



连续函数空间 ε -等距的逼近常数的精确值

江楠, 周宇*

上海工程技术大学数理与统计学院, 上海 201620

E-mail: jn166108028@163.com, roczhou_fly@126.com

收稿日期: 2024-02-27; 接受日期: 2024-05-17; 网络出版日期: 2024-11-25; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12271344) 和上海市“科技创新行动计划”自然科学基金 (批准号: 23ZR1425800) 资助项目

摘要 令 X 是 Banach 空间, T 是紧 Hausdorff 空间, $C(T)$ 是 T 上所有实值连续函数赋予上确界范数构成的实 Banach 空间以及 $f: X \rightarrow C(T)$ 是满足 $f(0) = 0$ 的 ε -等距. 则有 T 的非空闭子集 S , 以及线性等距 $g: X \rightarrow \overline{\text{span}}(f(X)|_S) \subseteq C(S)$, $g(u) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \lim \frac{f(2^n u)|_S}{2^n}$, $\forall u \in X$, 使得

(i) 对于任意的 $t \in S$, 存在 $x^* \in B(X^*)$ 和 $\xi \in \{1, -1\}$, 满足

$$|\langle \xi x^*, u \rangle - \langle \delta_t, f(u) \rangle| \leq 3\varepsilon, \quad \forall u \in X; \quad (1)$$

(ii) 对于任意的 $u \in X$, 都有

$$\|f(u)|_S - g(u)\| \leq 3\varepsilon, \quad (2)$$

其中, $f(u)|_S$ 是 $f(u)$ 在 S 上的限制, $f(X)|_S = \{f(u)|_S : u \in X\}$. 此外, 本文通过例子证明 (1) 和 (2) 中的逼近常数 3 是可以达到的, 因此该逼近常数的精确值就是 3.

关键词 ε -等距 线性等距 逼近常数的精确值 连续函数空间

MSC (2020) 主题分类 46B04, 41A65

1 引言

令 $\varepsilon \geq 0$. 如果从 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的映射 f 满足: 对于任意的 $u, v \in X$, 都有

$$|\|f(u) - f(v)\| - \|u - v\|| \leq \varepsilon,$$

则称 f 是 ε -等距. 0-等距被简称为等距. 如果 $f(0) = 0$, 则称 f 是标准的.

Banach 空间等距理论伴随着 Banach 空间理论的诞生而产生, 其研究具有悠久历史, 早期的工作可追溯至 Banach 空间理论的雏形时期, 代表性成果有 (i) Mazur 和 Ulam^[8] 发现的 Mazur-Ulam 定

英文引用格式: Jiang N, Zhou Y. Optimal approximation constants for ε -isometries of continuous functions spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 2003–2016, doi: 10.1360/SSM-2024-0044

理: 任意实 Banach 空间之间的标准满等距是线性等距; (ii) 甚至还有 Banach 和 Stone 发现的 Banach-Stone 定理^[1]: 紧 Hausdorff 空间 K 和 T 上的连续函数空间 $C(K)$ 和 $C(T)$ 是线性等距同构当且仅当底空间 K 和 T 是拓扑同胚.

对于一般的 Banach 空间 X 和 Y , ε -等距研究的核心问题之一是 1945 年由 Hyers 和 Ulam^[7] 首次提出并研究的逼近问题: (1) 是否存在万有逼近常数 $\alpha > 0$, 使得对于任意标准满 ε -等距 $f: X \rightarrow Y$, 存在线性满等距 $U: X \rightarrow Y$ 使得 $\|f(u) - U(u)\| \leq \alpha\varepsilon, \forall u \in X$? (2) 如果 (1) 的答案是肯定的, 那么逼近常数 α 的精确值是多少? 经过多位 Banach 空间理论专家学者多年的努力, 问题 (1) 于 1983 年被 Gevirtz^[5] 肯定地回答, 其中逼近常数 $\alpha = 5$. 关于问题 (2), 在历经半个世纪后, 于 1995 年由 Omladić 和 Šemrl^[9] 证得逼近常数 α 的精确值是 2. 至此, 人们对满的 ε -等距的逼近问题的研究获得完美的解答. 关于 Banach 空间 ε -等距理论更多的历史背景与最近进展, 可参见文献 [2].

当 ε -等距 f 是非满的且值域空间是连续函数空间时, 类似逼近问题的研究也是成果丰硕, 影响深远. 为了方便叙述, 先引入如下的记号. 令 T 是紧 Hausdorff 空间, $C(T)$ 是 T 上所有实值连续函数赋予上确界范数构成的实 Banach 空间. 对于任意的 $t \in T$, δ_t 是 $C(T)$ 上的连续线性泛函且满足 $\langle \delta_t, \phi \rangle = \phi(t), \forall \phi \in C(T)$. 如果 $S \subseteq T$ 是 T 的非空闭子集, 则对于任意的 $\phi \in C(T)$, 用 $\phi|_S$ 表示 ϕ 在 S 上的限制. 下面的 Holsztyński 定理^[6] 推广了经典的 Banach-Stone 定理.

定理 1.1^[6] 令 K 和 T 是紧 Hausdorff 空间, $f: C(K) \rightarrow C(T)$ 是标准等距. 则存在 T 的非空闭子集 S , 使得 $f|_S: C(K) \rightarrow C(S), f|_S(\phi) = f(\phi)|_S, \forall \phi \in C(K)$ 是线性等距.

Drewnowski^[4] 证得上述 Holsztyński 定理中的定义域 $C(K)$ 空间可替换成任意的 Banach 空间, 类似结论仍然成立.

定理 1.2^[4] 令 X 是 Banach 空间, T 是紧 Hausdorff 空间, $f: X \rightarrow C(T)$ 是标准等距. 则存在 T 的非空闭子集 S , 使得 $f|_S: X \rightarrow C(S), f|_S(x) = f(x)|_S, \forall x \in X$ 是线性等距.

因为 Drewnowski 定理中等距 f 的原像空间可以是任意的 Banach 空间, 所以, 从原像空间的角度来看, Drewnowski 定理是 Holsztyński 定理在 Banach 空间范畴内完美的推广. 由此自然地产生的问题是: 能否从映射的角度将 Drewnowski 定理进行推广? 事实上, Zhou 等^[11] 将 Drewnowski 定理推广至 ε -等距的情形, 他们证得了如下的结论.

定理 1.3^[11] 令 X 为 Banach 空间, $\varepsilon \geq 0$ 以及 $f: X \rightarrow C(T)$ 是标准 ε -等距. 则有 T 的非空闭子集 S , 定义线性等距 $g: X \rightarrow \overline{\text{span}}(f(X)|_S) \subseteq C(S), g(u) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n u)|_S}{2^n}, \forall u \in X$, 满足

(1) 对任意的 $t \in S$, 存在 $x^* \in B(X^*)$ 和 $\xi \in \{1, -1\}$, 使得

$$|\langle \xi x^*, u \rangle - \langle \delta_t, f(u) \rangle| \leq 4\varepsilon, \quad \forall u \in X;$$

(2) 对于任意的 $u \in X$, 都有

$$\|f(u)|_S - g(u)\| \leq 4\varepsilon.$$

显然, 定理 1.2 是定理 1.3 在 $\varepsilon = 0$ 时的推论. 一个自然的问题是: 定理 1.3 中的逼近常数“4”是否是最优的? 如果不是最优的, 则最优的值是多少? 受定理 1.3 以及 Cheng 和 Dong^[3] 的启发, 本文不仅证得定理 1.3 中的逼近常数可以从“4”减少为“3”, 而且还通过例子证明了逼近常数“3”是可以达到的, 从而证得该逼近常数的精确值是“3”.

本文用 X 表示实 Banach 空间, X^* 表示 X 的对偶空间. $B(X)$ (分别地, $S(X)$) 表示 X 的闭单位球 (分别地, 单位球面). 对于子集 $A \subset X$, $\text{span}(A)$ (分别地, $\overline{\text{span}}(A)$) 表示由 A 生成的线性子空间

(分别地, 线性闭子空间). 如果 Ω 是集合, Σ 为 Ω 的非空子集, $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 是定义在 Ω 上的实值函数, 则 $\phi|_{\Sigma}$ 表示 ϕ 在 Σ 上的限制.

2 逼近常数的精确值

首先介绍本文需要的预备知识 (参见文献 [10]).

令 $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是定义在 Banach 空间 X 上的连续凸函数, $x_0 \in X$. 如果存在连续的线性泛函 $x^* \in X^*$, 使得 $\langle x^*, x \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} (\phi(x_0 + tx) - \phi(x_0))/t, \forall x \in X$, 则称 ϕ 在点 x_0 处是 Gâteaux 可微的, 称 x_0 是 ϕ 的 Gâteaux 可微点, 称 x^* 为 ϕ 在 x_0 点处的 Gâteaux 导数, 并记作是 $d\phi(x_0) = x^*$. 特别地, 如果 ϕ 是 X 的范数 $\|\cdot\|$, 则对于任意的 $\|\cdot\|$ 的 Gâteaux 可微点 x , 有 $d\|\cdot\|(x) \in S(X^*)$.

如果对于 X 的任意非空开凸子集 D , 对于定义在 D 上的任意连续凸函数 ϕ , 总有 ϕ 的 Gâteaux 可微点的全体构成的集合是 D 的稠密子集, 则称 X 为 Gâteaux 可微空间. 特别地, 如果 X 是 Gâteaux 可微空间, 则 X 的范数 $\|\cdot\|$ 的 Gâteaux 可微点的全体构成的集合是 X 的稠密子集.

令 $C \subset X^*$ 是非空 w^* -闭凸子集, $x^* \in C$. 如果存在 $0 \neq x \in X$, 使得对于任意的 $y^* \in C, y^* \neq x^*$, 恒有 $\langle x, x^* \rangle > \langle x, y^* \rangle$, 则称 x^* 是 C 的 w^* -暴露点, 称 x 为 C 的 w^* -暴露泛函, 并且称 x 在 x^* 点处 w^* -暴露 C . 用 $w^*\text{-exp}C$ 表示 C 的所有 w^* -暴露点的全体构成的集合.

以下命题 2.1 是经典的.

命题 2.1 令 X 为 Banach 空间, C 为 X^* 的非空 w^* -紧凸子集, $x^* \in C$. 则 x 在 x^* 处 w^* -暴露 C 当且仅当函数 $\sigma_C: X \rightarrow \mathbb{R}, \sigma_C(u) \equiv \sup_{y^* \in C} \langle y^*, u \rangle, \forall u \in X$ 在 x 点处是 Gâteaux 可微的且 $d\sigma_C(x) = x^*$.

特别地, 如果 $C = B(X^*)$, 则命题 2.1 可表述为 x 在 x^* 处 w^* -暴露 $B(X^*)$ 当且仅当 X 的范数 $\|\cdot\|$ 在 x 点处是 Gâteaux 可微的且 $d\|\cdot\|(x) = x^*$.

下面的引理 2.1 受到了 Cheng 和 Dong^[3] 的启发.

引理 2.1 令 X 为 Banach 空间, $f: X \rightarrow C(T)$ 是标准 ε -等距. 如果 $x^* \in w^*\text{-exp}B(X^*) \subseteq S(X^*)$, 则存在 $t \in T$ 和 $\xi \in \{1, -1\}$, 使得

$$|\langle \xi x^*, u \rangle - \langle \delta_t, f(u) \rangle| \leq 3\varepsilon, \quad \forall u \in X. \quad (2.1)$$

证明 假设 $x^* \in w^*\text{-exp}B(X^*) \subseteq S(X^*)$. 由命题 2.1 可知, 存在 $x \in X$, 且 $x \neq 0$, 使得 x^* 为 $\|\cdot\|$ 在 x 处的 Gâteaux 导数, 即 $d\|\cdot\|(x) = x^*$. 则由定义可得, 对于任意的 $u \in X$, 都有

$$\langle x^*, u \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + tu\| - \|x\|}{t} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|nx + u\| - \|nx\|).$$

因为 f 为 ε -等距, 所以对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 可选取 $t(n) \in T$, 使得

$$2n\|x\| + \varepsilon \geq |\langle \delta_{t(n)}, f(nx) - f(-nx) \rangle| = \|f(nx) - f(-nx)\| \geq 2n\|x\| - \varepsilon.$$

所以, 存在 $\xi_n \in \{1, -1\}$, 使得

$$2n\|x\| + \varepsilon \geq \langle \xi_n \delta_{t(n)}, f(nx) - f(-nx) \rangle = \|f(nx) - f(-nx)\| \geq 2n\|x\| - \varepsilon. \quad (2.2)$$

因此, 由 (2.2) 可得

$$n\|x\| + \varepsilon \geq \langle \xi_n \delta_{t(n)}, f(nx) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \xi_n \delta_{t(n)}, f(nx) - f(-nx) \rangle + \langle \xi_n \delta_{t(n)}, f(-nx) \rangle \\
&\geq 2n\|x\| - \varepsilon - \|f(-nx)\| \geq 2n\|x\| - \varepsilon - n\|x\| - \varepsilon \\
&= n\|x\| - 2\varepsilon,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
n\|x\| + \varepsilon &\geq \langle \xi_n \delta_{t(n)}, -f(-nx) \rangle \\
&= \langle \xi_n \delta_{t(n)}, f(nx) - f(-nx) \rangle - \langle \xi_n \delta_{t(n)}, f(nx) \rangle \\
&\geq 2n\|x\| - \varepsilon - \|f(nx)\| \\
&\geq n\|x\| - 2\varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

因此, 由 (2.3) 和 (2.4) 可得

$$\begin{aligned}
\|nx - u\| - \|nx\| &\geq \|f(nx) - f(u)\| - \varepsilon - n\|x\| \\
&\geq \langle \xi_n \delta_{t(n)}, f(nx) \rangle - \langle \xi_n \delta_{t(n)}, f(u) \rangle - \varepsilon - n\|x\| \\
&\geq -\langle \xi_n \delta_{t(n)}, f(u) \rangle - 3\varepsilon,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
\|nx + u\| - \|nx\| &\geq \|f(u) - f(-nx)\| - \varepsilon - n\|x\| \\
&\geq \langle \xi_n \delta_{t(n)}, f(u) \rangle - \langle \xi_n \delta_{t(n)}, f(-nx) \rangle - \varepsilon - n\|x\| \\
&\geq \langle \xi_n \delta_{t(n)}, f(u) \rangle - 3\varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

取 $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ 的子序列 $\{\xi_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, 使得 $\xi_{n_k} = \xi \in \{1, -1\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. 又因为 T 是紧集, 所以取 $t \in T$ 为 $\{t_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 的聚点. 令 $k \rightarrow \infty$, 则由 (2.5) 和 (2.6), 有

$$\begin{aligned}
-\langle x^*, u \rangle &\geq -\langle \xi \delta_t, f(u) \rangle - 3\varepsilon, \\
\langle x^*, u \rangle &\geq \langle \xi \delta_t, f(u) \rangle - 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

即对任意的 $u \in X$, 存在 $t \in T$ 和 $\xi \in \{1, -1\}$, 使得

$$|\langle \xi x^*, u \rangle - \langle \delta_t, f(u) \rangle| \leq 3\varepsilon. \tag{2.7}$$

(2.7) 说明引理 2.1 成立. □

引理 2.2 (参见文献 [10, 定理 1.20]) 如果 X 是可分的 Banach 空间, 则 X 是 Gâteaux 可微空间. 特别地, X 的范数 $\|\cdot\|$ 的 Gâteaux 点的全体构成的集合是 X 的稠密子集.

现在利用文献 [11, 定理 2.4] 中的方法和引理 2.1 给出本文的主要结果的第一部分, 即定理 1.3 中的逼近常数 “4” 可减少为 “3”.

定理 2.1 令 X 是 Banach 空间, $f: X \rightarrow C(T)$ 是标准 ε - 等距, 则有 T 的非空闭子集 S , 定义线性等距 $g: X \rightarrow \overline{\text{span}}(f(X)|_S) \subseteq C(S)$, $g(u) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n u)|_S}{2^n}$, $\forall u \in X$, 满足

(1) 对任意的 $t \in S$, 存在 $x^* \in B(X^*)$ 和 $\xi \in \{1, -1\}$, 使得

$$|\langle \xi x^*, u \rangle - \langle \delta_t, f(u) \rangle| \leq 3\varepsilon, \quad \forall u \in X;$$

(2) 对任意的 $u \in X$, 都有

$$\|f(u)|_S - g(u)\| \leq 3\varepsilon.$$

证明 本证明主要受到了文献 [11, 定理 2.4] 的启发. 为方便读者起见, 下面给出完整证明.

我们分两种情形证明此定理. 第一种情形, 证明当 X 是可分 Banach 空间时, 定理 2.1 成立. 第二种情形, 证明当 X 是非可分 Banach 空间时, 定理 2.1 依然成立.

情形 1 设 X 是可分 Banach 空间. 由引理 2.2 可知, X 的范数 $\|\cdot\|$ 的所有 Gâteaux 可微点的全体构成的集合是 X 的稠密子集. 特别地, 该集合是非空的. 对于任意固定的 $\|\cdot\|$ 的 Gâteaux 可微点 $x \in X$, 存在连续线性泛函 $x^* = d\|\cdot\|(x) \in S(X^*)$. 由命题 2.1 可知, x^* 是 $B(X^*)$ 的 w^* -暴露点. 根据引理 2.1, 存在 $t(x) \in T$ 和 $\xi \in \{1, -1\}$, 使得

$$|\langle \xi x^*, u \rangle - \langle \delta_{t(x)}, f(u) \rangle| \leq 3\varepsilon, \quad \forall u \in X. \quad (2.8)$$

令

$$S = \{t \in T : \text{存在 } u^* \in B(X^*) \text{ 和 } \xi \in \{1, -1\}, \text{ 使得 } |\langle \xi u^*, u \rangle - \langle \delta_t, f(u) \rangle| \leq 3\varepsilon, \forall u \in X\}.$$

由 (2.8) 可得, 当 x^* 是 $B(X^*)$ 的 w^* -暴露点时, 存在 $t \in T$, $\xi \in \{1, -1\}$, 使得

$$|\langle \xi x^*, u \rangle - \langle \delta_t, f(u) \rangle| \leq 3\varepsilon, \quad \forall u \in X.$$

所以 S 是非空的.

我们断言 S 是 T 的非空闭子集. 事实上, 对任意的网 $\{t(\alpha)\}_{\alpha \in D} \subset S$, 满足 $t(\alpha) \rightarrow t(0) \in T$, 我们只需要证明 $t(0) \in S$. 根据 S 的定义, 存在网 $\{x_\alpha^*\}_{\alpha \in D} \subset B(X^*)$ 和网 $\xi_\alpha \in \{1, -1\}$, 使得对于任意的 $\alpha \in D$, 都有

$$|\langle \xi_\alpha x_\alpha^*, u \rangle - \langle \delta_{t(\alpha)}, f(u) \rangle| \leq 3\varepsilon, \quad \forall u \in X. \quad (2.9)$$

由于 $\{\xi_\alpha x_\alpha^*\}_{\alpha \in D} \subset B(X^*)$ 和 $B(X^*)$ 是 w^* -紧的, 所以存在网 $\{\xi_\alpha x_\alpha^*\}_{\alpha \in D}$ 的子网 $\{\xi_\beta x_\beta^*\}_{\beta \in D'}$ 和 $x_0^* \in B(X^*)$, 使得 $\xi_\beta x_\beta^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$. 因此, 由 (2.9) 可知,

$$|\langle x_0^*, u \rangle - \langle \delta_{t(0)}, f(u) \rangle| \leq 3\varepsilon, \quad \forall u \in X. \quad (2.10)$$

(2.10) 表明 $t(0) \in S$. 因此, S 是 T 的非空闭子集.

由 S 的定义可知, 对于任意的 $t \in S$, 存在 $x^* \in B(X^*)$ 和 $\xi \in \{1, -1\}$, 使得

$$\begin{aligned} & |\langle \delta_t, f(u+v) \rangle - \langle \delta_t, f(u) + f(v) \rangle| \\ &= |\langle \delta_t, f(u+v) \rangle - \langle \delta_t, f(u) + f(v) \rangle + \langle \xi x^*, u \rangle + \langle \xi x^*, v \rangle - \langle \xi x^*, u+v \rangle| \\ &\leq |\langle \delta_t, f(u+v) \rangle - \langle \xi x^*, u+v \rangle| + |\langle \xi x^*, u \rangle - \langle \delta_t, f(u) \rangle| + |\langle \xi x^*, v \rangle - \langle \delta_t, f(v) \rangle| \\ &\leq 9\varepsilon, \quad \forall u, v \in X. \end{aligned} \quad (2.11)$$

由 (2.11) 可得映射 $h: X \rightarrow C(S)$, $h(u) = f(u)|_S$, $\forall u \in X$, 满足近似可加性, 即对任意的 $u, v \in X$, 有

$$\begin{aligned} \|h(u+v) - h(u) - h(v)\| &= \|f(u+v)|_S - f(u)|_S - f(v)|_S\| \\ &= \sup_{t \in S} |\langle \delta_t, f(u+v) - f(u) - f(v) \rangle| \\ &\leq 9\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.12)$$

(2.12) 蕴涵了对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 都有

$$\left\| \frac{f(2^{n+1}u)|_S}{2^{n+1}} - \frac{f(2^n u)|_S}{2^n} \right\| = \left\| \frac{f(2 \cdot 2^n u)|_S - 2 \cdot f(2^n u)|_S}{2^{n+1}} \right\| \leq \frac{9\varepsilon}{2^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.13)$$

所以, 由 (2.13) 可知, 对于任意的 $u \in X$, $\{\frac{f(2^n u)|_S}{2^n}\}_{n=1}^\infty$ 是 $\overline{\text{span}}(f(X)|_S) \subseteq C(S)$ 中的 Cauchy 列. 因为 S 是 T 的非空闭子集, 所以 $C(S)$ 是 Banach 空间. 因此, 下面的映射 g 是良定义的:

$$g: X \rightarrow \overline{\text{span}}(f(X)|_S) \subseteq C(S), \quad g(u) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n u)|_S}{2^n}, \quad \forall u \in X. \quad (2.14)$$

我们断言 (2.14) 中定义的映射 g 满足定理 2.1. 首先证明 g 是可加的 1-Lipschitz 映射. 事实上, 由 (2.12) 和 (2.14) 可得

$$\|g(u+v) - g(u) - g(v)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{f(2^n(u+v))|_S}{2^n} - \frac{f(2^n u)|_S}{2^n} - \frac{f(2^n v)|_S}{2^n} \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9\varepsilon}{2^n} = 0. \quad (2.15)$$

(2.15) 表明 $g: X \rightarrow \overline{\text{span}}(f(X)|_S) \subseteq C(S)$ 是可加的. 又因为 $f: X \rightarrow C(T)$ 是 ε - 等距, 所以

$$\begin{aligned} \|g(u) - g(v)\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{f(2^n u)|_S}{2^n} - \frac{f(2^n v)|_S}{2^n} \right\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|f(2^n u) - f(2^n v)\|}{2^n} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \|u - v\| + \varepsilon}{2^n} \\ &= \|u - v\|. \end{aligned} \quad (2.16)$$

(2.16) 蕴涵了 $g: X \rightarrow \overline{\text{span}}(f(X)|_S) \subseteq C(S)$ 是 1-Lipschitz 映射. 特别地, $g: X \rightarrow \overline{\text{span}}(f(X)|_S) \subseteq C(S)$ 是连续的.

接下来证明 g 是线性映射. 注意到我们已经证明了 g 是可加的, 因此只需要证明 g 满足齐次性, 即 $g(ru) = rg(u)$, $\forall r \in \mathbb{R}, \forall u \in X$. 事实上, 对于任意的 $u \in X$, 有如下结论.

(i) 对于任意的 $m \in \mathbb{N}$, 有 $g(mu) = g(u) + \cdots + g(u) = mg(u)$. 特别地, 令 $u = 0$, 则 $g(0) = g(0+0) = 2g(0)$, 因此 $g(0) = 0$.

(ii) 对于任意的 $t \in \mathbb{Z}$, 因为 $0 = g(0) = g(u + (-u)) = g(u) + g(-u)$, 所以 $-g(u) = g(-u)$. 对于任意的 $m \in \mathbb{N}$, 都有 $g(-mu) = mg(-u) = -mg(u)$. 由此可得 $g(tu) = tg(u)$, $\forall t \in \mathbb{Z}$.

(iii) 对于任意的 $\frac{q}{p} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ (其中 $q \neq 0, p \neq 0, p, q \in \mathbb{Z}$ 且 p 与 q 互质), 有 $q \cdot g(u) = g(qu) = g(p \cdot (\frac{q}{p}u)) = p \cdot g(\frac{q}{p}u)$, 即 $g(\frac{q}{p}u) = \frac{q}{p} \cdot g(u)$.

(iv) 对于任意的 $r \in \mathbb{R}$, 由 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中的稠密性, 取 $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Q}$, 使得 $r = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. 由于 g 是 1-Lipschitz 映射, 特别地, g 是连续的, 所以有

$$g(ru) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n u) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n g(u) = rg(u).$$

所以 g 满足齐次性.

综上, $g: X \rightarrow \overline{\text{span}}(f(X)|_S) \subseteq C(S)$ 是有界线性算子且 $\|g\| \leq 1$.

对于 X 的范数 $\|\cdot\|$ 的任意 Gâteaux 可微点 $x \in X$, 存在 $x^* = d\|\cdot\|(x) \in S(X^*)$. 由 (2.8) 可得, 存在 $t(x) \in S$ 和 $\xi \in \{1, -1\}$, 使得

$$|\langle \delta_{t(x)}, f(u) \rangle - \langle \xi x^*, u \rangle| \leq 3\varepsilon, \quad \forall u \in X. \quad (2.17)$$

因此, 根据 (2.17), 可得

$$\left| \left\langle \delta_{t(x)}, \frac{f(2^n u)}{2^n} \right\rangle - \langle \xi x^*, u \rangle \right| \leq \frac{3\varepsilon}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall u \in X. \quad (2.18)$$

由 (2.14) 中 g 的定义和 (2.18) 可知, 对于任意的 $u \in X$, 都有

$$\langle \delta_{t(x)}, g(u) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \delta_{t(x)}, \frac{f(2^n u)}{2^n} \right\rangle = \langle \xi x^*, u \rangle.$$

所以对于 X 的范数 $\|\cdot\|$ 的任意 Gâteaux 可微点 $x \in X$, 都有

$$\|g(x)\| = \sup_{t \in S} |\langle \delta_t, g(x) \rangle| \geq |\langle \delta_{t(x)}, g(x) \rangle| = |\langle \xi x^*, x \rangle| = \|x\|.$$

另外, 由 $\|g\| \leq 1$, 可得 $\|g(x)\| \leq \|g\|\|x\| \leq \|x\|$. 因此, 对于 X 的范数 $\|\cdot\|$ 的任意 Gâteaux 可微点 $x \in X$, 都有

$$\|g(x)\| = \|x\|. \quad (2.19)$$

由引理 2.2 可知, X 的所有 Gâteaux 可微点的全体构成的集合是 X 的稠密子集. 对于任意的 $u \in X$, 取 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$, 使得对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|$ 在 x_n 点处是 Gâteaux 可微的, 且 $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$, 则由 g 的连续性和 (2.19), 可得

$$\|g(u)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g(x_n)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|u\|. \quad (2.20)$$

(2.20) 表明 $g: X \rightarrow \overline{\text{span}}(f(X)|_S) \subseteq C(S)$ 是线性等距.

由 S 的定义可知, 对于任意的 $t \in S$, 存在 $x^* \in B(X^*)$ 和 $\xi \in \{1, -1\}$, 使得

$$|\langle \xi x^*, u \rangle - \langle \delta_t, f(u) \rangle| \leq 3\varepsilon, \quad \forall u \in X. \quad (2.21)$$

因此,

$$\left| \langle \xi x^*, u \rangle - \left\langle \delta_t, \frac{f(2^n u)}{2^n} \right\rangle \right| \leq \frac{3\varepsilon}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall u \in X.$$

由 (2.14) 可得

$$\langle \delta_t, g(u) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \delta_t, \frac{f(2^n u)}{2^n} \right\rangle = \langle \xi x^*, u \rangle.$$

根据 (2.21), 可得 $|\langle \delta_t, f(u) \rangle - \langle \delta_t, g(u) \rangle| \leq 3\varepsilon, \forall u \in X$. 因此,

$$\|f(u)|_S - g(u)\| = \sup_{t \in S} |\langle \delta_t, f(u) \rangle - \langle \delta_t, g(u) \rangle| \leq 3\varepsilon, \quad \forall u \in X. \quad (2.22)$$

因此, 由 (2.20)–(2.22) 可得, 如果 X 是可分 Banach 空间, $f: X \rightarrow C(T)$ 是标准 ε -等距, 则有 T 的非空闭子集 S , 定义线性等距 $g: X \rightarrow \overline{\text{span}}(f(X)|_S) \subseteq C(S)$, $g(u) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n u)|_S}{2^n}, \forall u \in X$, 满足

(1) 对任意的 $t \in S$, 存在 $x^* \in B(X^*)$ 和 $\xi \in \{1, -1\}$, 使得

$$|\langle \xi x^*, u \rangle - \langle \delta_t, f(u) \rangle| \leq 3\varepsilon, \quad \forall u \in X;$$

(2) 对于任意的 $u \in X$, 都有

$$\|f(u)|_S - g(u)\| \leq 3\varepsilon.$$

情形 2 假设 X 是非可分 Banach 空间. 对于 X 中的任意可分闭子空间 Y , 由情形 1 可知, 有非空闭子集 $S_Y \subseteq T$, 使得对于任意的 $t \in S_Y$, 存在 $x^* \in B(Y^*)$ 和 $\xi \in \{1, -1\}$, 满足

$$|\langle \xi x^*, u \rangle - \langle \delta_t, f(u) \rangle| \leq 3\varepsilon, \quad \forall u \in Y, \quad (2.23)$$

并且定义线性等距 $g_Y : Y \rightarrow \overline{\text{span}}(f(Y)|_{S_Y}) \subseteq C(S_Y)$, $g_Y(u) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n u)|_{S_Y}}{2^n}$, $\forall u \in Y$, 使得

$$\|f(u)|_{S_Y} - g_Y(u)\| \leq 3\varepsilon, \quad \forall u \in Y. \quad (2.24)$$

如果 Y_1 和 Y_2 是 X 的可分闭子空间, 则 $\overline{\text{span}}(Y_1 \cup Y_2)$ 也是 X 的可分闭子空间. 由 (2.23), 存在非空闭子集 $S_{\overline{\text{span}}(Y_1 \cup Y_2)} \subseteq T$, 使得对任意的 $t \in S_{\overline{\text{span}}(Y_1 \cup Y_2)}$, 存在 $x^* \in B(\overline{\text{span}}(Y_1 \cup Y_2)^*)$ 和 $\xi \in \{1, -1\}$, 满足

$$|\langle \xi x^*, u \rangle - \langle \delta_t, f(u) \rangle| \leq 3\varepsilon, \quad \forall u \in \overline{\text{span}}(Y_1 \cup Y_2). \quad (2.25)$$

因为 $x^* \in B(\overline{\text{span}}(Y_1 \cup Y_2)^*)$, 所以 $x^*|_{Y_i} \in B(Y_i^*)$, $i = 1, 2$, 则由 (2.25), 可得

$$|\langle \xi x^*|_{Y_i}, u \rangle - \langle \delta_t, f(u) \rangle| \leq 3\varepsilon, \quad \forall u \in Y_i, \quad i = 1, 2.$$

这说明 $t \in S_{Y_1} \cap S_{Y_2}$. 因此, $S_{\overline{\text{span}}(Y_1 \cup Y_2)} \subseteq S_{Y_1} \cap S_{Y_2}$. 从而集合

$$M \equiv \{S_Y \subseteq T : Y \text{ 是 } X \text{ 的可分闭子空间}\}$$

具有有限交性质. 又因为对于任意的可分闭子空间 Y , S_Y 是 T 的紧子集, 所以 M 具有非空的交集, 即

$$S \equiv \bigcap \{S_Y : S_Y \in M\} \quad (2.26)$$

是 T 的非空紧子集. 由 (2.26) 可知, 对于任意的可分闭子空间 $Y \subset X$, 都有 $S \subseteq S_Y$. 注意到对于任意的 $u \in X$, 存在可分闭子空间 $Y \subset X$, 使得 $u \in Y$. 由 (2.13) 可知 $\{\frac{f(2^n u)|_{S_Y}}{2^n}\}_{n=1}^\infty$ 是 $C(S_Y)$ 的 Cauchy 列, 又因为 $S \subseteq S_Y$, 所以 $\{\frac{f(2^n u)|_S}{2^n}\}_{n=1}^\infty$ 也是 $C(S)$ 的 Cauchy 列. 因此, 下面的映射 g 是良定义的:

$$g : X \rightarrow \overline{\text{span}}(f(X)|_S) \subseteq C(S), \quad g(u) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n u)|_S}{2^n}, \quad \forall u \in X. \quad (2.27)$$

下面证明 (2.27) 中定义的映射 g 满足定理 2.1. 事实上, 令

$$H = \{Y \subset X : Y \text{ 是 } X \text{ 的可分闭子空间}\},$$

则 $(H, \supseteq)$ 是偏序集. 由 (2.23) 可知, 对于任意的 $t \in S \equiv \bigcap \{S_Y : S_Y \in M\}$ 和任意的 $Y \in H$, 存在 $y_Y^* \in B(Y^*)$ 和 $\xi_Y \in \{1, -1\}$, 使得

$$|\langle \xi_Y y_Y^*, u \rangle - \langle \delta_t, f(u) \rangle| \leq 3\varepsilon, \quad \forall u \in Y. \quad (2.28)$$

由 Hahn-Banach 定理, 取 $\overline{y_Y^*}$ 为 y_Y^* 的范数延拓, 即 $\overline{y_Y^*} \in X^*$, $\overline{y_Y^*}|_Y = y_Y^*$, $\|\overline{y_Y^*}\| = \|y_Y^*\|$, 则 $\{\xi_Y \overline{y_Y^*}\}_{Y \in H} \subset B(X^*)$. 由 $B(X^*)$ 的 w^* -紧性可知, 存在 $x^* \in B(X^*)$, 使得 x^* 是 $\{\xi_Y \overline{y_Y^*}\}_{Y \in H}$ 的 w^* -聚点. 由 (2.28), 可得

$$|\langle x^*, u \rangle - \langle \delta_t, f(u) \rangle| \leq 3\varepsilon, \quad \forall u \in X. \quad (2.29)$$

因此, 由 (2.29), 对于任意的 $t \in S$, 存在 $x^* \in B(X^*)$, 使得

$$|\langle x^*, u \rangle - \langle \delta_t, f(u) \rangle| \leq 3\varepsilon, \quad \forall u \in X. \quad (2.30)$$

类似于情形 1 中的证明, 由 (2.30), 对于任意的 $t \in S$, 存在 $x^* \in B(X^*)$, 使得

$$\begin{aligned} & |\langle \delta_t, f(u+v) \rangle - \langle \delta_t, f(u) + f(v) \rangle| \\ &= |\langle \delta_t, f(u+v) \rangle - \langle \delta_t, f(u) + f(v) \rangle + \langle x^*, u \rangle + \langle x^*, v \rangle - \langle x^*, u+v \rangle| \\ &\leq |\langle \delta_t, f(u+v) \rangle - \langle x^*, u+v \rangle| + |\langle x^*, u \rangle - \langle \delta_t, f(u) \rangle| + |\langle x^*, v \rangle - \langle \delta_t, f(v) \rangle| \\ &\leq 9\varepsilon, \quad \forall u, v \in X. \end{aligned} \quad (2.31)$$

(2.31) 说明

$$\begin{aligned} & \|f(u+v)|_S - f(u)|_S - f(v)|_S\| \\ &= \sup_{t \in S} |\langle \delta_t, f(u+v) \rangle - \langle \delta_t, f(u) + f(v) \rangle| \\ &\leq 9\varepsilon, \quad \forall u, v \in X. \end{aligned} \quad (2.32)$$

由 (2.27) 和 (2.32) 可得

$$\begin{aligned} \|g(u+v) - g(u) - g(v)\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{f(2^n u + 2^n v)|_S}{2^n} - \frac{f(2^n u)|_S}{2^n} - \frac{f(2^n v)|_S}{2^n} \right\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9\varepsilon}{2^n} = 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

(2.33) 说明 $g: X \rightarrow \overline{\text{span}}(f(X)|_S) \subseteq C(S)$ 是可加的.

注意到 $f: X \rightarrow C(T)$ 是标准 ε -等距,

$$\begin{aligned} \|g(u) - g(v)\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{f(2^n u)|_S}{2^n} - \frac{f(2^n v)|_S}{2^n} \right\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|f(2^n u) - f(2^n v)\|}{2^n} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \|u - v\| + \varepsilon}{2^n} \\ &= \|u - v\|. \end{aligned} \quad (2.34)$$

(2.34) 说明 $g: X \rightarrow \overline{\text{span}}(f(X)|_S) \subseteq C(S)$ 是 1-Lipschitz 映射, 特别地, g 是连续的. 利用类似于情形 1 中的方法, 由 g 的可加性和连续性可证明 g 满足齐次性, 即

$$g(ru) = rg(u), \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad u \in X. \quad (2.35)$$

因此由 (2.33) 和 (2.35) 可得 g 是有界线性算子, 且满足 $\|g\| \leq 1$.

接下来证明 g 是一个等距. 对任意固定的 $v \in X$, 令

$$H_v = \{Y \subset X : Y \text{ 是 } X \text{ 的可分闭子空间且 } v \in Y\}.$$

则 $(H_v, \supseteq)$ 是偏序集. 对于任意的 $Y \in H_v$, $\text{span}(v) \subset Y$ 且由 S_Y 和 $S_{\text{span}(v)}$ 的定义可得 $S_Y \subseteq S_{\text{span}(v)}$.

因为对于任意的 $Y \in H_v$,

$$g_Y : Y \rightarrow \overline{\text{span}}(f(Y)|_{S_Y}) \subseteq C(S_Y), \quad g_Y(u) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n u)|_{S_Y}}{2^n}, \quad \forall u \in Y$$

是线性等距. 所以存在 $t_Y \in S_Y \subseteq S_{\text{span}(v)} \subseteq T$, 使得

$$\|v\| = |\langle \delta_{t_Y}, g_Y(u) \rangle| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \delta_{t_Y}, \frac{f(2^n u)|_{S_Y}}{2^n} \right\rangle \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \delta_{t_Y}, \frac{f(2^n u)}{2^n} \right\rangle \right| = |\langle \delta_{t_Y}, g_{\text{span}(v)}(v) \rangle|.$$

由于 $\{t_Y\}_{Y \in H_v} \subset S_{\text{span}(v)}$ 和 $S_{\text{span}(v)}$ 的紧性, 所以 $\{t_Y\}_{Y \in H_v}$ 存在聚点 $t_0 \in S_{\text{span}(v)}$, 即存在 $\{t_Y\}_{Y \in H_v}$ 的子网 $\{t_Z\}_{Z \in H'_v}$, 使得 $t_Z \rightarrow t_0$. 由 $g_{\text{span}(v)}(v)$ 的连续性, 可得

$$|\langle \delta_{t_0}, g_{\text{span}(v)}(v) \rangle| = \left| \lim_Z \langle \delta_{t_Z}, g_{\text{span}(v)}(v) \rangle \right| = \|v\|. \quad (2.36)$$

下面证明 $t_0 \in S \equiv \bigcap \{S_Y : S_Y \in M\}$, 即对于任意的 $Y \in H$, 都有 $t_0 \in S_Y$. 否则, 假设存在 $Y_0 \in H$ 使得 $t_0 \notin S_{Y_0}$, 则存在 t_0 的开邻域 V , 使得 $V \cap S_{Y_0} = \emptyset$. 因为 t_0 是 $\{t_Z\}_{Z \in H'_v}$ 的极限, 所以存在 $Z_0 \subseteq H'_v$, 使得对于任意的 $Z \in H'_v$, 如果 $Z \supseteq Z_0$, 则 $t_Z \in V$. 取 $Z_1 \in H'_v$, 使得 $Z_1 \supseteq Z_0$ 且 $Z_1 \supseteq Y_0$ (值得提及的是, 满足如此条件的 Z_1 是存在的. 事实上, 由于 $\{t_Z\}_{Z \in H'_v}$ 是 $\{t_Y\}_{Y \in H_v}$ 的子网, 取 $Z_1 \in H'_v$ 使得 $Z_1 \supseteq \overline{\text{span}}(Z_0 \cup Y_0) \in H_v$, 则 $Z_1 \supseteq Z_0$ 且 $Z_1 \supseteq Y_0$), 则有 $t_{Z_1} \in V$, $t_{Z_1} \in S_{Z_1}$, 即 $t_{Z_1} \in V \cap S_{Z_1}$. 因为 $Z_1 \supseteq Y_0$, 所以 $S_{Z_1} \subseteq S_{Y_0}$, 从而 $t_{Z_1} \in V \cap S_{Z_1} \subseteq V \cap S_{Y_0}$. 这与 $V \cap S_{Y_0} = \emptyset$ 矛盾, 所以 $t_0 \in S$. 因此, 由 (2.36) 可得

$$|\langle \delta_{t_0}, g(v) \rangle| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \delta_{t_0}, \frac{f(2^n v)}{2^n} \right\rangle \right| = |\langle \delta_{t_0}, g_{\text{span}(v)}(v) \rangle| = \|v\|. \quad (2.37)$$

(2.37) 说明 g 是线性等距.

对于任意的 $t \in S$, 由 (2.30) 可知, 存在 $x^* \in B(X^*)$, 使得

$$\left| \langle x^*, u \rangle - \left\langle \delta_t, \frac{f(2^n u)}{2^n} \right\rangle \right| \leq \frac{3\varepsilon}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall u \in X,$$

所以

$$\langle x^*, u \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \delta_t, \frac{f(2^n u)}{2^n} \right\rangle = \langle \delta_t, g(u) \rangle.$$

因此再由 (2.30) 可得

$$|\langle \delta_t, g(u) \rangle - \langle \delta_t, f(u) \rangle| \leq 3\varepsilon, \quad \forall u \in X,$$

因而,

$$\|f(u)|_S - g(u)\| = \sup_{t \in S} |\langle \delta_t, f(u) - g(u) \rangle| \leq 3\varepsilon, \quad \forall u \in X. \quad (2.38)$$

由 (2.30), (2.37) 和 (2.38) 可得定理 2.1 成立. $\square$

最后介绍本文主要结果的第二部分. 我们将通过例子证明定理 2.1(1) 和 2.1(2) 中的逼近常数 “3” 都是可以达到的. 因此逼近常数的精确值是 “3”. 下面的例 2.1 来自文献 [3, 例 2.4].

例 2.1 对任意固定的 $\varepsilon > 0$, 首先按如下所示定义 $\varphi_1, \varphi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ -\varepsilon, & x = 2\varepsilon, \\ x - \varepsilon, & x < \varepsilon, \quad x \neq 0, \\ x - 2\varepsilon, & x \geq \varepsilon, \quad x \neq 2\varepsilon, \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 0, & x = 2\varepsilon, \\ \varepsilon - x, & x < \varepsilon, \quad x \neq 0, \\ x - \varepsilon, & x \geq \varepsilon, \quad x \neq 2\varepsilon. \end{cases}$$

其次令 $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ 以及 $f: \mathbb{R} \rightarrow \ell_\infty^2 = C(\{a, b\})$,

$$f(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

文献 [3, 例 2.4] 证明了如此定义的映射 $f: \mathbb{R} \rightarrow \ell_\infty^2 = C(\{a, b\})$ 是标准 ε -等距. 我们利用该例说明定理 2.1(1) 和 2.1(2) 中的逼近常数“3”都是可以达到的. 因此该逼近常数的精确值是“3”. 为方便读者起见, 我们给出 f 是 ε -等距的证明. 事实上, 对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}$ 且 $x \neq y$, 都有

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \max\{|\varphi_1(x) - \varphi_1(y)|, |\varphi_2(x) - \varphi_2(y)|\} \\ &= \begin{cases} \varepsilon - y, & x = 0, \quad y < \varepsilon, \quad y \neq 0, \\ \max\{|y - 2\varepsilon|, y - \varepsilon\}, & x = 0, \quad y \geq \varepsilon, \quad y \neq 2\varepsilon, \\ |x - y| - \varepsilon, & x = 0, \quad y = 2\varepsilon, \\ \max\{|y|, \varepsilon - y\}, & x = 2\varepsilon, \quad y < \varepsilon, \quad y \neq 0, \\ y - x + \varepsilon, & x = 2\varepsilon, \quad y \geq \varepsilon, \quad y \neq 2\varepsilon, \\ \max\{|y - x - \varepsilon|, |x + y - 2\varepsilon|\}, & x < \varepsilon, \quad x \neq 0, \quad y \geq \varepsilon, \quad y \neq 2\varepsilon, \\ |x - y|, & x, y < \varepsilon, \quad x, y \neq 0, \\ |x - y|, & x, y \geq \varepsilon, \quad x, y \neq 2\varepsilon. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.39)$$

由 (2.39) 可得如下结论.

(1) 当 $x = 0, y < \varepsilon, y \neq 0$ 时, 一方面,

$$\varepsilon - y = x - y + \varepsilon \leq |x - y| + \varepsilon;$$

另一方面,

$$\begin{cases} \varepsilon - y = x - y + \varepsilon > x - y - \varepsilon = |x - y| - \varepsilon, & y < 0, \\ \varepsilon - y > 0 > |x - y| - \varepsilon, & 0 < y < \varepsilon. \end{cases}$$

所以,

$$|x - y| - \varepsilon < \varepsilon - y < |x - y| + \varepsilon.$$

(2) 当 $x = 0, y \geq \varepsilon, y \neq 2\varepsilon$ 时,

$$|x - y| - \varepsilon = y - \varepsilon \leq \max\{|y - 2\varepsilon|, y - \varepsilon\} \leq \max\{|y - \varepsilon| + \varepsilon, y - \varepsilon\} = y < |x - y| + \varepsilon.$$

(3) 当 $x = 0, y = 2\varepsilon$ 时, 显然

$$|x - y| - \varepsilon \leq |x - y| - \varepsilon \leq |x - y| + \varepsilon.$$

(4) 当 $x = 2\varepsilon, y < \varepsilon, y \neq 0$ 时,

$$|x - y| - \varepsilon = \varepsilon - y \leq \max\{|y|, \varepsilon - y\} \leq \max\{|\varepsilon - y| + \varepsilon, \varepsilon - y\} = 2\varepsilon - y = x - y < |x - y| + \varepsilon.$$

(5) 当 $x = 2\varepsilon, y \geq \varepsilon, y \neq 2\varepsilon$ 时,

$$\begin{cases} y - x + \varepsilon \geq x - y - \varepsilon = |x - y| - \varepsilon, & \varepsilon \leq y < 2\varepsilon, \\ y - x + \varepsilon > y - x - \varepsilon = |x - y| - \varepsilon, & 2\varepsilon < y. \end{cases}$$

所以,

$$|x - y| - \varepsilon \leq y - x + \varepsilon \leq |x - y| + \varepsilon.$$

(6) 当 $x < \varepsilon, x \neq 0, y \geq \varepsilon, y \neq 2\varepsilon$ 时,

$$\begin{aligned} |x - y| - \varepsilon &= y - x - \varepsilon = |y - x| - \varepsilon \leq |y - x - \varepsilon| \leq \max\{|y - x - \varepsilon|, |x + y - 2\varepsilon|\} \\ &\leq \max\{|y - x| + \varepsilon, |x - \varepsilon| + |y - \varepsilon|\} = \max\{|x - y| + \varepsilon, y - x\} \\ &= |x - y| + \varepsilon. \end{aligned}$$

(7) 当 $x, y < \varepsilon, x, y \neq 0$ 时, 显然

$$|x - y| - \varepsilon \leq |x - y| \leq |x - y| + \varepsilon.$$

(8) 当 $x, y \geq \varepsilon, x, y \neq 2\varepsilon$ 时, 显然

$$|x - y| - \varepsilon \leq |x - y| \leq |x - y| + \varepsilon.$$

综上, $f: \mathbb{R} \rightarrow \ell_\infty^2 = C(\{a, b\})$ 是标准 ε - 等距.

接下来证明定理 2.1(1) 和 2.1(2) 中的逼近常数 “3” 都是可以达到的. 因为 $f: \mathbb{R} \rightarrow \ell_\infty^2 = C(\{a, b\})$ 是标准 ε - 等距, 由定理 2.1, 有 $\{a, b\}$ 的非空闭子集 S , 定义线性等距

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\text{span}}(f(\mathbb{R})|_S) \subseteq C(S), \quad g(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)|_S}{2^n}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

满足如下结论:

(1) 对于任意的 $t \in S$, 存在 $x^* \in B(\mathbb{R}^*) = [-1, 1]$ 和 $\xi \in \{1, -1\}$, 使得

$$|\langle \xi x^*, x \rangle - \langle \delta_t, f(x) \rangle| \leq 3\varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad (2.40)$$

(2) 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, 都有

$$\|f(x)|_S - g(x)\| \leq 3\varepsilon.$$

我们断言 $b \notin S$. 事实上, 如果 $b \in S$, 则对于任意的 $x^* \in B(\mathbb{R}^*) = [-1, 1]$ 和任意的 $\xi \in \{1, -1\}$, 由 φ_2 的定义可得, 要么, 当 $\xi x^* \leq 0$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |\langle \xi x^*, x \rangle - \langle \delta_b, f(x) \rangle| = \lim_{x \rightarrow +\infty} |\xi x^* x - \varphi_2(x)| = +\infty;$$

要么, 当 $\xi x^* > 0$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |\langle \xi x^*, x \rangle - \langle \delta_b, f(x) \rangle| = \lim_{x \rightarrow -\infty} |\xi x^* x - \varphi_2(x)| = +\infty.$$

这都与 (2.40) 矛盾. 这说明 $b \notin S$. 又因为 S 是 $\{a, b\}$ 的非空闭子集, 因此 $S = \{a\}$. 由 (2.40) 可知, 存在 $x^* \in B(\mathbb{R}^*) = [-1, 1]$ 和 $\xi \in \{1, -1\}$ 以及存在线性等距 $g: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\text{span}}(f(\mathbb{R}))|_{\{a\}} \subset C(\{a\})$,

$$g(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)|_{\{a\}}}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_1(2^n x)}{2^n} = x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

使得

$$\begin{aligned} |\langle \xi x^*, x \rangle - \langle \delta_a, f(x) \rangle| &= |\xi x^* x - \varphi_1(x)| \leq 3\varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \|f(x)|_{\{a\}} - g(x)\| &= \|\varphi_1(x) - x\| \leq 3\varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

由 (2.41) 和 φ_1 的定义可得 $\xi x^* = 1$. 因此, 如果取 $x = 2\varepsilon$, 则

$$\begin{aligned} |\langle \xi x^*, 2\varepsilon \rangle - \langle \delta_a, f(2\varepsilon) \rangle| &= |\xi x^* 2\varepsilon - \varphi_1(2\varepsilon)| = |1 \cdot 2\varepsilon - (-\varepsilon)| = 3\varepsilon, \\ \|f(2\varepsilon)|_{\{a\}} - g(2\varepsilon)\| &= \|\varphi_1(2\varepsilon) - 2\varepsilon\| = |\varphi_1(2\varepsilon) - 2\varepsilon| = |-\varepsilon - 2\varepsilon| = 3\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.42)$$

(2.42) 表明定理 2.1(1) 和 2.1(2) 中的逼近常数 “3” 都是可以达到的. 因此逼近常数的精确值是 “3”.

致谢 诚挚地感谢审稿专家对本文的辛勤付出.

参考文献

- 1 Albiac F, Kalton N J. Topics in Banach Space Theory, 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics, vol. 233. Berlin-Heidelberg: Springer, 2016
- 2 Cheng L X. Perturbed metric-preserving mappings of Banach spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1667–1694 [程立新. Banach 空间的保度量 (等距) 映射. 中国科学: 数学, 2020, 50: 1667–1694]
- 3 Cheng L X, Dong Y. A note on the stability of non surjective ε -isometries of Banach spaces. Proc Amer Math Soc, 2020, 148: 4837–4844
- 4 Drewnowski L. On nonlinear isometries between Banach spaces. In: Functional Analysis (Trier, 1994). Berlin: de Gruyter, 1996, 129–141
- 5 Gevirtz J. Stability of isometries on Banach spaces. Proc Amer Math Soc, 1983, 89: 633–636
- 6 Holsztyński W. Lattices with real numbers as additive operators. Dissertationes Math (Rozprawy Mat), 1969, 62: 86pp
- 7 Hyers D H, Ulam S M. On approximate isometries. Bull Amer Math Soc (NS), 1945, 51: 288–292
- 8 Mazur S, Ulam S. Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés. C R Acad Sci Paris, 1932, 194: 946–948
- 9 Omladič M, Šemrl P. On non linear perturbations of isometries. Math Ann, 1995, 303: 617–628
- 10 Phelps R. Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability, 2nd ed. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1364. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1993
- 11 Zhou Y, Zhang Z, Liu C. Stability of ε -isometric embeddings into Banach spaces of continuous functions. J Math Anal Appl, 2017, 453: 805–820

Optimal approximation constants for ε -isometries of continuous functions spaces

Nan Jiang & Yu Zhou

Abstract Let X be a Banach space, T be a compact Hausdorff space, $C(T)$ be the real Banach space of all real-valued continuous functions on T endowed with the supremum norm and $f : X \rightarrow C(T)$ be an ε -isometry with $f(0) = 0$. Then there exist a nonempty closed subset $S \subseteq T$ and a linear isometry $g : X \rightarrow \overline{\text{span}}(f(X)|_S) \subseteq C(S)$, $g(u) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n u)|_S}{2^n}$, $\forall u \in X$, such that

(i) $\forall t \in S$, there exist $x^* \in B(X^*)$ and $\xi \in \{1, -1\}$ satisfying that

$$|\langle \xi x^*, u \rangle - \langle \delta_t, f(u) \rangle| \leq 3\varepsilon, \quad \forall u \in X;$$

(ii) $\|f(u)|_S - g(u)\| \leq 3\varepsilon, \forall u \in X$, where $f(u)|_S$ is the restriction of $f(u)$ to S , and $f(X)|_S = \{f(u)|_S : u \in X\}$. In addition, we show by an example that the approximation constant 3 in the above inequalities is attainable. Therefore, the optimal approximation constant is 3.

Keywords ε -isometry, linear isometry, optimal approximation constant, space of continuous functions

MSC(2020) 46B04, 41A65

doi: 10.1360/SSM-2024-0044