



Ricci 孤立子和收缩分析

赵子颐¹, 朱小华^{2,3*}

1. 西湖大学理论科学研究院, 杭州 310030;

2. 北京大学数学科学学院, 北京 100871;

3. 北京国际数学研究中心, 北京 100871

E-mail: zhaoziyi@westlake.edu.cn, xhzhu@math.pku.edu.cn

收稿日期: 2025-07-07; 接受日期: 2026-01-07; 网络出版日期: 2026-02-06; * 通信作者

科技部重点项目 (批准号: 2020YFA0712800 和 2023YFA1009900) 和国家自然科学基金 (批准号: 12271009) 资助项目

摘要 本文综述关于 Ricci 流的古典解和 Ricci 孤立子, 并讨论一些典型的 Ricci 孤立子例子、稳态梯度 Ricci 孤立子刚性及其渐近分析方面的一些最新进展. 同时讨论一些有待解决的问题.

关键词 Ricci 流 Ricci 孤立子 古典解 收缩分析

MSC (2020) 主题分类 53E20, 53C20, 53C25, 58J05

1 前言

Ricci 流由 Hamilton^[51] 于 1982 年引入, 用来研究 3 维紧致流形的几何和拓扑. 它是定义在流形上有关 Riemann 度量的一个抛物型方程:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\text{Ric}(g), \quad (1.1)$$

其中 $\text{Ric}(g)$ 表示 Riemann 度量 g 的 Ricci 张量.

作为 Ricci 流的一类奇点模型, Ricci 孤立子在 Ricci 流的奇点分析中起着至关重要的作用 (参见文献 [53, 82]). 如果流形 M^n 上的一个完备 Riemann 度量 g 满足存在一个光滑的 (势) 函数 f , 使得¹⁾

$$R_{ij} + \sigma g_{ij} = \nabla_i \nabla_j f, \quad (1.2)$$

则称 g 为一个梯度型 Ricci 孤立子, 其中常数 σ 可规范化为 1, 0, -1, 分别对应于扩散 (expanding)、稳态 (steady) 或收缩 (shrinking) Ricci 孤立子. 通过由向量场 $X = \nabla f$ 所诱导的一族单参数变换以及适当的缩放、收缩或稳态 Ricci 孤立子可以产生一类古典解 (ancient solutions), 即这类 Ricci 流 (1.1) 的解对所有的时间 $t \in (-\infty, 0]$ 都有定义.

1) 本文始终假设 Ricci 孤立子为梯度型.

在维数 $n = 2$ 的情形, 只有 3 种古典 Ricci 孤立子, 分别是雪茄 (cigar) 解、圆球面以及 $\mathbb{R}^2$ 上的平坦度量 (参见文献 [31, 40]). 平坦度量也可以被视为一个扩散或收缩 Ricci 孤立子, 通常也称为 Gauss 度量.

在陈述 $n = 3$ 的结果之前, 先回顾如下定义.

定义 1.1 (κ -非塌缩 (κ -noncollapse)) 若存在某个常数 $\kappa > 0$, 使得当对于所有 $q \in B(p, r)$ 有

$$|\text{Rm}(q)| \leq r^{-2} \quad (r \leq r_0)$$

时, 满足

$$\text{vol}(B(p, r)) \geq \kappa r^n,$$

则称 (M, g) 在尺度至多为 r_0 上是 κ -非塌缩的. 如果上述条件对所有尺度 $r \leq \infty$ 都成立, 则称 (M, g) 是 κ -非塌缩的.

一个满足 κ -非塌缩条件的古典解 $g(t)$, 如果其曲率算子非负, 则称这样的古典解 $g(t)$ 为一个 κ -解 (κ -solution). 在 $n = 3$ 的情形, 曲率算子非负等价于截面曲率非负. 因此, 由 Hamilton-Ivey 的曲率拥挤估计 (curvature pinching estimate) [55] 可知, 任何非平坦的 3 维 κ -非塌缩古典解都是 κ -解.

对 3 维 κ -非塌缩 Ricci 孤立子, 有如下的分类结果.

定理 1.2 (3 维 κ -非塌缩 Ricci 孤立子的分类) 一个 3 维非平坦的 κ -非塌缩 Ricci 孤立子, 其万有覆盖空间必是以下两种情形之一:

- (1) (收缩型) 3 维圆球面或二维圆球面与一条直线的乘积空间;
- (2) (稳态型) Bryant 孤立子的一个缩放.

情形 (1) 来源于 Munteanu 和 Wang [75] 关于非负收缩 Ricci 孤立子的结果, 情形 (2) 来源于 Brendle [11] 的结果. Brendle 的结果解决了 Perelman [82] 关于 3 维 κ -非塌缩 Ricci 孤立子唯一性的猜想. Bryant 孤立子是一种旋转对称的稳态 Ricci 孤立子 (见例 (2.1)), 且其数量曲率的最大值规范化为 1 (参见文献 [18]).

定理 1.2 的分类结果可类似地推广到 3 维古典 κ -解 (参见文献 [13, 15]).

定理 1.3 (3 维古典 κ -解的分类) 一个 3 维非平坦古典 κ -解必是以下两种情形之一:

- (1) (非紧致型) 它等距于一族收缩圆柱 (或其某种商空间), 或者在适当缩放下等距于 Bryant 孤立子生成的 Ricci 流;
- (2) (紧致型) 它等距于一族 3 维收缩球面的商空间, 或者是 Perelman 解.

定理 1.3 中的情形 (1) 由 Brendle [13] 所证明, 同时也由 Bamler 和 Kleiner [8] 所证明. 情形 (2) 由 Brendle 等 [15] 所证明. 情形 (2) 中的 Perelman 解是定义在 3 维球面上的一个第 II 型紧致古典 κ -解 [82] (见例 (2.7)).

高维 Ricci 孤立子的分类显得非常困难. 近年来, 发现了许多具有不同拓扑和几何结构的 Ricci 孤立子的新例子. 本文着重讨论高维 Ricci 孤立子的一些刚性结果以及收缩解 (blow-down solutions) 的分类. 大部分结果来自我们近期的工作 (参见文献 [44, 46, 91, 92, 94, 95]).

本文余下内容的安排如下. 第 2 节讨论一些典型的高维古典解和 Ricci 孤立子以及它们的构造方法. 第 3–5 节讨论我们近期在稳态 Ricci 孤立子方面的工作, 特别是有关刚性结果和收缩解的分类. 本文也是我们早期综述文献的新发展 (参见文献 [42, 93]).

2 例子与构造

本节讨论一些典型 Ricci 孤立子及古典解的例子. 这些例子将帮助我们在接下来的 3 个小节中根据适当的几何条件对 Ricci 孤立子进行分类. 本节按不同的构造方法来讨论这些例子.

2.1 常微分方程方法

通过求解一类常微分方程, Bryant^[18] 构造出一类旋转对称的 Ricci 孤立子 (也可以参见文献 [32]). 设 $g_{S^{n-1}}$ 表示单位 $(n-1)$ - 球面 S^{n-1} 上的标准度量. 考虑在 $\mathbb{R}^n$ 上的一个扭曲积 (warped product) 度量的稳态 Ricci 孤立子, 其形式为

$$g = dr^2 + \phi(r)^2 g_{S^{n-1}}, \quad (2.1)$$

这里 $\phi(r)$ 是一个光滑函数, 定义在 $r \in (0, +\infty)$ 上, 且在 $r \rightarrow 0$ 时具有渐近行为 $\phi(r) = r + O(1)$.

例 2.1 (Bryant Ricci 孤立子) 存在唯一解 $\phi(r)$, 它仅依赖于原点的数量曲率, 使得度量形式 (2.1) 给出一个 $O(n)$ - 不变的稳态 Ricci 孤立子. 特别地, 称原点的数量曲率规范化成 1 的这样的孤立子为 Bryant Ricci 孤立子.

可以证明 ϕ 在无穷远处满足渐近性质,

$$C^{-1}r^{1/2} \leq \phi(r) \leq Cr^{1/2}, \quad \phi'(r) = O(r^{-1/2}), \quad \phi''(r) = O(r^{-3/2}). \quad (2.2)$$

此外, 度量 g 具有正的曲率算子, 截面曲率满足

$$K_{\text{rad}} = O(r^{-2}), \quad K_{\text{sph}} = O(r^{-1}),$$

其中 K_{rad} 表示径向方向的截面曲率, K_{sph} 表示球面方向的截面曲率. 度量 g 的体积增长满足

$$\text{Vol}(B(O, r)) \approx \int_0^r s^{\frac{n-1}{2}} ds \approx r^{\frac{n+1}{2}}.$$

通过常微分方程方法, Cao^[19] 在 30 年前构造了 $(\mathbb{C}^n; z)$ 上的扩散和稳态 Kähler-Ricci 孤立子. 这种 Kähler 度量 ω 都是 $U(n)$ - 不变的, 即由一个 Kähler 势函数 $\phi(r)$ 决定, 满足

$$\omega = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \phi(r), \quad (2.3)$$

其中 $r^2 = z\bar{z} = \sum z^i \bar{z}^i$. 类似于 Bryant Ricci 孤立子, Cao 的稳态 Kähler-Ricci 孤立子也仅依赖于原点的数量曲率, 并具有正的双截面曲率 (实际上截面曲率是正的). 此外, 当 $n \geq 2$ 时, 曲率具有线性衰减²⁾. 然而这种稳态 Kähler-Ricci 孤立子是 κ - 塌缩的. 实际上, 根据 Deng 和 Zhu^[43, 45] 的结果, 任何具有非负双截面曲率的 κ - 非塌缩稳态 Kähler-Ricci 孤立子必定是平坦的. 但是, 直到目前我们仍然不知道 Cao 的例子是否是唯一一类具有正双截面曲率的稳态 Kähler-Ricci 孤立子.

Feldman 等^[50] 将 Cao 的方法推广用于构造在 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 上的全纯线丛上的收缩 Kähler-Ricci 孤立子. 设 L 是 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 上的紧贴全纯线丛 (tautological line bundle), L^{-k} 是 L 的 k 重对偶线丛, 其中 k 是正整数. 则空间 $L^{-k} \setminus \mathbb{CP}^{n-1}$ 双全纯同构于 $\{\mathbb{C}^n \setminus 0\}/\mathbb{Z}_k$. 因此任何在 L^{-k} 上的 $U(n)$ - 不变度量都可以看作度量形式 (2.3) 在 $\{\mathbb{C}^n \setminus 0\}/\mathbb{Z}_k$ 上的延拓.

2) 当 $n = 1$ 时, 孤立子对应于具有指数衰减曲率的雪茄解.

例 2.2 (FIK Ricci 孤立子) 对于任意整数 $0 < k < n$ 和正数 $p > 0$, $(\mathbb{CP}^{n-1}, L^{-k})$ 上都存在一个完备非紧的收缩 Kähler-Ricci 孤立子, 并且它在无穷远处的切空间度量是一个定义在 $\mathbb{C}^n \setminus 0$ 上的 Kähler 锥度量, 其形式为

$$h(z) := |z|^{2p-2}(\delta_{\alpha\bar{\beta}} + (p-1)|z|^{-2}\bar{z}^{\bar{\alpha}}z^{\beta})dz^{\alpha}d\bar{z}^{\bar{\beta}}.$$

到目前为止, 已知的非平凡的完备收缩 Ricci 孤立子例子都来自 Kähler 几何. 在 $n = 2$ 时, 最近已经给予分类, 只有两种孤立子 [7, 69], 即上述的 FIK Ricci 孤立子和 Bamler 等 [7] 构造的爆破解 (参见下面的例 2.12).

Bryant 的方法可以被推广用于构造具有多个扭曲积的稳态 Ricci 孤立子. 2017 年, Appleton [3] 通过 Hopf 纤维化映射 $\pi: S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$ 考虑 L^{-k} 的对偶线丛 $(\mathbb{CP}^{n-1}, L^k)$ 上以下扭曲积度量:

$$g = ds^2 + g_{a(s), b(s)} = ds^2 + a(s)^2 \sigma \otimes \sigma + b(s)^2 \pi^* g_{\mathbb{CP}^{n-1}}, \quad (2.4)$$

其中 $g_{\mathbb{CP}^{n-1}}$ 是 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 上的 Fubini-Study 度量.

例 2.3 (Appleton 的例子) 设 $k > n$, 则存在 $\mathbb{R}_{>0} \times \{S^{2n-1}/\mathbb{Z}_k\}$ 上一个形式为 (2.4) 的完备 κ -非塌缩稳态 Ricci 孤立子. 这个完备空间与 L^k 微分同胚. 此外, 有

$$a \sim b \sim C\sqrt{s}, \quad \text{当 } s \rightarrow \infty \text{ 时},$$

其中常数 $C > 0$, 且该孤立子在无穷远处渐近于 $2n$ 维 Bryant Ricci 孤立子的 $\mathbb{Z}_k$ -商空间. 特别地, g 的曲率算子在紧集外是正的, 且数量曲率在无穷远处具有线性衰减.

2.2 扰动或形变方法

针对一类在无穷远处渐近于一个锥度量的扩散 Ricci 孤立子, Deruelle [47, 48] 给出了如下的定义.

定义 2.4 (渐近锥度量的扩散 Ricci 孤立子) 设 (X^{n-1}, g_X) 是一个紧致的 Riemann 流形, $(C(X), dr^2 + r^2 g_X)$ 是具有链接 (link) X 的锥空间. 称一个扩散 Ricci 孤立子 $(M^n, g; f)$ 具有在无穷远处渐近于锥空间 $(C(X), dr^2 + r^2 g_X)$ 的性质, 若存在一个紧集 $K \subset M$ 、一个正的半径 R 以及一个微分同胚

$$\phi: M \setminus K \rightarrow C(X) \setminus B(o, R),$$

使得以下条件满足:

$$\sup_{\partial B(o, r)} |\nabla^k(\phi_* g - g_{C(X)})|_{g_{C(X)}} \leq O(r^{-2-k}), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

$$f(\phi^{-1}(r, x)) = \frac{r^2}{4}, \quad \forall (r, x) \in C(X) \setminus B(o, R),$$

$$f_k(r) = o(1), \quad \text{当 } r \rightarrow +\infty \text{ 时}, \quad \forall k \geq 0,$$

其中 $f_k(r)$ 取多项式衰减 $f_k(r) = r^{-\tau-k}$, 或指数衰减 $f_k(r) = r^{-\tau+k}e^{-r^2/4}$.

Deruelle [47] 用连续性方法构造了如下扩散 Ricci 孤立子.

例 2.5 设 (X^{n-1}, g_X) ³⁾ 是一个光滑的单连通紧致 Riemann 流形, 满足曲率算子 $\text{Rm}(g_X) \geq 1$. 则存在唯一一个具有非负曲率算子扩散 Ricci 孤立子, 它在无穷远处渐近于锥空间 $(C(X), dr^2 + r^2 g_X)$.

3) 根据 Böhm 和 Wilking 的工作, X 一定微分同胚于 $n-1$ 维球面.

根据 Böhm 和 Wilking^[10] 的结果, 可以通过规范化 Ricci 流来得到一族度量 $g(s)$ ($s \in [0, +\infty]$), 使得这些度量具有固定的体积, 并逐渐形变为球面 $(X, c^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}})$, 其中

$$c^{n-1} = \text{Vol}(X, g_X) / \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}, g_{\mathbb{S}^{n-1}}).$$

因此, 初始的锥空间 $(C(X), dr^2 + r^2 g_X)$ 可通过一族连续的锥度量与 $(C(\mathbb{S}^{n-1}), dr^2 + (cr)^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}})$ 相连接, 且这一族锥度量具有一致正定的有界曲率算子. 后者是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Euclid 商度量, 它也可视为一个扩散 Ricci 孤立子. 通过形变方法, Deruelle^[47] 证明了存在一族扩散 Ricci 孤立子, 具有非负曲率算子, 并且在无穷远处分别渐近于上述一族锥空间.

类似于上述形变方法, Cifarelli 等^[37] 通过解一族复 Monge-Ampère 方程构造了稳态 Kähler-Ricci 孤立子. 设 (C_0, g_0, J_0) 是一个复维数为 $n \geq 2$ 的 Calabi-Yau 锥空间. 则径向函数 r 满足

$$\omega_{g_0} = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} r^2.$$

这个形式给出了 Ricci 平坦度量 g_0 . 根据 Cao^[19] 的常微分方程 (ordinary differential equation, ODE) 构造方法, Cifarelli 等在文献 [37, 命题 2.18] 中证明了存在一族不完备的稳态 Kähler-Ricci 孤立子 ω_a , 它们具有相同的孤立子向量场 $X = 2r\partial_r$, 并且定义在 C_0 上, 在无穷远处具有与 (C_0, g_0) 相同的渐近行为. 注意到 ω_a 通常不是锥度量.

设 $\pi: M \rightarrow C_0$ 是 C_0 的极小化消解 (crepant resolution), 具有诱导的复结构 $J = \pi^* J_0$, 使得在 C_0 上的实全纯环作用由 $J_0 r \nabla r$ 生成并延拓到 M 上, 且 C_0 上的全纯向量场 $2r\partial_r$ 提升为 M 上的全纯向量场 $X = \pi^*(2r\partial_r)$. 令 $t = \log(r^2)$, 并在 C_0 上定义 Kähler 形式 $\hat{\omega} = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} (\frac{nt^2}{2})$. Cifarelli 等^[37] 得到了如下结论.

例 2.6 (Cifarelli-Conlon-Deruelle 的稳态 Kähler-Ricci 孤立子) 在 M 的每个 Kähler 类 $\mathfrak{k}$ 中, 存在唯一一个完备稳态 Kähler-Ricci 孤立子 $\omega \in \mathfrak{k}$, 其孤立子向量场为 X 且 $\mathcal{L}_{JX}\omega = 0$, 使得对于所有 $\varepsilon \in (0, 1)$, 存在常数 $C(i, j, \varepsilon) > 0$, 满足

$$|\hat{\nabla}^i \mathcal{L}_X^{(j)}(\pi_* \omega - \hat{\omega})|_{\hat{g}} \leq C(i, j, \varepsilon) t^{-\varepsilon - \frac{i}{2} - j}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}_0,$$

这里 $\hat{g}$ 表示与 $\hat{\omega}$ 关联的 Kähler 度量, $\hat{\nabla}$ 是对应的 Levi-Civita 联络.

在例 2.6 中, Cifarelli 等还进一步证明了 Kähler-Ricci 孤立子 ω 在无穷远处以多项式阶渐近到锥空间上稳态 Kähler-Ricci 孤立子 (C_0, ω_a) . 上述例子表明, 即使稳态 Ricci 孤立子具有相同的渐近拓扑和度量, 一般情况下也不是唯一的.

2.3 缩放 Ricci 流的收敛方法

通过缩放一系列 Ricci 流, Perelman^[83] 首先构造出 S^3 上一个非平凡古典解例子.

考虑 S^3 上一个 Ricci 流, 该流的初始度量类似于一个长圆柱 $S^2 \times I$ (半径为 1, 长度 $L \gg 1$), 两端光滑地连接着两个球帽的度量. 根据 Hamilton^[51] 的工作, 可知经过正规化后, 这个 Ricci 流收敛到 S^3 上的一个圆球度量. 将初始度量进行缩放, 并选择适当的时间参数, 使得流从 $t_0 = t_0(L) < 0$ 时开始, 在 $t = 0$ 时发生奇性, 并且在 $t = -1$ 时, 最大截面曲率与最小截面曲率的比值等于 $1 + \epsilon$. 所以可以构造出一系列 Ricci 流, 经过取适当的子序列 Ricci 流, 这列 Ricci 流在 Cheeger-Gromov 意义下收敛到 S^3 上的一个 κ -解.

例 2.7 (Perelman 解) 在 S^3 上存在一个第 II 型的 κ -解.

一个紧致的 κ -解 $(N, h(t))$ ($t \in (-\infty, 0]$) 被称为第 I 型, 如果它满足

$$\sup_{N \times (-\infty, 0]} (-t)|R(x, t)| < \infty;$$

否则, 它被称为第 II 型, 即满足

$$\sup_{M \times (-\infty, 0]} (-t)|R(x, t)| = \infty.$$

由于任何的第 I 型的紧致古典 κ -解都是一个收缩 Ricci 孤立子 (参见文献 [36, 79]), 由 Hamilton 定理 [51] 可知, 它一定是一个 3 维的收缩球面族的商空间, 所以 Perelman 解一定是第 II 型.

从上面的构造可知, Perelman 解具有 $Z_2 \times O(3)$ 对称性, 并且随着时间向负无穷推移, 在中间部分 Perelman 解越来越像一个圆柱体. 最近, Angenent 等 [2] 证明了如下渐近性质.

定理 2.8 [2] 设 $(S^3, g(t))$ 是 Perelman 解. 则可以找到一个参考点 $q \in S^3$, 使得以下性质成立. 令 $F(z, t)$ 表示在 $(S^3, g(t))$ 中以参考点 q 为原点的对称球的半径, 其中 z 是距离 q 点的符号距离, 则函数 $F(z, t)$ 满足下面的渐近展开.

(i) 固定一个充分大的数 L , 当 $t \rightarrow -\infty$ 和 $|z| \leq L\sqrt{-t}$ 时, 有

$$F(z, t)^2 = -2t - \frac{z^2 + 2t}{2\log(-t)} + o\left(\frac{-t}{\log(-t)}\right).$$

(ii) 固定一个充分小的数 $\theta > 0$, 当 $t \rightarrow -\infty$ 和 $|z| \leq 2\sqrt{1-\theta^2}\sqrt{(-t)\log(-t)}$ 时, 有

$$F(z, t)^2 = -2t - \frac{z^2}{2\log(-t)} + o(-t).$$

(iii) 参考点 q 与每个尖端的距离为 $(2 + o(1))\sqrt{(-t)\log(-t)}$, 且每个尖端的数量曲率为 $(1 + o(1))\frac{\log(-t)}{-t}$; 如果将其中一个尖端的数量曲率规范化为 1, 收缩后的一族度量, 围着尖端随着 $t \rightarrow -\infty$ 收敛到 Bryant 孤立子.

Perelman 解的高维构造最近也得到了研究, 可以参见文献 [17, 54].

Lai [60] 用另一种缩放 Ricci 流的方法, 构造出一类新的 $n \geq 3$ 维具有正曲率算子的稳态 Ricci 孤立子. Lai 的构造基于例 2.5 中 Deruelle 的扩散 Ricci 孤立子.

从例 2.5 中可构造出一列具有非负曲率算子和 $Z_2 \times O(n-1)$ 对称的扩散 Ricci 孤立子 $(M_i, g_i, p_i; f_i)$, 其中 p_i 是 $Z_2 \times O(n-1)$ -作用下唯一的不动点. 将 Ricci 曲率张量在点 p_i 处的特征值记为 $\lambda_1(g)$ 和 $\lambda_2(g) = \dots = \lambda_n(g)$. 这列 Ricci 孤立子的渐近体积密度趋向零, 并且对于任意给定的 $\alpha \in (0, 1)$, 有 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(g_i; p_i) = \alpha$. 通过紧性, Lai 证明了 $(M_i, g_i, p_i; f_i)$ 存在一个子列收敛到一个 $Z_2 \times SO(n-1)$ 对称的非负曲率稳态 Ricci 孤立子 $(M_\alpha, g_\alpha, f_\alpha, p_\alpha)$. 特别地, 它满足 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(g_\alpha; p_\alpha) = \alpha$. 由于 $\mathbb{R} \times \text{Bry}_{n-1}$ ($n \geq 4$) 或 $\mathbb{R} \times \text{Cigar}$ ($n = 3$) 在原点满足 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(g) = 0$, 以及 n 维 Bryant 孤立子在原点满足 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(g) = 1$ ($i = 3, \dots, n$), 因此 Lai 构造的这类新的稳态 Ricci 孤立子 $(M_\alpha, g_\alpha, p_\alpha; f_\alpha)$ 与这 3 种已知的孤立子完全不一样.

这类稳态 Ricci 孤立子除了 $n = 3$ 以外, 都是 κ -非塌缩的. 特别地, 她解决了 Hamilton 的一个有关飞翼 (flying wings) 存在性的猜想. 这种飞翼既不是 3 维 Bryant 孤立子, 也不是 $\mathbb{R} \times \text{Cigar}$. 在 $n = 3$ 时, 由定理 1.2 可知 3 维飞翼都是 κ -塌缩的. 为了避免混淆, 称 Lai 构造的稳态 Ricci 孤立子为飞翼.

例 2.9 (飞翼) 对于任意维数 $n \geq 3$, 存在一族具有 $Z_2 \times O(n-1)$ 对称性的稳态 Ricci 孤立子, 且其曲率算子非负. 此外, 除 $n = 3$ 的情况外, 它们都是 κ -非塌缩的.

根据 Perelman^[82] 的结果, 可知任意具有非负曲率的古典解的渐近体积密度必须为零. 对于 3 维飞翼, 其无穷远处的切锥 (渐近锥) 是一个以区间 $[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]$ 为链接的度量锥, 其中 $\alpha \in [0, \pi]$. Lai^[61] 事实上证明了所有 3 维稳态孤立子都具有 $O(2)$ 对称性. 设 Γ_0 为 $O(2)$ 作用的不动点集, 称其为 Ricci 孤立子的边缘线. 可以验证 Γ_0 同时也是向量场 ∇f 的积分曲线. 根据稳态 Ricci 孤立子方程, 数量曲率沿 Γ_0 是单调递减的. Lai 进一步证明了渐近锥的角度与沿边缘方向的数量曲率极限之间满足如下关系:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} R(\Gamma_0(s)) = R(p) \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right). \quad (2.5)$$

利用这个公式, Lai^[62] 验证了具有给定任意切锥角度 $\alpha \in [0, \pi]$ 的 3 维飞翼的存在⁴⁾. 她还证明了唯一一个满足其渐近锥是射线的 3 维稳态 Ricci 孤立子是 Bryant 孤立子. 因此, 由 (2.5) 可知, 对于 3 维飞翼族, 其沿边缘方向的数量曲率不会衰减到零.

对于维数 $n \geq 4$ 的 Lai 的例子, 除了 κ -非塌缩性质以外, 目前我们对其性质了解甚少. Haslhofer^[54] 猜测 (或受平均曲率流中文献 [30] 的启发), 任意 4 维非负曲率且 κ -非塌缩的稳态梯度 Ricci 孤立子的渐近锥要么是一条射线, 要么分裂出一条直线. 在 $n = 4$ 情形, 这个猜测的部分结果已被我们得到验证 (参见文献 [94]). 事实上, 我们可以分类所有 4 维具有非负曲率且 κ -非塌缩的稳态梯度 Ricci 孤立子的收缩解, 见推论 3.9.

类似于 (2.5), 我们也有高维的推导公式. 所以, 若 Haslhofer 猜测成立, 则 $n \geq 4$ 维 Lai 的 Ricci 孤立子例子的数量曲率在无穷远处一致衰减至零. 由此可进一步猜测, 势函数 f 的等势面在无穷远处会越来越接近 Perelman 解. 事实上, 我们有以下猜想.

猜想 2.10 n ($n \geq 4$) 维飞翼的数量曲率满足如下估计:

$$\frac{C^{-1}}{\rho(\cdot)} \leq R(\cdot) \leq \frac{C \log \rho(\cdot)}{\rho(\cdot)}, \quad \text{当 } \rho(\cdot) \gg 1 \text{ 时},$$

其中常数 $C > 0$ 依赖于孤立子的度量 g .

最近, Ma 等^[72] 在假设曲率具有快速衰减条件的前提下在 4 维情形中验证了上述猜想.

研究例 2.9 中稳态 Ricci 孤立子的体积增长性质也是一个有趣的问题. 在假设猜想 2.10 成立的前提下, 可以证明如下命题.

命题 2.11 4 维飞翼的体积增长满足

$$\text{Vol}(B(p, r)) \sim r^{\frac{5}{2}} \sqrt{\log r}, \quad \text{当 } r \gg 1 \text{ 时}.$$

证明 首先估计 Perelman 解的体积. 由于该度量可以写成一类扭曲乘积形式, 依据定理 2.8(ii), 函数 F 对任意 z 和 $-t \gg 1$ 满足

$$F(z, t) \leq 2\sqrt{(-t)}.$$

根据定理 2.8(iii), 可以得到 Perelman 解当 $-t \gg 1$ 时的体积上界估计为

$$\text{Vol}(\text{Pel})(t) \leq 4\pi(2\sqrt{(-t)})^2 \sqrt{(-t) \log(-t)} = 16\pi(-t)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\log(-t)}. \quad (2.6)$$

4) 为简单起见, 这种 $O(n-1)$ 对称的 n 维稳态 Ricci 孤立子统称为飞翼. 但是我们不知道是否只有例 2.9 中的例子.

另外, 利用定理 2.8 中中间区域的函数 F 的估计, 可以得到当 $|z| \leq \sqrt{(-t)\log(-t)}$ 且 $-t \gg 1$ 时有如下估计:

$$F(z, t)^2 \geq -2t - \frac{2z^2}{3\log(-t)}.$$

由此可得 Perelman 解的体积下界增长估计

$$\begin{aligned} \text{Vol(Pel)}(t) &\geq 2\pi \int_0^{\sqrt{(-t)\log(-t)}} \left(-2t - \frac{2z^2}{3\log(-t)} \right) dz \\ &= 4\pi \left((-t)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\log(-t)} - \frac{1}{9} (-t)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\log(-t)} \right) \\ &= \frac{32}{9} \pi (-t)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\log(-t)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

接下来在假设其渐近行为与 Perelman 解相似情况下, 估计 4 维 Lai 的飞翼孤立子的体积增长. 选择一个充分大的常数 r_0 , 使得当 $r \geq r_0$ 时, 水平集 $\Sigma_r = \{x : f(x) = r\}$ 在一致缩放下足够类似于 Perelman 解. 因此对所有 $-t \geq r_0$ 估计式 (2.6) 和 (2.7) 成立. 由 (2.6) 得到

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B(p, r)) &= \int_0^r \text{Vol}(\Sigma_s) ds \\ &\leq \int_0^{r_0} \text{Vol}(\Sigma_s) ds + 16\pi \int_{r_0}^r s^{\frac{3}{2}} \sqrt{\log s} ds \\ &= C + \frac{32}{5} \pi r^{\frac{5}{2}} \sqrt{\log r} - \frac{32}{5} \pi r_0^{\frac{5}{2}} \sqrt{\log r_0} - \frac{16}{5} \pi \int_{r_0}^r s^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{\log s}} ds, \end{aligned} \quad (2.8)$$

即有

$$\text{Vol}(B(p, r)) \leq \frac{16}{5} \pi r^{\frac{5}{2}} \sqrt{\log r} - C.$$

由 (2.7) 得到

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B(p, r)) &\geq \frac{64}{45} \pi r^{\frac{5}{2}} \sqrt{\log r} - \frac{32}{45} \pi \int_{r_0}^r s^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{\log s}} ds - C \\ &\geq \frac{64}{45} \pi r^{\frac{5}{2}} \sqrt{\log r} - \frac{3}{5} \int_{r_0}^r s^{\frac{3}{2}} \sqrt{\log s} ds - C \\ &\geq \frac{64}{45} \pi r^{\frac{5}{2}} \sqrt{\log r} - \frac{3}{5} \text{Vol}(B(p, r)) - C, \end{aligned}$$

即有

$$\text{Vol}(B(p, r)) \geq \frac{8}{9} \pi r^{\frac{5}{2}} \sqrt{\log r} - C.$$

至此完成了证明. □

2.4 奇点模型方法

根据 Hamilton [53] 对有限时间的奇点模型分类结果, 第 I 型奇点的爆破解是一类古典解. 由 Perelman [82] 的 κ -非塌缩性结论, 这类古典解一定是收缩 Ricci 孤立子 (参见文献 [33, 49, 76]). 而第

II 型奇点的爆破解则是永恒解 (eternal), 即 Ricci 流存在于任意的时间 $t \in (-\infty, \infty)$ 上. 最近, Bamler 等 [7] 通过研究一个有复环面作用的复曲面 (toric surface) 上的 Kähler-Ricci 流, 构造出了一个爆破 Ricci 孤立子. 该曲面是 $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ 在一点处的爆破空间, 即 $M = Bl_x(\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1)$.

通过在 M 上选择一个适当的具有复环面作用的不变初始度量, Ricci 流 $\omega(t)$ 在其最大时间 T 会收缩该空间中的一个例外除子 (exceptional divisor) 和一个除子线丛, 塌缩成 $\mathbb{CP}^1$. 要证明奇点属于第 I 型, 关键是要得到第 I 型爆破解是一个具有曲率一致有界的光滑古典解. 根据 Bamler [4] 最近关于 Ricci 流的切向 Ricci 流 (tangent Ricci flow) 的紧性理论, 此类爆破解是一个具有孤立奇点的轨形 (orbifold) 空间上的古典解. 因此, 余下的步骤就是证明该解具有一致有界曲率, 且奇点可去.

例 2.12 $N = Bl_x(\mathbb{C} \times \mathbb{CP}^1)$ (即 $\mathbb{C}^1 \times \mathbb{CP}^1$ 在一点处的爆破空间) 存在具有复环面作用不变的一个收缩 Kähler-Ricci 孤立子. 这个 Ricci 孤立子是 $M = Bl_x(\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1)$ 上 Ricci 流的第 I 型奇点模型.

由于例 2.12 中的具有复环面作用的复曲面 N 与例 2.2 中的纤维丛空间不同, 因此 N 上的这个收缩 Kähler-Ricci 孤立子不会是 FIK (Feldman-Ilmanen-Knopf) Ricci 孤立子. 另外, 根据 Conlon 等 [39] 的分类结果, FIK Ricci 孤立子是复曲面中唯一一个具有曲率衰减性质的收缩 Kähler-Ricci 孤立子. 因此, 例 2.12 中的 Ricci 孤立子在无穷远处不会具有曲率衰减. 到目前为止, 例 2.12 中的 Ricci 孤立子是唯一已知的在 $n = 4$ 维情形下具有有界曲率但曲率不衰减至零的完备且不可分裂的收缩 Ricci 孤立子.

Ricci 流的第 II 型奇点也会出现在 Kähler-Ricci 流中. 在一类称为 Fano G -流形或更一般的 Fano 水平对称 (horosymmetric) 流形上, Li 等 [68] 及 Tian 和 Zhu [88] 证明了如下定理.

定理 2.13 [68, 88] 在任意不存在 Kähler-Ricci 孤立子的 Fano G -流形或 Fano 水平对称流形上, 若初始度量取在反典则 Kähler 类, 则 Kähler-Ricci 流一定会产生第 II 型奇点.

目前已知存在两个 $SO_4(\mathbb{C})$ 的 Fano 紧化空间和一个 $Sp_4(\mathbb{C})$ 的 Fano 紧化空间, 它们上面均不存在 Kähler-Ricci 孤立子 (参见文献 [41, 70, 96]). 因此, 作为定理 2.13 的一个应用, 可得到以下永恒解的例子.

例 2.14 (G -流形上的第 II 型奇点) 存在两个 $SO_4(\mathbb{C})$ 和一个 $Sp_4(\mathbb{C})$ 的 Fano 紧化空间, 其上 Kähler-Ricci 流会产生第 II 型奇点. 因此, 对应的 Ricci 流爆破解都是永恒解.

目前尚不清楚定理 2.13 中所对应的爆破解是否恰好是稳态 Kähler-Ricci 孤立子⁵⁾. 同时, 还有一个有意义的问题是, 这些爆破解是否仍然保留了原始的 G 群作用.

3 κ -解和 Ricci 孤立子

定理 1.3 中有关 3 维 κ -非塌缩的古典解分类结果的证明很大程度依赖于曲率非负条件. 然而在维数 $n \geq 4$ 的情形, 非负曲率算子条件并不会自动成立. 所以, 要得到像上一节讨论的一般性的分类结果很困难. 但是在假设 κ -非塌缩的古典解满足一致 PIC (positive isotropic curvature) 以及弱 PIC2 曲率条件下, Brendle 等 [14] 及 Brendle 和 Naff [17] 能证明这种古典解的万有覆盖空间一定是收缩球面或收缩圆柱.

本节在其他自然的几何条件下讨论高维古典 κ -解与 Ricci 孤立子之间的关系. 一些主要结果的证明方法和技术分析将在下面两小节讨论.

5) 事实上, 至今尚未发现任何一个 Ricci 流的 II 型奇点的永恒爆破解, 不是稳态 Ricci 孤立子的例子.

3.1 第 I 型古典 κ - 解与收缩 Ricci 孤立子

第 I 型 κ - 非塌缩古典解或奇点模型收敛到非平坦孤立子的工作分别由 Enders 等 [49] 及 Cao 和 Zhang [24] 独立完成. 特别当流形是紧致情形时, 这种古典解一定是收缩孤立子流 (参见文献 [79]). 当流形是非紧致情形时, 进一步的讨论可参见文献 [71]. 其他与第 I 型 κ - 非塌缩古典解分类有关的更多工作可参见文献 [2, 15, 16, 29, 67].

有关第 I 型 κ - 非塌缩的古典解的分类, 已有许多重要成果. 2002 年, Perelman [82] 证明了 3 维单连通的 κ - 非塌缩的且有非负截面曲率收缩 Ricci 孤立子只能是 $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R} \times S^2$ 或 S^3 . 此后, Cao 等 [21] 在不要求 κ - 非塌缩的前提下推广了这一结果. 在高维情形下, Perelman 的结果在满足非负曲率算子条件的 4 维收缩 Ricci 孤立子中得到了验证 (参见文献 [76]). 在一致正迷向曲率条件下, Li 等 [65]、Naff [77]、Ni 和 Wallach [80, 81] 完成了进一步的分类工作. Cao 和 Chen [23] 以及 Chen 和 Wang [28] 也分别在共形平坦条件下对收缩 Ricci 孤立子进行了分类.

在假设收缩 Ricci 孤立子的 Riemann 曲率张量一致衰减到零的条件下, Munteanu 和 Wang [74] 证明了这种收缩 Ricci 孤立子具有渐近锥结构. Kotschwar 和 Wang [58, 59] 进一步证明了具有渐近锥性质的收缩 Ricci 孤立子具有唯一性特征.

对于非紧 Kähler-Ricci 收缩孤立子曲面, Li 和 Wang [69] 最近证明了曲率有界性. 从而结合 BCCD (Bamler-Cifarelli-Conlon-Deruuelle) 的例子 (见例 2.12) 和 Conlon 等 [39] 的分类结果可知, 只有两个非平凡非紧 Kähler-Ricci 收缩孤立子曲面, 即 FIK 例子 (见例 2.2) 和 BCCD 例子. 所以可以得到 Kähler-Ricci 收缩孤立子曲面的完整分类. 这项分类成果需要一系列先期的工作, 如文献 [7, 38, 39, 85–87, 89] 等.

3.2 稳态 Ricci 孤立子的刚性

第 II 型古典 κ - 解与 Ricci 孤立子之间的关系, 至今非常不清楚, 如脚注 5) 中的问题. 在一定的正曲率条件下, Hamilton [52] 曾猜想这类奇点模型应对应于稳态 Ricci 孤立子. 这个猜想被 Hamilton 本人在假设非负曲率算子条件下解决. 对 Kähler 流形, Cao [20] 在假设双全纯曲率非负的条件下也证明了相应的结果 (也可参见文献 [52, 78]). 最近, Zhang [90] 在假设无穷远处的对数 Sobolev 泛函 (也称对数熵) 有小尺度限制时, 证明了第 II 型古典 κ - 解一定是平坦度量.

Bryant 孤立子是一个典型稳态 Ricci 孤立子 (见例 2.1). 为了研究 Bryant 孤立子刚性, Brendle [12] 引进了下面渐近圆柱 (asymptotically cylindrical) 的概念.

定义 3.1 一个完备的稳态 Ricci 孤立子 $(M^n, g; f)$ 被称为具有渐近圆柱性质, 如果它满足以下条件.

(i) 当 $\rho(x) \gg 1$ 时, 其数量曲率满足估计

$$\frac{C_1}{\rho(x)} \leq R(x) \leq \frac{C_2}{\rho(x)},$$

其中 $\rho(x)$ 表示点 x 到某固定点的距离, C_1 和 C_2 是两个正的常数.

(ii) 设 p_i 是一列趋于无穷远的标记点序列. 考虑规范化 Ricci 流

$$g_{p_i}(t) = r_i^{-1} \phi_{r_i t}^*(g), \quad (3.1)$$

其中 $r_i R(p_i) = 1$, ϕ_t 是由 $-\nabla f$ 所生成的单参数变换族. 则流 $(M, g_{p_i}(t); p_i)$ 在 Cheeger-Gromov 意义下收敛到一族收缩圆柱 $(S^{n-1} \times \mathbb{R}, \bar{g}(t))$, $t \in (-\infty, 0]$, 即极限量 $\bar{g}(t)$ 为

$$\bar{g}(t) = (1-t)g_{S^{n-1}(1)} + ds^2. \quad (3.2)$$

通常称渐近圆柱结构为标准渐近模型.

定理 3.2 ^[12] 若 (M^n, g) ($n \geq 3$) 是一个具有正截面曲率的稳态梯度 Ricci 孤立子, 且其在无穷远处满足渐近圆柱性质, 则它在缩放意义下等距同构于 Bryant 孤立子.

定理 3.2 事实上对古典 κ - 解也成立, 这是由 Li 和 Zhang ^[66] 证明的. 另外, Deng 和 Zhu ^[44] 发现定义 3.1 中的条件 (i) 蕴涵条件 (ii) ⁶⁾. 事实上, 他们证明了如下定理.

定理 3.3 ^[46] 设 (M^n, g) 是一个 $n \geq 4$ 维数的 κ - 非塌缩的稳态梯度 Ricci 孤立子, 并且其曲率算子非负. 若存在常数 C_0 和 r_0 , 使得对所有满足 $\rho(x) \geq r_0$ 的点 $x \in M$ 有

$$R(x) \leq \frac{C_0}{\rho(x)}, \quad (3.3)$$

则在缩放意义下 (M^n, g) 等距同构于 Bryant 孤立子.

在 4 维情形下, 定理 3.3 可进一步加强为在非负截面曲率条件下也成立. 最近, 可将定理 3.2 中的曲率条件削弱为 P - 拥挤条件 (参见第 4.2 小节) ^[91], 具体地, 我们证明了以下结果.

定理 3.4 设 (M^n, g) 是一个维数 $n \geq 4$ 的稳态梯度 Ricci 孤立子, 且满足 P - 拥挤条件. 若其满足渐近圆柱性质, 则 (M, g) 在缩放意义下同构于 Bryant 孤立子.

关于 Bryant 孤立子的更多刚性结果, 可参见文献 ^[22, 25, 28, 56, 57, 64].

3.3 古典 κ - 解的渐近分析

像定理 3.2 和 3.4 中的分类很依赖于孤立子满足的渐近圆柱性质, 研究稳态 Ricci 孤立子的渐近行为对分类至关重要. 众所周知, 在某些曲率假设条件下, Perelman 关于约化体积 (reduced volume) 的单调性公式蕴涵了渐近收缩孤立子的存在 (参见文献 ^[82, 命题 11.2]). Bamler ^[4] 引进了 Ricci 流的弱解和切向 Ricci 流概念, 并证明了古典解在无穷远处存在切向 Ricci 流. 在进一步假设 Nash 熵有一致有界性且底流形是紧致的条件下, 他证明了该切向 Ricci 流是一个具有奇点集 (余维为 4) 的度量孤立子 (metric soliton) (参见文献 ^[4, 第 1.8 小节] 和 ^[4, 定理 7.8]). Chan 等 ^[27] 证明了, 若渐近收缩孤立子存在, 则它与无穷远处的切向 Ricci 流一致. 因此, 切向 Ricci 流可视作 Perelman 正曲率条件下的渐近收缩孤立子的一般推广.

因此可以问一个自然的问题: 对于古典解, 无穷远处的切向 Ricci 流是否唯一 (参见文献 ^[54]). Chan 等 ^[26] 能证明, 若古典解的 Nash 熵有下界, 且其存在一个光滑闭合的切向 Ricci 流, 则该切向 Ricci 流唯一. 最近, Bamler 等 ^[6] 进一步证明了, 在 4 维的情形下, 若该稳态梯度 Ricci 孤立子为奇点模型, 且定义在带有孤立奇点的轨形上, 则其无穷远处的切向 Ricci 流唯一.

Perelman 的渐近收缩孤立子和 Bamler 的切向 Ricci 流, 是用来刻画 ℓ - 中心或 H_n - 中心邻域的几何行为的. 但是要研究无穷远处的整体渐近行为, 则需要对所有点列附近的邻域作收缩分析 (blow-down analysis). 收缩分析源于 Hamilton ^[53] 的降维 (dimension reduction) 分析和 Perelman ^[82] 的 3 维古典解的紧性理论. Perelman 的古典解的紧性定理的高维推广可参见文献 ^[34, 43, 73].

对外区域具有非负曲率算子的稳态 Ricci 孤立子, 我们证明了如下紧性和分裂结果 (参见文献 ^[95, 定理 2.2] 或 ^[92, 定理 1.2]).

定理 3.5 设 (M^n, g) 是 $n \geq 4$ 维非紧致 κ - 非塌缩的稳态梯度 Ricci 孤立子, 在 $M \setminus K$ 上满足 $R_m \geq 0$, 其中 K 为 M 上的紧集. 设 $p_i \rightarrow \infty$ 是 M 中趋于无穷远的任意点列, 记 $g_{p_i}(t)$ 为按定义 3.1

6) Deng 和 Zhu ^[46] 也证明了定义 3.1 中的条件 (ii) 也能推导出条件 (i).

所给出的 Ricci 孤立子的规范化 Ricci 流. 则 $(M, g_{p_i}(t); p_i)$ 在 Cheeger-Gromov 意义下收敛到如下一个分裂 Ricci 流 (splitting flow):

$$\bar{g}(t) = h(t) + ds^2, \quad \text{在 } N \times \mathbb{R} \text{ 上}, \quad (3.4)$$

其中 $h(t)$ 是定义在一个 $n-1$ 维流形 N 上的古典 κ -解, $t \in (-\infty, 0]$.

为简单起见, 称 $(N \times \mathbb{R}, \bar{g}(t))$ 为从 (M, g) 得到的收缩古典解, $(N, h(t))$ 为余维数为一的分裂收缩解. 对分裂收缩解 $(N, h(t))$, 文献 [94] 证明了如下定理.

定理 3.6 设 (M^n, g) 是 $n \geq 4$ 维非紧致 κ -非塌缩的稳态梯度 Ricci 孤立子, 在 $M \setminus K$ 上满足 $\text{Rm} \geq 0$ 且 $\text{Ric} > 0$, 其中 K 为 M 上的紧集. 则余维数为 1 的紧致分裂收缩解 $(N, h(t))$ 都是第 I 型的. 换言之, 从 (M, g) 的收缩中不可能出现第 II 型余维数为 1 的紧致分裂古典解.

注 3.7 由于任意紧致的第 I 型古典 κ -解必为收缩 Ricci 孤立子, 而后者已被分类 (参见文献 [36, 定理 7.34] 和 [10, 79]), 定理 3.6 实际上给出了在 $M \setminus K$ 上满足 $\text{Rm} \geq 0$ 且 $\text{Ric} > 0$ 的 (M, g) 的所有余维数为 1 的紧致分裂古典解的分类. 此外, 定理 3.6 也给出了有关无穷远处切向 Ricci 流的一个唯一性结果.

作为定理 3.6 的直接应用, 可以给出如下二择一定理 (参见文献 [94, 推论 1.2]):

推论 3.8 设 (M^n, g) 为定理 3.6 中的稳态梯度 Ricci 孤立子. 则 (M, g) 的所有分裂收缩解 $(N, h(t))$ (如 (3.4) 所示) 要么是 $n-1$ 维紧致收缩 Ricci 孤立子, 要么是 $n-1$ 维非紧致古典 κ -解.

注意到, 在推论 3.8 中描述的两种情形确实都可能发生. 如例 2.3, 对任意 $2n \geq 4$ 和每一个有限循环群 Z_k , Appleton [3] 构造了非紧致的 κ -非塌缩的稳态 Ricci 孤立子, 其满足在 $M \setminus K$ 上有 $\text{Rm} > 0$. 则由定理 3.6 可知, 所有分裂的古典 κ -解 $h(t)$ 都是维数为 $2n-1$ 的收缩球面族的 Z_k 群商空间. 此外, 如例 2.9, 同样是紧致的 κ -非塌缩稳态梯度 Ricci 孤立子, 在整个 M 上满足 $\text{Rm} > 0$, 其所有相应的分裂古典 κ -解 $h(t)$ 都是非紧致的.

对于 4 维情形, 结合文献 [13, 定理 1.3] 中的分类结果, 我们实际上得到了 3 维分裂古典解的分类结果.

推论 3.9 设 (M^4, g) 为定理 3.6 中的稳态梯度 Ricci 孤立子. 则 (M^4, g) 的所有分裂收缩解 $(N, h(t))$ (如 (3.4) 所示) 要么是 3 维收缩球面族的商空间, 要么是 3 维非紧致古典 κ -解. 而后者要么是 3 维标准收缩圆柱, 要么是 Bryant 孤立子流的一个缩放.

注 3.10 事实上进一步可知, 推论 3.9 中两种非紧分裂古典解必定会同时存在, 即不可能所有的分裂收缩解都是 3 维标准收缩柱面, 或 Bryant 孤立子. 这是因为, 由文献 [94] 中的结果可知, 一定会存在点列, 其极限的分裂收缩解是 3 维标准收缩柱面. 另外, 根据文献 [35] 中的结果, 必然会有点列的极限的分裂收缩解是 Bryant 孤立子. 如同例 2.9 在 4 维的情形, 在水平截面上几乎是一个 3 维渐近圆柱连接两个 3 维渐近 Bryant 孤立子.

利用上二择一定理 (推论 3.8), 可以将定理 3.2 中的渐近圆柱性质弱化为存在一个收缩极限即可.

定理 3.11 设 (M^n, g) ($n \geq 4$) 为非紧致的 κ -非塌缩稳态梯度 Ricci 孤立子, 满足非负曲率算子条件. 若存在一列点 $p_i \rightarrow \infty$, 使得规范化的 Ricci 流 $(M, g_{p_i}(t); p_i)$ 收敛到一族收缩圆柱的商空间, 则 (M^n, g) 同构于一个 n 维 Bryant Ricci 孤立子的缩放. 对 4 维非紧致的 κ -非塌缩稳态梯度 Ricci 孤立子, 假设条件可进一步放宽成, 具有非负截面曲率, 且存在一列点 $p_i \rightarrow \infty$, 使得规范化的 Ricci 流 $(M, g_{p_i}(t); p_i)$ 的极限有余一维的紧致分裂古典解, 则结论也成立.

采用 Bamler [4] 无穷远处的切向 Ricci 流的语言, 定理 3.11 指在一定的曲率条件下无穷远处的切向 Ricci 流 (只要存在) 可以控制整个稳态梯度 Ricci 孤立子. 我们猜测定理 3.11 中的曲率条件可以

去掉, 即如下猜想.

猜想 3.12 一个非紧致的 κ -非塌缩稳态梯度 Ricci 孤立子 (M^n, g) ($n \geq 4$), 若在无穷远处存在切向 Ricci 流是一个收缩圆柱, 则它同构于一个 Bryant Ricci 孤立子的缩放.

4 Bryant 孤立子的刚性

4.1 具有曲率线性衰减的稳态 Ricci 孤立子

本小节讨论定理 3.2 和 3.3 的证明, 可参见文献 [42].

定理 3.2 的证明归结为在稳态 Ricci 孤立子 (M, g) 上构造 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个独立的 Killing 向量场. Brendle [12] 首先利用渐近圆柱条件在 (M, g) 的无穷远处构造出 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个近似 Killing 向量场 U_a , 其中 $a \in 1, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$.

命题 4.1 向量场 U_a 满足

$$|\mathcal{L}_{U_a}(g)| \leq O(\rho^{\frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{2} - 2\epsilon}), \quad |\Delta U_a + D_X U_a| \leq O(\rho^{\frac{1}{2(n-2)} - 1 - 2\epsilon}), \quad (4.1)$$

这里 $\mathcal{L}_{U_a}(g)$ 表示 U_a 对度量 g 的 Lie 导数, $\rho(x)$ 为距离函数, $X = \nabla f$ 是 Ricci 孤立子的势向量场, $\epsilon > 0$ 是一个任意小的常数.

Brendle 观察到, 若一个向量场 W 满足 Laplace 方程

$$\Delta W + D_X W = 0. \quad (4.2)$$

则 $h = \mathcal{L}_W g$ 满足 Lichnerowicz 方程

$$\Delta_L h + \mathcal{L}_X h = 0, \quad (4.3)$$

其中 Δ_L 是 Lichnerowicz Laplace 算子, $\mathcal{L}_X h$ 是沿势场 $X = \nabla f$ 的 Lie 导数.

方程 (4.2) 解的存在性由命题 4.1 和下面的扰动解存在性定理所保证.

定理 4.2 [12] 对于任意光滑向量场 Q , 若其满足 $|Q| \leq O(\rho^{\frac{1}{2(n-2)} - 1 - 2\epsilon})$, 则存在光滑向量场 V , 满足如下方程:

$$\Delta V + D_X V = Q.$$

此外, V 还满足估计 $|V| \leq O(\rho^{\frac{1}{2(n-2)} - \epsilon})$ 和 $|\nabla V| \leq O(\rho^{\frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{2} - \epsilon})$.

在最后一步, Brendle 证明了下面有关方程 (4.3) 的刚性结果.

定理 4.3 设 (M, g) 是一个具有正截面曲率的渐近圆柱稳态梯度 Ricci 孤立子. 若 h 是方程 (4.3) 的解, 并满足估计 $|h| \leq O(\rho^{\frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{2} - \epsilon})$, 则存在常数 $\lambda \in \mathbb{R}$, 使得 $h = \lambda \text{Ric}$.

令 $\tilde{U}_a = U_a - V - \frac{1}{2}\lambda X$, 由定理 4.2 和 4.3 可知, 每个 $\tilde{U}_a$ 是 Killing 向量场. 于是定理 3.2 证毕.

由定理 3.2 可知, 定理 3.3 的证明可转化成验证稳态 Ricci 孤立子具有定义 3.1 中的渐近圆柱性质, 即满足条件 (i) 和 (ii). 文献 [46, 命题 4.3] 证明了对于具有正截面曲率的稳态 Ricci 孤立子, 条件 (3.3) 可以推导出条件 (i) 中的曲率下界估计. 因此, 只需要证明条件 (i) 足够包含条件 (ii).

Deng 和 Zhu [44] 首先利用位势函数 f 的水平截面流 (level set flow), 给出了水平截面 $\Sigma_r = \{x \in M : f(x) = r\}$ 的直径估计.

引理 4.4 设 (M, g, f) 为定理 3.3 中的稳态 Ricci 孤立子, 具有正的 Ricci 曲率, 则存在与 r 无关的常数 $C > 0$, 使得

$$\text{diam}(\Sigma_r, g) \leq C\sqrt{r}, \quad \forall r \geq r_0.$$

由 Morse 引理可知, 这些水平集均与 $\mathbb{S}^{n-1}$ 拓扑同胚. 结合引理 4.4 及曲率衰减条件 (3.3), 可以得到如下关于水平截面邻域 $M_{p,k}$ 与测地球的比较关系:

$$B\left(p, \frac{k}{\sqrt{R_{\max}}}; R(p)g\right) \subset M_{p,k} \subset B\left(p, C_0 + \frac{2k}{\sqrt{R_{\max}}}; R(p)g\right),$$

其中 $C_0 > 0$ 是一个与点 p 无关的常数.

进一步地, Deng 和 Zhu 利用向量场 $X_{(i)} = R(p_i)^{-1/2} \nabla f$ 的收敛性, 证明了如下关于分裂极限解的曲率估计.

定理 4.5 对于任意序列 $p_i \rightarrow +\infty$, 其对应的规范化 Ricci 流 $(M, R(p_i)g(R^{-1}(p_i)t), p_i)$, 在 Cheeger-Gromov 拓扑下收敛到一个分裂的极限流 $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}, ds^2 + g_{\mathbb{S}^{n-1}}(t))$ ($t \in (-\infty, 0]$). 这里 $(\mathbb{S}^{n-1}, g_{\mathbb{S}^{n-1}}(t))$ 是一个具有非负曲率算子且 κ -非塌缩的古典 Ricci 流, 其数量曲率满足以下估计:

$$R_{\mathbb{S}^{n-1}}(x, t) \leq \frac{C}{|t|}, \quad \forall x \in \mathbb{S}^{n-1},$$

其中 C 是一个与 x 和 t 无关的常数.

由于第 I 型奇点的紧致古典 κ -解已被完全分类, 是一些收缩梯度 Ricci 孤立子, 因此 $(\mathbb{S}^{n-1}, g_{\mathbb{S}^{n-1}}(t))$ 必为一族收缩的球度量, 从而验证了定义 3.1 中的条件 (ii). 至此完成了定理 3.3 的证明.

4.2 具有渐近圆柱性质的稳态 Ricci 孤立子

当稳态 Ricci 孤立子的曲率只有在外区域是正时, Brendle 的定理 4.3 不能简单应用, 需要重新证明, 即需要改进命题 4.1 和定理 4.2 中的相关估计.

4.2.1 张量的衰减估计

与文献 [12] 中的方法类似, 在满足渐近圆柱条件的情形下, 第一步是构造一组在 (M, g) 无穷远处的近似 Killing 向量场 U_a , 其中 $a \in 1, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$. 通过对曲率导数的渐近估计进行若干改进, 我们证明了这些 U_a 满足比命题 4.1 更精细的衰减估计.

命题 4.6 向量场 U_a 满足

$$|\mathcal{L}_{U_a}(g)| \leq O(\rho^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\delta}), \quad |\Delta U_a + D_X U_a| \leq O(\rho^{-1-\frac{1}{4}\delta}). \quad (4.4)$$

上述更精细的估计使我们能够仿照文献 [12, 第 3 节] 中的方式, 通过穷尽法求解 Dirichlet 问题, 从而有以下全局扰动解的存在性结果.

命题 4.7 设 Q 是一个光滑向量场, 且 $|Q| \leq O(\rho^{-1-\frac{1}{4}\delta})$, 则存在一个光滑向量场 V 满足下列方程:

$$\Delta V + D_X V = Q.$$

此外, V 还满足 $|V| \leq C$ 且 $|\nabla V| \leq O(\rho^{-\frac{1}{2}})$.

由命题 4.6 和 4.7, 我们在 (M, g) 上可得到 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个独立的全局解 W_a , 满足椭圆方程

$$\Delta W_a + D_X W_a = 0,$$

并且 $h_a = \mathcal{L}_{W_a} g$ 满足 Lichnerowicz 型方程 (4.3) 及其衰减估计

$$|h_a| \leq O(\rho^{-\frac{1}{2}}).$$

为了证明 Lichnerowicz 型方程具有唯一性结果, 需要进一步对 h_a 作更高的衰减.

定理 4.8 对于所有足够大的 l , 存在一个常数 λ , 使得近似 Killing 向量场族

$$Y_a = W_a - \frac{1}{2}\lambda X,$$

其中

$$a \in 1, \dots, \frac{n(n-1)}{2},$$

其 Lie 导数

$$\tilde{h}_a = \mathcal{L}_{Y_a} g = h_a - \lambda \text{Ric}(g)$$

是 Lichnerowicz 型方程 (4.3) 的解, 且满足在流形 M 的某个紧集 K 外成立以下衰减估计:

$$|\tilde{h}_a| \leq O(r^{-l}). \quad (4.5)$$

证明 简要概述一下证明. 考虑函数

$$A(\rho) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \sup_{\{f=\rho\}} |h_a - \lambda \text{Ric}|.$$

取 $r_m \rightarrow \infty$, 然后记 λ_m 是使得 $A(r_m)$ 取到最小的那个 λ . 由于 $h_a - \lambda_m \text{Ric}$ 也满足 Lichnerowicz 型方程 (4.3), 所以根据椭圆极值原理, 可以证明对充分大的 $\ell > 0$, 存在 $\rho_\ell > 0$, 使得

$$\sup_{\{\rho_\ell \leq f \leq r_m\}} f^\ell |h - \lambda_m \text{Ric}| \leq \max \left\{ \rho_\ell^\ell \sup_{\{f=\rho_\ell\}} |h - \lambda_m \text{Ric}|, r_m^\ell \sup_{\{f=r_m\}} |h - \lambda_m \text{Ric}| \right\}$$

成立. 然后考虑以下两种情形.

情形 1 存在一串 r_m 使得

$$\rho_\ell^\ell \sup_{\{f=\rho_\ell\}} |h - \lambda_m \text{Ric}| \leq r_m^\ell \sup_{\{f=r_m\}} |h - \lambda_m \text{Ric}|$$

成立. 此时可以证明所有的 λ_m 都相等, 记为 λ , 且在 $\{f \geq \rho_\ell\}$ 上满足

$$h = \lambda \text{Ric}.$$

因此对于所有

$$\ell > 0, \quad |h - \lambda \text{Ric}| \leq \mathcal{O}(r^{-\ell})$$

显然成立.

情形 2 存在一个足够大的 R , 使得所有 $r_m > R$, 都满足估计

$$\rho_\ell^\ell \sup_{\{f=\rho_\ell\}} |h - \lambda_m \text{Ric}| > r_m^\ell \sup_{\{f=r_m\}} |h - \lambda_m \text{Ric}|.$$

此时可以证明 λ_m 一定是一致有界的, 从而可以取子列收敛到某个 $\lambda \in \mathbb{R}$. 从而可以得到

$$\sup_{\{f \geq \rho_\ell\}} f^\ell |h - \lambda \text{Ric}| \leq \rho_\ell^\ell \sup_{\{f = \rho_\ell\}} |h - \lambda \text{Ric}|.$$

因此, 对所有充分大的 ρ , 可以得到

$$\sup_{\{f = \rho\}} |h - \lambda \text{Ric}| \leq \frac{\rho_\ell^\ell}{\rho^\ell} \sup_{\{f = \rho_\ell\}} |h - \lambda \text{Ric}| \leq C \rho^{-\ell}.$$

从而证明了这个定理. $\square$

需要指出的是, Brendle^[12] 能够直接证明存在常数 λ , 使得 Y_a 构成一族真正的 Killing 向量 (定理 4.3). 而在我们定理的条件中, 由于度量 g 不再假设具有整体正的截面曲率, 我们只能在 M 的紧集之外, 对张量 h_a 和 $\tilde{h}_a$ 给出衰减估计, 如定理 4.8 所示.

最近, Law^[63] 注意到定理 4.8 中 $|\tilde{h}_a|$ 的任意多项式阶衰减可以提升为超指数阶衰减.

命题 4.9 若 $\tilde{h}_a$ 满足 Lichnerowicz 型方程 (4.3), 且有任意多项式阶衰减, 则 $\tilde{h}_a$ 对所有 $A < 1$ 满足

$$|\tilde{h}_a| \leq O(e^{Ar}). \quad (4.6)$$

证明 首先由文献 [91, 引理 4.1], 对充分大的 ℓ , 存在一个紧集 K_ℓ , 使得在 K_ℓ 的紧集外, 下面估计成立:

$$\Delta(f^\ell |\tilde{h}_a|^2) + D_X(f^\ell |\tilde{h}_a|^2) \geq 0. \quad (4.7)$$

另外, 由直接计算可知

$$\Delta(e^{-f}) + D_X(e^{-f}) \leq 0. \quad (4.8)$$

所以, 结合定理 4.8 中的 $|\tilde{h}_a|$ 多项式衰减估计, 由椭圆算子 $(\Delta + D_X)$ 的极值原理可得到加强的衰减估计

$$f^\ell |\tilde{h}_a|^2 \leq C e^{-f}. \quad (4.9)$$

我们可进一步提高衰减估计 (4.9). 事实上, 对任意 $\epsilon \in (0, 1)$, 同样存在一个紧集 K_ϵ , 使得在 K_ϵ 的紧集外, 下面的估计成立:

$$\Delta(e^{\epsilon f} |\tilde{h}_a|^2) + D_X(e^{\epsilon f} |\tilde{h}_a|^2) \geq 0. \quad (4.10)$$

结合衰减估计 (4.9), 对函数 $e^{\epsilon f} |\tilde{h}_a|^2$ 和 e^{-f} 分别再用椭圆算子的极值原理, 可以得到对任意 $\epsilon \in (0, 1)$ 有

$$e^{\epsilon f} |\tilde{h}_a|^2 \leq C_\epsilon e^{-f}.$$

因此, (4.6) 成立. $\square$

4.2.2 消失定理的证明

设 Rm_g 为 (M, g) 上的曲率算子张量, $R = R(x)$ 为其数量曲率. Zhao 和 Zhu^[91] 引入了如下称为 P - 拥挤的曲率条件:

$$2P < R, \quad (4.11)$$

这里函数 $P = P(x)$ 定义为

$$P(x) = \sup_h \frac{\text{Rm}_g(h, h)}{|h|^2} = \sup_h \frac{R_{ijkl}(x)h^{ik}h^{jl}}{h_{ik}h^{ik}}, \quad \forall h \neq 0 \text{ 为对称 2 阶张量}. \quad (4.12)$$

算子 $\text{Rm}_g(h, \cdot)$ 作用在对称 2- 张量空间上, 源于 Lichnerowicz Laplace 算子 (参见文献 [9]).

由定理 4.8 可知, $\tilde{h}_a$ 的范数在任意多项式速度下趋于零. 接下来, 考虑以 $\tilde{h}_a$ 为初值的抛物型 Lichnerowicz 方程

$$\frac{\partial}{\partial t} h = \Delta_{L, g(t)} h, \quad (4.13)$$

其中 $g(t)$ 是由孤立子向量场生成的单参数变换群 ϕ_t^* 所诱导的 Ricci 流解.

考虑如下 (4.13) 形变的热方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} H - \Delta_{g(t)} H - 2P(\cdot, t)H = 0, \quad (4.14)$$

其中 $P(\cdot, t) = \phi_t^* P(\cdot)$, 而 $P(\cdot)$ 是由 (4.12) 所定义的函数. (4.14) 的解可以在任意维数 $n \geq 3$ 的完备流形上定义, 可看作 Anderson-Chow 在 3 维完备流形下所建立的一个抛物型拥挤估计的高维推广 (参见文献 [1, 61]).

我们证明了方程 (4.14) 存在一个正的有界的上解 (参见文献 [91]).

引理 4.10 设 (M^n, g, f) 是一个维数 $n \geq 4$ 的稳态梯度 Ricci 孤立子, $g(t)$ 是由 g 所诱导的 Ricci 孤立子流. 假设 g 具有渐近圆柱性质, 且满足如下曲率拥挤条件:

$$2P < \frac{m}{m+1} R, \quad (4.15)$$

其中 P 是由 (4.12) 所定义的函数. 则对于任意足够大的 $m \geq 2$, 存在一个光滑正的有界函数 $s(x, t)$, 满足

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_{g(t)} - 2P(\cdot, t) \right) s(x, t) \geq 0, \quad (4.16)$$

其中 $P(\cdot, t) = \Phi_t^* P(\cdot)$. 此外, 该函数在初始时刻 $t = 0$ 满足以下衰减条件:

$$\lim_{\rho(x) \rightarrow \infty} f(x)^m s(x, 0) = 1, \quad (4.17)$$

其中 $\rho(x) = d(p, x)$.

设 $G(x, t; y, s)$ 是满足下列热方程 (4.14) 的热核函数:

$$\begin{aligned} \partial_t G(x, t; y, s) &= \Delta_{x,t} G(x, t; y, s) + 2P(x, t)G(x, t; y, s), \\ \lim_{t \rightarrow s} G(\cdot, t; y, s) &= \delta_y. \end{aligned} \quad (4.18)$$

对于任意固定常数 $D > 0$, 定义如下函数:

$$u_D(x, t) = \int_{B_0(p, D)} G(x, t; y, 0), dv_{g(0)}(y), \quad (4.19)$$

其中 p 是数量曲率 R 的极大值点, $B_0(p, D)$ 是以 p 为中心、在 Ricci 孤立子度量 g 下的半径为 D 的测地球.

我们有如下关于 $u_D(x, t)$ 的渐近估计.

引理 4.11 设 $(M, g(t))$ 是引理 4.10 中 g 所诱导的 Ricci 孤立子流. 若度量 g 满足曲率拥挤条件 (4.11), 则有

$$\sup_{B_t(p, D)} u_D(\cdot, t) \rightarrow 0, \quad \text{当 } t \rightarrow \infty \text{ 时}, \quad (4.20)$$

其中 $B_t(p, D)$ 是 $g(t)$ 下以 p 为中心、半径为 D 的测地球. 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $B_t(p, D)$ 将穷尽整个流形 M .

由上述命题, 可以获得方程 (4.13) 解的渐近估计.

命题 4.12 设 $(M^n, g(t))$ 是维数 $n \geq 4$ 的 Ricci 孤立子流, 其初始度量 g 满足引理 4.10 中的假设. 令 $h(t)$ ($t \in [0, \infty)$) 是方程 (4.13) 的解, 其初始函数 $h(x, 0)$ 满足

$$|h|(x, 0) \leq O(\rho^{-l}), \quad (4.21)$$

其中 $l > m$, 而 m 是在不等式 (4.15) 中选取的足够大的常数. 则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{B_t(p, D)} |h|(\cdot, t) = 0. \quad (4.22)$$

利用该命题, 可证明定理 3.4.

定理 3.4 的证明 由文献 [46, 引理 6.5 和 6.6] 可知, 当 $n \geq 4$ 时, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2P(x)}{R(x)} = \frac{2}{n-1} < 1.$$

另外, 根据条件 (4.11), 对任意紧集 K , 存在一个小的正数 μ 使得

$$2P < (1 - \mu)R \leq \frac{m}{m+1}R \text{ 在 } K \text{ 上成立},$$

其中 m 可取得足够大. 因此, 当 $n \geq 4$ 时, 不等式 (4.15) 在整个流形 (M^n, g) 上成立.

我们可以假设函数 $P(x)$ 是光滑的. 事实上, 经过微小扰动, 总可以在 M 上构造一个光滑函数 P' , 使得 $P \leq P'$ 且 P' 仍满足条件 (4.15). 此时可在方程 (4.14) 中将 $P(\cdot, t)$ 替换为 $P(\cdot, t) = \phi_t^* P'(\cdot)$, 从而引理 4.10, 4.11 和命题 4.12 的结论仍然成立.

根据定理 4.8, 可知存在一组近似 Killing 向量场 Y_a ,

$$a \in 1, \dots, \frac{n(n-1)}{2},$$

使得在紧集之外有

$$|\mathcal{L}_{Y_a} g| \leq O(r^{-l}),$$

其中 l 选取充分大使得 $l > m$. 令

$$g(t) = \phi_t^* g, \quad Y_a(t) = \phi_t^* Y_a.$$

因为 $h_a = \mathcal{L}_{Y_a} g$ 是 Lichnerowicz 型方程 (4.3) 的解, 所以

$$h_a(t) = \mathcal{L}_{Y_a(t)} g(t) = \phi_t^* h_a$$

是方程 (4.13) 的解. 于是, 将命题 4.12 应用于每个 $h_a(t)$, 得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{B_t(p, D)} |h_a|(\cdot, t) = 0.$$

注意 $h_a(\cdot) = \phi_{-t}^* h_a(t)$, 因此在任意紧集 $B_0(p, D) \subset M$ 上都有 $|h_a| \equiv 0$. 进而可推导出 $|h_a| \equiv 0$ 在 M 上成立. 至此定理 3.4 的证明完成. $\square$

注 4.13 虽然 Law 能在命题 4.9 中将 $\tilde{h}_a$ 的衰减估计提升到指数衰减, 见 (4.6), 但是在证明消失定理时仍然无法将紧集内部的曲率拥挤条件弱化, 从而证明所有具有渐近圆柱条件的稳态型 Ricci 梯度孤立子一定等距同构于 Bryant 孤立子, 进而验证猜想 3.12. 目前有关 Bryant 孤立子的刚性结果, 定理 3.4 还是最佳的.

5 稳态 Ricci 孤立子的收缩解

本节讨论定理 3.6 的证明, 即要证明定理 3.5 中的余一维分裂古典 κ - 解 $(N, h(t))$ 只能是第 I 型. 文献 [95, 命题 3.3、引理 3.7 和命题 3.8] 首先研究了水平集的几何及曲率衰减.

引理 5.1 设 (M^n, g) 是一个 κ - 非塌缩的稳态 Ricci 孤立子, 其曲率张量于某个紧集 K 外满足 $\text{Rm} \geq 0$ 且 $\text{Ric} > 0$. 假设存在一列点 $p_i \rightarrow \infty$, 使得定理 3.5 中的 $n-1$ 维分裂古典 κ - 解 $(N, h(t))$ 是紧致的. 则对于充分大的 i , 有以下结论成立:

(1) (M^n, g) 的曲率一致衰减至零, 即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0; \quad (5.1)$$

(2) 存在两个常数 $c_1, c_2 > 0$, 使得

$$c_1 \rho(x) \leq f(x) \leq c_2 \rho(x); \quad (5.2)$$

(3) 水平集 $f^{-1}(f(p_i))$ 是紧的;

(4) 对任意 $q \in f^{-1}(f(p_i))$, 有 $F_\epsilon(q) \leq C_\epsilon$, 其中 $F_\epsilon(q) = \inf\{\text{Diam} h_q(0)\}$ 是所有与规范化 Ricci 流 $(g_q(t); q)$ ϵ - 接近的分裂极限 Ricci 流 $(N \times R, ds^2 + h_q(t))$ 中度量 $h_q(0)$ 的直径下确界.

下面进一步利用 Perelman [82] 的 $\mathcal{L}$ - 测地理论来研究 $(N, h(t))$ 的几何.

设 $(M, \hat{g}(t))$ 是定义在 $t \in [0, \infty)$ 上的倒向 Ricci 流 (backward Ricci flow), 满足

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial t} = 2 \text{Ric}(\hat{g}), \quad \hat{g}(0) = g. \quad (5.3)$$

对任意 $\tau > 0$ 和一条满足 $\Gamma(0) = o$, $\Gamma(\tau) = p$ 的分段光滑曲线 $\Gamma: [0, \tau] \rightarrow M$, 其 $\mathcal{L}$ - 长度定义为 (参见文献 [82, 第 7 节])

$$\mathcal{L}(\Gamma) := \int_0^\tau \sqrt{s} (R_{\hat{g}_s} + |\dot{\Gamma}(s)|_{\hat{g}_s}^2) ds. \quad (5.4)$$

对于任意点对 (x, τ) , 定义 $\mathcal{L}$ - 距离函数为

$$L(x, \tau) := \inf_{\Gamma} \mathcal{L}(\Gamma),$$

其中下确界是在所有连接 o 到 x 的分段光滑曲线 $\Gamma: [0, \tau] \rightarrow M$ 的集合上取. 根据文献 [82, 第 7 节], 该下确界可由一条光滑曲线取得, 称为 (x, τ) 的极小 $\mathcal{L}$ - 测地线.

定义约化距离 (reduced distance) 为

$$\ell(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\tau}} L(x, \tau). \quad (5.5)$$

根据文献 [82, 第 7.1 小节], 对任意 $\tau > 0$, 存在 $x \in M$ 使得 $\ell(x, \tau) \leq \frac{n}{2}$. 此类点 x 称为时间 τ 的 ℓ - 中心 (ℓ -center).

对于稳态梯度 Ricci 孤立子 (M, g) , 其 $\mathcal{L}$ - 长度的积分公式可以使用固定的孤立子度量 g 来表示, 从而可以写为

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \int_0^\tau \sqrt{s}(R_g + |\dot{\gamma}(s) - \nabla f|_g^2) ds, \quad (5.6)$$

其中 $\gamma(s)$ 为在 g 下的路径 (通过与 $\Gamma(s)$ 之间的时空变换 $\gamma(s) = \phi_{-s}(\Gamma(s))$ 得到). 为简洁起见, 若 $\Gamma(s)$ 是 $(M, g(-\tau))$ 上的极小 $\mathcal{L}$ - 测地线, 且满足

$$\gamma(0) = o, \quad \gamma(\tau) = \phi_{-\tau}(\Gamma(\tau)),$$

则称 $\gamma(s)$ ($s \in [0, \tau]$) 为一条极小 $\mathcal{L}$ - 测地线.

对连接 $(o, 0)$ 和 (p, τ) 的极小 $\mathcal{L}$ - 测地线, 定义 (参见文献 [5])

$$\lambda(p, \tau) := \ell(\phi_\tau(p), \tau). \quad (5.7)$$

若 x 是时间 $-\tau$ 的 ℓ - 中心, 则

$$\lambda(p, \tau) = \lambda(\phi_{-\tau}(x), \tau) = \ell(x, \tau) \leq \frac{n}{2}.$$

在稳态 Ricci 孤立子的水平集 $\Sigma_\tau = \{x : f(x) = \tau\}$ 上, 我们证明了以下的 ℓ - 中心的存在性结果.

命题 5.2 假设不等式 (5.2) 成立. 则对于任意足够大的 τ , 存在一点

$$p_\tau \in \Sigma_\tau \quad \text{和} \quad \tau_0 \in [c\tau, C\tau],$$

使得

$$\lambda(p_\tau, \tau_0) \leq A_0,$$

其中 c, C 和 A_0 是与 τ 无关的一致常数.

借助由孤立子流诱导的等距映射以及对截断后的约化距离的估计, 可以得到关于 ℓ - 中心点附近的曲率估计 (参见文献 [94]).

命题 5.3 假设 (5.2) 成立, 且在某紧集外有 $\text{Ric} > 0$. 设 p_τ 是命题 5.2 中确定的 ℓ - 中心点. 则存在一个一致常数 $C_0 > 0$, 使得对于任意足够大的 τ , 成立

$$R(p_\tau) \leq \frac{C_0}{\tau}. \quad (5.8)$$

此外, 对于所有满足 $p \in \Sigma_\tau$ ($\tau \gg 1$) 的点 p , 也有下界估计

$$R(p_\tau) \geq \frac{C}{\tau}, \quad (5.9)$$

其中 C 为一个一致正常数.

令

$$g_i(t) = \tau_i'^{-1} g(\tau_i' t) \quad \text{和} \quad \ell_i(x, \tau) = \ell(x, \tau_i' \tau),$$

其中 $\tau = -t$. 则函数 $\ell_i(x, \tau)$ 是一列倒向 Ricci 流 $\hat{g}_i(\tau) = g_i(-\tau)$ 上从初始点 $(o, 0)$ 出发的约化距离. 由缩放不变性可知

$$\ell_i(x_i, 1) = \ell_o(x_i, \tau_i') \leq A_0. \quad (5.10)$$

接下来需要建立关于 ℓ_i 的梯度估计.

命题 5.4 设 $\ell_i(x, \tau)$ 是 (5.10) 中一系列约化距离函数. 则对于任意固定的 $D > 0$, 存在一个一致常数 $\bar{C}(D) > 0$, 使得对所有充分大的 i , 均有

$$0 \leq \ell_i(x, \tau) \leq \bar{C}(D), \quad \forall (x, \tau) \in B_{g_i(-2)}(x_i, D) \times [-10, -2], \quad (5.11)$$

并且

$$\left| \frac{\partial \ell_i}{\partial \tau}(x, \tau) \right| + |\nabla \ell_i(x, \tau)| \leq \bar{C}(D), \quad \forall (x, \tau) \in B_{g_i(-2)}(x_i, D) \times [-8, -2], \quad (5.12)$$

其中 $\tau = -t$.

需要指出的是, 由于我们只假设紧集 K 外 Ricci 曲率非负, 缺乏全局 Harnack 不等式, Perelman^[82] 的原始方法对任意 (x, τ) 处的 $\ell_i(x, \tau)$ 的梯度估计不能直接适用. 我们的方法是限制相应的极小 $\mathcal{L}$ -测地线在 $M \setminus K$ 内, 并利用 Shi^[84] 的局部曲率估计对其时间长度加以控制, 从而获得所需要的 (5.12) 估计.

由命题 5.4, 结合 Perelman 关于约化体积 (reduced volume) 单调性的理论, 以及定理 3.5 中的紧致定理, 可证明规范化的 Ricci 流序列 $(M, g_i(t), \ell_i)$ 的极限是一个非平坦的收缩梯度 Ricci 孤立子, 即有如下定理:

定理 5.5 对于任意发散序列 $p_i \rightarrow \infty$, 存在点列 $q_i \in f^{-1}(f(p_i))$, 使得以 q_i 为基点的规范化 Ricci 流序列 $(M, g_{q_i}(t); q_i)$ 在 Cheeger-Gromov 意义下收敛到一个分裂 Ricci 流

$$(N' \times \mathbb{R}, h'(t) + ds^2; q_\infty),$$

其中 $t \in (-\infty, 0]$, 且 $(N', h'(t))$ 是一个非平坦的收缩 Ricci 孤立子.

利用定理 5.5, 可以完成定理 3.6 的证明. 如同文献 [92, 95] 中的证明, 我们采用反证法. 假设存在一系列规范化的 Ricci 流 $(M, g_{p_i}(t); p_i)$, 其中 $p_i \rightarrow \infty$, 其在 Cheeger-Gromov 意义下收敛到极限流

$$(N \times \mathbb{R}, h(t) + ds^2; p_\infty),$$

其中 $(N, h(t))$ 是一个紧致的第 II 型古典 κ -解. 由引理 5.1 可知, 在假设稳态 Ricci 孤立子 (M, g) 在紧集 K 外满足 $\text{Rm} \geq 0$ 且 $\text{Ric} > 0$ 的条件下, 可以得到数量曲率 $R(x)$ 一致衰减趋于零, 且势函数 f

满足线性增长估计, 即不等式 (5.2). 因此命题 5.2–5.4 及定理 5.5 皆成立. 由于 $(N, h(t))$ 是一个第 II 型紧的古典 κ -解, 根据其定义, 可知对于任意时间序列 $t_k \rightarrow -\infty$, 存在

$$R_{\min}(t_k) \text{Diam}(h(t_k))^2 \rightarrow \infty,$$

其中

$$R_{\min}(t) = \min_{x \in N} R(x, t).$$

因此, 可以选取某一时刻 $t_0 \in \{t_k\}$, 满足

$$\text{Diam}(h(t_0)) \cdot R_h^{1/2}(p_\infty, t_0) > 100C_0A, \quad (5.13)$$

其中 C_0 来自命题 5.3, A 来自命题 5.2 中对约化距离的控制.

令

$$T = t_0 \cdot R^{-1}(p_i),$$

并取

$$\epsilon < -\frac{1}{100t_0}.$$

由收敛性可知, 当 $i \gg 1$ 时有

$$\text{Diam}(\bar{g}(T)) \cdot R^{1/2}(p_i, T) = \text{Diam}(g_{p_i}(t_0)) \cdot R_{p_i}^{1/2}(p_i, t_0) > 90C_0A, \quad (5.14)$$

其中 $\bar{g}(T)$ 表示流 $g(t)$ 在 T 时刻的等势面 $f^{-1}(f(\phi_T(p_i)))$ 上诱导的度量. 所以利用 Ricci 孤立子诱导的等变性 (即流 ϕ_t 是等距的), 可推导出当 $i \gg 1$ 时有

$$F(\phi_T(p_i)) > 50C_0A. \quad (5.15)$$

另外, 根据命题 5.2, 可知在每个等势面 $\Sigma_{f(\phi_T(p_i))}$ 上, 存在

$$q_i \in \Sigma_{f(\phi_T(p_i))}$$

以及

$$\tau_i \in [cf(\phi_T(p_i)), Cf(\phi_T(p_i))],$$

使得

$$\lambda(q_i, \tau_i) \leq A_0.$$

由定理 5.5 得出一列以 q_i 为基点的规范化 Ricci 流 $(M, g_{q_i}(t); q_i)$ 收敛到一个非平坦的收缩 Ricci 孤立子

$$(N' \times \mathbb{R}, h'(t) + ds^2, q_\infty).$$

因此 $(N', h'(t))$ 也是一个非平坦的收缩 Ricci 孤立子, 且 $\text{Rm} \geq 0$. 根据对紧致 κ -非塌缩、非平坦收缩 Ricci 孤立子的分类定理 (参见文献 [36, 定理 7.34] 和 [10, 79]), 可知存在某个大常数 $A > 0$, 使得

$$\text{Diam}(N', h'(0)) \leq A. \quad (5.16)$$

再利用收敛性, 得到

$$\text{Diam}(R(q_i)\bar{g}(T)) = \text{Diam}(\bar{g}(T)) \cdot R^{1/2}(q_i) \leq 2A. \quad (5.17)$$

由引理 5.1 和紧致性定理可知, 存在某个大常数 C_0 , 使得对于所有充分大的 i 有

$$\frac{1}{C_0}R(x) \leq R(q_i) \leq C_0R(x), \quad \forall x \in \Sigma_{f(\phi_T(p_i))}. \quad (5.18)$$

结合不等式 (5.17), 可推导出

$$\text{Diam}(R(\phi_T(p_i))\bar{g}(T)) \leq 2C_0A. \quad (5.19)$$

这与之前推导出的估计 (5.15) 相矛盾. 从而定理 3.6 得证.

最后, 为证明定理 3.11, 只需要验证度量满足渐近圆柱条件. 根据 Deng 和 Zhu [46] 的结果, 这一条件等价于所有分裂收缩极限 $(N, h(t))$ 都是标准 $n-1$ 维收缩球面. 根据引理 5.1 的证明, 可知稳态 Ricci 孤立子 (M, g) 具有严格正的 Ricci 曲率. 由此, 所有分裂收缩极限 $(N, h(t))$ 在拓扑意义上同胚于 $n-1$ 维球面. 结合推论 3.8 以及文献 [79] 中的刚性定理, 可进一步推导出 $(N, h(t))$ 实际上与 $n-1$ 维标准收缩球面等距同构. 所以稳态 Ricci 孤立子 (M, g) 具有渐近圆柱性质.

参考文献

- 1 Anderson G, Chow B. A pinching estimate for solutions of the linearized Ricci flow system on 3-manifolds. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2005, 23: 1–12
- 2 Angenent S, Brendle S, Daskalopoulos P, et al. Unique asymptotics of compact ancient solutions to three-dimensional Ricci flow. *Comm Pure Appl Math*, 2022, 75: 1032–1073
- 3 Appleton A. A family of non-collapsed steady Ricci solitons in even dimensions greater or equal to four. arXiv:1708.00161, 2017
- 4 Bamler R H. Structure theory of non-collapsed limits of Ricci flows. arXiv:2009.03243, 2020
- 5 Bamler R H, Chan P Y, Ma Z, et al. An optimal volume growth estimate for noncollapsed steady gradient Ricci solitons. *Peking Math J*, 2023, 6: 353–364
- 6 Bamler R H, Chow B, Deng Y, et al. Four-dimensional steady gradient Ricci solitons with 3-cylindrical tangent flows at infinity. *Adv Math*, 2022, 401: 108285
- 7 Bamler R H, Cifarelli C, Conlon R J, et al. A new complete two-dimensional shrinking gradient Kähler-Ricci soliton. *Geom Funct Anal*, 2024, 34: 377–392
- 8 Bamler R H, Kleiner B. On the rotational symmetry of 3-dimensional κ -solutions. *J Reine Angew Math*, 2021, 779: 37–55
- 9 Besse A. *Einstein Manifolds*. Berlin: Springer-Verlag, 1987
- 10 Böhm C, Wilking B. Manifolds with positive curvature operators are space forms. *Ann of Math (2)*, 2008, 167: 1079–1097
- 11 Brendle S. Rotational symmetry of self-similar solutions to the Ricci flow. *Invent Math*, 2013, 194: 731–764
- 12 Brendle S. Rotational symmetry of Ricci solitons in higher dimensions. *J Differential Geom*, 2014, 97: 191–214
- 13 Brendle S. Ancient solutions to the Ricci flow in dimension 3. *Acta Math*, 2020, 225: 1–102
- 14 Brendle S, Daskalopoulos P, Naff K, et al. Uniqueness of compact ancient solutions to the higher-dimensional Ricci flow. *J Reine Angew Math*, 2023, 795: 85–138
- 15 Brendle S, Daskalopoulos P, Sesum N. Uniqueness of compact ancient solutions to three-dimensional Ricci flow. *Invent Math*, 2021, 226: 579–651
- 16 Brendle S, Huisken G, Sinestrari C. Ancient solutions to the Ricci flow with pinched curvature. *Duke Math J*, 2011, 158: 537–551

- 17 Brendle S, Naff K. Rotational symmetry of ancient solutions to the Ricci flow in higher dimensions. [Geom Topol](#), 2023, 27: 153–226
- 18 Bryant R. Ricci flow solitons in dimension three with $SO(3)$ -symmetries. Duke Univ, 2026, in press
- 19 Cao H D. Existence of gradient Kähler-Ricci solitons. In: Elliptic and Parabolic Methods in Geometry. Boca Raton: CRC Press, 1996, 1–16
- 20 Cao H D. Limits of solutions to the Kähler-Ricci flow. [J Differential Geom](#), 1997, 45: 257–272
- 21 Cao H D, Chen B L, Zhu X P. Recent developments on Hamilton’s Ricci flow. In: Geometric Flows. Surveys in Differential Geometry. vol. 12. Somerville: Int Press, 2008, 47–112
- 22 Cao H D, Chen Q. On locally conformally flat gradient steady Ricci solitons. [Trans Amer Math Soc](#), 2009, 364: 2377–2391
- 23 Cao H D, Chen Q. On Bach-flat gradient shrinking Ricci solitons. [Duke Math J](#), 2013, 162: 1149–1169
- 24 Cao X, Zhang Q S. The conjugate heat equation and ancient solutions of the Ricci flow. [Adv Math](#), 2011, 228: 2891–2919
- 25 Catino G, Mantegazza C. The evolution of the Weyl tensor under the Ricci flow. [Ann Inst Fourier \(Grenoble\)](#), 2011, 61: 1407–1435
- 26 Chan P Y, Ma Z, Zhang Y. On Ricci flows with closed and smooth tangent flows. [Calc Var Partial Differential Equations](#), 2024, 63: 179
- 27 Chan P Y, Ma Z, Zhang Y. Ancient Ricci flows with asymptotic solitons. [J Geom Anal](#), 2025, 35: 199
- 28 Chen X, Wang Y. On four-dimensional anti-self-dual gradient Ricci solitons. [J Geom Anal](#), 2015, 25: 1335–1343
- 29 Cho J H, Li Y. Ancient solutions to the Ricci flow with isotropic curvature conditions. [Math Ann](#), 2023, 387: 1009–1041
- 30 Choi K, Haslhofer R, Hershkovits O. A nonexistence result for wing-like mean curvature flows in $\mathbb{R}^4$. [Geom Topol](#), 2024, 28: 3095–3134
- 31 Chow B. The Ricci flow on the 2-sphere. [J Differential Geom](#), 1991, 33: 325–334
- 32 Chow B, Chu S C, Glickenstein D, et al. The Ricci Flow: Techniques and Applications. Part I: Geometric Aspects. Mathematical Surveys and Monographs. Providence: Amer Math Soc, 2007
- 33 Chow B, Chu S C, Glickenstein D, et al. The Ricci Flow: Techniques and Applications. Part III: Geometric-Analytic Aspects. Mathematical Surveys and Monographs. Providence: Amer Math Soc, 2010
- 34 Chow B, Chu S C, Glickenstein D, et al. The Ricci Flow: Techniques and Applications. Part IV: Long-Time Solutions and Related Topics. Mathematical Surveys and Monographs. Providence: Amer Math Soc, 2015
- 35 Chow B, Deng Y, Ma Z. On four-dimensional steady gradient Ricci solitons that dimension reduce. [Adv Math](#), 2022, 403: 66
- 36 Chow B, Lu P, Ni L. Hamilton’s Ricci Flow. Providence: Amer Math Soc, 2006
- 37 Cifarelli C, Conlon R, Deruelle A. Steady Gradient Kähler-Ricci Solitons on Crepant Resolutions of Calabi-Yau Cones. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 1551. Providence: Amer Math Soc, 2025
- 38 Conlon R J, Deruelle A. On finite time type I singularities of the Kähler-Ricci flow on compact Kähler surfaces. [arXiv:2203.04380](#), 2022
- 39 Conlon R J, Deruelle A, Sun S. Classification results for expanding and shrinking gradient Kähler-Ricci solitons. [Geom Topol](#), 2024, 28: 267–351
- 40 Daskalopoulos P, Hamilton R, Sesum N. Classification of ancient compact solutions to the Ricci flow on surfaces. [J Differential Geom](#), 2012, 91: 171–214
- 41 Delcroix T. Kähler-Einstein metrics on group compactifications. [Geom Funct Anal](#), 2017, 27: 78–129
- 42 Deng Y X, Zhu X H. Rigidity of κ -noncollapsed steady Ricci solitons (in Chinese). [Sci Sin Math](#), 2018, 48: 31–44 [邓宇星, 朱小华. 非塌缩稳态型 Ricci 孤立子的刚性研究. [中国科学: 数学](#), 2018, 48: 31–44]
- 43 Deng Y X, Zhu X H. Asymptotic behavior of positively curved steady Ricci solitons. [Trans Amer Math Soc](#), 2018, 380: 2855–2877
- 44 Deng Y X, Zhu X H. Higher dimensional steady Ricci solitons with linear curvature decay. [J Eur Math Soc \(JEMS\)](#), 2020, 22: 4097–4120
- 45 Deng Y X, Zhu X H. Rigidity of κ -noncollapsed steady Kähler-Ricci solitons. [Math Ann](#), 2020, 377: 847–861
- 46 Deng Y X, Zhu X H. Classification of gradient steady Ricci solitons with linear curvature decay. [Sci China Math](#), 2020, 63: 135–154

- 47 Deruelle A. Smoothing out positively curved metric cones by Ricci expanders. [Geom Funct Anal](#), 2016, 26: 188–249
- 48 Deruelle A. Asymptotic estimates and compactness of expanding gradient Ricci solitons. *Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci* (5), 2017, 17: 485–530
- 49 Enders J, Müller R, Topping P M. On Type-I singularities in Ricci flow. [Comm Anal Geom](#), 2011, 19: 905–922
- 50 Feldman M, Ilmanen T, Knopf D. Rotationally symmetric shrinking and expanding gradient Kähler-Ricci solitons. [J Differential Geom](#), 2003, 65: 169–209
- 51 Hamilton R S. Three-manifolds with positive Ricci curvature. [J Differential Geom](#), 1982, 17: 255–306
- 52 Hamilton R S. Eternal solutions to the Ricci flow. [J Differential Geom](#), 1993, 38: 1–11
- 53 Hamilton R S. Formation of singularities in the Ricci flow. In: *Surveys in Differential Geometry*, vol. 2. Cambridge: Int Press, 1995, 7–136
- 54 Haslhofer R. On κ -solutions and canonical neighborhoods in 4d Ricci flow. *J Reine Angew Math*, 2024, 811: 257–265
- 55 Ivey T. Ricci solitons on compact three-manifolds. [Differential Geom Appl](#), 1993, 3: 301–307
- 56 Kim J. On a classification of 4-d gradient Ricci solitons with harmonic Weyl curvature. [J Geom Anal](#), 2017, 27: 986–1012
- 57 Kim J. Classification of gradient Ricci solitons with harmonic Weyl curvature. [J Geom Anal](#), 2025, 35: 139
- 58 Kotschwar B, Wang L. Rigidity of asymptotically conical shrinking gradient Ricci solitons. [J Differential Geom](#), 2015, 100: 55–108
- 59 Kotschwar B, Wang L. A uniqueness theorem for asymptotically cylindrical shrinking Ricci solitons. [J Differential Geom](#), 2024, 126: 215–295
- 60 Lai Y. A family of 3d steady gradient solitons that are flying wings. [J Differential Geom](#), 2024, 126: 297–328
- 61 Lai Y. $O(2)$ -symmetry of 3D steady gradient Ricci solitons. [Geom Topol](#), 2025, 29: 687–789
- 62 Lai Y. 3D flying wings for any asymptotic cones. [J Differential Geom](#), 2025, 130: 677–695
- 63 Law M B. Uniqueness of asymptotically cylindrical steady gradient Ricci solitons. [arXiv:2505.20576](#), 2025
- 64 Li F. Rigidity of complete gradient steady Ricci solitons with harmonic Weyl curvature. *Pacific J Math*, 2025, 2: 323–353
- 65 Li X, Ni L, Wang K. Four-dimensional gradient shrinking solitons with positive isotropic curvature. *Int Math Res Not IMRN*, 2018, 2018: 949–959
- 66 Li X, Zhang Y. Ancient solutions to the Ricci flow in higher dimensions. [Comm Anal Geom](#), 2022, 30: 2011–2048
- 67 Li Y. Ancient solutions to the Kähler Ricci flow. [Geom Topol](#), 2024, 28: 3257–3283
- 68 Li Y, Tian G, Zhu X. Singular limits of Kähler-Ricci flow on Fano G -manifolds. [Amer J Math](#), 2024, 146: 1651–1690
- 69 Li Y, Wang B. On Kähler Ricci shrinker surfaces. [arXiv:2301.09784](#), 2023
- 70 Li Y, Zhou B, Zhu X. K-energy on polarized compactifications of Lie groups. [J Funct Anal](#), 2018, 275: 1023–1072
- 71 Lynch S, Abrego A R. Ancient solutions of Ricci flow with type I curvature growth. [J Geom Anal](#), 2024, 34: 119
- 72 Ma Z, Mahmoudian H, Sesum N. Unique asymptotics of steady Ricci solitons with symmetry. [arXiv:2311.09405](#), 2023
- 73 Morgan J, Tian G. Ricci Flow and the Poincaré Conjecture. *Clay Mathematics Monographs*, vol. 3. Providence: Amer Math Soc; Cambridge: Clay Mathematics Institute, 2007
- 74 Munteanu O, Wang J. Geometry of shrinking Ricci solitons. [Compos Math](#), 2015, 151: 2273–2300
- 75 Munteanu O, Wang J. Positively curved shrinking Ricci solitons are compact. [J Differential Geom](#), 2017, 106: 499–505
- 76 Naber A. Noncompact shrinking four solitons with nonnegative curvature. *J Reine Angew Math*, 2010, 645: 125–153
- 77 Naff K. Shrinking Ricci solitons with positive isotropic curvature. [arXiv:1905.10305](#), 2019
- 78 Ni L. Ancient solutions to Kähler-Ricci flow. In: *Proceedings of the Third International Congress of Chinese Mathematicians. Part 1*. Boston: Int Press, 2004, 633–654
- 79 Ni L. Closed type I ancient solutions to Ricci flow. *Recent Adv Geom Anal*, 2009, 11: 147–150
- 80 Ni L, Wallach N. On four-dimensional gradient shrinking solitons. *Int Math Res Not IMRN*, 2008, 2008: rnm152
- 81 Ni L, Wallach N. On a classification of gradient shrinking solitons. [Math Res Lett](#), 2008, 15: 941–955
- 82 Perelman G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. [arXiv:0211159](#), 2002
- 83 Perelman G. Ricci flow with surgery on three-manifolds. [arXiv:0303109](#), 2003
- 84 Shi W X. Deforming the metric on complete Riemannian manifolds. *J Differential Geom*, 1989, 30: 223–301
- 85 Siu Y T. The existence of Kähler-Einstein metrics on manifolds with positive anticanonical line bundle and a suitable finite symmetry group. [Ann of Math](#) (2), 1988, 127: 585–627

- 86 Tian G. On Calabi's conjecture for complex surfaces with positive first Chern class. [Invent Math](#), 1990, 101: 101–172
- 87 Tian G, Zhu X. A new holomorphic invariant and uniqueness of Kähler-Ricci solitons. [Comment Math Helv](#), 2002, 77: 297–325
- 88 Tian G, Zhu X. Horosymmetric limits of Kähler-Ricci flow on Fano G -manifolds. [arXiv:2209.05029](#), 2022
- 89 Wang X J, Zhu X. Kähler-Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class. [Adv Math](#), 2004, 188: 87–103
- 90 Zhang Q S. A rigidity result for ancient Ricci flows. [Math Z](#), 2025, 2: 1–22
- 91 Zhao Z, Zhu X. Rigidity of the Bryant Ricci soliton. [arXiv:2212.02889](#), 2022
- 92 Zhao Z, Zhu X. 4d steady gradient Ricci solitons with nonnegative curvature away from a compact set. [arXiv:2310.12529](#), 2023
- 93 Zhao Z, Zhu X. Examples of Ricci solitons. [J Math Study](#), 2025, 58: 82–95
- 94 Zhao Z, Zhu X. No compact split limit Ricci flow of type II from the blow-down. [J Reine Angew Math](#), 2025, 826: 1–22
- 95 Zhao Z, Zhu X. Steady gradient Ricci solitons with nonnegative curvature operator away from a compact set. [Ann Fac Sci Toulouse Math \(6\)](#), 2026, in press
- 96 Zhu X H. Kähler-Einstein metrics on Toric manifolds and G -manifolds. In: *Geometric Analysis. Progress in Mathematics*, vol. 333. Cham: Birkhäuser, 2020, 545–585

Ricci solitons and blow-down analysis

Ziyi Zhao & Xiaohua Zhu

Abstract In this expository paper, we discuss some recent developments on Ricci solitons and ancient solutions in the Ricci flow. We begin with variously typical examples of Ricci solitons and ancient solutions, then focus on some important topics in Ricci flow, such as the rigidity problem of steady gradient Ricci solitons, classification of blow-up solutions, and asymptotic behavior analysis. We also present and discuss some open problems in this area.

Keywords Ricci flow, Ricci soliton, ancient solution, blow-down analysis

MSC(2020) 53E20, 53C20, 53C25, 58J05

doi: 10.1360/SSM-2025-0159