)$. 由于 $\{(g_i, x_i)\}_{i \in I}$ 的选取是任意的, 所以要证明 π 是联合连续的, 只需要证明 gx 是 $\{g_i x_i\}$ 的一个聚点.

假设存在 $i_0 \in I$, 使得 $gx \notin \overline{\{g_i x_i \mid i \geq i_0\}} =: W$. 因为 X 是完全正则空间, 故可选取连续函数 $\psi: X \rightarrow [0, 1]$ 使得 $\psi(gx) = 0$ 且 $\psi(W) = \{1\}$. 令 U 为 gx 的一个可数紧邻域. 因为 G 是 F -群且 π 是分别连续的, 映射 $\phi(t) = t^{-1}gx$ 是连续的; 又因为 G 是局部可数紧的, 可取单位元 $e \in G$ 的可数紧邻域 V , 使得 $\phi(V) \subseteq U$. 定义分别连续的映射 $f: G \times X \rightarrow [0, 1]$, $(t, y) \mapsto \psi(ty)$, 则对映射 $f|_{V \times U}$ 和 ϕ , 由引理 4 可知, 存在 V 中稠密的 G_δ 集 R , 使得 $f|_{V \times U}$ 在 $\{(t, t^{-1}gx) \mid t \in R\}$ 中的任一点处是联合连续的. 因为 $\phi: G \rightarrow X$ 是连续的, 所以可取 $a \in R$, 使得 $a^{-1}gx \in \text{int}(U)$. 则在 V 中 $g_i g^{-1}a \rightarrow a$ 且在 U 中 $a^{-1}g x_i \rightarrow a^{-1}gx$. 由于 f 在点 $(a, a^{-1}gx)$ 是联合连续的, 故

$$1 = f(g_i g^{-1}a, a^{-1}g x_i) = \psi(g_i x_i) \rightarrow f(a, a^{-1}gx) = \psi(gx) = 0.$$

从而得到矛盾. 因此 gx 是 $\{g_i x_i\}$ 的一个聚点. $\square$

设 X 是一个拓扑空间, 若 X 的一点紧化 X^* 是正则的, 则 X 本身必是局部紧的. 事实上, 由于 X 为 X^* 中的非空开集且 X^* 是正则的, 因此对任意 $x \in X$, 存在 x 的闭邻域 $W \subseteq X$. 由于 W 是 X^* 中的非空闭子集, 因此 W 在 X^* 中是紧的. 根据一点紧化的定义, 可知 W 在 X 中也是紧的. 从而 X 中任一点处都存在紧邻域.

注 6 局部可数紧的正则空间都是可数 Čech-完备空间^[9], 但局部可数紧的完全正则空间不一定是局部紧的 σ -紧的空间 (例如, 实数集 $\mathbb{R}$ 赋予离散拓扑); 另外, 一个局部可数紧的正则空间的一点紧化并不一定是正则的. (由文献 [7, 例 3.10.17] 可知, 存在可数紧但不是局部紧的正则空间, 从而该空间的一点紧化不是正则的.) 因此定理 3 不能覆盖定理 5.

注 7 首先, 相较于定理 2, 在定理 5 中, G 和 X 不一定是 Hausdorff 空间; 其次, 若 X 是局部紧的, 则 $X \times X$ 是局部可数紧的.

注 8 设 G 是一个群, 若对任意 $g \in G$, 左乘运算 $G \rightarrow G, h \mapsto gh$ 是连续的, 则称 G 是左拓扑群. 称一个空间 X 为是 p -空间, 若 X 是完全正则的且存在 X 的一列开覆盖 $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 满足: 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 取 $U_n \in \mathcal{U}_n$ 满足 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$, 则 $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U}_n$ 是紧集且对 X 中任意包含 K 的开集 U , 都存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $\bigcap_{i \leq n} \overline{U}_i \subseteq U$. Bouziad^[4] 证明了如下定理. 设 G 是一个左拓扑群并且是 Baire p -空间, X 是一个 p -空间. 若群 G 在 X 上的作用 π 是分别连续的, 则 π 是联合连续的. 值得注意的是, 局部紧的正则空间都是 p -空间, 但局部可数紧的正则空间不一定是 p -空间 (参见文献 [8, 例 3.23]). 因此, 上述定理不能覆盖定理 5.

致谢 感谢审稿人的宝贵意见和建议.

参考文献

- 1 Baire R. Sur les fonctions de variables réelles. Ann Mat Pura Appl (4), 1899, 3: 1–123
- 2 Bouziad A. The Ellis theorem and continuity in groups. Topology Appl, 1993, 50: 73–80
- 3 Bouziad A. Every Čech-analytic Baire semitopological group is a topological group. Proc Amer Math Soc, 1996, 124: 953–959
- 4 Bouziad A. Continuity of separately continuous group actions in p -spaces. Topology Appl, 1996, 71: 119–124
- 5 Christensen J P R. Joint continuity of separately continuous functions. Proc Amer Math Soc, 1981, 82: 455–461
- 6 Ellis R. Locally compact transformation groups. Duke Math J, 1957, 24: 119–125
- 7 Engelking R. General Topology. Berlin: Heldermann Verlag, 1989
- 8 Gruenhage G. Generalized metric spaces. In: Handbook of Set-Theoretic Topology. Amsterdam: North-Holland, 1984, 423–501
- 9 Namioka I. Separate continuity and joint continuity. Pacific J Math, 1974, 51: 515–531
- 10 Saint-Raymond J. Jeux topologiques et espaces de Namioka. Proc Amer Math Soc, 1983, 87: 499–504
- 11 Veech W A. Topological dynamics. Bull Amer Math Soc, 1977, 83: 775–830

A joint continuity theorem

Xiongping Dai & Yuxuan Xie

Abstract In this paper, we prove the following joint continuity theorem. Let G be a locally countably compact regular F -group and let X be a completely regular space such that $X \times X$ is locally countably compact. Let $\pi: G \times X \rightarrow X$ be an abstract group action. If the phase mapping π is separately continuous, then π is jointly continuous.

Keywords joint continuity, separate continuity, locally countably compact space

MSC(2020) 54H11, 54C05, 26B35

doi: 10.1360/SSM-2024-0388