



球面上旋转奇对称涡对的去奇异化

李双龙^{1*}, 曹道民², 左碧君³

1. 西南财经大学数学学院, 成都 611130;

2. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190;

3. 哈尔滨工程大学数学科学学院, 哈尔滨 150001

E-mail: lishl@swufe.edu.cn, dmcao@amt.ac.cn, bjzuo@amss.ac.cn

收稿日期: 2025-06-07; 接受日期: 2025-10-16; 网络出版日期: 2025-11-13; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12371212 和 12471101) 资助项目

摘要 本文通过对偶变分方法研究球面上关于赤道平面奇对称点涡对的去奇异化问题. 对于任意给定的满足一定条件的单增涡流依赖函数, 本文通过对能量 - 冲量以及单调函数之原函数的对偶凸函数构成的 Casimir 泛函在特定集合上的变分, 构造球面上不可压缩 Euler 方程的一簇旋转解, 这些解关于赤道平面奇对称. 随着 $\varepsilon \rightarrow 0$, 这些解在测度意义下收敛到一组奇对称的旋转点涡对, 本文对该点涡对的位置的纬度给出精确的刻画.

关键词 Euler 方程 对偶变分方法 去奇异化

MSC (2020) 主题分类 35A15, 35B40, 35J08

1 引言

1.1 背景

Euler 方程是描述不可压无黏理想流体的经典方程, 自提出以来便成为数学物理的重要研究问题之一. 尽管在 Euclid 区域内已有丰富的成果, 但在一般的曲面—特别是单位球面 S^2 —上的行为却因丰富的几何约束对经典分析方法构成挑战.

考虑单位球面 S^2 上具有单位密度的理想不可压缩无黏流体. 该流体的运动可以由包含速度项和压力项的如下 Euler 方程来描述:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v} = -\nabla P, & \forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in S^2, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 S^2 是 $\mathbb{R}^3$ 中球心在原点的单位球, 在直角坐标系下可表示为

$$S^2 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}, \quad (1.2)$$

英文引用格式: Li S L, Cao D M, Zuo B J. Desingularization of rotationally odd-symmetric vortex pairs on the sphere (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 1–20, doi: 10.1360/SSM-2025-0134

或采用球面坐标 (ϕ, θ) , 可表示为

$$x_1 = \cos \theta \cos \phi, \quad x_2 = \cos \theta \sin \phi, \quad x_3 = \sin \theta, \quad (\phi, \theta) \in [0, 2\pi) \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad (1.3)$$

其中 θ 为纬度, ϕ 为经度. (1.1) 中 $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{S}^2$ 是速度项, $P(t, \mathbf{x})$ 表示标量压力场, ∇ 是梯度算子, $\nabla_{\mathbf{v}}$ 是沿着 $\mathbf{v}$ 方向的协变导数, div 是散度算子. $\mathbb{S}^2$ 上的度量取 $\mathbb{R}^3$ 空间中的标准度量.

由于速度场 $\mathbf{v}$ 是散度为零的, 因此存在一个流函数 (stream function) $\psi: \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{v} := J\nabla\psi, \quad (1.4)$$

其中 J 表示在切平面上逆时针方向旋转 $\pi/2$.

涡函数 (vorticity function) ω 是研究 Euler 方程的一个重要物理量, 定义如下:

$$\omega := \operatorname{div}(J\mathbf{v}). \quad (1.5)$$

由 Gauss-Green 公式, 有

$$\int_{\mathbb{S}^2} \omega d\sigma = 0. \quad (1.6)$$

流函数 ψ 和涡函数 ω 满足如下的 Poisson 方程:

$$-\Delta_{\mathbb{S}^2}\psi = \omega, \quad (1.7)$$

其中 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 是球面 $\mathbb{S}^2$ 上的 Laplace-Beltrami 算子. 在相差常数意义下, 可以假定

$$\int_{\mathbb{S}^2} \psi d\sigma = 0. \quad (1.8)$$

$-\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 的 Green 函数在相差常数的意义下可以记为

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad (1.9)$$

其中 $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ 是 $\mathbb{R}^3$ 空间中 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的 Euclid 距离. 给定涡函数 $\omega: \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{R}$, 可以通过 Biot-Savart 定律将 ψ 表示为

$$\psi = \mathcal{G}\omega(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{S}^2} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\omega(\mathbf{y})d\sigma_{\mathbf{y}} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|\omega(\mathbf{y})d\sigma_{\mathbf{y}}. \quad (1.10)$$

这里 $\mathcal{G}\omega$ 满足

$$-\Delta_{\mathbb{S}^2}\mathcal{G}\omega = \omega - \frac{1}{|\mathbb{S}^2|} \int_{\mathbb{S}^2} \omega d\sigma. \quad (1.11)$$

由于 $\int_{\mathbb{S}^2} \omega d\sigma = 0$, 因此有

$$-\Delta_{\mathbb{S}^2}\mathcal{G}\omega = \omega, \quad \int_{\mathbb{S}^2} \mathcal{G}\omega d\sigma = 0. \quad (1.12)$$

将算子 $\operatorname{div}J$ 应用到 (1.1) 的第一个方程, 得到球面上 Euler 方程的涡度形式:

$$\partial_t\omega + \mathbf{v} \cdot \nabla\omega = 0. \quad (1.13)$$

将速度用涡函数来表示, 可以将方程 (1.13) 改写为完全用涡函数 ω 表示的如下形式:

$$\begin{cases} \partial_t\omega + J\nabla\mathcal{G}\omega \cdot \nabla\omega = 0, \\ \mathcal{G}\omega(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|\omega(t, \mathbf{y})d\sigma_{\mathbf{y}}. \end{cases} \quad (1.14)$$

与平面上的 Euler 方程情形类似, 动能、冲量以及沿着涡线输运的涡量也是球面上 Euler 方程的守恒量, 具体可表述如下:

$$\begin{aligned} E(\omega(t, \cdot)) &= E(\omega(0, \cdot)), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad E(\omega) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^2} \omega \mathcal{G} \omega d\sigma, \\ I(\omega(t, \cdot)) &= I(\omega(0, \cdot)), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad I(\omega) := \int_{\mathbb{S}^2} x_3 \omega d\sigma, \\ \omega(t, \cdot) &\in \mathcal{R}_{\omega(0, \cdot)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

其中 $E(\omega)$ 表示流体的动能, $I(\omega)$ 可以认为是流体平行于赤道的线性冲量.

球面上的 Euler 方程不仅仅是平面情形的一个形式推广, 其流体动力学研究构成了现代大气环流与海洋环流地球物理模型的基础, 相关研究可追溯至地球流体动力学中的奠基性工作, 尤其是 20 世纪中期, 为理想化大气模拟而发展出的正压模型 (barotropic model) [16]. 该模型由无散流动下的标量涡度守恒输运所控制, 尽管在天气预报中的预测能力有限, 但仍是理论分析的重要基础. 在数学上, 球面二维流体运动的方程的研究可参见文献 [3, 5, 20, 29, 37] 等工作.

基于与平面情形类似的守恒律, 通过能量方法可以建立 H^s ($s > 2$) 中的局部存在性, 而利用 Beale-Kato-Majda (BKM) 理论可以进一步证明全局适定性. 关于存在性的详细讨论, 可参见文献 [32, 36]. 稳定性问题是地球物理与海洋环流动力学中的核心研究方向之一, 这方面的结果可参见文献 [2, 15, 17, 18, 29, 32] 及其中引用的文献.

1.2 奇对称解与旋转解

奇对称解和旋转解是球面上 Euler 方程的两类重要的解, 下面引入一些记号来介绍这两类解. 记球面的北极和南极分别为 $N = (0, 0, 1)$ 和 $S = (0, 0, -1)$, 则北半球和南北球可表示为

$$\mathbb{S}_+^2 := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \mid x_3 > 0\}, \quad \mathbb{S}_-^2 := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \mid x_3 < 0\}. \quad (1.16)$$

球面上两点 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^2$ 的测地距离可记为 $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, 记 $B_r(\mathbf{x})$ 为中心在 $\mathbf{x}$ 处半径为 r 的测地圆盘, 即

$$B_r(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{S}^2 \mid \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r\}. \quad (1.17)$$

方程 (1.14) 的奇对称解 $\omega(t, \mathbf{x})$ 是满足如下条件的解:

$$\omega(t, \mathbf{x}) = -\omega(t, \mathbf{x}'), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{S}^2, \quad (1.18)$$

其中 $\mathbf{x}'$ 是 $\mathbf{x}$ 关于赤道平面的对称点, 即若

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3),$$

则有

$$\mathbf{x}' = (x_1, x_2, -x_3).$$

在奇对称的设定下, 只需要考虑上半球面 $\mathbb{S}_+^2$ 上的如下 Euler 方程:

$$\begin{cases} \partial_t \omega + J \nabla \mathcal{G}_+ \omega \cdot \nabla \omega = 0, \\ \mathcal{G}_+ \omega(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{S}_+^2} G_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \omega(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}_+^2} \ln \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \omega(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \end{cases} \quad (1.19)$$

其中

$$G_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (1.20)$$

为上半球面 $-\Delta_{\mathbb{S}_+^2}$ 带有零边值条件的 Green 函数, $\mathcal{G}_+\omega(\mathbf{x})$ 为相应的 Green 算子, 满足

$$-\Delta_{\mathbb{S}_+^2} \mathcal{G}_+\omega = \omega, \quad \omega|_{\partial\mathbb{S}_+^2} = 0. \quad (1.21)$$

容易验证:

- 若 ω 是方程 (1.14) 的一个奇对称解, 则 ω 在 $\mathbb{S}_+^2$ 上的限制满足方程 (1.19);
- 若 ω 是 (1.19) 的解, 则其奇延拓是方程 (1.14) 的解.

旋转解构成了球面上 Euler 方程的一类重要的解. 取 $\alpha \in \mathbb{R}$ 以及单位向量 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, 将点 $\mathbf{x}$ 绕向量 $\mathbf{p}$ 旋转 α 得到的新向量记为 $R_\alpha^{\mathbf{p}}\mathbf{x}$. 方程 (1.19) 的一个绕极轴 $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ 旋转的解可记为

$$\omega(t, \mathbf{x}) = v(R_{-\lambda t}^{\mathbf{e}_3}\mathbf{x}), \quad (1.22)$$

其中 $v: \mathbb{S}_+^2 \mapsto \mathbb{R}$, λ 是一个表示旋转角速度的常数. 则 $v(R_{-\lambda t}^{\mathbf{e}_3}\mathbf{x})$ 是方程 (1.19) 的解当且仅当 v 满足

$$J\nabla(\mathcal{G}_+v - \lambda x_3) \cdot \nabla v = 0. \quad (1.23)$$

我们可以通过如下的 Rodrigues 旋转公式验证上述事实:

$$R_\alpha^{\mathbf{p}}\mathbf{x} = (\cos \alpha)\mathbf{x} + \sin \alpha(\mathbf{p} \times \mathbf{x}) + (1 - \cos \alpha)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (1.24)$$

方程 (1.23) 的弱解满足

$$\int_{\mathbb{S}_+^2} v J\nabla(\mathcal{G}_+v - \lambda x_3) \cdot \nabla \xi d\sigma = 0, \quad \forall \xi \in C_c^\infty(\mathbb{S}_+^2). \quad (1.25)$$

由标准的椭圆方程正则性理论和 Sobolev 嵌入定理 [21] 可知, 当 $v \in L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{S}_+^2)$ 时, 上述积分 (1.25) 有意义.

1.3 球面上的点涡

与平面区域上的 Euler 方程类似, 当涡度支集集中在一个非常小的区域内时, 物理上可以将其理想化为一个点涡. 这种理想化处理能够简化问题, 揭示现象的本质, 并在多个数学学科之间建立联系. 点涡问题是流体力学中的一个基础研究课题, 起源于 Helmholtz [22], Kirchhoff [23] 和 Thomson [33] 的开创性研究, 后来得到了 Lin [24] 等学者的进一步发展. 近年来, 球面上点涡问题引起了数学家的广泛关注, 关于球面上点涡动力学的系统性论述可以参见 Newton 的专著 [26].

球面上 $\mathbb{S}^2$ 位于 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ 的 N 个点涡, 设其涡度强度分别为 $\kappa_1, \dots, \kappa_N$, 则它们的演化服从如下的常微分方程组:

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \sum_{j \neq i, j=1}^N \kappa_j J\nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}, \quad i \in 1, \dots, N, \quad (1.26)$$

这里 G 是由方程 (1.9) 给出的 Green 函数. 球面上的点涡系统可以与平面上的系统统一由如下数学形式刻画:

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \sum_{j \neq i} \frac{\kappa_j}{2\pi} \frac{\mathbf{x}_j \times \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2}, \quad i \in 1, \dots, N. \quad (1.27)$$

系统的 Hamilton 量定义为

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i < j} \kappa_i \kappa_j \ln |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|. \quad (1.28)$$

相应地, 涡度中心定义为

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \sum_{i=1}^N \kappa_i \mathbf{x}_i. \quad (1.29)$$

与平面上的点涡系统相似, 上述物理量也是球面上点涡系统 (1.27) 的守恒量.

在球面上寻找多个点涡问题的显式解通常很难, 两个点涡即涡对的情形得到了更广泛的关注, 其研究可追溯至 Pocklington 1895 年的开创性工作 [28]. 对关于 z 轴旋转且具有相等涡量的两个点涡系统, 设 $\kappa_1 = -\kappa_2 = \kappa$, 方程 (1.27) 变为

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \frac{\kappa_2}{2\pi} \frac{\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2}, \quad \frac{d\mathbf{x}_2}{dt} = \frac{\kappa_1}{2\pi} \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2}. \quad (1.30)$$

记初始值为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(0) = (\sqrt{1-z_0^2} \cos \phi_0, \sqrt{1-z_0^2} \sin \phi_0, z_0), \\ \mathbf{x}_2(0) = (\sqrt{1-z_0^2} \cos \phi_0, \sqrt{1-z_0^2} \sin \phi_0, -z_0), \end{cases} \quad (1.31)$$

其中 $\phi_0 \in \mathbb{R}$ 且 $z_0 \in (0, 1]$, 则由上述守恒量 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{M}$ 容易验证方程 (1.30) 的解可显式表达为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(t) = (\sqrt{1-z_0^2} \cos(\lambda t + \phi_0), \sqrt{1-z_0^2} \sin(\lambda t + \phi_0), z_0), \\ \mathbf{x}_2(t) = (\sqrt{1-z_0^2} \cos(\lambda t + \phi_0), \sqrt{1-z_0^2} \sin(\lambda t + \phi_0), -z_0), \end{cases} \quad (1.32)$$

这里 λ 由下式给出:

$$\lambda = \frac{\kappa}{4\pi z_0}. \quad (1.33)$$

关于点涡的更多相关结果可参见文献 [2, 4, 19, 27] 及其中的参考文献.

1.4 问题描述及主要结果

一个引人关注的问题是, 如何在数学上构造 Euler 方程的集中涡解簇, 使其收敛到点涡解? 这个问题被称为点涡的去奇异化 (desingularization).

在平面情形关于点涡的去奇异化已有大量文献. 在演化情形, Caprini 和 Marchioro [14] 以及 Marchioro [25] 研究了在初始数据光滑且接近于 k 个点涡时 Euler 流中涡度的演化过程. 对于稳态情形, 受 Arnold 的对偶变分原理启发, Turkington [34] 构造了位于点涡附近的全局涡补丁解, 其方法被称为涡方法 (vorticity method). 处理去奇异化问题的另一类方法称为流函数方法, 该方法主要聚焦于流函数及其相关的半线性椭圆方程. Smets 和 Van Schaftingen [30] 利用山路引理在不同情形下对稳态点涡进行了去奇异化. Cao 等 [11] 通过对流函数的奇异摄动研究了平面 Euler 方程中的涡补丁问题. 更多相关的结果可参见文献 [7, 10, 12, 13, 31].

目前关于球面上点涡去奇异化的研究结果相对较少. 据我们所知, 唯一相关的工作是文献 [9]. 该文献通过在给定涡函数的重排类上应用涡方法实现了沿赤道平面奇对称涡对旋转解的去奇异化. 该工作表明, 涡函数的变分极大元对流函数表现出单调非减的依赖关系 (我们称之为涡流依赖函数), 但通常无法显式给出涡函数与流函数的依赖形式, 因此也无法判断通过涡方法获得的解是否与流函数方法

得到的解一致. 一个自然的问题是, 对于任意一个单调非减的函数 f , 能否构造相应的球面上 Euler 方程的解, 使得相应的涡函数 v 和流函数 ψ 具有相应的依赖关系 $v = f(\psi)$? 本文对该问题给出了肯定的回答.

考虑关于赤道平面奇对称点涡对的去奇异化问题. 问题描述如下: 对于方程 (1.23), 自然地可以假设 v 与 $\mathcal{G}_+v - \lambda x_3$ 在局部上函数相关, 即存在函数 f 使得 $v = f(\mathcal{G}_+v - \lambda x_3)$. 为了获得去奇异化结果, 引入参数 ε , 并研究解关于该参数的渐近行为. 更准确地, 考虑方程

$$-\Delta_{\mathbb{S}_+^2} \psi = v = \frac{1}{\varepsilon^2} f(\psi) = \frac{1}{\varepsilon^2} f(\mathcal{G}_+v - \lambda x_3 - \mu), \quad (1.34)$$

其中 $1/\varepsilon^2$ 表示涡度强度, $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 刻画涡函数和流函数的局部依赖关系, $\mu \geq 0$ 是一个通量常数. 上述方程具有变分结构, 因此可考虑用变分方法. 为了对任意给定的涡流依赖函数给出上述问题的解, 我们采用对偶变分的方法. 记

$$F(s) = \int_0^s f(t) dt. \quad (1.35)$$

定义 $J(s) = \sup_{t \in \mathbb{R}} (st - F(t))$, 则 J 为 F 的共轭凸函数. 记 $\partial J(s)$ 为 J 在 s 处的次梯度集合. 由 Euler 方程的守恒特征可知, $\int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 v) d\sigma$ 是方程的 Casimir 量. 对于 $\varepsilon > 0$, 定义总能量泛函 $\mathcal{E}_\varepsilon(v)$ 如下:

$$\mathcal{E}_\varepsilon(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}_+^2} v \mathcal{G}_+ v d\sigma - \lambda \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 v d\sigma - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 v) d\sigma, \quad (1.36)$$

这里能量泛函的第一项是流体的动能, 第二项是冲量在第三个坐标分量上的投影 (类似处理可参见文献 [35]), 第三项是 F 的对偶函数构成的泛函. 假设 f 满足如下条件.

- (H1) 若 $s \leq 0$, 则 $f(s) = 0$; 若 $s > 0$, 则 $f(s) > 0$, 且 f 是一个单调非减函数.
- (H2) 存在常数 $\nu_0 \in (0, 1)$ 以及 $\nu_1 > 0$, 使得 $F(s) := \int_0^s f(t) dt \leq \nu_0 f(s)s + \nu_1 f(s)$, $\forall s \geq 0$.
- (H3) 增长性限制条件:

$$\liminf_{s \rightarrow +\infty} f(s) e^{-\nu_2 s} = 0, \quad \text{其中 } \nu_2 = \frac{4\pi \min\{2\nu_0, 2 - 2\nu_0\}}{\kappa}. \quad (1.37)$$

注 1.1 我们的方法仅要求函数 f 单调不减, 这个条件是十分自然的, 利用涡方法得到的涡 - 流依赖函数都具有单调关系. 这个条件也保证了 Casimir 泛函为凸泛函, 从而可以应用凸泛函的相关性质. 不连续的情形—Heaviside 函数 (对应涡补丁的情形) 以及 $f(s) = s_+^p$ 的情形是我们方法的特例.

注 1.2 我们要求 f 满足 Ambrosetti-Rabinowitz 条件 (H2), 这意味着 f 是无界的. 然而条件 (H3) 限制了 f 的增长速度不能过快. 在后面的证明中, 我们先处理 f 为有界的情形, 然后以 f 有界情形的结果为基础结合增长性限制条件证明无界的情形. 类似相关的限制可参见文献 [1, 8].

我们将在如下约束集上作变分:

$$\mathcal{A} = \left\{ v \in L^\infty(\mathbb{S}^2) \mid v \geq 0 \text{ 在 } \mathbb{S}_+^2 \text{ 上几乎处处成立, } \int_{\mathbb{S}_+^2} v d\sigma \leq \kappa \right\}. \quad (1.38)$$

我们的第一个定理处理 f 有界的情形, 定理叙述如下.

定理 1.1 考虑球面上的两个点涡问题 (1.30). 假设 f 为满足 (H1) 的有界函数, 则存在 ε_0 , 对任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, 有如下结果.

- (i) (存在性) 存在方程 (1.19) 的一簇旋转解 $(v^\varepsilon, \psi^\varepsilon)$ 以及非负 Lagrange 乘子 μ^ε 满足

$$v^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\varepsilon^2} f(\psi^\varepsilon), \quad (1.39)$$

其中 $\psi^\varepsilon = \mathcal{G}_+ v^\varepsilon - \lambda x_3 - \mu^\varepsilon$.

(ii) (支集半径分析) 随着 $\varepsilon \rightarrow 0$, 存在与 ε 无关的常数 $C > 0$, 使得

$$\text{diam}(\text{supp } v^\varepsilon) \leq C\varepsilon. \quad (1.40)$$

(iii) (极限结果) 存在 $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{S}^2$ 使得

$$v^\varepsilon \rightharpoonup \kappa \delta(\mathbf{X}_0) - \kappa \delta(\mathbf{X}'_0). \quad (1.41)$$

上述收敛是在测度意义下的收敛, 且 $\mathbf{X}_0$ 的第三个分量 x_3 满足

$$x_3 = \begin{cases} \frac{\kappa}{4\pi\lambda}, & \text{若 } \frac{\kappa}{4\pi\lambda} < 1, \\ 1, & \text{若 } \frac{\kappa}{4\pi\lambda} = 1. \end{cases} \quad (1.42)$$

我们的第二个定理讨论 f 无界的情形:

定理 1.2 如果 $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 为满足假设 (H1)–(H3) 的函数, 则定理 1.1 的结论依然成立.

由此, 对于满足单调性非减条件的任意涡度 - 流函数关系 (无论其为有界或无界), 我们建立了在给定约束集上变分极大解的存在性.

我们的主要创新点如下. 凸泛函的对偶变分性质是我们方法的基石. 通过对非线性涡度 - 流函数关系 f 施加单调且非减的条件, 我们建立了针对任意 f (包括不连续情形) 变分问题解的存在性. 这一方法显著推广了传统的流函数方法, 后者通常要求 f 是光滑的或分段常数的.

现有的一些经典的涡度解可以认为是我们方法的特例. 例如, 描述涡补丁解的不连续函数 f 能够自然地纳入到我们的分析之中, 而无须特别地作正则化处理.

相比平面 Euler 方程, 球面几何引入了更复杂的几何约束, 因此平面情形的 Riesz 不等式没有直接的替代. 为此, 我们引入了涡函数关于 $\phi = 0$ 的 Steiner 对称化, 这足以帮助我们建立能量极大元的存在性. 另外, 球面的几何特征也为能量估计带来了新的挑战.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节通过对有界涡度 - 流函数关系 f 的详细分析, 证明定理 1.1. 第 3 节处理技术上更具挑战性的无界函数 f 的情形. 本文的主要方法是对 f 作截断, 从而可以利用第 2 节的结果. 其核心的点在于, 我们证明了流函数的一致有界性估计, 从而给出定理 1.2 的证明.

2 定理 1.1 的证明

本节给出定理 1.1 的证明. 为叙述清楚, 我们的证明过程分为若干个引理. 首先, 在约束集上建立能量极大元的存在性, 并给出相应 Lagrange 乘子的刻画. 接着, 分析当参数趋于零时, 这些极大元的能量及其 Lagrange 乘子的渐近行为. 最后, 对极限行为进行精确分析.

2.1 能量极大元的存在性

首先给出算子 $\mathcal{G}_+$ 的一些关键性质, 这些性质在后续的证明中具有基础性的作用.

引理 2.1 记 $\mathcal{G}_+$ 为 $-\Delta_{\mathbb{S}^2_+}$ 带有零边值条件的 Green 算子, 则有如下结论:

- (i) $\mathcal{G}_+$ 是从 $L^p(\mathbb{S}^2_+)$ 到 $W^{2,p}(\mathbb{S}^2_+)$ 有界线性算子;
- (ii) 当 $1 < q < +\infty, 1 \leq r \leq +\infty$ 时, $\mathcal{G}_+$ 是从 $L^p(\mathbb{S}^2_+)$ 到 $L^r(\mathbb{S}^2_+)$ 的紧线性算子;

(iii) $\mathcal{G}_+$ 是对称算子, 即

$$\int_{\mathbb{S}_+^2} v \mathcal{G}_+ w d\sigma = \int_{\mathbb{S}_+^2} w \mathcal{G}_+ v d\sigma, \quad \forall v, w \in L^p(\mathbb{S}_+^2); \quad (2.1)$$

(iv) $\mathcal{G}_+$ 是正定算子, 即

$$\int_{\mathbb{S}_+^2} v \mathcal{G}_+ v d\sigma \geq 0, \quad \forall v \in L^p(\mathbb{S}_+^2), \quad (2.2)$$

其中等式成立当且仅当 $v \equiv 0$.

证明 引理的证明可参见文献 [9, 第 2 节, 引理 2.1]. $\square$

给定球面上以球坐标表示的函数 $v(\phi, \theta)$, 记 v^* 为 v 沿着 $\phi = 0$ 的 Steiner 对称化 (关于 Steiner 对称化可参见文献 [6]).

引理 2.2 对于充分小的参数 ε , 存在 $v^\varepsilon = (v^\varepsilon)^* \in \mathcal{A}$, 使得

$$\mathcal{E}_\varepsilon(v^\varepsilon) = \max_{\tilde{v} \in \mathcal{A}} \mathcal{E}_\varepsilon(\tilde{v}) < +\infty, \quad (2.3)$$

并且有

$$\varepsilon^2 v^\varepsilon \leq \sup f. \quad (2.4)$$

证明 首先选取 ε 充分小使得

$$\frac{\sup_{\mathbb{R}} f}{\varepsilon^2} |\mathbb{S}_+^2| = 2\pi \frac{\sup_{\mathbb{R}} f}{\varepsilon^2} > \kappa, \quad (2.5)$$

其中 $|\cdot|$ 是二维 Lebesgue 测度.

根据引理 2.1, 可知 $\mathcal{G}_+$ 是从 L^p 到 L^r 的紧算子, 能量泛函的第一项是有界的. 能量的第二项显然也是有界的. 至于第三项, 当 $s < \sup f$ 时, $J(s) \neq -\infty$, 因此 $\mathcal{E}_\varepsilon \not\equiv +\infty$. 故可以构造一个极大化序列 $\{v_k\} \subset \mathcal{A}$, 其上界为 $\sup f$. 由于集合 $\mathcal{A}$ 是弱 $*$ 序列紧的, 故存在 v 使得当 $k \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$v_k \xrightarrow{w^*} v \in L^\infty, \quad \mathcal{E}_\varepsilon(v_k) \rightarrow \sup\{\mathcal{E}_\varepsilon(v) \mid v \in \mathcal{A}\}. \quad (2.6)$$

记 v^* 为 v 相对于 $\phi = 0$ 的 Steiner 对称化, 则有 $v \in \mathcal{A}$, 且

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}_+^2} v \mathcal{G}_+ v d\sigma &\leq \int_{\mathbb{S}_+^2} v^* \mathcal{G}_+ v^* d\sigma, \quad \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 v d\sigma = \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 v^* d\sigma, \\ \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 v) d\sigma &= \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 v^*) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.7)$$

第一项通过将二重积分转化为累次积分, 并在 θ 坐标下应用一维 Riesz 重排不等式得到. 第二项则由弱 $*$ 收敛的定义得到. 根据 Fubini 定理, 第三个等式成立. 因此总是可以假定极大化序列中的 $v_k = v_k^*$ 和 $v = v^*$.

由引理 2.1 推导出的算子 $\mathcal{G}_+$ 的性质可得 $\mathcal{G}_+ v_k$ 在 L^2 中强收敛于 $\mathcal{G}_+ v$, $v_k \xrightarrow{L^2} v$, 从而有

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{S}_+^2} v_k \mathcal{G}_+ v_k d\sigma = \int_{\mathbb{S}_+^2} v \mathcal{G}_+ v d\sigma. \quad (2.8)$$

显然有

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 v_k d\sigma = \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 v d\sigma. \quad (2.9)$$

最后, 对于 $\mathcal{T}^\varepsilon = \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 v) d\sigma$, 我们断言

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 v_k) d\sigma \geq \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 v) d\sigma. \quad (2.10)$$

我们通过反证法证明此断言. 若不然, 则存在某个 $\delta > 0$, 使得

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 v_k) d\sigma \leq \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 v) d\sigma + \delta. \quad (2.11)$$

取子列 (不失一般性仍记为 v_k), 使得对于任意的 k 满足 $\mathcal{T}^\varepsilon(v_k) \leq \mathcal{T}^\varepsilon(v) + \delta$. 由于 $v_k \rightharpoonup v$ 在 $L^\infty(\mathbb{S}_+^2)$ 中弱 $*$ 收敛, 则有该序列在 $L^2(\mathbb{S}_+^2)$ 中 $v_k \rightharpoonup v$. 由 Mazur 定理, 可以构造序列 $w_k \rightarrow v$ 在 $L^2(\mathbb{S}_+^2)$ 中强收敛, 其中每一个 w_k 是 v_j 的凸组合, 即

$$w_n = \sum_{j=1}^{n_j} \alpha_{m_j} v_j, \quad \sum_1^{n_j} \alpha_{m_j} = 1, \quad \alpha_{m_j} \in [0, 1]. \quad (2.12)$$

从而可以选取 $\{w_n\}$ 的子列 (不失一般性仍记为 $\{w_n\}$) 在 $\mathbb{S}_+^2$ 上几乎处处收敛到 v , 则由 Lebesgue 控制收敛定理, 有

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 w_n) d\sigma = \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 v) d\sigma. \quad (2.13)$$

另外, 由凸性有

$$\mathcal{T}^\varepsilon = \mathcal{T}^\varepsilon \left(\sum_{j=1}^{n_j} \alpha_{m_j} v_j \right) \leq \sum_{j=1}^{n_j} \alpha_{m_j} \mathcal{T}^\varepsilon(v_j) \leq \sum_{j=1}^{n_j} \alpha_{m_j} (\mathcal{T}^\varepsilon(v) + \delta), \quad (2.14)$$

这与方程 (2.11) 矛盾. 从而证明了上述断言.

综合方程 (2.8), (2.9) 和 (2.11), 有 $\liminf_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_\varepsilon(v_k) = \mathcal{E}_\varepsilon(v) = \sup_{\mathcal{A}} \mathcal{E}_\varepsilon$, 从而命题得证. $\square$

引理 2.3 记 v^ε 为引理 2.2 中的极大元, 则存在非负 Lagrange 乘子 μ^ε 满足如下性质:

$$\begin{aligned} v^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon^2} f(\psi^\varepsilon) \quad \text{在 } \mathbb{S}_+^2 \text{ 上几乎处处成立,} \\ \psi^\varepsilon &= \mathcal{G}_+ v^\varepsilon - \lambda x_3 - \mu^\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.15)$$

证明 引入如下函数 $\gamma(t) : \mathbb{R} \mapsto [0, +\infty)$:

$$\gamma(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} f(\mathcal{G}_+ v^\varepsilon - \lambda x_3 + t) d\sigma. \quad (2.16)$$

我们断言 $\gamma(t)$ 是一个连续函数. 由于 $v^\varepsilon \in L^\infty$, 所以由椭圆方程正则性理论有 $\mathcal{G}_+ v^\varepsilon \in C_{\text{loc}}^1(\mathbb{S}_+^2)$. 另外, 由于 $v^\varepsilon = (v^\varepsilon)^*$, 所以 $\mathcal{G}_+ v^*$ 关于坐标 ϕ 对称递减, 且当 $v^* \neq 0, \phi > 0$ 时, 有 $\partial_\phi \mathcal{G}_+ v^* < 0$. 由隐函数定理可知, $\mathcal{G}_+ v^* - \lambda x_3$ 的每一个水平集为零测集. 由于 f 是单调非减的, 所以 f 只有有限多个不连续点. 由控制收敛定理, 可得 $\gamma(t)$ 是连续函数.

由方程 2.5, 有 $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = \frac{\sup_{\mathbb{S}_+^2} f}{\varepsilon^2} |\mathbb{S}_+^2| > \kappa$. 因此存在常数 $\mu^\varepsilon \in \mathbb{R}$ 使得 $\gamma(-\mu^\varepsilon) = \int_{\mathbb{S}_+^2} v^\varepsilon d\sigma$. 令

$$\tilde{v}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} f(\mathcal{G}_+ v^\varepsilon - \lambda x_3 - \mu^\varepsilon), \quad (2.17)$$

结合上述定义, 有 $\tilde{v}^\varepsilon \in \mathcal{A}$.

我们断言 $\tilde{v}^\varepsilon = v^\varepsilon$. 为了说明这个事实, 定义

$$\hat{v} = \frac{\tilde{v}^\varepsilon + v^\varepsilon}{2} \in \mathcal{A}.$$

利用 $\mathcal{E}_\varepsilon(v^\varepsilon) \geq \mathcal{E}_\varepsilon(\hat{v})$ 以及 J 的凸性, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\varepsilon(v^\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}_+^2} v^\varepsilon \mathcal{G}_+ v^\varepsilon d\sigma - \lambda \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 v^\varepsilon d\sigma - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 v^\varepsilon) d\sigma \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}_+^2} \frac{v^\varepsilon + \tilde{v}^\varepsilon}{2} \mathcal{G}_+ \frac{v^\varepsilon + \tilde{v}^\varepsilon}{2} d\sigma - \lambda \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 \frac{v^\varepsilon + \tilde{v}^\varepsilon}{2} d\sigma - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} J\left(\varepsilon^2 \frac{v^\varepsilon + \tilde{v}^\varepsilon}{2}\right) d\sigma \\ &\geq \frac{1}{8} \int_{\mathbb{S}_+^2} v^\varepsilon \mathcal{G}_+ v^\varepsilon d\sigma + \frac{1}{8} \int_{\mathbb{S}_+^2} \tilde{v}^\varepsilon \mathcal{G}_+ \tilde{v}^\varepsilon d\sigma + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}_+^2} v^\varepsilon \mathcal{G}_+ \tilde{v}^\varepsilon d\sigma \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 v^\varepsilon d\sigma - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 \tilde{v}^\varepsilon d\sigma - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 v^\varepsilon) d\sigma - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 \tilde{v}^\varepsilon) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.18)$$

整理上述不等式, 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} (J(\varepsilon^2 \tilde{v}^\varepsilon) - J(\varepsilon^2 v^\varepsilon)) d\sigma &\geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}_+^2} v^\varepsilon \mathcal{G}_+ (\tilde{v}^\varepsilon - v^\varepsilon) d\sigma + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 (\tilde{v}^\varepsilon - v^\varepsilon) d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{8} \int_{\mathbb{S}_+^2} \tilde{v}^\varepsilon \mathcal{G}_+ \tilde{v}^\varepsilon d\sigma - \frac{1}{8} \int_{\mathbb{S}_+^2} v^\varepsilon \mathcal{G}_+ v^\varepsilon d\sigma. \end{aligned} \quad (2.19)$$

进一步地, 可有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} (J(\varepsilon^2 \tilde{v}^\varepsilon) - J(\varepsilon^2 v^\varepsilon)) d\sigma \\ &= \int_{\mathbb{S}_+^2} (\mathcal{G}_+ v^\varepsilon - \lambda x_3) (\tilde{v}^\varepsilon - v^\varepsilon) d\sigma + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}_+^2} \tilde{v}^\varepsilon \mathcal{G}_+ \tilde{v}^\varepsilon d\sigma + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}_+^2} v^\varepsilon \mathcal{G}_+ v^\varepsilon d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}_+^2} v^\varepsilon \mathcal{G}_+ \tilde{v}^\varepsilon d\sigma \\ &= \int_{\mathbb{S}_+^2} (\mathcal{G}_+ v^\varepsilon - \lambda x_3) (\tilde{v}^\varepsilon - v^\varepsilon) d\sigma + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}_+^2} (\tilde{v}^\varepsilon - v^\varepsilon) \mathcal{G}_+ (\tilde{v}^\varepsilon - v^\varepsilon) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.20)$$

由于 $\partial J(\cdot)$ 与 $f(\cdot)$ 互为反函数, 所以由 $\tilde{v}^\varepsilon$ 的定义可得

$$\mathcal{G}_+ v^\varepsilon - \lambda x_3 - \mu^\varepsilon \in \partial J(\varepsilon^2 \tilde{v}^\varepsilon). \quad (2.21)$$

由 $J(\cdot)$ 的凸性, 有

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} (J(\varepsilon^2 \tilde{v}^\varepsilon) - J(\varepsilon^2 v^\varepsilon)) d\sigma \leq \int_{\mathbb{S}_+^2} (\mathcal{G}_+ v^\varepsilon - \lambda x_3 - \mu^\varepsilon) (\tilde{v}^\varepsilon - v^\varepsilon) d\sigma. \quad (2.22)$$

注意到 $\int_{\mathbb{S}_+^2} (\tilde{v}^\varepsilon - v^\varepsilon) d\sigma = 0$, 由 (2.20) 可得

$$\frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}_+^2} (\tilde{v}^\varepsilon - v^\varepsilon) \mathcal{G}_+ (\tilde{v}^\varepsilon - v^\varepsilon) d\sigma \leq 0. \quad (2.23)$$

由算子 $\mathcal{G}_+$ 的正定性, 得到 $\tilde{v}^\varepsilon \equiv v^\varepsilon$.

下面用反证法证明 μ^ε 的非负性. 若不然, 设 $\mu^\varepsilon < 0$. 定义

$$\bar{v}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} f(\mathcal{G}_+ v^\varepsilon - \lambda x_3) \in \mathcal{A}, \quad (2.24)$$

应用前面相似的推理, 有 $\int_{\mathbb{S}_+^2} (\bar{v}^\varepsilon - v^\varepsilon) \mathcal{G}_+ (\bar{v}^\varepsilon - v^\varepsilon) d\sigma \leq 0$, 从而有 $v^\varepsilon = \bar{v}^\varepsilon$. 因此 μ^ε 的非负性断言成立.

综上, 命题得证. $\square$

接下来, 给出极大元的涡量的精确刻画.

引理 2.4 设 v^ε 为引理 2.2 中能量极大元, 若 $v^\varepsilon \not\equiv 0$ 且 $\mu^\varepsilon > 0$, 则有

$$\int_{\mathbb{S}_+^2} v^\varepsilon d\sigma = \kappa. \quad (2.25)$$

证明 我们通过反证法进行论证. 假设 $\int_{\mathbb{S}_+^2} v^\varepsilon d\sigma < \kappa$, 则必有 $\gamma(0) > \kappa$. 为了证明这一点, 假设 $\gamma(0) < \kappa$ 并如上所述定义 $\bar{v}$. 则如引理 2.3 后半部分的推理, 可以推导出 $v^\varepsilon = \bar{v}^\varepsilon$, 这与 $\mu^\varepsilon > 0$ 相矛盾.

由于 γ 是连续函数, 所以可以找到一个数 $\hat{\mu}^\varepsilon > 0$, 使得

$$\hat{v}^\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon^2} f(\mathcal{G}_+ v^\varepsilon - \lambda x_3 - \hat{v}^\varepsilon) \in \mathcal{A}, \quad (2.26)$$

以及 $\int_{\mathbb{S}_+^2} \hat{v}^\varepsilon d\sigma = \kappa$. 应用引理 2.3 前半部分的推理可得

$$\int_{\mathbb{S}_+^2} (\hat{v}^\varepsilon - v^\varepsilon) \mathcal{G}_+ (\hat{v}^\varepsilon - v^\varepsilon) d\sigma < 0. \quad (2.27)$$

这与算子 $\mathcal{G}_+$ 的正定性矛盾, 从而命题得证. $\square$

2.2 渐近行为

本小节研究当参数 ε 趋于零时能量极大元的渐近行为. 首先给出能量 $\mathcal{E}_\varepsilon$ 的下界估计.

引理 2.5 当 ε 足够小时, 存在一个常数 $C > 0$, 使得

$$\mathcal{E}_\varepsilon(v^\varepsilon) \geq \frac{\kappa^2}{4\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon} - C. \quad (2.28)$$

证明 注意到球冠 $B_r(x)$ 的面积

$$|B_r(x)| = |B_r(N)| = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}-r}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta d\phi = 2\pi(1 - \cos r). \quad (2.29)$$

故可取

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{\min\{\kappa, \sup f\}}{4\pi(1 - \cos \varepsilon)} \mathbf{1}_{B_\varepsilon(N)}(x). \quad (2.30)$$

则有

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\varepsilon(v^\varepsilon) &\geq \mathcal{E}_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}_+^2} \rho_\varepsilon \mathcal{G}_+ \rho_\varepsilon d\sigma - \lambda \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 \rho_\varepsilon d\sigma - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 \rho_\varepsilon) d\sigma \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}_+^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} \rho_\varepsilon(x) \ln \frac{|x - y'|}{|x - y|} \rho_\varepsilon(y) d\sigma_x d\sigma_y - \lambda \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 \rho_\varepsilon d\sigma - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 \rho_\varepsilon) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.31)$$

对于上式中的第二项, 可以直接验证

$$\left| \lambda \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 \rho_\varepsilon d\sigma \right| \leq C.$$

对于第三项, 当 ε 充分小使得 $\varepsilon^2 \rho_\varepsilon \in [0, \sup f]$ 时, $J(\varepsilon^2 \rho_\varepsilon)$ 一致有界. 因此第三项

$$-\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 \rho_\varepsilon) d\sigma$$

一致有界. 对于第一项, 有

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}_+^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} \rho_\varepsilon(\mathbf{x}) \ln \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho_\varepsilon(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{x}} d\sigma_{\mathbf{y}} \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{B_\varepsilon(N)} \int_{B_\varepsilon(N)} \rho_\varepsilon(\mathbf{x}) \ln \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho_\varepsilon(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{x}} d\sigma_{\mathbf{y}} \\
&\geq \frac{\kappa^2}{4\pi} \ln \frac{\cos \varepsilon}{\sin \varepsilon} \\
&> \frac{\kappa^2}{4\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon} - C.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

这里最后一个不等式用到了如下的几何事实:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}'| \geq 2 \cos \varepsilon, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq 2 \sin \varepsilon, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_\varepsilon(N). \tag{2.33}$$

综上, 命题得证. $\square$

定义涡核的能量如下:

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \int_{\mathbb{S}_+^2} v^\varepsilon \psi^\varepsilon d\sigma. \tag{2.34}$$

结合 $\mathcal{J}^\varepsilon(v^\varepsilon) = \varepsilon^{-2} \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 v^\varepsilon) d\sigma$, 则有如下性质成立.

引理 2.6 当 ε 充分小时, 存在常数 C 使得

$$\mathcal{L}_\varepsilon \leq C, \quad \mathcal{J}^\varepsilon \leq C. \tag{2.35}$$

证明 由于算子 $\mathcal{G}_+$ 是带零边值的 Green 算子, 函数 $\psi^\varepsilon = \mathcal{G}_+ v_\varepsilon - \lambda x_3 - \mu^\varepsilon$ 在边界上取负值, 因此 $\psi_+^\varepsilon \in H_0^1(\mathbb{S}_+^2)$. 对于方程

$$-\Delta_{\mathbb{S}_+^2} \psi^\varepsilon = v^\varepsilon, \tag{2.36}$$

由引理 2.3 结合关于 f 的假设 (H1) 及极值原理, 可取 ψ_+^ε 为测试函数, 有

$$\int_{\mathbb{S}_+^2} |\nabla \psi_+^\varepsilon|^2 d\sigma = \int_{\mathbb{S}_+^2} v^\varepsilon \psi_+^\varepsilon d\sigma = \int_{\mathbb{S}_+^2} v^\varepsilon \psi^\varepsilon d\sigma. \tag{2.37}$$

记

$$K^\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}_+^2 \mid \psi^\varepsilon > 1\},$$

则由 (2.15) 得 $v^\varepsilon \geq f(1)/\varepsilon^2$ 在集合 K^ε 上几乎处处成立, 且有 $|K^\varepsilon| \leq C\varepsilon^2$. 由 Sobolev 空间嵌入定理 $W^{1,1} \hookrightarrow L^2$ [21] 有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}_+^2} v^\varepsilon \psi^\varepsilon d\sigma &\leq \int_{\mathbb{S}_+^2} v^\varepsilon (\psi^\varepsilon - 1)_+ d\sigma + \kappa \\
&\leq C\varepsilon^{-2} |K^\varepsilon|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{S}_+^2} |(\psi^\varepsilon - 1)_+|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} + \kappa \\
&\leq C\varepsilon^{-2} |K^\varepsilon|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{S}_+^2} (\psi^\varepsilon - 1)_+ d\sigma + \int_{\mathbb{S}_+^2} \nabla (\psi^\varepsilon - 1)_+ d\sigma \right) + \kappa \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{S}_+^2} |\nabla (\psi^\varepsilon)_+|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} + C\varepsilon \int_{\mathbb{S}_+^2} v^\varepsilon \psi^\varepsilon d\sigma + C.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

结合方程 (2.37) 及 (2.38), 当 ε 充分小时, 方程 (2.37) 的两端均有界, 因此有 $\mathcal{L}_\varepsilon \leq C$.

由 J 泛函的凸性可知

$$J(\varepsilon^2 v^\varepsilon) + F(\psi^\varepsilon) = \varepsilon^2 v^\varepsilon \psi^\varepsilon \quad \text{在 } K_\varepsilon \text{ 上几乎处处成立.} \quad (2.39)$$

故有 $\mathcal{J}^\varepsilon \leq 2\mathcal{L}_\varepsilon$. 综上, 命题得证. $\square$

基于之前的证明, 我们给出 Lagrange 乘子的一个关键下界估计.

引理 2.7 当参数 ε 充分小时, 存在常数 C 使得

$$\mu^\varepsilon \geq \frac{\kappa}{2\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon} - C. \quad (2.40)$$

证明 直接计算可得

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}_\varepsilon(v^\varepsilon) &= \int_{\mathbb{S}_+^2} v^\varepsilon \mathcal{G}_+ v^\varepsilon d\sigma - 2\lambda \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 v^\varepsilon d\sigma - 2\mathcal{J}^\varepsilon \\ &\leq \int_{\mathbb{S}_+^2} v^\varepsilon \psi^\varepsilon d\sigma - \lambda \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 v^\varepsilon d\sigma - 2\mathcal{J}^\varepsilon + \kappa \mu^\varepsilon \\ &\leq C + \kappa \mu^\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.41)$$

结合引理 2.5, 命题得证. $\square$

基于前面的引理, 有如下引理.

引理 2.8 若 ε 充分小, 则有 $\int_{\mathbb{S}_+^2} v^\varepsilon d\sigma = \kappa$.

证明 由 Lagrange 乘子的下界估计 (引理 2.7), 对于充分小的 ε , μ^ε 是正数. 另外, 由能量下界估计 (引理 2.5), 对于充分小的 ε , 极大元非零. 因此利用极大元的涡核能量估计 (引理 2.4), 易得命题结论成立. $\square$

2.3 极限行为

本小节分析 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时能量极大元 v^ε 的支集的变化及其极限行为.

引理 2.9 记 v^ε 为引理 2.2 中的极大元, 则有

$$\text{diam}(\text{supp}(v^\varepsilon)) \leq C\varepsilon, \quad (2.42)$$

这里的直径为测地距离.

证明 上述引理的证明可参见文献 [10, 引理 5.5]. $\square$

引理 2.9 的结论表明, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 涡度的支集 v^ε 收缩到球面 $\mathbb{S}_+^2$ 上的一点 (取子列的意义下). 我们分析该极限位置. 定义函数如下:

$$\mathcal{W}(s) = \lambda s - \frac{\kappa}{4\pi} \ln s, \quad s \in (0, 1]. \quad (2.43)$$

定义其极小值为 $\mathcal{W}(r^*) = \min_{s \in (0, 1]} \mathcal{W}(s)$. 定义涡的中心为

$$X_v = \frac{1}{\kappa} \int_{\mathbb{S}_+^2} \mathbf{x} v^\varepsilon d\sigma, \quad (2.44)$$

则对任意的

$$\mathbf{x} \in A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}_+^2 \mid v^\varepsilon(\mathbf{x}) > 0\},$$

有

$$|\mathbf{x} - X_{v^\varepsilon}| \leq C\varepsilon.$$

引理 2.10 不计子列的意义下, 有 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} X_{v^\varepsilon} = \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}_+^2$, 其中 $\hat{\mathbf{x}}$ 坐标的第三个分量 $\hat{x}_3$ 满足

$$\hat{x}_3 = \begin{cases} \frac{\kappa}{4\pi\lambda}, & \text{若 } \frac{\kappa}{4\pi\lambda} < 1, \\ 1, & \text{若 } \frac{\kappa}{4\pi\lambda} \geq 1. \end{cases} \quad (2.45)$$

证明 对任意 $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}_+^2$ 及充分小的 ε , 总是可以取正交变换 $\mathcal{R} \in SO(3)$ 使得

$$\tilde{v}^\varepsilon := v^\varepsilon \circ \mathcal{R}$$

满足

$$\tilde{v}^\varepsilon \in \mathcal{A}, \quad X_{\tilde{v}^\varepsilon} = \tilde{\mathbf{x}}. \quad (2.46)$$

由

$$\mathcal{E}_\varepsilon(v^\varepsilon) \geq \mathcal{E}_\varepsilon(\tilde{v}^\varepsilon),$$

将上述能量展开即为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}_+^2} v^\varepsilon \mathcal{G}_+ v^\varepsilon d\sigma - \lambda \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 v^\varepsilon d\sigma - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 v^\varepsilon) d\sigma, \\ & \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}_+^2} \tilde{v}^\varepsilon \mathcal{G}_+ \tilde{v}^\varepsilon d\sigma - \lambda \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 \tilde{v}^\varepsilon d\sigma - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 \tilde{v}^\varepsilon) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.47)$$

整理可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}_+^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} v^\varepsilon(\mathbf{x}) \ln \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} v^\varepsilon(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{x}} d\sigma_{\mathbf{y}} - \lambda \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 v^\varepsilon d\sigma - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 v^\varepsilon) d\sigma \\ & \geq \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}_+^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} \tilde{v}^\varepsilon(\mathbf{x}) \ln \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \tilde{v}^\varepsilon(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{x}} d\sigma_{\mathbf{y}} - \lambda \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 \tilde{v}^\varepsilon d\sigma - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 \tilde{v}^\varepsilon) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.48)$$

由于 $\tilde{v}^\varepsilon$ 是 v^ε 复合一个旋转, 所以有

$$\int_{\mathbb{S}_+^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}| v^\varepsilon(\mathbf{x}) v^\varepsilon(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{x}} d\sigma_{\mathbf{y}} = \int_{\mathbb{S}_+^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \tilde{v}^\varepsilon(\mathbf{x}) \tilde{v}^\varepsilon(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{x}} d\sigma_{\mathbf{y}}. \quad (2.49)$$

结合

$$\int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 v^\varepsilon) d\sigma = \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 \tilde{v}^\varepsilon) d\sigma, \quad (2.50)$$

因此可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}_+^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} v^\varepsilon(\mathbf{x}) \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}'| v^\varepsilon(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{x}} d\sigma_{\mathbf{y}} - \lambda \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 v^\varepsilon d\sigma \\ & \geq \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}_+^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} \tilde{v}^\varepsilon(\mathbf{x}) \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}'| \tilde{v}^\varepsilon(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{x}} d\sigma_{\mathbf{y}} - \lambda \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 \tilde{v}^\varepsilon d\sigma. \end{aligned} \quad (2.51)$$

利用涡核的直径估计 (引理 2.9), 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 取极限可有 $x_3 > 0$ 且

$$\frac{\kappa^2}{4\pi} \ln 2x_3 - \lambda \kappa x_3 \geq \frac{\kappa^2}{4\pi} \ln 2\tilde{x}_3 - \lambda \kappa \tilde{x}_3. \quad (2.52)$$

由于 $\tilde{x}$ 是任意的, 可推导出 x_3 是函数的 $W(s)$ 极小值点, 容易验证 $W(s)$ 在 $(0, 1]$ 中有唯一的极小值点且满足如下条件:

$$\hat{x}_3 = \begin{cases} \frac{\kappa}{4\pi\lambda}, & \text{若 } \frac{\kappa}{4\pi\lambda} < 1, \\ 1, & \text{若 } \frac{\kappa}{4\pi\lambda} \geq 1. \end{cases} \quad (2.53)$$

综合引理 2.2–2.10, 至此证明了 1.1. □

3 定理 1.2 的证明

当涡流依赖函数 f 无界时, 问题变得更加复杂. 此时需要采用更精细的技巧来处理非线性项, 关键的方法是对 f 进行截断. 对任意给定的 $\eta > \eta^* \gg 1$, 记

$$f_\eta(s) = \begin{cases} f(s), & \text{当 } 0 \leq s < \eta \text{ 时}, \\ f(\eta), & \text{当 } s > \eta \text{ 时}. \end{cases} \quad (3.1)$$

记

$$F_\eta(s) = \int_0^s f_\eta(t) dt. \quad (3.2)$$

相应地, 记 J_η 为 F_η 的共轭. 对于 $\varepsilon > 0$, 定义

$$\mathcal{E}_{\varepsilon, \eta}(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}_+^2} v \mathcal{G}_+ v d\sigma - \lambda \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 v d\sigma - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} J_\eta(\varepsilon^2 v) d\sigma. \quad (3.3)$$

对固定的 η , 与有界的情形类似, 可以得到一簇解 $(v^{\varepsilon, \eta}, \psi^{\varepsilon, \eta})$, $v^{\varepsilon, \eta}$ 随着参数 $\varepsilon \rightarrow 0$ 收敛到特定纬度的 Dirac 测度之差. 为了摆脱参数 η 的限制, 需要作更精细的渐近分析.

3.1 渐近估计

由

$$\psi^{\varepsilon, \eta} = \mathcal{G}_+ v^{\varepsilon, \eta} - \lambda x_3 - \mu^{\varepsilon, \eta}, \quad (3.4)$$

其中

$$\mathcal{G}_+ v^{\varepsilon, \eta} = \int_{\mathbb{S}_+^2} G_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v^{\varepsilon, \eta}(\mathbf{y}) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}_+^2} \ln \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} v^{\varepsilon, \eta}(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad (3.5)$$

首先给出 $\mathcal{G}_+ v^{\varepsilon, \eta}$ 的估计.

引理 3.1 当 ε 充分小时, 存在一个与 ε 和 η 无关的常数 $C > 0$, 使得

$$\mathcal{G}_+ v^{\varepsilon, \eta} \leq \frac{\kappa}{2\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\kappa}{4\pi} \ln f(\eta) + C, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{S}_+^2. \quad (3.6)$$

证明 由于 $v^{\varepsilon, \eta} \leq \varepsilon^{-2} f_\eta(\psi^{\varepsilon, \eta})$, 故 $0 \leq v^{\varepsilon, \eta} \leq f(\eta)/\varepsilon^2$ 在 $\mathbb{S}_+^2$ 上几乎处处成立. 对于 $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_+^2$, 有

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_+ v^{\varepsilon, \eta} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}_+^2} \ln \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} v^{\varepsilon, \eta}(\mathbf{y}) d\sigma \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}_+^2} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} v^{\varepsilon, \eta}(\mathbf{y}) d\sigma + C \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{f(\eta)}{\varepsilon^2} \int_{B_{2 \arcsin(\varepsilon \sqrt{\frac{\kappa}{4\pi f(\eta)}})}(N)} \ln \frac{1}{|N - \mathbf{y}|} d\sigma + C \\
 &= \frac{f(\eta)}{\varepsilon^2} \int_{\frac{\pi}{2} - 2 \arcsin(\varepsilon \sqrt{\frac{\kappa}{4\pi f(\eta)}})}^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1}{2 \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})} \cos \theta d\theta + C \\
 &= \frac{f(\eta)}{\varepsilon^2} \int_0^{2 \arcsin(\varepsilon \sqrt{\frac{\kappa}{4\pi f(\eta)}})} \ln \frac{1}{2 \sin(\frac{\beta}{2})} \sin \beta d\beta + C \\
 &= -\frac{f(\eta)}{\varepsilon^2} \int_0^{2\varepsilon \sqrt{\frac{\kappa}{4\pi f(\eta)}}} s \ln s ds + C \\
 &= \frac{\kappa}{2\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\kappa}{4\pi} \ln f(\eta) + C.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

因此命题得证. $\square$

通过选取适当的比较元, 容易得到能量的下界估计.

引理 3.2 对于任意给定的能量极大元 $v^{\varepsilon, \eta}$, 存在与 ε 和 η 无关的常数 $C > 0$, 使得

$$\mathcal{E}_{\varepsilon, \eta}(v^{\varepsilon, \eta}) \geq -\frac{\kappa^2}{4\pi} \ln \varepsilon - C, \tag{3.8}$$

证明 取 $\rho_\varepsilon = f(1)/(2\varepsilon^2)1_{B_r(N)}$ 满足 $\int_{\mathbb{S}_+^2} \rho_\varepsilon d\sigma = \kappa$, 则有

$$\mathcal{E}_{\varepsilon, \eta}(v^{\varepsilon, \eta}) \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}_+^2} \rho_\varepsilon \mathcal{G}_+ \rho_\varepsilon d\sigma - \lambda \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 \rho_\varepsilon d\sigma - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} J_\eta(\varepsilon^2 \rho_\varepsilon) d\sigma. \tag{3.9}$$

对于右端的第二项, 显然有

$$\int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 \rho_\varepsilon d\sigma \leq \kappa.$$

对于右端的第三项, 有

$$1/\varepsilon^2 \int_{\mathbb{S}_+^2} J(\varepsilon^2 \rho_\varepsilon) d\sigma \leq J_\eta(f(1))\kappa.$$

对于第一项, 有

$$\begin{aligned}
 E(\rho_\varepsilon) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}_+^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} \ln \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho_\varepsilon(\mathbf{x}) \rho_\varepsilon(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{x}} d\sigma_{\mathbf{y}} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{B_\varepsilon(N)} \int_{B_\varepsilon(N)} \ln \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho_\varepsilon(\mathbf{x}) \rho_\varepsilon(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{x}} d\sigma_{\mathbf{y}} \\
 &\geq \frac{\kappa^2}{4\pi} \ln \frac{\cos \varepsilon}{\sin \varepsilon} \geq \frac{\kappa^2}{4\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon} - C.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

综上, 命题得证. $\square$

基于前面的结果, 我们给出一个 Lagrange 乘子 μ^ε 的更精确的估计.

引理 3.3 当 ε 充分小时, 有

$$\mu^{\varepsilon, \eta} \geq \frac{\kappa}{2\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon} - |1 - 2\nu_0\eta| - C, \quad (3.11)$$

其中常数 $C > 0$ 不依赖于 ε 和 η .

证明 由假设, 有

$$F_\eta(s) = \begin{cases} F(s), & s \leq \eta, \\ F(\eta) + f(\eta)(s - \eta), & s > \eta, \end{cases} \quad (3.12)$$

其中

$$F(s) \leq \nu_0 f(s)s + \nu_1 f(s).$$

由泛函 J 的凸性可知

$$J_\eta(\varepsilon^2 v^{\varepsilon, \eta}) + F_\eta(\psi^{\varepsilon, \eta}) = \varepsilon^2 v^{\varepsilon, \eta} \psi^{\varepsilon, \eta} \quad \text{在 } \mathbb{S}_+^2 \text{ 上几乎处处成立.} \quad (3.13)$$

则有

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}_{\varepsilon, \eta}(v^{\varepsilon, \eta}) &= \int_{\mathbb{S}_+^2} v^{\varepsilon, \eta}(\psi^{\varepsilon, \eta} + \lambda x_3 + \mu^{\varepsilon, \eta}) d\sigma - 2\lambda \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 v^{\varepsilon, \eta} d\sigma \\ &\quad - \frac{2}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} (\varepsilon^2 v^{\varepsilon, \eta} \psi^{\varepsilon, \eta} - F_\rho(\psi^{\varepsilon, \eta})) d\sigma \\ &= - \int_{\mathbb{S}_+^2} v^{\varepsilon, \eta} \psi^{\varepsilon, \eta} d\sigma - \lambda \int_{\mathbb{S}_+^2} x_3 v^{\varepsilon, \eta} d\sigma + \frac{2}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} (F_\eta(\psi^{\varepsilon, \eta})) d\sigma + \kappa \mu^{\varepsilon, \eta} \\ &\leq - \int_{\mathbb{S}_+^2} v^{\varepsilon, \eta} \psi^{\varepsilon, \eta} d\sigma + \frac{2}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} (F_\eta(\psi^{\varepsilon, \eta})) d\sigma + \kappa \mu^{\varepsilon, \eta} + \frac{\pi}{2} \lambda \kappa \\ &= - \int_{\psi \leq \eta} v^{\varepsilon, \eta} \psi^{\varepsilon, \eta} d\sigma - \int_{\psi > \eta} v^{\varepsilon, \eta} \psi^{\varepsilon, \eta} d\sigma + \frac{2}{\varepsilon^2} \int_{\psi \leq \eta} (\nu_0 f(\psi^{\varepsilon, \eta}) \psi^{\varepsilon, \eta} \\ &\quad + \nu_1 f(\psi^{\varepsilon, \eta})) d\sigma + \frac{2}{\varepsilon^2} \int_{\psi > \eta} (\nu_0 f(\eta) \eta + \nu_1 f(\eta)) d\sigma \\ &\quad + \frac{2}{\varepsilon^2} \int_{\psi > \eta} f(\eta)(\psi^{\varepsilon, \eta} - \eta) d\sigma + \kappa \mu^{\varepsilon, \eta} + \frac{\pi}{2} \lambda \kappa \\ &\leq |2\nu_0 - 1| \eta + 2\nu_1 \kappa + \kappa \mu^{\varepsilon, \eta} + \frac{\pi}{2} \lambda \kappa + \frac{f(\eta)}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} (\psi^{\varepsilon, \eta} - \eta)_+ d\sigma. \end{aligned} \quad (3.14)$$

结合前面的估计, 有

$$\mu^{\varepsilon, \eta} \geq \frac{\kappa}{2\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon} - |1 - 2\nu_0\eta| - \frac{f(\eta)}{\kappa \varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} (\psi^{\varepsilon, \eta} - \eta)_+ d\sigma - \left(\frac{\pi}{2} \lambda + 2\nu_1 \right). \quad (3.15)$$

若能够证明 $\frac{f(\eta)}{\kappa \varepsilon^2} \int_{\mathbb{S}_+^2} (\psi^{\varepsilon, \eta} - \eta)_+ d\sigma$ 关于参数 ε 和 η 一致有界, 则命题得证. 为此, 设

$$V = (\psi^{\varepsilon, \eta} - \eta)_+,$$

则有

$$v^{\varepsilon, \eta} = \varepsilon^{-2} f(\eta), \quad \forall \mathbf{x} \in \text{supp}(V).$$

由于 $\int_{\mathbb{S}_+^2} v^{\varepsilon, \eta} d\sigma = \kappa$ 和 $\eta > 1$, 故有

$$|\text{supp}(V)| \leq \frac{\kappa \varepsilon^2}{f(\eta)} \leq \frac{\kappa \varepsilon^2}{f(1)}. \quad (3.16)$$

取 V 为测试函数, 则有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}_+^2} |\nabla V|^2 d\sigma &= \int_{\mathbb{S}_+^2} v^{\varepsilon, \eta} V d\sigma \\ &\leq \frac{f(\eta)}{\varepsilon^2} |V|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{S}_+^2} V^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \frac{f(\eta)}{\varepsilon^2} |V|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{S}_+^2} (|\nabla V| + V) d\sigma \right) \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{S}_+^2} |\nabla V|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} + C\varepsilon \int_{\mathbb{S}_+^2} v^{\varepsilon, \eta} V d\sigma \\ &= C \left(\int_{\mathbb{S}_+^2} |\nabla V|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} + C\varepsilon \int_{\mathbb{S}_+^2} |\nabla V|^2 d\sigma, \end{aligned} \quad (3.17)$$

这里 $C > 0$ 是与参数 ε 及 η 无关的常数. 因此可得

$$\int_{\mathbb{S}_+^2} |\nabla V|^2 d\sigma = \int_{\mathbb{S}_+^2} v^{\varepsilon, \eta} V d\sigma = f(\eta) \varepsilon^{-2} \int_{\mathbb{S}_+^2} (\psi^{\varepsilon, \eta} - \eta)_+ d\sigma, \quad (3.18)$$

且它们关于参数 ε 及 η 是一致有界的. 从而命题得证. $\square$

下面给出流函数 ψ 的一个更精确的估计.

引理 3.4 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对于任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, 存在与参数 ε 及 η 无关的常数 $C > 0$, 使得

$$\psi^{\varepsilon, \eta} \leq \frac{\kappa}{4\pi} \ln f(\eta) + |1 - 2\nu_0|\eta + C_0, \quad \forall x \in \mathbb{S}_+^2. \quad (3.19)$$

证明 结合 $\mathcal{G}_+ v$ 及 $\mu^{\varepsilon, \eta}$ 的估计, 有

$$\psi^{\varepsilon, \eta} = \mathcal{G}_+ v - \lambda x_3 - \mu^{\varepsilon, \eta} \leq \frac{\kappa}{4\pi} \ln f(\eta) + |1 - 2\nu_0|\eta + C_0. \quad (3.20)$$

应用关于 f 和 F 的假设, 上式的右端可被某个 η_0 控制, 即当参数 ε 充分小时, $\psi^{\varepsilon, \eta} \leq \eta_0$ 在 $\mathbb{S}_+^2$ 上几乎处处成立, 故当 $\eta > \eta_0$ 时,

$$-\Delta_{\mathbb{S}_+^2} \psi^{\varepsilon, \eta} = \frac{1}{\varepsilon^2} f(\psi^{\varepsilon, \eta}) \quad \text{在 } \mathbb{S}_+^2 \text{ 上}. \quad (3.21)$$

从而命题得证. $\square$

致谢 作者衷心感谢在本文完成过程中与大连理工大学王国栋副教授以及厦门大学詹伟城副教授的富有成效的讨论, 感谢编委和审稿专家提出的宝贵修改意见.

参考文献

- 1 Ambrosetti A, Rabinowitz P H. Dual variational methods in critical point theory and applications. *J Funct Anal*, 1973, 14: 349–381
- 2 Boatto S, Cabral H E. Nonlinear stability of a latitudinal ring of point-vortices on a nonrotating sphere. *SIAM J Appl Math*, 2003, 64: 216–230

- 3 Boatto S, Koiller J. Vortices on closed surfaces. In: *Geometry Mechanics and Dynamics*. Fields Institute Communications. New York: Springer, 2015, 73: 185–237
- 4 Boatto S, Simó C. Thomson's Heptagon: A case of bifurcation at infinity. *Phys D*, 2008, 237: 2051–2055
- 5 Bogomolov V A. Dynamics of vorticity at a sphere. *Fluid Dyn*, 1977, 12: 863–870
- 6 Burton G R. Steady symmetric vortex pairs and rearrangements. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 1980, 108: 269–290
- 7 Burton G R. Rearrangements of functions, maximization of convex functionals, and vortex rings. *Math Ann*, 1987, 276: 225–253
- 8 Cao D M, Lai S F, Zhan W C. Traveling vortex pairs for 2D incompressible Euler equations. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2021, 60: 190–216
- 9 Cao D M, Li S L, Wang G D. Desingularization of vortices for the incompressible Euler equation on a sphere. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2025, 64: 279
- 10 Cao D M, Liu Z Y, Wei J C. Regularization of point vortices pairs for the Euler equation in dimension two. *Arch Ration Mech Anal*, 2014, 212: 179–217
- 11 Cao D M, Peng S J, Yan S S. Planar vortex patch problem in incompressible steady flow. *Adv Math*, 2015, 270: 263–301
- 12 Cao D M, Wang G D, Zhan W C. Desingularization of vortices for two-dimensional steady Euler flows via the vorticity method. *SIAM J Math Anal*, 2020, 52: 5363–5388
- 13 Cao D M, Wang G D, Zuo B J. Stability of degree-2 Rossby-Haurwitz waves. arXiv:2305.03279, 2023
- 14 Caprini L, Marchioro C. Concentrated Euler flows and point vortex model. *Rend Mat Appl* (7), 2015, 36: 11–25
- 15 Caprino S, Marchioro C. On nonlinear stability of stationary Euler flows on a rotating sphere. *J Math Anal Appl*, 1988, 129: 24–36
- 16 Charney J. On a physical basis for numerical prediction of large-scale motions in the atmosphere. *J Meteor*, 1949, 6: 371–385
- 17 Cheng B, Mahalov A. Euler equation on a fast rotating sphere-time-averages and zonal flows. *Eur J Mech B Fluids*, 2013, 37: 48–58
- 18 Constantin A, Germain P. Stratospheric planetary flows from the perspective of the Euler equation on a rotating sphere. *Arch Ration Mech Anal*, 2022, 245: 587–644
- 19 Dritschel D G. The stability and energetics of corotating uniform vortices. *J Fluid Mech*, 1985, 157: 95–134
- 20 Dritschel D G. Contour dynamics surgery on the sphere. *J Comput Phys*, 1988, 78: 477–483
- 21 Hebey E. Sobolev Spaces on Riemannian Manifolds. Berlin: Springer-Verlag, 1996
- 22 Helmholtz H. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. *J Mathematik*, 1858, 55: 25–55
- 23 Kirchhoff G. R. Vorlesungen über Mathematische Physik. Leipzig: Teubner, 1876
- 24 Lin C C. On the motion of vortices in two dimensions. *Proc Natl Acad Sci USA*, 1941, 27: 570–575
- 25 Marchioro C. Euler evolution for singular initial data and vortex theory: A global solution. *Comm Math Phys*, 1988, 116: 45–55
- 26 Newton P K. The N-vortex Problem: Analytical Techniques. New York: Springer-Verlag, 2001
- 27 Newton P K, Sakajo T. The N-vortex problem on a rotating sphere. III. Ring configurations coupled to a background field. *Proc R Soc A*, 2007, 463: 961–977
- 28 Pocklington H C. The configuration of a pair of equal and opposite hollow and straight vortices of finite cross-section, moving steadily through fluid. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 1895, 8: 178–187
- 29 Skiba Yuri N. Mathematical Problems of the Dynamics of Incompressible Fluid on a Rotating Sphere. New York: Springer, 2017
- 30 Smets D, Van Schaftingen J. Desingularization of vortices for the Euler equation. *Arch Ration Mech Anal*, 2010, 198: 869–925
- 31 Stuart C A, Toland J F. A property of solutions of elliptic differential equations with discontinuous nonlinearities. *J Lond Math Soc* (2), 1980, 21: 329–335
- 32 Taylor M. Euler equation on a rotating surface. *J Funct Anal*, 2016, 270: 3884–3945
- 33 Thomson W. On vortex motion. *Trans R Soc Edinb*, 1869, 25: 217–260
- 34 Turkington B. On steady vortex flow in two dimensions. I. *Comm Partial Differential Equations*, 1983, 8: 999–1030
- 35 Wang G D. On concentrated traveling vortex pairs with prescribed impulse. *Trans Amer Math Soc*, 2024, 377: 2635–2661
- 36 Yudovich V I. Non-stationary flow of an ideal incompressible fluid. *USSR Comp Math Math phys*, 1963, 3: 1407–1456
- 37 Zermelo E. Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche. *Z Math Phys*, 1902, 47: 201–237

Desingularization of rotationally odd-symmetric vortex pairs on the sphere

Shuanglong Li, Daomin Cao & Bijun Zuo

Abstract In this paper, we investigate the desingularization of equatorially antisymmetric vortex pairs on the sphere using a dual variational method. For any given strictly increasing vorticity-dependent function satisfying certain conditions, we construct a family of rotating solutions to the incompressible Euler equations on the sphere. These solutions are obtained via a variational approach to a Casimir functional composed of the energy-impulse and the Legendre transform of the primitive function of the given vorticity profile, constrained on a suitable set. The resulting solutions are equatorially antisymmetric. As $\varepsilon \rightarrow 0$, these solutions converge, in the sense of measures, to a pair of rotating point vortices that are antisymmetric with respect to the equatorial plane. Moreover, we provide a precise characterization of the latitudinal positions of the point vortex pair.

Keywords Euler equation, dual variational method, desingularization

MSC(2020) 35A15, 35B40, 35J08

doi: 10.1360/SSM-2025-0134