



# 三维可压缩 Navier-Stokes-Fourier 方程组的精确时间衰减率

献给肖玲教授 85 寿辰

陈玉惠<sup>1</sup>, 潘荣华<sup>2\*</sup>

1. 中山大学航空航天学院, 深圳 518107;

2. School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA 30332, USA

E-mail: chenyh339@mail.sysu.edu.cn, panrh@math.gatech.edu

收稿日期: 2024-04-10; 接受日期: 2024-09-13; 网络出版日期: 2024-11-14; \* 通信作者

国家重点研发计划 (批准号: 2023YFA1010300) 和美国国家自然科学基金 (批准号: DMS-1813603 和 DMS-2108453) 资助项目

**摘要** 本文研究三维可压缩 Navier-Stokes-Fourier 方程组在全空间中的解  $U(t, x)$  趋近恒稳态  $\bar{U} = (\bar{\rho} > 0, 0, \bar{\theta} > 0)$  的精确时间衰减率. 当初始值是在  $\bar{U}$  附近的光滑小扰动时, 本文通过证明  $U(t, x)$  与根据初始扰动演化的相应线性化问题的解  $\tilde{U}(t, x)$  具有相同的衰减率来实现这一目标. 在初始扰动满足一些温和的非退化条件下, 本文证明了  $U - \tilde{U}$  的  $L^2$ -模至少以  $(1+t)^{-\frac{5}{4}}$  的速率衰减, 比  $\tilde{U}$  的  $(1+t)^{-\frac{3}{4}}$  的速率衰减得更快. 本文的方法结合了从谱分析中得到的线性最优时间衰减率 (上界和下界) 和巧妙的能量方法.

**关键词** 可压缩 Navier-Stokes-Fourier 方程组 精确衰减率 谱分析 能量方法

**MSC (2020) 主题分类** 35Q30, 35A01, 35B40

## 1 引言

本文研究如下可压缩 Navier-Stokes-Fourier 方程组的初值问题的整体经典解的上界和下界的最优时间衰减率:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = \operatorname{div} T, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \\ \partial_t(\rho e) + \operatorname{div}(\rho e u) + p \operatorname{div} u = T \cdot \nabla u + \kappa \Delta \theta, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho = \bar{\rho}, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \theta = \bar{\theta}, & t \in \mathbb{R}^+, \\ (\rho, u, \theta)|_{t=0} = (\rho_0, u_0, \theta_0), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (1.1)$$

英文引用格式: Chen Y H, Pan R H. The sharp time decay rate of the three-dimensional compressible Navier-Stokes-Fourier system (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 605–634, doi: 10.1360/SSM-2024-0108

这个方程组描述具有可压缩性、黏性、导热性的非等熵 Newton 流体的运动. 未知函数  $\rho, u = (u_1, u_2, u_3), \theta, p$  和  $e$  分别表示密度、速度、绝对温度、压力和内能,  $T$  表示应力张量且  $T = \mu(\nabla u + (\nabla u)^t) + \nu(\operatorname{div} u)I$ , 其中  $I$  为单位矩阵. 我们假设常数黏性系数  $\mu > 0$  和  $\nu$  满足  $\nu + \frac{2}{3}\mu > 0$ ,  $\kappa > 0$  为常数热传导系数,  $\bar{\rho}$  和  $\bar{\theta}$  为固定的正常数. 此外, 我们假定流体是多方理想流体, 即存在两个正常数  $R$  和  $C_\nu$ , 使得

$$p(\rho, \theta) = R\rho\theta, \quad e = C_\nu\theta, \quad p(\rho, S) = Ae^{\frac{S}{C_\nu}}\rho^\gamma,$$

其中  $A$  为某个正常数,  $\gamma > 1$  为绝热指数,  $S$  为比熵,  $C_\nu = \frac{R}{\gamma-1}$ .

利用经典的谱方法, 可压缩 Navier-Stokes-Fourier 的线性化方程组的最优时间衰减率 (上界) 是已知的. 我们很自然地期望, 非线性问题 (1.1) 的小的光滑解的主导项应该是相应的线性问题的解, 因而它们应当共享相同的衰减率. 我们的工作致力于通过证明非线性问题 (1.1) 的精确时间衰减率 (上界和下界) 来实现这一期望.

值得注意的是, 在一维情形下, Zeng<sup>[26]</sup> 以及 Liu 和 Zeng<sup>[16]</sup> 通过逐点估计对一类双曲-抛物方程组的解进行了详细的分析. 关于多维的 Navier-Stokes-Fourier 方程组, Matsumura 和 Nishida<sup>[18, 19]</sup> 首次在全空间上证明了初始小扰动在  $H^s \cap L^1$  中的解的  $H^s$  全局存在性和衰减率. 当初始小扰动仅属于  $H^3$  时, Matsumura<sup>[17]</sup> 利用加权能量法给出了  $L^\infty$ -模的上界衰减率为  $(1+t)^{-\frac{3}{4}}$ . 在文献 [20] 中, 当初始值和外力足够小时, Matsumura 和 Nishida 得到了当  $t \rightarrow \infty$  时, 全局唯一解逼近稳定平衡态. Ponce<sup>[21]</sup> 结合谱分析和能量法得到的线性衰减率, 证明了  $L^p$  ( $2 \leq p \leq \infty$ ) 的最优时间衰减率. Hoff 和 Zumbrun<sup>[7, 8]</sup> 研究了与等熵 Navier-Stokes 方程组相关的人工黏性方程组的 Green 函数, 并导出了当初始小扰动属于  $H^s \cap L^1$  ( $s \geq 4$ ) 时的扩散波的  $L^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) 的最优时间衰减率. Liu 和 Wang<sup>[15]</sup> 研究了线性化等熵 Navier-Stokes 方程组的 Green 函数的逐点估计, 分析了非线性扩散波的耦合, 得到了解的渐近行为的显式表达式, 并表明了奇数维空间中的广义 Huygens 原理. 在文献 [16] 中, Liu 和 Zeng 得到了  $L^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) 的最优衰减估计, 这个一般理论适用于可压缩 Navier-Stokes 方程组和磁流体动力学方程组. Guo 和 Wang<sup>[6]</sup> 通过能量法来证明耗散方程在全空间中的全局解的最优时间衰减率, 这一方法使用一系列具有最低阶导数计算和它们之间的插值的缩放能量估计, 而无需线性衰减分析.

这些结果被推广至外区域问题 (参见文献 [12, 13]) 或半空间问题 (参见文献 [9–11]). 当考虑额外的外力时, 外力确实会影响解的大时间动力学行为. 在文献 [2, 3] 中, Deckelnick 通过纯能量法获得了无界域中等熵可压缩 Navier-Stokes 方程组较慢的衰减率. 当小初始值属于  $H^3 \cap L^{\frac{6}{5}}$  时, 这些结果得到了 Shibata 和 Tanaka<sup>[24, 25]</sup> 进一步的改进. Duan 等<sup>[5]</sup> 建立了具有势能的可压缩 Navier-Stokes 方程组的  $L^p$  的最优收敛率, Duan 等<sup>[4]</sup> 利用非线性问题的解的能量估计, 以及相应线性问题生成的半群的某些  $L^p$ - $L^q$  估计, 也建立了  $L^p$ - $L^q$  的最优收敛率.

关于可压缩 Navier-Stokes-Poisson 方程组, Li 等在文献 [14] 中得到了全局解的大时间行为和衰减率. 随后, Zhang 等<sup>[27]</sup> 将其进一步推广至非等熵可压缩 Navier-Stokes-Poisson 方程组, 观察到电场对全局解的大时间行为的影响: 动量衰减率为  $(1+t)^{-\frac{1}{4}}$ , 比可压缩 Navier-Stokes 方程组的衰减率  $(1+t)^{-\frac{3}{4}}$  慢, 而密度衰减率  $(1+t)^{-\frac{3}{4}}$  与可压缩 Navier-Stokes 方程组相同.

本文的主要目的是用相对简单的能量方法建立非线性问题 (1.1) 解的上界和下界的最优时间衰减率. 我们注意到 Schonbek<sup>[22, 23]</sup> 关于不可压缩 Navier-Stokes 方程组以及 Li 等<sup>[14]</sup> 关于等熵

Navier-Stokes-Poisson 方程组也得到了类似的结果. 虽然在证明衰减率的下界方面有着相同的思想, 但本文考虑的问题中频谱在零附近的特征表现出截然不同的行为, 导致了分析方法上的不同. 最近, 本文作者和 Tong<sup>[1]</sup> 也证明了等熵 Navier-Stokes 方程组的精确时间衰减率. Navier-Stokes-Fourier 方程组比等熵 Navier-Stokes 方程组更具挑战性, 一个最简单的事实是 Navier-Stokes-Fourier 方程组多了一个方程. 因此, 热力学第一定律保证了总能量 (内能和动能) 的守恒定律, 而等熵 Navier-Stokes 方程组的总能量, 即机械能, 是有黏性耗散的. 尽管它们有一些类似的地方, 但它们确实表现出一些需要细致分析的差异. 在本文中, 我们探索了可压缩 Navier-Stokes-Fourier 方程组在选择守恒变量 (密度、动量和总能量) 时的高阶非线性项的精巧结构. 这种选择下, 方程组的守恒形式在这些项中提供了一个自然的导数结构, 为更快衰减率估计的获得提供了可能. 此外, 我们的结果确定了密度、动量和能量的上界和下界的最优时间衰减率, 这比对整个解向量的估计的结果包含更详尽的信息. 我们将在下面进行更详细的阐述.

定义总能量  $\mathcal{E} = e + \frac{1}{2}|u|^2$ , 将 (1.1) 重写如下:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = \operatorname{div} T, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \\ \partial_t(\rho \mathcal{E}) + \operatorname{div}((\rho \mathcal{E} + p)u) = \operatorname{div}(u \cdot T) + \kappa \Delta \theta, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \\ (\rho, u, \mathcal{E})|_{t=0} = (\rho_0, u_0, C_\nu \theta_0 + \frac{1}{2}|u_0|^2), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (1.2)$$

在本文中, 设  $n = \rho - \bar{\rho}$ ,  $m = \rho u$ ,  $E = \rho \mathcal{E} - \bar{E}$ , 其中  $\bar{E} = C_\nu \bar{\rho} \bar{\theta}$ , 从而 (1.2) 可重写为如下扰动形式:

$$\begin{cases} \partial_t n + \operatorname{div} m = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \\ \partial_t m + \alpha_1 \nabla E - \bar{\mu} \Delta m - (\bar{\mu} + \bar{\nu}) \nabla \operatorname{div} m = F, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \\ \partial_t E + \alpha_2 \operatorname{div} m + \kappa_1 \Delta n - \kappa_2 \Delta E = G, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \\ (n, m, E)|_{t=0} = (\rho_0 - \bar{\rho}, \rho_0 u_0, C_\nu \rho_0 \theta_0 + \frac{1}{2} \rho_0 |u_0|^2 - \bar{E}), & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (1.3)$$

其中  $\bar{\mu} = \frac{\mu}{\bar{\rho}}$ ,  $\bar{\nu} = \frac{\nu}{\bar{\rho}}$ ,  $\alpha_1 = \frac{R}{C_\nu} = \gamma - 1$ ,  $\alpha_2 = \frac{\gamma \bar{E}}{\bar{\rho}}$ ,  $\kappa_1 = \frac{\kappa \bar{E}}{C_\nu \bar{\rho}^2}$ ,  $\kappa_2 = \frac{\kappa}{C_\nu \bar{\rho}}$  以及

$$\begin{aligned} F &= -\operatorname{div} \left[ \frac{m \otimes m}{n + \bar{\rho}} + \bar{\mu} \nabla \left( \frac{nm}{n + \bar{\rho}} \right) \right] - \nabla \left[ (\bar{\mu} + \bar{\nu}) \operatorname{div} \left( \frac{nm}{n + \bar{\rho}} \right) - \frac{\alpha_1}{2} \left( \frac{|m|^2}{n + \bar{\rho}} \right) \right], \\ G &= -\operatorname{div} \left[ \gamma \frac{Em}{n + \bar{\rho}} - \alpha_2 \frac{nm}{n + \bar{\rho}} - \frac{\alpha_1}{2} \frac{m|m|^2}{(n + \bar{\rho})^2} - \frac{m \cdot T}{n + \bar{\rho}} + \kappa_2 \nabla \left( \frac{nE}{n + \bar{\rho}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa}{2C_\nu} \nabla \left( \frac{|m|^2}{(n + \bar{\rho})^2} \right) - \kappa_1 \nabla \left( \frac{n^2}{n + \bar{\rho}} \right) \right]. \end{aligned}$$

正是  $(F, G)$  的这种结构将在我们的分析中发挥重要作用.

本文的目标是当  $U_0 = (n_0, m_0, E_0) = (\rho_0 - \bar{\rho}, \rho_0 u_0, C_\nu \rho_0 \theta_0 + \frac{1}{2} \rho_0 |u_0|^2 - \bar{E})$  足够光滑和足够小时, 获得  $U = (n, m, E)$  在  $L^2(\mathbb{R}^3)$  中的大时间行为的清晰刻画.

现在引入对应于问题 (1.3) 的线性化 Navier-Stokes-Fourier 方程组的初值问题:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{n} + \operatorname{div} \tilde{m} = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \\ \partial_t \tilde{m} + \alpha_1 \nabla \tilde{E} - \bar{\mu} \Delta \tilde{m} - (\bar{\mu} + \bar{\nu}) \nabla \operatorname{div} \tilde{m} = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \\ \partial_t \tilde{E} + \alpha_2 \operatorname{div} \tilde{m} + \kappa_1 \Delta \tilde{n} - \kappa_2 \Delta \tilde{E} = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \\ (\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E})|_{t=0} = (n_0, m_0, E_0), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (1.4)$$

众所周知, 对一般的小初始值,  $\tilde{U} = (\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E})$  的  $L^2$ -模的最优上界衰减率为  $(1+t)^{-\frac{3}{4}}$  (参见文献 [19]). 关于  $\tilde{U} = (\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E})$  的上界和下界的最优时间衰减率的详细证明将在本文的第 3 节给出. 在第 4 节中, 在一定条件下, 我们将证明  $\|(U - \tilde{U})(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$  比  $\|\tilde{U}(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$  衰减得更快. 因此,  $\|U(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$  和线性化方程的  $\|\tilde{U}(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$  共享最优时间衰减率  $(1+t)^{-\frac{3}{4}}$ . 事实上, 我们对密度、动量和能量均实现了这一目标.

下面陈述本文的主要结果.

**定理 1.1** 若初始值  $(n_0, m_0, E_0) \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap H^3(\mathbb{R}^3)$ , 令  $\delta_0 = \|(n_0, m_0, E_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^3) \cap H^3(\mathbb{R}^3)}$  足够小, 且满足

$$\int_{\mathbb{R}^3} (m_0(x), E_0(x)) dx \neq (0, 0), \quad (1.5)$$

则线性化问题 (1.4) 存在唯一的全局经典解  $\tilde{U} = (\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E}) \in \mathcal{C}([0, \infty); H^3(\mathbb{R}^3))$ , 存在与时间无关的正常数  $C$ , 使得

$$\begin{aligned} C^{-1}(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}} &\leq \|\nabla^k \tilde{n}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}, & k = 0, 1, 2, 3, \\ C^{-1}(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}} &\leq \|\nabla^k \tilde{m}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}, & k = 0, 1, 2, 3, \\ C^{-1}(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}} &\leq \|\nabla^k \tilde{E}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}, & k = 0, 1, 2, 3, \end{aligned}$$

且问题 (1.3) 存在唯一的全局解  $U = (n, m, E) \in \mathcal{C}([0, \infty); H^3(\mathbb{R}^3))$ . 进一步, 设  $n_h = n - \tilde{n}$ ,  $m_h = m - \tilde{m}$ ,  $E_h = E - \tilde{E}$ , 则

$$\|\nabla^k (n_h, m_h, E_h)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \lesssim \delta_0^2 (1+t)^{-\frac{5}{4}-\frac{k}{2}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

此外, 存在与时间无关的正常数  $\tilde{C}$ , 使得

$$\begin{aligned} \tilde{C}^{-1}(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}} &\leq \|\nabla^k n(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \tilde{C}(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}, & k = 0, 1, 2, \\ \tilde{C}^{-1}(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}} &\leq \|\nabla^k m(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \tilde{C}(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}, & k = 0, 1, 2, \\ \tilde{C}^{-1}(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}} &\leq \|\nabla^k E(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \tilde{C}(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}, & k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

**注 1.1** 注意到该定理在条件 (1.5) 下成立, 这在线性化问题的下界估计中是重要的. 定义第  $r$  阶矩, 即对任意非负整数  $r$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $m = (m_1, m_2, m_3)$ , 当  $r = 0$  时,  $M_n(0) = \int_{\mathbb{R}^3} n_0(x) dx$ ,  $M_E(0) = \int_{\mathbb{R}^3} E_0(x) dx$ ,  $M_m(0) = (M_{m_1}(0), M_{m_2}(0), M_{m_3}(0))$ ; 当  $r = 1$  时,  $M_n(1) = \int_{\mathbb{R}^3} x^t n_0(x) dx$ ,  $M_E(1) = \int_{\mathbb{R}^3} x^t E_0(x) dx$ ,  $M_m(1) = (M_{m_1}(1), M_{m_2}(1), M_{m_3}(1))$ ; 当  $r = 2$  时,  $M_n(2) =$

$\int_{\mathbb{R}^3} x^t x n_0(x) dx$ ,  $M_E(2) = \int_{\mathbb{R}^3} x^t x E_0(x) dx$ ,  $M_m(2) = (M_{m_1}(2), M_{m_2}(2), M_{m_3}(2))$ , 其中

$$x^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

依此类推. 不难发现,

$$\begin{aligned} M_n(r) &= \frac{1}{(-i)^r} \nabla_\xi^r \widehat{n}_0(0), \quad M_E(r) = \frac{1}{(-i)^r} \nabla_\xi^r \widehat{E}_0(0), \\ M_m(r) &= \frac{1}{(-i)^r} (\nabla_\xi^r \widehat{m}_{10}(0), \nabla_\xi^r \widehat{m}_{20}(0), \nabla_\xi^r \widehat{m}_{30}(0)), \end{aligned}$$

其中  $m_0 = (m_{10}, m_{20}, m_{30})$ . 在如下条件下:

$$(M_m(0), M_E(0)) \neq (0, 0), \quad (1.6)$$

实际上, 在命题 4.2 的证明中也可以给出如下估计:

$$\|\nabla^k(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E})(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \approx (1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}.$$

当条件 (1.6) 不满足时, 线性化问题 (1.4) 的衰减率取决于矩的退化阶数. 假设  $(n_0, m_0, E_0) \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap H^3(\mathbb{R}^3)$ , 且属于某个适当的加权  $L^p$  空间. 若  $M_n(r) = 0$ ,  $M_m(r) = 0$ ,  $M_E(r) = 0$ , 其中  $r = 0, 1, 2, \dots, s-1$ ,  $s \in \mathbb{N}^+$ ,  $M_n(s) \neq 0$ ,  $M_m(s) \neq 0$ ,  $M_E(s) \neq 0$ , 则  $\tilde{n}$ ,  $\tilde{m}$ ,  $\tilde{E}$  的最优时间衰减率 (下界和上界) 均为  $(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{s}{2}}$ . 类似的情形也发生在不可压缩 Navier-Stokes 方程组中, 请参见文献 [22, 23].

**注 1.2** 注意到条件 (1.5) 以初始值的 Fourier 变换的形式出现在 Schonbek [22, 23] 关于不可压缩 Navier-Stokes 方程组的文献中以及 Li 等 [14] 等熵 Navier-Stokes-Poisson 方程组的文献中. 这里想强调的是本文的结果包含更多的关于密度、动量和能量的信息, 而不仅仅是解的向量范数的下界.

**注 1.3** 从第 4 节的结果来看, 若将条件 (1.5) 替换为如下仅关于密度的条件:

$$M_n(0) \neq 0, \quad (1.7)$$

则至少有如下密度衰减估计的上界和下界:

$$C^{-1}(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}} \leq \|\nabla^k \tilde{n}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}},$$

以及  $n$  对应的估计. 有关的详细信息, 请参阅命题 4.2.

**记号 1.1**  $a \lesssim b$  表示存在统一的常数  $C$  (其可能在不同行中不同), 使得  $a \leq Cb$ .  $a \approx b$  表示  $a \lesssim b$  且  $b \lesssim a$ .

## 2 全局存在性和唯一性

对给定的两个常数  $\bar{\rho} > 0$  和  $\bar{\theta} > 0$ , 令  $n = \rho - \bar{\rho}$ ,  $u = u - 0$ ,  $q = \theta - \bar{\theta}$ , 则问题 (1.1) 可重写为如

下扰动形式:

$$\begin{cases} \partial_t n + \bar{\rho} \operatorname{div} u = -n \operatorname{div} u - u \cdot \nabla n, \\ \partial_t u + R_1 \nabla n + R \nabla q - \bar{\mu} \Delta u - (\bar{\mu} + \bar{\nu}) \nabla \operatorname{div} u = f, \\ \partial_t q + R_2 \operatorname{div} u - \bar{\kappa} \Delta q = g, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} n = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} q = 0, \\ (n, u, q)|_{t=0} = (\rho_0 - \bar{\rho}, u_0, \theta_0 - \bar{\theta}), \end{cases} \quad (2.1)$$

其中  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$ ,  $\bar{\mu} = \frac{\mu}{\bar{\rho}}$ ,  $\bar{\nu} = \frac{\nu}{\bar{\rho}}$ ,  $\bar{\kappa} = \frac{\kappa}{C_\nu \bar{\rho}}$ ,  $R_1 = \frac{R\bar{\theta}}{\bar{\rho}}$ ,  $R_2 = \frac{R\bar{\theta}}{C_\nu}$  以及

$$\begin{aligned} f &= -u \cdot \nabla u - \bar{\mu} \frac{n}{n + \bar{\rho}} \Delta u - (\bar{\mu} + \bar{\nu}) \frac{n}{n + \bar{\rho}} \nabla \operatorname{div} u - R \frac{q}{n + \bar{\rho}} \nabla n + R_1 \frac{n}{n + \bar{\rho}} \nabla n, \\ g &= -u \cdot \nabla q - \bar{\kappa} \frac{n}{n + \bar{\rho}} \Delta q - \frac{R}{C_\nu} q \operatorname{div} u + \frac{1}{C_\nu} \frac{T \cdot \nabla u}{n + \bar{\rho}}. \end{aligned}$$

根据局部适定性理论, 问题 (2.1) 在非平凡时间区间  $[0, T]$  上有唯一解  $(n, u, q)$ . 首先, 作如下先验假设: 对于足够小的  $\delta > 0$ ,

$$\|n(t)\|_{H^3(\mathbb{R}^3)} + \|u(t)\|_{H^3(\mathbb{R}^3)} + \|q(t)\|_{H^3(\mathbb{R}^3)} \leq \delta, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.2)$$

根据先验假设 (2.2) 和 Sobolev 不等式, 有

$$\frac{\bar{\rho}}{2} \leq n + \bar{\rho} \leq 2\bar{\rho}, \quad \frac{\bar{\theta}}{2} \leq q + \bar{\theta} \leq 2\bar{\theta}.$$

借助先验假设 (2.2), 我们将对解获得一致的估计, 这将对充分小的初始值封闭先验假设, 从而完成需要的证明. 确切地说, 有以下命题.

**命题 2.1** 若  $(n_0, u_0, q_0) \in H^3(\mathbb{R}^3)$ , 存在足够小的常数  $\delta_0 > 0$ , 使得

$$\|n_0\|_{H^3(\mathbb{R}^3)} + \|u_0\|_{H^3(\mathbb{R}^3)} + \|q_0\|_{H^3(\mathbb{R}^3)} \leq \delta_0,$$

则问题 (2.1) 存在唯一的全局解  $(n, u, q)$ , 其满足

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \|(n, u, q)(s)\|_{H^3(\mathbb{R}^3)}^2 + \int_0^t (\|\nabla n(s)\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|(\nabla u, \nabla q)(s)\|_{H^3(\mathbb{R}^3)}^2) ds \leq C\delta_0^2, \quad \forall t \geq 0,$$

其中  $C$  是与时间无关的正常数.

**证明** 证明该命题需要三个步骤.

**步骤 1** 基于假设 (2.2) 的基本能量估算.

对于  $k = 0$ , 将问题 (2.1) 的第一个方程乘以  $\frac{R_1}{\bar{\rho}} n$ , 第二个乘以  $u$ , 第三个乘以  $\frac{R}{R_2} q$ , 求和, 然后对  $\mathbb{R}^3$  上的等式进行分部积分. 根据先验假设 (2.2)、Hölder 不等式和 Sobolev 不等式, 得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{R_1}{\bar{\rho}} |n|^2 + |u|^2 + \frac{R}{R_2} |q|^2 \right) dx + \int_{\mathbb{R}^3} \left( \bar{\mu} |\nabla u|^2 + (\bar{\mu} + \bar{\nu}) |\operatorname{div} u|^2 + \frac{R\kappa_1}{R_2} |\nabla q|^2 \right) dx \\ & \lesssim \|n\|_{L^3} \|\nabla u\|_{L^2} \|n\|_{L^6} + (\|u\|_{L^3} \|\nabla u\|_{L^2} + \|n\|_{L^3} \|\nabla n\|_{L^2} + \|q\|_{L^3} \|\nabla n\|_{L^2}) \|u\|_{L^6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\|u\|_{L^\infty} \|\nabla n\|_{L^2} + \|n\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} + \|q\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2}) \|\nabla u\|_{L^2} \\
& + (\|q\|_{L^\infty} \|\nabla n\|_{L^2} + \|n\|_{L^\infty} \|\nabla q\|_{L^2}) \|\nabla q\|_{L^2} + \|u\|_{L^3} \|\nabla q\|_{L^2} \|q\|_{L^6} \\
& \lesssim (\|(n, u, q)\|_{L^3} + \|(n, u, q)\|_{L^\infty}) \|\nabla(n, u, q)\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

将算子  $\nabla^k$  应用于问题 (2.1), 第一个方程乘以  $\frac{R_1}{\rho} \nabla^k n$ , 第二个方程乘以  $\nabla^k u$ , 第三个方程乘以  $\frac{R}{R_2} \nabla^k q$ , 求和, 然后分部积分. 对于  $k = 1$ , 有

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{R_1}{\rho} |\nabla n|^2 + |\nabla u|^2 + \frac{R}{R_2} |\nabla q|^2 \right) dx \\
& + \int_{\mathbb{R}^3} \left( \bar{\mu} |\nabla^2 u|^2 + (\bar{\mu} + \bar{\nu}) |\nabla \operatorname{div} u|^2 + \frac{R\kappa_1}{R_2} |\nabla^2 q|^2 \right) dx \\
& \lesssim (\|(n, u, q)\|_{L^\infty} + \|\nabla u\|_{L^\infty}) (\|\nabla(n, u, q)\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2(u, q)\|_{L^2}^2).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

对于  $k = 2$ , 有

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{R_1}{\rho} |\nabla^2 n|^2 + |\nabla^2 u|^2 + \frac{R}{R_2} |\nabla^2 q|^2 \right) dx \\
& + \int_{\mathbb{R}^3} \left( \bar{\mu} |\nabla^3 u|^2 + (\bar{\mu} + \bar{\nu}) |\nabla^2 \operatorname{div} u|^2 + \frac{R\kappa_1}{R_2} |\nabla^3 q|^2 \right) dx \\
& \lesssim (\|(n, u, q)\|_{L^\infty} + \|\nabla(n, u, q)\|_{L^\infty}) (\|\nabla^2(n, u, q)\|_{L^2}^2 + \|\nabla^3(u, q)\|_{L^2}^2).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

对于  $k = 3$ , 有

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{R_1}{\rho} |\nabla^3 n|^2 + |\nabla^3 u|^2 + \frac{R}{R_2} |\nabla^3 q|^2 \right) dx \\
& + \int_{\mathbb{R}^3} \left( \bar{\mu} |\nabla^4 u|^2 + (\bar{\mu} + \bar{\nu}) |\nabla^3 \operatorname{div} u|^2 + \frac{R\kappa_1}{R_2} |\nabla^4 q|^2 \right) dx \\
& \lesssim (\|(n, u, q)\|_{L^\infty} + \|\nabla(n, u, q)\|_{L^\infty} + \|\nabla^2(n, u, q)\|_{L^3}) (\|\nabla^3(n, u, q)\|_{L^2}^2 + \|\nabla^4(u, q)\|_{L^2}^2).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

根据上述估计, 由于  $\delta > 0$  充分小, 存在某些正常数  $C_1$  和  $C_2$ , 使得

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \sum_{0 \leq k \leq 3} \left( \frac{R_1}{\rho} \|\nabla^k n\|_{L^2}^2 + \|\nabla^k u\|_{L^2}^2 + \frac{R}{R_2} \|\nabla^k q\|_{L^2}^2 \right) + C_1 \sum_{1 \leq k \leq 4} (\|\nabla^k u\|_{L^2}^2 + \|\nabla^k q\|_{L^2}^2) \\
& \leq C_2 \delta \sum_{1 \leq k \leq 3} \|\nabla^k n\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

**步骤 2** 基于假设 (2.2) 对  $n$  的耗散估计.

将算子  $\nabla^k$  作用于问题 (2.1) 的第二个方程, 然后乘以  $\nabla^{k+1} n$ , 其关键想法是对变量  $t$  进行分部积分, 并使用连续性方程. 因此, 对变量  $t$  和变量  $x$  进行分部积分, 对于  $k = 0$ , 得到

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla n dx + R_1 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla n|^2 dx \\
& \lesssim \|\nabla u\|_{L^2}^2 + (\|\nabla q\|_{L^2} + \|\nabla^2 u\|_{L^2}) \|\nabla n\|_{L^2} + \|(n, u, q)\|_{L^\infty} \|\nabla(n, u)\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

对于  $k = 1$ , 得到

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \cdot \nabla^2 n dx + R_1 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla^2 n|^2 dx \\ & \lesssim \|\nabla^2 u\|_{L^2}^2 + (\|\nabla^2 q\|_{L^2} + \|\nabla^3 u\|_{L^2}) \|\nabla^2 n\|_{L^2} \\ & \quad + (\|(n, u, q)\|_{L^\infty} + \|\nabla(n, u, q)\|_{L^\infty}) (\|\nabla n\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2(n, u)\|_{L^2}^2). \end{aligned} \quad (2.9)$$

对于  $k = 2$ , 得到

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 u \cdot \nabla^3 n dx + R_1 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla^3 n|^2 dx \\ & \lesssim \|\nabla^3 u\|_{L^2}^2 + (\|\nabla^3 q\|_{L^2} + \|\nabla^4 u\|_{L^2}) \|\nabla^3 n\|_{L^2} \\ & \quad + (\|(n, u, q)\|_{L^\infty} + \|\nabla(n, u, q)\|_{L^\infty}) (\|\nabla^2(n, u, q)\|_{L^2}^2 + \|\nabla^3(n, u)\|_{L^2}^2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

代入上述估计, 由于  $\delta > 0$  充分小, 存在某些正常数  $C_3$  和  $C_4$ , 使得

$$\frac{d}{dt} \sum_{0 \leq k \leq 2} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^k u \cdot \nabla^{k+1} n dx + C_3 \sum_{1 \leq k \leq 3} \|\nabla^k n\|_{L^2}^2 \leq C_4 \sum_{1 \leq k \leq 4} (\|\nabla^k u\|_{L^2}^2 + \|\nabla^k q\|_{L^2}^2). \quad (2.11)$$

**步骤 3** 命题 2.1 的证明.

将 (2.11) 乘以  $\frac{2C_2\delta}{C_3}$  与 (2.7) 相加, 借助先验假设 (2.2), 由于  $\delta > 0$  足够小, 从而存在正常数  $C_5$ , 使得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{0 \leq k \leq 3} \left( \frac{R_1}{\rho} \|\nabla^k n\|_{L^2}^2 + \|\nabla^k u\|_{L^2}^2 + \frac{R}{R_2} \|\nabla^k q\|_{L^2}^2 \right) + \frac{2C_2\delta}{C_3} \sum_{0 \leq k \leq 2} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^k u \cdot \nabla^{k+1} n dx \right\} \\ & \quad + C_5 \left\{ \sum_{1 \leq k \leq 3} \|\nabla^k n\|_{L^2}^2 + \sum_{1 \leq k \leq 4} (\|\nabla^k u\|_{L^2}^2 + \|\nabla^k q\|_{L^2}^2) \right\} \leq 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

接下来, 定义  $\mathcal{E}(t)$  为  $C_5^{-1}$  乘以 (2.12) 中时间导数下的表达式. 我们观察到, 若  $\delta > 0$  充分小, 则存在正常数  $C_6$ , 使得

$$C_6^{-1} (\|n(t)\|_{H^3}^2 + \|u(t)\|_{H^3}^2 + \|q(t)\|_{H^3}^2) \leq \mathcal{E}(t) \leq C_6 (\|n(t)\|_{H^3}^2 + \|u(t)\|_{H^3}^2 + \|q(t)\|_{H^3}^2).$$

现在, 将 (2.12) 写成

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) + \|\nabla n(t)\|_{H^2}^2 + \|\nabla u(t)\|_{H^3}^2 + \|\nabla q(t)\|_{H^3}^2 \leq 0.$$

因此, 直接关于时间积分, 在先验假设 (2.2) 下, 可以得到

$$\sup_{0 \leq s \leq T} \|(n, u, q)(s)\|_{H^3}^2 + C_6 \int_0^T (\|\nabla n(s)\|_{H^2}^2 + \|(\nabla u, \nabla q)(s)\|_{H^3}^2) ds \leq C_6^2 \|(n_0, u_0, q_0)\|_{H^3}^2.$$

使用局部适定性理论, 应用标准连续性论证, 若假设命题中的  $\delta_0 > 0$  足够小, 则封闭了先验假设 (2.2), 因而局部解可以延拓至全局, 从而完成了命题 2.1 的证明.  $\square$

### 3 线性化问题的谱分析

本节分析线性化可压缩 Navier-Stokes-Fourier 方程组的相应的初值问题:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{n} + \operatorname{div} \tilde{m} = 0, \\ \partial_t \tilde{m} + \alpha_1 \nabla \tilde{E} - \bar{\mu} \Delta \tilde{m} - (\bar{\mu} + \bar{\nu}) \nabla \operatorname{div} \tilde{m} = 0, \\ \partial_t \tilde{E} + \alpha_2 \operatorname{div} \tilde{m} + \kappa_1 \Delta \tilde{n} - \kappa_2 \Delta \tilde{E} = 0, \\ (\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E})|_{t=0} = (\rho_0 - \bar{\rho}, \rho_0 u_0, C_\nu \rho_0 \theta_0 + \frac{1}{2} \rho_0 |u_0|^2 - \bar{E}), \end{cases} \quad (3.1)$$

其中  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$ ,  $\bar{\mu} = \frac{\mu}{\bar{\rho}}$ ,  $\bar{\nu} = \frac{\nu}{\bar{\rho}}$ ,  $\alpha_1 = \gamma - 1$ ,  $\alpha_2 = \frac{\gamma \bar{E}}{\bar{\rho}}$ ,  $\kappa_1 = \frac{\kappa \bar{E}}{C_\nu \bar{\rho}^2}$ ,  $\kappa_2 = \frac{\kappa}{C_\nu \bar{\rho}}$ . 根据演化方程的半群理论, 线性化问题 (3.1) 的解  $(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E})$  可表示为

$$\partial_t \tilde{U}(t, x) = B \tilde{U}(t, x), \quad \tilde{U}(0, x) = \tilde{U}_0(x), \quad \forall t \geq 0,$$

即有

$$\tilde{U}(t, x) = S(t) * \tilde{U}_0(x) = e^{tB} * \tilde{U}_0(x), \quad \forall t \geq 0.$$

接下来, 分析微分算子  $B$  的 Fourier 表达式  $A(\xi)$ , 并研究半群  $S(t) = e^{tB}$ . 线性化问题 (3.1) 的解的 Fourier 变换  $(\hat{\tilde{n}}, \hat{\tilde{m}}, \hat{\tilde{E}})$  可表示为

$$\partial_t \hat{\tilde{U}}(t, \xi) = A(\xi) \hat{\tilde{U}}(t, \xi), \quad \hat{\tilde{U}}(0, \xi) = \hat{\tilde{U}}_0(\xi), \quad \forall t \geq 0,$$

其中  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^t$ , 矩阵  $A(\xi)$  定义为

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & -i\xi^t & 0 \\ 0 & -\bar{\mu}|\xi|^2 I_{3 \times 3} - (\bar{\mu} + \bar{\nu})\xi \otimes \xi & -\alpha_1 i\xi \\ \kappa_1 |\xi|^2 & -\alpha_2 i\xi^t & -\kappa_2 |\xi|^2 \end{pmatrix}_{5 \times 5}.$$

矩阵  $A(\xi)$  的特征值由以下行列式计算得到:

$$\det(A(\xi) - \lambda I) = -(\lambda + \bar{\mu}|\xi|^2)^2 f(\lambda, |\xi|) = 0,$$

其中

$$f(\lambda, |\xi|) = \lambda^3 + (2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2)|\xi|^2 \lambda^2 + ((2\bar{\mu} + \bar{\nu})\kappa_2|\xi|^4 + \alpha_1 \alpha_2 |\xi|^2) \lambda + \alpha_1 \kappa_1 |\xi|^4, \quad (3.2)$$

由此推导出

$$\lambda_0 = -\bar{\mu}|\xi|^2 \text{ (二重根)}, \quad \lambda_1 = \lambda_1(|\xi|), \quad \lambda_2 = \lambda_2(|\xi|), \quad \lambda_3 = \lambda_3(|\xi|).$$

半群  $e^{tA(\xi)}$  则表示为

$$e^{tA(\xi)} = \sum_{i=0}^3 e^{\lambda_i t} P_i(\xi),$$

其中投影算子  $P_i(\xi)$  是由如下计算得出的:

$$P_i(\xi) = \prod_{j \neq i} \frac{A(\xi) - \lambda_j I}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

在深入探讨细节之前, 需要分析半群  $e^{tA(\xi)}$  在较低和较高频下的性质. 对于前者, 以下两个引理是至关重要的.

**引理 3.1** 存在小的正常数  $r_1$ , 使得以下结论对  $|\xi| < r_1$  成立:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -\bar{\mu}|\xi|^2 \text{ (二重根)}, \quad \lambda_1 = -\frac{\kappa_1}{\alpha_2}|\xi|^2 + \sum_{j=2}^{+\infty} a_{2j}|\xi|^{2j}, \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2} \left( 2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2 - \frac{\kappa_1}{\alpha_2} \right) |\xi|^2 + \sum_{j=2}^{+\infty} b_{2j}|\xi|^{2j} + i \left( \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} |\xi| + \sum_{j=2}^{+\infty} b_{2j-1}|\xi|^{2j-1} \right), \\ \lambda_3 &= -\frac{1}{2} \left( 2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2 - \frac{\kappa_1}{\alpha_2} \right) |\xi|^2 + \sum_{j=2}^{+\infty} b_{2j}|\xi|^{2j} - i \left( \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} |\xi| + \sum_{j=2}^{+\infty} b_{2j-1}|\xi|^{2j-1} \right), \end{aligned}$$

其中  $a_j$  和  $b_j$  为实数, 且  $2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2 - \frac{\kappa_1}{\alpha_2} = 2\bar{\mu} + \bar{\nu} + (1 - \frac{1}{\gamma})\kappa_2 > 0$ .

**证明** 若  $|\xi| \ll 1$ , 由于  $\lambda_0$  是特征方程的二重根, 不妨假设  $\lambda_1$  是实数,  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  是复共轭. 设  $r = |\xi|$  和  $\lambda_1(\xi) = r^2 \bar{\lambda}(r)$ , 首先考虑如下等式:

$$r^4[r^2 \bar{\lambda}^3 + (2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2)r^2 \bar{\lambda}^2 + ((2\bar{\mu} + \bar{\nu})\kappa_2 r^2 + \alpha_1 \alpha_2) \bar{\lambda} + \alpha_1 \kappa_1] = 0.$$

设  $F: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  定义为

$$F(r, \bar{\lambda}) = r^2 \bar{\lambda}^3 + (2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2)r^2 \bar{\lambda}^2 + ((2\bar{\mu} + \bar{\nu})\kappa_2 r^2 + \alpha_1 \alpha_2) \bar{\lambda} + \alpha_1 \kappa_1. \quad (3.3)$$

注意到  $F(0, -\frac{\kappa_1}{\alpha_2}) = 0$  和  $F_{\bar{\lambda}}(0, -\frac{\kappa_1}{\alpha_2}) \neq 0$ , 则隐函数定理意味着对足够小的  $r$ , 存在一个解析函数  $\bar{\lambda}(r)$ , 使得  $\bar{\lambda}(0) = -\frac{\kappa_1}{\alpha_2}$ ,  $F(r, \bar{\lambda}(r)) = 0$ . 因此,  $\bar{\lambda}(r)$  必须是 (3.3) 的根, 不妨写成

$$\bar{\lambda}(r) = a_2 + a_3 r + a_4 r^2 + \cdots,$$

其中  $a_{j+2} = \frac{\bar{\lambda}^{(j)}(0)}{j!}$ . 特别地,  $a_2 = \bar{\lambda}(0) = -\frac{\kappa_1}{\alpha_2}$ , 即

$$\bar{\lambda}(r) = -\frac{\kappa_1}{\alpha_2} + a_3 r + a_4 r^2 + \cdots.$$

因此, 对足够小的  $|\xi|$ , 有

$$\lambda_1 = r^2 \bar{\lambda}(r) = -\frac{\kappa_1}{\alpha_2} |\xi|^2 + a_3 |\xi|^3 + a_4 |\xi|^4 + \cdots.$$

对于  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$ , 设  $r = |\xi|$  和  $\lambda(\xi) = r \bar{\lambda}(r)$ , 考虑如下等式:

$$r^3[\bar{\lambda}^3 + (2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2)r \bar{\lambda}^2 + ((2\bar{\mu} + \bar{\nu})\kappa_2 r^2 + \alpha_1 \alpha_2) \bar{\lambda} + \alpha_1 \kappa_1 r] = 0.$$

定义  $G: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  如下:

$$G(r, \bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^3 + (2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2)r \bar{\lambda}^2 + ((2\bar{\mu} + \bar{\nu})\kappa_2 r^2 + \alpha_1 \alpha_2) \bar{\lambda} + \alpha_1 \kappa_1 r. \quad (3.4)$$

注意到  $G(0, \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} i) = 0$  和  $G_{\bar{\lambda}}(0, \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} i) \neq 0$ , 则隐函数定理意味着对足够小的  $r$ , 存在一个解析函数  $\bar{\lambda}(r)$ , 使得  $\bar{\lambda}(0) = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} i$ ,  $G(r, \bar{\lambda}(r)) = 0$ . 因此,  $\bar{\lambda}(r)$  必须是 (3.4) 的根, 不妨也写成

$$\bar{\lambda}(r) = b_1 + b_2 r + b_3 r^2 + \cdots,$$

其中  $b_{j+1} = \frac{\bar{\lambda}^{(j)}(0)}{j!}$ . 特别地,  $b_1 = \bar{\lambda}(0) = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} i$ , 即

$$\bar{\lambda}(r) = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} i + b_2 r + b_3 r^2 + \cdots.$$

因此, 对足够小的  $|\xi|$ , 有

$$\lambda_2 = r \bar{\lambda}(r) = i \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} |\xi| + b_2 |\xi|^2 + b_3 |\xi|^3 + \cdots.$$

类似地, 可以证明

$$\lambda_3 = r \bar{\lambda}(r) = -i \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} |\xi| + b_2 |\xi|^2 + b_3 |\xi|^3 + \cdots.$$

现在只需要证明  $\lambda_1$  只包含  $|\xi|$  的偶次幂,  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  的实部只包含  $|\xi|$  的偶次幂,  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  的虚部只包含  $|\xi|$  的奇次幂. 已知  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  一定是复共轭, 并且

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -(2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2) |\xi|^2,$$

则有

$$\operatorname{Re} \lambda_2 = \operatorname{Re} \lambda_3 = -\frac{1}{2}((2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2) |\xi|^2 + \lambda_1) = -\frac{1}{2} \left( 2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2 - \frac{\kappa_1}{\alpha_2} \right) |\xi|^2 - \sum_{j=2}^{+\infty} a_j |\xi|^j.$$

显然有

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -\alpha_1 \kappa_1 |\xi|^4,$$

并且

$$\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 = (2\bar{\mu} + \bar{\nu}) \kappa_2 |\xi|^4 + \alpha_1 \alpha_2 |\xi|^2,$$

由上述等式, 可得

$$\lambda_1^2 (\lambda_2 + \lambda_3) = ((2\bar{\mu} + \bar{\nu}) \kappa_2 |\xi|^4 + \alpha_1 \alpha_2 |\xi|^2) \lambda_1 + \alpha_1 \kappa_1 |\xi|^4. \quad (3.5)$$

已知  $\lambda_1$  的最低项是  $c|\xi|^2$ , 现在假设  $\lambda_1$  包含  $|\xi|$  的奇次项, 并且具有非零系数的最低的项是  $a_{2j+1} |\xi|^{2j+1}$ . 这意味着  $\lambda_1^2$  包含  $|\xi|$  的奇次项, 且最低的项是  $2ca_{2j+1} |\xi|^{2j+3}$ . 另外, 还已知  $\lambda_2 + \lambda_3$  的最低项是  $c'|\xi|^2$ , 则  $\lambda_1^2 (\lambda_2 + \lambda_3)$  包含  $|\xi|$  的奇次项, 在我们的假设下, 最低项是  $2cc'a_{2j+1} |\xi|^{2j+5}$ , 且它是非零的. 注意到 (3.5) 的右侧包含  $|\xi|$  的奇次幂, 而最低项是  $\alpha_1 \alpha_2 a_{2j+1} |\xi|^{2j+3}$ , 得出矛盾. 由此证明  $\lambda_1$  只包含  $|\xi|$  的偶次幂, 且  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  的实部也只包含  $|\xi|$  的偶次幂.

另一方面, 因为  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  是共轭的, 则有  $\lambda_2 \lambda_3 = (\operatorname{Re} \lambda_2)^2 + (\operatorname{Im} \lambda_2)^2$ . 因此,

$$(\operatorname{Im} \lambda_2)^2 = -\frac{\alpha_1 \kappa_1 |\xi|^4}{\lambda_1} - (\operatorname{Re} \lambda_2)^2. \quad (3.6)$$

注意到 (3.6) 的右边只包含  $|\xi|$  的偶次幂. 事实上, 已知  $\text{Im}\lambda_2$  的最低项是  $c|\xi|$ . 现在假设  $\text{Im}\lambda_2$  包含  $|\xi|$  的偶次项, 并且具有非零系数的最低项是  $b_{2j}|\xi|^{2j}$ . 则  $(\text{Im}\lambda_2)^2$  包含  $|\xi|$  的奇次项, 在我们的假设下, 最低项是  $2cb_{2j}|\xi|^{2j+1}$ , 且它是非零的. 然而, 如上文所述,  $(\text{Im}\lambda_2)^2$  只包含  $|\xi|$  的偶次幂, 得出矛盾. 因此,  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  的虚部只包含  $|\xi|$  的奇次幂. 从而完成了该引理的证明.  $\square$

**引理 3.2** 当  $2\bar{\mu} + \bar{\nu} \neq \kappa_2$  时, 存在大的正常数  $r_2$ , 使得以下结论对  $|\xi| > r_2$  成立:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= -\bar{\mu}|\xi|^2 \text{ (二重根)}, \quad \lambda_1 = -\frac{\alpha_1\kappa_1}{(2\bar{\mu} + \bar{\nu})\kappa_2} + \sum_{j=1}^{+\infty} a'_{2j}|\xi|^{-2j}, \\ \lambda_2 &= -(2\bar{\mu} + \bar{\nu})|\xi|^2 + \sum_{j=0}^{+\infty} b'_{2j}|\xi|^{-2j}, \quad \lambda_3 = -\kappa_2|\xi|^2 + \sum_{j=0}^{+\infty} \tilde{b}'_{2j}|\xi|^{-2j}.\end{aligned}$$

当  $2\bar{\mu} + \bar{\nu} = \kappa_2$  时, 存在大的正常数  $r_2$ , 使得以下结论对  $|\xi| > r_2$  成立:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= -\bar{\mu}|\xi|^2 \text{ (二重根)}, \quad \lambda_1 = -\frac{\alpha_1\kappa_1}{(2\bar{\mu} + \bar{\nu})\kappa_2} + \sum_{j=1}^{+\infty} a'_{2j}|\xi|^{-2j}, \\ \lambda_2 &= -(2\bar{\mu} + \bar{\nu})|\xi|^2 + \sum_{j=-1}^{+\infty} b''_j|\xi|^{-j}, \quad \lambda_3 = -\kappa_2|\xi|^2 + \sum_{j=-1}^{+\infty} \tilde{b}''_j|\xi|^{-j},\end{aligned}$$

其中  $a'_j$ 、 $b'_j$ 、 $\tilde{b}'_j$ 、 $b''_j$  和  $\tilde{b}''_j$  为实数, 且  $\lambda_2 \neq \lambda_3$ .

**证明** 若  $|\xi| \gg 1$ , 令  $r = \frac{1}{|\xi|} \ll 1$ ,  $\lambda_1(\xi) = \bar{\lambda}(r)$ , 首先考虑如下等式:

$$r^{-4}[\bar{\lambda}^3 + (2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2)r^2\bar{\lambda}^2 + ((2\bar{\mu} + \bar{\nu})\kappa_2 + \alpha_1\alpha_2r^2)\bar{\lambda} + \alpha_1\kappa_1] = 0.$$

设  $F: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  定义为

$$F(r, \bar{\lambda}) = r^4\bar{\lambda}^3 + (2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2)r^2\bar{\lambda}^2 + ((2\bar{\mu} + \bar{\nu})\kappa_2 + \alpha_1\alpha_2r^2)\bar{\lambda} + \alpha_1\kappa_1. \quad (3.7)$$

注意到  $F(0, -\frac{\alpha_1\kappa_1}{(2\bar{\mu} + \bar{\nu})\kappa_2}) = 0$  和  $F_{\bar{\lambda}}(0, -\frac{\alpha_1\kappa_1}{(2\bar{\mu} + \bar{\nu})\kappa_2}) \neq 0$ , 则隐函数定理意味着对足够小的  $r$ , 存在一个解析函数  $\bar{\lambda}(r)$ , 使得  $\bar{\lambda}(0) = -\frac{\alpha_1\kappa_1}{(2\bar{\mu} + \bar{\nu})\kappa_2}$ ,  $F(r, \bar{\lambda}(r)) = 0$ , 不妨写成

$$\bar{\lambda}(r) = -\frac{\alpha_1\kappa_1}{(2\bar{\mu} + \bar{\nu})\kappa_2} + a'_1r + a'_2r^2 + \cdots,$$

其中  $a'_j = \frac{\bar{\lambda}^{(j)}(0)}{j!}$ . 因此, 对足够小的  $r$ , 有

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}(r) = -\frac{\alpha_1\kappa_1}{(2\bar{\mu} + \bar{\nu})\kappa_2} + a'_1|\xi|^{-1} + a'_2|\xi|^{-2} + \cdots.$$

至于  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$ , 令  $r = \frac{1}{|\xi|} \ll 1$ ,  $\lambda(\xi) = r^{-2}\bar{\lambda}(r)$ , 考虑如下等式:

$$r^{-6}[\bar{\lambda}^3 + (2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2)\bar{\lambda}^2 + ((2\bar{\mu} + \bar{\nu})\kappa_2 + \alpha_1\alpha_2r^2)\bar{\lambda} + \alpha_1\kappa_1r^2] = 0.$$

定义  $G: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  如下:

$$G(r, \bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^3 + (2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2)\bar{\lambda}^2 + ((2\bar{\mu} + \bar{\nu})\kappa_2 + \alpha_1\alpha_2r^2)\bar{\lambda} + \alpha_1\kappa_1r^2. \quad (3.8)$$

注意到  $G(0, -(2\bar{\mu} + \bar{\nu})) = 0$  和  $G_{\bar{\lambda}}(0, -(2\bar{\mu} + \bar{\nu})) \neq 0$ , 则隐函数定理意味着对足够小的  $r$ , 存在一个解析函数  $\bar{\lambda}(r)$ , 使得  $\bar{\lambda}(0) = -(2\bar{\mu} + \bar{\nu})$ ,  $G(r, \bar{\lambda}(r)) = 0$ , 不妨也写成

$$\bar{\lambda}(r) = -(2\bar{\mu} + \bar{\nu}) + b'_{-1}r + b'_0r^2 + b'_1r^3 + \cdots,$$

其中  $b'_{j-2} = \frac{\bar{\lambda}^{(j)}(0)}{j!}$ . 因此, 对足够小的  $r$ , 有

$$\lambda_2(\xi) = r^{-2}\bar{\lambda}(r) = -(2\bar{\mu} + \bar{\nu})|\xi|^2 + b'_{-1}|\xi| + b'_0 + b'_1|\xi|^{-1} + \cdots.$$

类似地, 可以证明

$$\lambda_3(\xi) = r^{-2}\bar{\lambda}(r) = -\kappa_2|\xi|^2 + \tilde{b}'_{-1}|\xi| + \tilde{b}'_0 + \tilde{b}'_1|\xi|^{-1} + \cdots.$$

现在只需要证明  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  只包含  $|\xi|^{-1}$  的偶次幂. 在上述引理的证明中, 已推断出

$$\lambda_1^2(\lambda_2 + \lambda_3) = ((2\bar{\mu} + \bar{\nu})\kappa_2|\xi|^4 + \alpha_1\alpha_2|\xi|^2)\lambda_1 + \alpha_1\kappa_1|\xi|^4, \quad (3.9)$$

且已知  $\lambda_1$  的最高项是  $c$ . 现在假设  $\lambda_1$  包含  $|\xi|$  的奇次幂, 且具有非零系数的最高项是  $a'_{2j-1}|\xi|^{-2j+1}$ , 其中  $j \in \mathbb{N}^+$ . 这意味着  $\lambda_1^2$  包含  $|\xi|$  的奇次幂, 且最高项是  $2ca'_{2j-1}|\xi|^{-2j+1}$ . 另外, 还已知  $\lambda_2 + \lambda_3$  的最高项是  $c'|\xi|^2$ , 则  $\lambda_1^2(\lambda_2 + \lambda_3)$  包含  $|\xi|$  的奇次幂, 在我们的假设下, 最高项是  $2cc'a'_{2j-1}|\xi|^{-2j+3}$ , 且它是非零的. 注意到 (3.9) 的右边包含  $|\xi|$  的奇次幂, 而最高项是  $(2\bar{\mu} + \bar{\nu})\kappa_2a'_{2j-1}|\xi|^{-2j+5}$ , 得出矛盾. 因此,  $\lambda_1$  只包含  $|\xi|$  的偶次幂.

事实上, 已知  $\lambda_2 + \lambda_3$  只包含  $|\xi|$  的偶次幂, 则有  $b'_{2j-1} = -\tilde{b}'_{2j-1}$ , 其中  $j \in \mathbb{N}$ . 此外, 我们发现

$$\lambda_2\lambda_3 = -\frac{\alpha_1\kappa_1|\xi|^4}{\lambda_1}. \quad (3.10)$$

当  $2\bar{\mu} + \bar{\nu} \neq \kappa_2$  时, 注意到 (3.10) 的右边只包含  $|\xi|$  的偶次幂. 已知  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  的最高项分别是  $-(2\bar{\mu} + \bar{\nu})|\xi|^2$  和  $-\kappa_2|\xi|^2$ . 现在假设  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  包含  $|\xi|$  的偶次幂, 并且具有非零系数的最高项分别是  $b'_{2j+1}|\xi|^{-2j+1}$  和  $-\tilde{b}'_{2j+1}|\xi|^{-2j+1}$ . 则  $\lambda_2\lambda_3$  包含  $|\xi|$  的奇次项, 在我们的假设下, 最高项是  $(2\bar{\mu} + \bar{\nu} - \kappa_2)b'_{2j+1}|\xi|^{-2j+3}$ , 且它是非零的. 然而, 如上文所述,  $\lambda_2\lambda_3$  只包含  $|\xi|$  的偶次幂, 从而得出矛盾. 因此,  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  只包含  $|\xi|$  的偶次幂. 当  $2\bar{\mu} + \bar{\nu} = \kappa_2$  时, 由

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = (2\bar{\mu} + \bar{\nu})\kappa_2|\xi|^4 + \alpha_1\alpha_2|\xi|^2, \quad (3.11)$$

推断出 (3.11) 的左边关于  $|\xi|^2$  的非零系数是  $\frac{2\alpha_1\kappa_1}{\kappa_2} - (b'_{-1})^2 - \kappa_2(b'_0 + \tilde{b}'_0)$ , 则有  $\frac{2\alpha_1\kappa_1}{\kappa_2} - (b'_{-1})^2 - \kappa_2(b'_0 + \tilde{b}'_0) = \alpha_1\alpha_2$ . 若假设  $\lambda_2 = \lambda_3$ , 则有  $b'_{-1} = \tilde{b}'_{-1} = 0$ ,  $b'_0 = \tilde{b}'_0 = \frac{\alpha_1\kappa_1}{2(2\bar{\mu} + \bar{\nu})\kappa_2}$ . 通过简单的计算, 对  $\gamma > 1$ , 有

$$\frac{2\alpha_1\kappa_1}{\kappa_2} - (b'_{-1})^2 - \kappa_2(b'_0 + \tilde{b}'_0) = \frac{\alpha_1\kappa_1}{\kappa_2} = \frac{\bar{E}}{\bar{\rho}} \neq \frac{\gamma\bar{E}}{\bar{\rho}} = \alpha_2,$$

得出矛盾. 最后, 得到  $\lambda_2 \neq \lambda_3$ , 从而完成了该引理的证明.  $\square$

为简单起见, 首先讨论  $\bar{\mu} \neq \frac{\kappa_1}{\alpha_2}$  的情形. 对  $|\xi| \leq r_1$ , 利用上述两个引理和投影  $P_i(\xi)$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) 的定义, 推导出

$$P_0(\xi) = P_0^{(0)}(\xi) + R_0(\xi), \quad P_0^{(0)}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{kl} - \frac{\xi_k \xi_l}{|\xi|^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{5 \times 5}, \quad (3.12)$$

$$P_1(\xi) = P_1^{(0)}(\xi) + R_1(\xi), \quad P_1^{(0)}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & c_{1l}^{(0)} i \xi^t & -\frac{1}{\alpha_2} \\ -\frac{\kappa_1}{\alpha_2} i \xi & c_{kl}^{(0)} \xi_k \xi_l & c_{k5}^{(0)} i \xi \\ c_{51}^{(0)} |\xi|^2 & c_{5l}^{(0)} i \xi^t & c_{55}^{(0)} |\xi|^2 \end{pmatrix}_{5 \times 5}, \quad (3.13)$$

$$P_2(\xi) = P_2^{(0)}(\xi) + R_2(\xi), \quad P_2^{(0)}(\xi) = \begin{pmatrix} -\frac{\kappa_1 i |\xi|}{2\alpha_2 \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} & -\frac{\xi^t}{2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} |\xi|} & \frac{1}{2\alpha_2} \\ \frac{\kappa_1 i \xi}{2\alpha_2} & \frac{\xi_k \xi_l}{2|\xi|^2} & -\frac{\alpha_1 \xi}{2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} |\xi|} \\ -\frac{\kappa_1 i |\xi|}{2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} & -\frac{\alpha_2 \xi^t}{2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} |\xi|} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{5 \times 5}, \quad (3.14)$$

$$P_3(\xi) = P_3^{(0)}(\xi) + R_3(\xi), \quad P_3^{(0)}(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\kappa_1 i |\xi|}{2\alpha_2 \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} & \frac{\xi^t}{2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} |\xi|} & \frac{1}{2\alpha_2} \\ \frac{\kappa_1 i \xi}{2\alpha_2} & \frac{\xi_k \xi_l}{2|\xi|^2} & \frac{\alpha_1 \xi}{2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} |\xi|} \\ \frac{\kappa_1 i |\xi|}{2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} & \frac{\alpha_2 \xi^t}{2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} |\xi|} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{5 \times 5}, \quad (3.15)$$

其中

$$\begin{aligned} c_{1l}^{(0)} &= \frac{(\bar{\mu} + \bar{\nu})(\kappa_2 - \frac{\kappa_1}{\alpha_2})}{\alpha_1 \alpha_2 \bar{\mu} - \alpha_1 \kappa_1} - \frac{(2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2 - \frac{\kappa_1}{\alpha_2})^2}{4(\alpha_1 \alpha_2 \bar{\mu} - \alpha_1 \kappa_1)}, \\ c_{kl}^{(0)} &= \frac{(2\bar{\mu} + \bar{\nu})(\kappa_2 - \frac{\kappa_1}{\alpha_2})}{\alpha_1 \alpha_2 \bar{\mu} - \alpha_1 \kappa_1} - \frac{(2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2 - \frac{\kappa_1}{\alpha_2})^2}{4(\alpha_1 \alpha_2 \bar{\mu} - \alpha_1 \kappa_1)}, \\ c_{k5}^{(0)} &= \frac{\alpha_1(\bar{\mu} + \bar{\nu})(\kappa_2 - \frac{\kappa_1}{\alpha_2})}{\alpha_1 \alpha_2 \bar{\mu} - \alpha_1 \kappa_1} + \frac{\kappa_2}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1(2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2 - \frac{\kappa_1}{\alpha_2})^2}{4(\alpha_1 \alpha_2 \bar{\mu} - \alpha_1 \kappa_1)}, \\ c_{51}^{(0)} &= \frac{\kappa_1(\bar{\mu} - \kappa_2)(2\bar{\mu} + \bar{\nu} - \frac{\kappa_1}{\alpha_2})}{\alpha_1 \alpha_2 \bar{\mu} - \alpha_1 \kappa_1} + \frac{\kappa_1(2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2 - \frac{\kappa_1}{\alpha_2})^2}{4(\alpha_1 \alpha_2 \bar{\mu} - \alpha_1 \kappa_1)}, \\ c_{5l}^{(0)} &= \frac{(\alpha_2 \kappa_2 - \kappa_1)(2\bar{\mu} + \bar{\nu} - \frac{\kappa_1}{\alpha_2})}{\alpha_1 \alpha_2 \bar{\mu} - \alpha_1 \kappa_1} - \frac{\alpha_2(2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2 - \frac{\kappa_1}{\alpha_2})^2}{4(\alpha_1 \alpha_2 \bar{\mu} - \alpha_1 \kappa_1)}, \end{aligned}$$

$k, l = 2, 3, 4$ ,  $c_{i'j'}^{(0)}$  为实数 ( $i', j' = 1, 2, 3, 4, 5$ ),  $R_i(\xi)$  是比主导项  $P_i^{(0)}(\xi)$  关于  $|\xi|$  更高阶的剩余矩阵.

对  $|\xi| > r_1$ , 推导出

$$P_0(\xi) = P_0^{(0)}(\xi) + R_0(\xi), \quad P_0^{(0)}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{kl} - \frac{c_{kl}^{(0)} \xi_k \xi_l}{|\xi|^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{5 \times 5}, \quad (3.16)$$

$$P_1(\xi) = P_1^{(0)}(\xi) + R_1(\xi), \quad P_1^{(0)}(\xi) = \begin{pmatrix} c_{11}^{(1)} & \frac{c_{1l}^{(1)} i \xi^t}{|\xi|^2} & \frac{c_{15}^{(1)}}{|\xi|^2} \\ \frac{c_{k1}^{(1)} i \xi}{|\xi|^2} & \frac{c_{kl}^{(1)} \xi_k \xi_l}{|\xi|^4} & \frac{c_{k5}^{(1)} i \xi}{|\xi|^2} \\ c_{51}^{(1)} & \frac{c_{5l}^{(1)} i \xi^t}{|\xi|^2} & \frac{c_{55}^{(1)}}{|\xi|^2} \end{pmatrix}_{5 \times 5}, \quad (3.17)$$

$$P_2(\xi) = P_2^{(0)}(\xi) + R_2(\xi), \quad P_2^{(0)}(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{c_{11}^{(2)}}{|\xi|^2} & \frac{c_{1l}^{(2)} i \xi^t}{|\xi|^2} & \frac{c_{15}^{(2)}}{|\xi|^2} \\ \frac{c_{k1}^{(2)} i \xi}{|\xi|^2} & \frac{c_{kl}^{(2)} \xi_k \xi_l}{|\xi|^2} & \frac{c_{k5}^{(2)} i \xi}{|\xi|^2} \\ c_{51}^{(2)} & \frac{c_{5l}^{(2)} i \xi^t}{|\xi|^2} & \frac{c_{55}^{(2)}}{|\xi|^2} \end{pmatrix}_{5 \times 5}, \quad (3.18)$$

$$P_3(\xi) = P_3^{(0)}(\xi) + R_3(\xi), \quad P_3^{(0)}(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{c_{11}^{(3)}}{|\xi|^2} & \frac{c_{1l}^{(3)} i \xi^t}{|\xi|^2} & \frac{c_{15}^{(3)}}{|\xi|^2} \\ \frac{c_{k1}^{(3)} i \xi}{|\xi|^2} & \frac{c_{kl}^{(3)} \xi_k \xi_l}{|\xi|^2} & \frac{c_{k5}^{(3)} i \xi}{|\xi|^2} \\ c_{51}^{(3)} & \frac{c_{5l}^{(3)} i \xi^t}{|\xi|^2} & c_{55}^{(3)} \end{pmatrix}_{5 \times 5}, \quad (3.19)$$

其中  $k, l = 2, 3, 4$ ,  $c_{i'j'}^{(i)}$  为实数 ( $i', j' = 1, 2, 3, 4, 5$ ),  $R_i(\xi)$  表示比主导项  $P_i^{(0)}(\xi)$  关于  $|\xi|$  更低阶的剩余矩阵.

**注 3.1** 事实上, 处理  $\bar{\mu} = \frac{\kappa_1}{\alpha_2}$  的情形更为简单. 若  $\bar{\mu} = \frac{\kappa_1}{\alpha_2}$ , 则  $\lambda_0 - \lambda_1 = O(\xi^4)$ . 因此, 只需稍微修改一下低频下  $P_1(\xi)$  的估计值. 更准确地说, 对  $|\xi| \leq r_1$ , 有

$$P_1(\xi) = P_1^{(0)}(\xi) + R_0(\xi), \quad P_1^{(0)}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\alpha_1 \alpha_2} i \xi^t & -\frac{1}{\alpha_2} \\ -\frac{\kappa_1}{\alpha_2} i \xi & O(1) & \frac{\kappa_1}{\alpha_2} i \xi \\ O(1) & O(|\xi|^2) & O(|\xi|^2) \end{pmatrix}_{5 \times 5}.$$

根据以上的分析, 我们建立了半群  $S(t) = e^{tB}$  的 Fourier 模式  $e^{tA(\xi)}$  的预期衰减估计. 令

$$e^{tA(\xi)} = \begin{pmatrix} \widehat{N}(t) \\ \widehat{M}(t) \\ \widehat{Q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{N}_1(t) + \widehat{N}_2(t) \\ \widehat{M}_1(t) + \widehat{M}_2(t) \\ \widehat{Q}_1(t) + \widehat{Q}_2(t) \end{pmatrix},$$

其中  $(\cdot)_1 = \chi(\xi)(\cdot)$ ,  $(\cdot)_2 = (1 - \chi(\xi))(\cdot)$ ,  $\chi(\xi)$  表示一个光滑的截断函数, 定义如下:

$$\chi(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \leq R, \\ 0, & |\xi| \geq R + 1, \end{cases}$$

$R$  为某个正常数. 因此,  $(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E})$  的 Fourier 变换可以写为

$$\begin{aligned} \widehat{\tilde{n}}(t, \xi) &= \widehat{N}(t) \cdot \widehat{\tilde{U}}_0(\xi) = \widehat{N}_1(t) \cdot \widehat{\tilde{U}}_0(\xi) + \widehat{N}_2(t) \cdot \widehat{\tilde{U}}_0(\xi), \\ \widehat{\tilde{m}}(t, \xi) &= \widehat{M}(t) \cdot \widehat{\tilde{U}}_0(\xi) = \widehat{M}_1(t) \cdot \widehat{\tilde{U}}_0(\xi) + \widehat{M}_2(t) \cdot \widehat{\tilde{U}}_0(\xi), \\ \widehat{\tilde{E}}(t, \xi) &= \widehat{Q}(t) \cdot \widehat{\tilde{U}}_0(\xi) = \widehat{Q}_1(t) \cdot \widehat{\tilde{U}}_0(\xi) + \widehat{Q}_2(t) \cdot \widehat{\tilde{U}}_0(\xi). \end{aligned}$$

定义  $e^{tA(\xi)} = (a_{ij}(t, \xi))_{5 \times 5}$  如下:

$$\widehat{\mathbf{N}}(t) = \widehat{\mathbf{N}}(t, \xi) = (a_{11}(t, \xi) \quad \mathbf{0})_{1 \times 5},$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{N}}(t) &= \widehat{\mathcal{N}}(t, \xi) = (0 \quad a_{1l}(t, \xi) \quad 0)_{1 \times 5}, \quad l = 2, 3, 4, \\
\widehat{\mathfrak{N}}(t) &= \widehat{\mathfrak{N}}(t, \xi) = (\mathbf{0} \quad a_{15}(t, \xi))_{1 \times 5}, \\
\widehat{\mathcal{M}}(t) &= \widehat{\mathcal{M}}(t, \xi) = (a_{k1}(t, \xi) \quad \mathbf{0})_{3 \times 5}, \quad k = 2, 3, 4, \\
\widehat{\mathcal{M}}(t) &= \widehat{\mathcal{M}}(t, \xi) = (\mathbf{0} \quad a_{kl}(t, \xi) \quad \mathbf{0})_{3 \times 5}, \quad k, l = 2, 3, 4, \\
\widehat{\mathfrak{M}}(t) &= \widehat{\mathfrak{M}}(t, \xi) = (\mathbf{0} \quad a_{k5}(t, \xi))_{3 \times 5}, \quad k = 2, 3, 4, \\
\widehat{\mathcal{Q}}(t) &= \widehat{\mathcal{Q}}(t, \xi) = (a_{51}(t, \xi) \quad \mathbf{0})_{1 \times 5}, \\
\widehat{\mathcal{Q}}(t) &= \widehat{\mathcal{Q}}(t, \xi) = (0 \quad a_{5l}(t, \xi) \quad 0)_{1 \times 5}, \quad l = 2, 3, 4, \\
\widehat{\mathfrak{Q}}(t) &= \widehat{\mathfrak{Q}}(t, \xi) = (\mathbf{0} \quad a_{55}(t, \xi))_{1 \times 5},
\end{aligned}$$

则  $(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E})$  的 Fourier 变换可以有如下的表达式:

$$\begin{aligned}
\widehat{\tilde{n}}(t, \xi) &= \widehat{N}(t) \cdot \widehat{\tilde{U}}_0(\xi) = \widehat{\mathcal{N}}(t) \cdot \widehat{\tilde{U}}_0(\xi) + \widehat{\mathfrak{N}}(t) \cdot \widehat{\tilde{U}}_0(\xi), \\
\widehat{\tilde{m}}(t, \xi) &= \widehat{M}(t) \cdot \widehat{\tilde{U}}_0(\xi) = \widehat{\mathcal{M}}(t) \cdot \widehat{\tilde{U}}_0(\xi) + \widehat{\mathfrak{M}}(t) \cdot \widehat{\tilde{U}}_0(\xi), \\
\widehat{\tilde{E}}(t, \xi) &= \widehat{Q}(t) \cdot \widehat{\tilde{U}}_0(\xi) = \widehat{\mathcal{Q}}(t) \cdot \widehat{\tilde{U}}_0(\xi) + \widehat{\mathfrak{Q}}(t) \cdot \widehat{\tilde{U}}_0(\xi).
\end{aligned}$$

为了推导出  $L^2$  框架中解的大时间衰减率, 需要验证 Green 函数的 Fourier 变换在低频和高频下的近似. 由特征值的定义可知, 对任意  $i = 0, 1, 2, 3$ , 存在某些正常数  $c_1$ 、 $c_2$  和  $c_3$ , 使得对  $|\xi| \leq r_1$ , 有

$$-c_1|\xi|^2 \leq \operatorname{Re} \lambda_i(\xi) \leq -c_2|\xi|^2;$$

对  $|\xi| > r_1$ , 有

$$\operatorname{Re} \lambda_i(\xi) \leq -c_3.$$

因此, 对  $|\xi| \leq r_1$ , 得到

$$|\widehat{N}_1(t)| \leq C e^{-c_2|\xi|^2 t}, \quad |\widehat{M}_1(t)| \leq C e^{-c_2|\xi|^2 t}, \quad |\widehat{Q}_1(t)| \leq C e^{-c_2|\xi|^2 t};$$

对  $|\xi| > r_1$ , 得到

$$|\widehat{N}_2(t)| \leq C(1+t)^3 e^{-c_3 t}, \quad |\widehat{M}_2(t)| \leq C(1+t)^3 e^{-c_3 t}, \quad |\widehat{Q}_2(t)| \leq C(1+t)^3 e^{-c_3 t},$$

其中  $C$  是与时间无关的正常数.

此外, 针对  $|\xi| \leq r_1$  (更具体地, 讨论如下两种情形:  $\bar{\mu} = \frac{\kappa_1}{\alpha_2}$  和  $\bar{\mu} \neq \frac{\kappa_1}{\alpha_2}$ ) 和  $|\xi| > r_1$ , 我们分别推导出  $P_i(\xi) = P_i^{(0)}(\xi) + R_i(\xi)$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), 其中  $P_i^{(0)}(\xi)$  为主导项,  $R_i(\xi)$  在低频里表示比主导项关于  $|\xi|$  更高阶的剩余矩阵,  $R_i(\xi)$  在高频里表示比主导项关于  $|\xi|$  更低阶的剩余矩阵. 上文中已写出主导项  $P_i^{(0)}(\xi)$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) 在低频中的具体表达式 (3.12)–(3.15) 以及在高频中的具体表达式 (3.16)–(3.19). 不难发现, 投影算子  $P_i(\xi)$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) 有如下估计:

$$|P_i(\xi)| \leq C, \quad \forall |\xi| \geq 0,$$

为简单起见, 其中  $|\cdot|$  表示矩阵的模.

#### 4 线性化问题的 $L^2$ 估计

利用 Fourier 空间中的 Green 函数公式及其元素的渐近分析, 能够建立  $L^2$  的衰减估计. 首先, 研究线性化可压缩 Navier-Stokes-Fourier 方程组的初值问题的整体解的  $L^2$  衰减率.

**命题 4.1** 设  $U_0 = (n_0, m_0, E_0) \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap H^l(\mathbb{R}^3)$ , 其中  $l \geq 3$ , 则  $(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E})$  为线性化问题 (3.1) 的解, 且满足对任意  $0 \leq k \leq l$ , 有

$$\|\nabla^k(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E})(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}(\|U_0\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla^k U_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}), \quad \forall t \geq 0,$$

其中  $C$  是与时间无关的正常数.

**证明** 由  $\widehat{G}(t, \xi)$  的定义, 以及  $\widehat{N}_i(t)$ ,  $\widehat{M}_i(t)$  和  $\widehat{Q}_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ) 的估计, 得到如下关于空间导数的  $(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E})$  的  $L^2$  衰减率:

$$\begin{aligned} \|\nabla^k(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E})(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= \|(\widehat{\nabla^k \tilde{n}}, \widehat{\nabla^k \tilde{m}}, \widehat{\nabla^k \tilde{E}})(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &= \int_{|\xi| \leq r_1} |\xi|^{2k} |\widehat{(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E})}(t, \xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| \geq r_1} |\xi|^{2k} |\widehat{(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E})}(t, \xi)|^2 d\xi \\ &\lesssim \int_{|\xi| \leq r_1} e^{-2c_2|\xi|^2 t} |\xi|^{2k} |\widehat{U_0}|^2 d\xi + \int_{|\xi| \geq r_1} (1+t)^6 e^{-2c_3 t} |\xi|^{2k} |\widehat{U_0}|^2 d\xi \\ &\lesssim \|\widehat{U_0}\|_{L^\infty}^2 \int_{|\xi| \leq r_1} e^{-2c_2|\xi|^2 t} |\xi|^{2k} d\xi + (1+t)^6 e^{-2c_3 t} \int_{|\xi| \geq r_1} |\xi|^{2k} |\widehat{U_0}|^2 d\xi \\ &\lesssim (1+t)^{-\frac{3}{2}-k} (\|U_0\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\nabla^k U_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

从而完成了命题 4.1 的证明.  $\square$

值得注意的是, 上述推导出的  $L^2$  衰减率在一定的非退化条件下是最优的. 为了证明这一点, 下面研究线性化可压缩 Navier-Stokes-Fourier 方程组的全局解的  $L^2$  衰减率的下界.

**命题 4.2** 设  $U_0 = (n_0, m_0, E_0) \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap H^l(\mathbb{R}^3)$ , 其中  $l \geq 3$ , 若  $M_m = \int_{\mathbb{R}^3} m_0(x) dx$  和  $M_E = \int_{\mathbb{R}^3} E_0 dx$  不全为零, 则命题 4.1 给出的线性化问题 (3.1) 的解  $(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E})$  满足对任意  $0 \leq k \leq l$ , 当  $t$  足够大时, 有

$$\begin{aligned} C^{-1}(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}} &\leq \|\nabla^k \tilde{n}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}, \\ C^{-1}(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}} &\leq \|\nabla^k \tilde{m}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}, \\ C^{-1}(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}} &\leq \|\nabla^k \tilde{E}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}. \end{aligned}$$

若  $M_n = \int_{\mathbb{R}^3} n_0(x) dx \neq 0$ ,  $M_m = M_E = 0$ , 当  $t$  足够大时, 有

$$C^{-1}(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}} \leq \|\nabla^k \tilde{n}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}},$$

其中  $C$  是与时间无关的正常数.

**证明** 为简单起见, 只处理  $\bar{\mu} \neq \frac{\kappa_1}{\alpha_2}$  且  $k = 0$  的情形, 该证明同样可应用于  $\bar{\mu} = \frac{\kappa_1}{\alpha_2}$  (利用注 3.1) 和其他高阶导数 ( $1 \leq k \leq l$ ) 的情形. 首先, 对  $|\xi| \leq r_1$ , 定义  $P_i^{(0)} = P_i^{(0)} - R''_i$  和  $R'_i = R_i + R''_i$

( $i = 0, 1, 2, 3$ ), 其中  $P_i^{(0)}(\xi)$  只包含常量元素,  $\frac{\xi}{|\xi|}$ 、 $\frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2}$  和  $R'_i(\xi)$  表示比主导项  $P_i^{(0)}(\xi)$  关于  $|\xi|$  更高阶的剩余矩阵. 更具体地说, 对  $|\xi| \leq r_1$ , 有

$$|R'_i(\xi)| \leq C|\xi|.$$

因此, 对  $|\xi| \leq r_1$ , 得到

$$\widehat{n}(t, \xi) = \widehat{N}(t, \xi) \cdot \widehat{U}_0(\xi) = \sum_{i=0}^3 e^{\lambda_i t} [P_i^{(0)}(\xi)]^1 \cdot \widehat{U}_0(\xi) + \sum_{i=0}^3 e^{\lambda_i t} [R'_i(\xi)]^1 \cdot \widehat{U}_0(\xi) =: T_1 + T_2, \quad (4.1)$$

其中  $[P_i^{(0)}(\xi)]^1$  和  $[R'_i(\xi)]^1$  分别表示矩阵  $P_i^{(0)}(\xi)$  和  $R'_i(\xi)$  的第一行,

$$T_1 = e^{\lambda_1 t} \left( \widehat{n}_0 - \frac{1}{\alpha_2} \widehat{E}_0 \right) + \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} e^{at} \sin(bt) \frac{i\xi \cdot \widehat{m}_0}{|\xi|} + \frac{1}{\alpha_2} e^{at} \cos(bt) \widehat{E}_0,$$

$$T_2 \sim O(1)|\xi| e^{-c_2|\xi|^2 t} |\widehat{U}_0|,$$

$\lambda_1 = -\frac{\kappa_1}{\alpha_2} |\xi|^2 + O(|\xi|^4)$ ,  $a = -\frac{1}{2}(2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2 - \frac{\kappa_1}{\alpha_2})|\xi|^2 + O(|\xi|^4)$ ,  $b = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} |\xi| + O(|\xi|^3)$ . 由此得出

$$\partial_t \widehat{n}(t, \xi) = \partial_t T_1 + \partial_t T_2 =: T_3 + T_4, \quad \forall |\xi| \leq r_1, \quad (4.2)$$

其中

$$T_3 = -e^{at} \cos(bt) i\xi \cdot \widehat{m}_0 + \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} |\xi|}{\alpha_2} e^{at} \sin(bt) \widehat{E}_0,$$

$$T_4 \sim O(1)|\xi|^2 e^{-c_2|\xi|^2 t} |\widehat{U}_0|.$$

接下来, 将分三步逐一对  $\widehat{m}$ 、 $\widehat{E}$  和  $\widehat{n}$  进行估计.

**步骤 1** 估计  $\widehat{m}$ .

通过线性化问题 (3.1) 的第一个方程, 计算出

$$\begin{aligned} \|\widehat{m}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &\geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\xi \cdot \widehat{m}(t, \xi)|^2}{|\xi|^2} d\xi = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\partial_t \widehat{n}(t, \xi)|^2}{|\xi|^2} d\xi \\ &\geq \int_{|\xi| \leq r_1} \frac{|T_3 + T_4|^2}{|\xi|^2} d\xi \geq \int_{|\xi| \leq r_1} \frac{|T_3|^2}{2|\xi|^2} d\xi - \int_{|\xi| \leq r_1} \frac{|T_4|^2}{|\xi|^2} d\xi. \end{aligned}$$

简单的计算得到

$$\int_{|\xi| \leq r_1} \frac{|T_4|^2}{|\xi|^2} d\xi \lesssim \|\widehat{U}_0\|_{L^\infty}^2 \int_{|\xi| \leq r_1} e^{-2c_2|\xi|^2 t} |\xi|^2 d\xi \lesssim (1+t)^{-\frac{5}{2}} \|U_0\|_{L^1}^2.$$

因为  $m_0(x) \in L^1(\mathbb{R}^3)$  意味着  $\widehat{m}_0(\xi) \in C(\mathbb{R}^3)$ , 若  $\widehat{m}_0(0) = \int_{\mathbb{R}^3} m_0(x) dx \neq 0$ , 当  $\eta$  充分小时, 推导出  $\widehat{m}_0(\xi) \neq 0$ , 其中  $|\xi| \leq \eta \leq r_1$ . 同样的论证适用于  $\widehat{n}_0$  和  $\widehat{E}_0$ .

在  $M_m \neq 0$  且  $M_E \neq 0$  的情形下, 有

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \leq r_1} \frac{|T_3|^2}{|\xi|^2} d\xi &\geq \int_{|\xi| \leq \eta} e^{2at} \cos^2(bt) \frac{|\xi \cdot \widehat{m}_0(\xi)|^2}{|\xi|^2} d\xi + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \int_{|\xi| \leq \eta} e^{2at} \sin^2(bt) |\widehat{E}_0(\xi)|^2 d\xi \\ &\geq \frac{1}{6} M_m^2 \int_{|\xi| \leq \eta} e^{-2c_1|\xi|^2 t} \cos^2(bt) d\xi + \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} M_E^2 \int_{|\xi| \leq \eta} e^{-2c_1|\xi|^2 t} \sin^2(bt) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -C \int_{|\xi| \leq \eta} e^{-2c_2|\xi|^2 t} |\xi|^2 d\xi \\
& \geq C_1 \int_{|\xi| \leq \eta} e^{-2c_1|\xi|^2 t} d\xi - C \int_{|\xi| \leq \eta} e^{-2c_2|\xi|^2 t} |\xi|^2 d\xi =: I_1 - I_2.
\end{aligned}$$

直接计算可以得到

$$I_1 \geq C_1(1+t)^{-\frac{3}{2}}, \quad I_2 \lesssim (1+t)^{-\frac{5}{2}}.$$

在  $M_m \neq 0$  且  $M_E = 0$  的情形下, 有

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi| \leq r_1} |T_3|^2 d\xi & \geq \frac{1}{6} M_m^2 \int_{|\xi| \leq \eta} e^{-2c_1|\xi|^2 t} \cos^2(bt) d\xi \\
& \geq \frac{1}{7} M_m^2 t^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\eta\sqrt{t}} e^{-2c_1 r^2} \cos^2(\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} r \sqrt{t}) r^2 dr \\
& \geq \frac{1}{7} M_m^2 t^{-\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{[\frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \eta t}{\pi}] - 1} \int_{\frac{k\pi}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \sqrt{t}}}^{\frac{(k+1)\pi}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \sqrt{t}}} e^{-2c_1 r^2} \cos^2(\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} r \sqrt{t}) r^2 dr \\
& \geq \frac{1}{14} M_m^2 t^{-\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{[\frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \eta t}{\pi}] - 1} \int_{\frac{k\pi}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \sqrt{t}}}^{\frac{(k+1)\pi}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \sqrt{t}}} e^{-2c_1 r^2} r^2 dr \\
& \geq C_1(1+t)^{-\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

同样地, 在  $M_m = 0$  且  $M_E \neq 0$  的情形下, 也有

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi| \leq r_1} |T_3|^2 d\xi & \geq \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} M_E^2 \int_{|\xi| \leq \eta} e^{-2c_1|\xi|^2 t} \sin^2(bt) d\xi \\
& \geq C_1(1+t)^{-\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

综合上述估计, 得到  $\tilde{m}(t, x)$  的衰减率下界, 即, 若  $M_m \neq 0$  或  $M_E \neq 0$ , 当  $t$  足够大时, 有

$$\|\tilde{m}(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \|\widehat{\tilde{m}}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq C^{-1}(1+t)^{-\frac{3}{2}}. \quad (4.3)$$

**步骤 2** 估计  $\tilde{E}$ .

对于  $\tilde{E}$ , 根据线性化问题 (3.1) 的第二个方程, 我们得到

$$\begin{aligned}
|\widehat{\tilde{E}}(t, \xi)|^2 & \geq \frac{1}{\alpha_1^2 |\xi|^2} |\partial_t \widehat{\tilde{m}}(t, \xi) - (\bar{\mu}|\xi|^2 + (\bar{\mu} + \bar{\nu})\xi \otimes \xi) \widehat{\tilde{m}}(t, \xi)|^2 \\
& \geq \frac{1}{2\alpha_1^2 |\xi|^2} |\partial_t \widehat{\tilde{m}}(t, \xi)|^2 - \frac{1}{\alpha_1^2 |\xi|^2} |S_1|^2,
\end{aligned}$$

其中,

$$S_1 = (\bar{\mu}|\xi|^2 + (\bar{\mu} + \bar{\nu})\xi \otimes \xi) \widehat{\tilde{m}}(t, \xi).$$

同样地, 设  $\widehat{\tilde{m}} = (\widehat{\tilde{m}}_1, \widehat{\tilde{m}}_2, \widehat{\tilde{m}}_3)$ , 对  $|\xi| \leq r_1$ , 也有

$$\widehat{\tilde{m}}_k(t, \xi) = [\widehat{M}(t, \xi)]^k \cdot \widehat{U}_0(\xi) = \sum_{i=0}^3 e^{\lambda_i t} [P_i^{(0)}(\xi)]^{k+1} \cdot \widehat{U}_0(\xi) + \sum_{i=0}^3 e^{\lambda_i t} [R_i'(\xi)]^{k+1} \cdot \widehat{U}_0(\xi), \quad (4.4)$$

其中,  $k = 1, 2, 3$ ,  $[\widehat{M}(t, \xi)]^k$  表示矩阵  $\widehat{M}(t, \xi)$  的第  $k$  行,  $[P_i^{(0)}(\xi)]^{k+1}$  和  $[R'_i(\xi)]^{k+1}$  分别表示矩阵  $P_i^{(0)}(\xi)$  和  $R'_i(\xi)$  的第  $k+1$  行. 由此, 可以推导出

$$\partial_t \widehat{\widetilde{m}}(t, \xi) =: S_2 + S_3, \quad \forall |\xi| \leq r_1, \quad (4.5)$$

其中,

$$\begin{aligned} S_2 &= -\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} e^{at} \sin(bt) \frac{\xi(\xi \cdot \widehat{m}_0)}{|\xi|} + \alpha_1 e^{at} \cos(bt) i\xi \cdot \widehat{E}_0, \\ S_3 &\sim O(1)|\xi|^2 e^{-c_2|\xi|^2 t} |\widehat{U}_0|. \end{aligned}$$

因此,

$$\|\widehat{\widetilde{E}}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \frac{1}{4\alpha_1^2} \int_{|\xi| \leq r_1} \frac{|S_2|^2}{|\xi|^2} d\xi - \frac{1}{2\alpha_1^2} \int_{|\xi| \leq r_1} \frac{|S_3|^2}{|\xi|^2} d\xi - \frac{1}{\alpha_1^2} \int_{|\xi| \leq r_1} \frac{|S_1|^2}{|\xi|^2} d\xi =: J_1 - J_2 - J_3.$$

同样地, 若  $M_m \neq 0$  或  $M_E \neq 0$ , 可以得到

$$J_1 \geq C_2(1+t)^{-\frac{3}{2}} - C(1+t)^{-\frac{5}{2}}, \quad J_2 \lesssim (1+t)^{-\frac{5}{2}}, \quad J_3 \lesssim (1+t)^{-\frac{5}{2}}.$$

以上估计给出了  $\widetilde{E}(t, x)$  的衰减率下界, 即, 若  $M_m \neq 0$  或  $M_E \neq 0$ , 当  $t$  足够大时, 有

$$\|\widetilde{E}(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \|\widehat{\widetilde{E}}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq C^{-1}(1+t)^{-\frac{3}{2}}. \quad (4.6)$$

### 步骤 3 估计 $\widetilde{n}$ .

现在处理  $\widetilde{n}$ . 在这一步骤中, 我们将讨论以下两种情形: (1)  $M_m \neq 0$  或  $M_E \neq 0$ , (2)  $M_n \neq 0$  且  $M_m = 0 = M_E$ .

首先处理  $M_m \neq 0$  或  $M_E \neq 0$  的情形. 对  $|\xi| \leq r_1$ , 容易验证

$$\widehat{\widetilde{E}}(t, \xi) = \widehat{Q}(t, \xi) \cdot \widehat{U}_0(\xi) = \sum_{i=0}^3 e^{\lambda_i t} [P_i^{(0)}(\xi)]^5 \cdot \widehat{U}_0(\xi) + \sum_{i=0}^3 e^{\lambda_i t} [R'_i(\xi)]^5 \cdot \widehat{U}_0(\xi) =: P_1 + P_2, \quad (4.7)$$

其中,  $[P_i^{(0)}(\xi)]^5$  和  $[R'_i(\xi)]^5$  分别表示矩阵  $P_i^{(0)}(\xi)$  和  $R'_i(\xi)$  的第五行,

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} e^{at} \sin(bt) \frac{i\xi \cdot \widehat{m}_0}{|\xi|} + \frac{\alpha_2}{\alpha_2} e^{at} \cos(bt) \widehat{E}_0, \\ P_2 &\sim O(1)|\xi| e^{-c_2|\xi|^2 t} |\widehat{U}_0|. \end{aligned}$$

从现在开始, 为了阐述方便, 我们使用如下符号:

$$M_1 = M_n - \frac{M_E}{\alpha_2}, \quad M_2 = \frac{M_E}{\alpha_2}.$$

从 (4.1) 和 (4.7) 推断出

$$\widehat{\widetilde{n}}(t, \xi) - \frac{1}{\alpha_2} \widehat{\widetilde{E}}(t, \xi) = e^{\lambda_1 t} \left( \widehat{n}_0 - \frac{1}{\alpha_2} \widehat{E}_0 \right) + T_2 - \frac{1}{\alpha_2} P_2.$$

在  $M_1 = 0$  的情形下, 直接得到

$$\left\| \left( \widehat{n} - \frac{1}{\alpha_2} \widehat{E} \right) (t, x) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \lesssim (1+t)^{-\frac{5}{2}},$$

从而得到  $\tilde{n}(t, x)$  的衰减率下界. 当  $t$  足够大时, 有

$$\begin{aligned} \|\tilde{n}(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= \|\widehat{n}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &\geq \frac{1}{2\alpha_2} \|\widehat{E}(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \left\| \left( \widehat{n} - \frac{1}{\alpha_2} \widehat{E} \right) (t, x) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq C^{-1}(1+t)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

另一方面, 在  $M_1 \neq 0$  的情形下, 从 (4.1) 推断出

$$\|\widehat{n}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \int_{|\xi| \leq r_1} \frac{1}{2} |T_1|^2 d\xi - \int_{|\xi| \leq r_1} |T_2|^2 d\xi.$$

事实上, 显然有

$$\int_{|\xi| \leq r_1} |T_2|^2 d\xi \lesssim (1+t)^{-\frac{5}{2}}.$$

现在估计  $T_1$ .

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \leq r_1} |T_1|^2 d\xi &= \int_{|\xi| \leq r_1} \left| e^{\lambda_1 t} \left( \widehat{n}_0 - \frac{1}{\alpha_2} \widehat{E}_0 \right) + e^{at} \cos(bt) \frac{1}{\alpha_2} \widehat{E}_0 \right|^2 d\xi \\ &\quad + \int_{|\xi| \leq r_1} \left| \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} e^{at} \sin(bt) \frac{\xi \cdot \widehat{m}_0}{|\xi|} \right|^2 d\xi \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{|\xi| \leq r_1} |M_1 e^{\lambda_1 t} + M_2 e^{at} \cos(bt)|^2 d\xi - C(1+t)^{-\frac{5}{2}} \\ &\geq \frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} \int_0^{r_1 \sqrt{t}} |M_1 e^{-\frac{\kappa_1}{\alpha_2} r^2} + M_2 e^{-\frac{1}{2}(2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2 - \frac{\kappa_1}{\alpha_2}) r^2} \cos(\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} r \sqrt{t})|^2 r^2 dr \\ &\quad - C(1+t)^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

上述积分中使用了变量变换  $r = |\xi| \sqrt{t}$  和球坐标. 注意到当  $t > \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} r_1}$  时, 间隔时间  $[0, r_1 \sqrt{t}]$  大于  $\cos(\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} r \sqrt{t})$  的一个周期. 将区间  $[0, r_1 \sqrt{t}]$  分成  $I_p$  和  $I_n$  两部分, 使得

$$I_p = \{r \in [0, r_1 \sqrt{t}] : \cos(\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} r \sqrt{t}) \geq 0\}, \quad I_n = \{r \in [0, r_1 \sqrt{t}] : \cos(\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} r \sqrt{t}) < 0\}.$$

$I_p$  和  $I_n$  的长度至少为  $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} t}$ . 进一步, 利用余弦函数的性质, 当  $t$  足够大时,  $I_p$  和  $I_n$  的长度都非常接近  $\frac{1}{2} r_1 \sqrt{t}$ . 更准确地说, 有以下两种情形的计算.

在  $M_1 M_2 \geq 0$  的情形下, 有

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \leq r_1} |T_1|^2 d\xi &\geq \frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} \int_{I_p} |M_1 e^{-\frac{\kappa_1}{\alpha_2} r^2} + M_2 e^{-\frac{1}{2}(2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2 - \frac{\kappa_1}{\alpha_2}) r^2} \cos(\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} r \sqrt{t})|^2 r^2 dr - C(1+t)^{-\frac{5}{2}} \\ &\geq \frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} \int_{I_p} M_1^2 e^{-2\frac{\kappa_1}{\alpha_2} r^2} r^2 dr - C(1+t)^{-\frac{5}{2}} \\ &\geq C_3(1+t)^{-\frac{3}{2}} - C(1+t)^{-\frac{5}{2}}, \end{aligned}$$

而在  $M_1 M_2 < 0$  的情形下, 也有

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \leq r_1} |T_1|^2 d\xi &\geq \frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} \int_{I_n} |M_1 e^{-\frac{\kappa_1}{\alpha_2} r^2} + M_2 e^{-\frac{1}{2}(2\bar{\mu} + \bar{\nu} + \kappa_2 - \frac{\kappa_1}{\alpha_2}) r^2} \cos(\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} r \sqrt{t})|^2 r^2 dr - C(1+t)^{-\frac{5}{2}} \\ &\geq \frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} \int_{I_n} M_1^2 e^{-2\frac{\kappa_1}{\alpha_2} r^2} r^2 dr - C(1+t)^{-\frac{5}{2}} \\ &\geq C_3(1+t)^{-\frac{3}{2}} - C(1+t)^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

因此, 到目前为止, 我们得出了这样的结论: 若  $M_m \neq 0$  或  $M_E \neq 0$ , 当  $t$  足够大时, 有

$$\|\tilde{n}(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq C^{-1}(1+t)^{-\frac{3}{2}}. \quad (4.9)$$

最后, 考虑  $M_n \neq 0$  且  $M_m = 0 = M_E$  的情形. 从 (4.1) 可以发现

$$\int_{|\xi| \leq r_1} |T_1|^2 d\xi \geq \frac{1}{2} M_n^2 \int_{|\xi| \leq r_1} e^{2\lambda_1 t} d\xi - C(1+t)^{-\frac{5}{2}} \geq C_3(1+t)^{-\frac{3}{2}} - C(1+t)^{-\frac{5}{2}}.$$

综合以上所有估计, 得到  $\tilde{n}(t, x)$  的衰减率下界. 当  $t$  足够大时, 有

$$\|\tilde{n}(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \|\widehat{\tilde{n}}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq C^{-1}(1+t)^{-\frac{3}{2}}. \quad (4.10)$$

由此得到命题 4.2. □

## 5 非线性方程组的 $L^2$ 估计

本节将证明定理 1.1 关于非线性可压缩 Navier-Stokes-Fourier 方程组的初值问题的全局解的精确时间衰减率. 设  $n_h = n - \tilde{n}$ ,  $m_h = m - \tilde{m}$ ,  $E_h = E - \tilde{E}$  为如下问题的解:

$$\begin{cases} \partial_t n_h + \operatorname{div} m_h = 0, \\ \partial_t m_h + \alpha_1 \nabla E_h - \bar{\mu} \Delta m_h - (\bar{\mu} + \bar{\nu}) \nabla \operatorname{div} m_h = F, \\ \partial_t E_h + \alpha_2 \operatorname{div} m_h + \kappa_1 \Delta n_h - \kappa_2 \Delta E_h = G, \\ (n_h, m_h, E_h)|_{t=0} = (0, 0, 0), \end{cases} \quad (5.1)$$

其中,  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$ ,  $\bar{\mu} = \frac{\mu}{\bar{\rho}}$ ,  $\bar{\nu} = \frac{\nu}{\bar{\rho}}$ ,  $\alpha_1 = \gamma - 1$ ,  $\alpha_2 = \frac{\gamma \bar{E}}{\bar{\rho}}$ ,  $\kappa_1 = \frac{\kappa \bar{E}}{C_\nu \bar{\rho}^2}$ ,  $\kappa_2 = \frac{\kappa}{C_\nu \bar{\rho}}$  以及

$$\begin{aligned} F &= -\operatorname{div} \left[ \frac{(m_h + \tilde{m}) \otimes (m_h + \tilde{m})}{n_h + \tilde{n} + \bar{\rho}} + \bar{\mu} \nabla \left( \frac{(n_h + \tilde{n})(m_h + \tilde{m})}{n_h + \tilde{n} + \bar{\rho}} \right) \right] \\ &\quad - \nabla \left[ (\bar{\mu} + \bar{\nu}) \operatorname{div} \left( \frac{(n_h + \tilde{n})(m_h + \tilde{m})}{n_h + \tilde{n} + \bar{\rho}} \right) - \frac{\alpha_1}{2} \frac{|m_h + \tilde{m}|^2}{n_h + \tilde{n} + \bar{\rho}} \right], \\ G &= -\operatorname{div} \left[ \gamma \frac{(E_h + \tilde{E})(m_h + \tilde{m})}{n_h + \tilde{n} + \bar{\rho}} - \alpha_2 \frac{(n_h + \tilde{n})(m_h + \tilde{m})}{n_h + \tilde{n} + \bar{\rho}} - \frac{\alpha_1}{2} \frac{(m_h + \tilde{m})|m_h + \tilde{m}|^2}{(n_h + \tilde{n} + \bar{\rho})^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(m_h + \tilde{m}) \cdot T}{n_h + \tilde{n} + \bar{\rho}} + \kappa_2 \nabla \left( \frac{(n_h + \tilde{n})(E_h + \tilde{E})}{n_h + \tilde{n} + \bar{\rho}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa}{2C_\nu} \nabla \left( \frac{|m_h + \tilde{m}|^2}{(n_h + \tilde{n} + \bar{\rho})^2} \right) - \kappa_1 \nabla \left( \frac{(n_h + \tilde{n})^2}{n_h + \tilde{n} + \bar{\rho}} \right) \right]. \end{aligned}$$

设  $U_h = (n_h, m_h, E_h)^t$ , 则问题 (5.1) 有如下等价向量形式:

$$\partial_t U_h(t, x) = BU_h(t, x) + H(t, x), \quad U_h(0, x) = (0, 0, 0)^t, \quad \forall t \geq 0,$$

其中非线性项不妨记为  $H(\tilde{U}, U_h) = (0, F(\tilde{U}, U_h), 0)^t + (0, 0, G(\tilde{U}, U_h))^t = H_1(\tilde{U}, U_h) + H_2(\tilde{U}, U_h)$ . 因此, 可以用半群表示解:

$$U_h(t, x) = S(t) * U_h(0, x) + \int_0^t S(t - \tau) * H(\tilde{U}, U_h)(\tau) d\tau, \quad \forall t \geq 0.$$

由此, 将解  $(n_h, m_h, E_h)$  逐项写为

$$n_h = \int_0^t \mathcal{N}(t - \tau) * H_1(\tau) d\tau + \int_0^t \mathfrak{N}(t - \tau) * H_2(\tau) d\tau, \quad (5.2)$$

$$m_h = \int_0^t \mathcal{M}(t - \tau) * H_1(\tau) d\tau + \int_0^t \mathfrak{M}(t - \tau) * H_2(\tau) d\tau, \quad (5.3)$$

$$E_h = \int_0^t \mathcal{Q}(t - \tau) * H_1(\tau) d\tau + \int_0^t \mathfrak{Q}(t - \tau) * H_2(\tau) d\tau. \quad (5.4)$$

根据  $\hat{\mathcal{N}}, \hat{\mathcal{M}}, \hat{\mathcal{Q}}, \hat{\mathfrak{N}}, \hat{\mathfrak{M}}$  和  $\hat{\mathfrak{Q}}$  的定义, 存在某些正常数  $c, c'$  和  $R$ , 使得

$$\begin{aligned} |\hat{\mathcal{N}}|, |\hat{\mathcal{M}}|, |\hat{\mathcal{Q}}|, |\hat{\mathfrak{N}}|, |\hat{\mathfrak{M}}|, |\hat{\mathfrak{Q}}| &\sim O(1)e^{-c|\xi|^2 t}, \quad \forall |\xi| \leq r_1, \\ |\hat{\mathcal{N}}|, |\hat{\mathcal{M}}|, |\hat{\mathcal{Q}}|, |\hat{\mathfrak{N}}|, |\hat{\mathfrak{M}}|, |\hat{\mathfrak{Q}}| &\sim O(1)\frac{1}{|\xi|}e^{-Rt} + O(1)e^{-c'|\xi|^2 t}, \quad \forall |\xi| > r_1. \end{aligned}$$

应用与命题 4.1 证明中类似的论证, 对任意非负整数  $k$ , 推断出

$$\begin{aligned} \|\nabla^k(\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathcal{Q}) * H_1(t)\|_{L^2} &\leq C(1+t)^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}}(\|\mathcal{H}_1\|_{L^q} + \|\nabla^{k+1}\mathcal{H}_1\|_{L^2}), \\ \|\nabla^k(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}, \mathfrak{Q}) * H_2(t)\|_{L^2} &\leq C(1+t)^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}}(\|\mathcal{H}_2\|_{L^q} + \|\nabla^{k+1}\mathcal{H}_2\|_{L^2}), \\ \|\nabla^k(\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathcal{Q}) * H_1(t)\|_{L^2} &\leq C(1+t)^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}}(\|\mathcal{H}_1\|_{L^q} + \|\nabla^k\mathcal{H}_1\|_{L^2}), \\ \|\nabla^k(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}, \mathfrak{Q}) * H_2(t)\|_{L^2} &\leq C(1+t)^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}}(\|\mathcal{H}_2\|_{L^q} + \|\nabla^k\mathcal{H}_2\|_{L^2}), \end{aligned}$$

其中,  $q = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \left| \frac{(m_h + \tilde{m}) \otimes (m_h + \tilde{m})}{n_h + \tilde{n} + \bar{\rho}} + \bar{\mu} \nabla \left( \frac{(n_h + \tilde{n})(m_h + \tilde{m})}{n_h + \tilde{n} + \bar{\rho}} \right) \right| \\ &\quad + \left| (\bar{\mu} + \bar{\nu}) \operatorname{div} \left( \frac{(n_h + \tilde{n})(m_h + \tilde{m})}{n_h + \tilde{n} + \bar{\rho}} \right) - \frac{\alpha_1}{2} \frac{|m_h + \tilde{m}|^2}{n_h + \tilde{n} + \bar{\rho}} \right|, \\ \mathcal{H}_2 &= \left| -\gamma \frac{(E_h + \tilde{E})(m_h + \tilde{m})}{n_h + \tilde{n} + \bar{\rho}} + \alpha_2 \frac{(n_h + \tilde{n})(m_h + \tilde{m})}{n_h + \tilde{n} + \bar{\rho}} + \frac{\alpha_1}{2} \frac{(m_h + \tilde{m})|m_h + \tilde{m}|^2}{(n_h + \tilde{n} + \bar{\rho})^2} \right. \\ &\quad + \frac{(m_h + \tilde{m}) \cdot T}{n_h + \tilde{n} + \bar{\rho}} - \kappa_2 \nabla \left( \frac{(n_h + \tilde{n})(E_h + \tilde{E})}{n_h + \tilde{n} + \bar{\rho}} \right) \\ &\quad \left. - \frac{\kappa}{2C_\nu} \nabla \left( \frac{|m_h + \tilde{m}|^2}{(n_h + \tilde{n} + \bar{\rho})^2} \right) + \kappa_1 \nabla \left( \frac{(n_h + \tilde{n})^2}{n_h + \tilde{n} + \bar{\rho}} \right) \right|. \end{aligned}$$

在下面的命题中, 我们建立了  $(n_h, m_h, E_h)$  的更快的衰减率.

**命题 5.1** 在定理 1.1 的假设下, 问题 (5.1) 的解  $(n_h, m_h, E_h)$  满足

$$\begin{aligned}\|\nabla^k(n_h, m_h, E_h)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq C\delta_0^2(1+t)^{-\frac{5}{4}-\frac{k}{2}}, \quad k=0,1,2, \quad \forall t \geq 0, \\ \|\nabla^3(n_h, m_h, E_h)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq C\delta_0(1+t)^{-\frac{7}{4}}, \quad \forall t \geq 0,\end{aligned}$$

其中,  $C$  是与时间无关的正常数.

如下引理将在本节中反复使用.

**引理 5.1** 设  $r_1, r_2 > 0$  为实数, 则

$$\int_0^{\frac{t}{2}} (1+t-\tau)^{-r_1}(1+\tau)^{-r_2} d\tau \lesssim \begin{cases} (1+t)^{-r_1}, & \text{当 } r_2 > 1 \text{ 时,} \\ (1+t)^{-(r_1-\epsilon)}, & \text{当 } r_2 = 1 \text{ 时,} \\ (1+t)^{-(r_1+r_2-1)}, & \text{当 } r_2 < 1 \text{ 时,} \end{cases}$$

并且

$$\int_{\frac{t}{2}}^t (1+t-\tau)^{-r_1}(1+\tau)^{-r_2} d\tau \lesssim \begin{cases} (1+t)^{-r_2}, & \text{当 } r_1 > 1 \text{ 时,} \\ (1+t)^{-(r_2-\epsilon)}, & \text{当 } r_1 = 1 \text{ 时,} \\ (1+t)^{-(r_1+r_2-1)}, & \text{当 } r_1 < 1 \text{ 时,} \end{cases}$$

其中,  $0 < \epsilon < 1$  是小而固定的常数.

现在, 对足够小的  $\delta_0 > 0$ , 定义

$$\begin{aligned}\Lambda(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \left\{ \sum_{0 \leq k \leq 2} (1+s)^{\frac{5}{4}+\frac{k}{2}} \delta_0^{-\frac{3}{4}} \|\nabla^k(n_h, m_h, E_h)(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right. \\ \left. + (1+s)^{\frac{7}{4}} \|\nabla^3(n_h, m_h, E_h)(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right\}.\end{aligned}\tag{5.5}$$

我们将从  $\Lambda(t)$  的先验假设开始, 然后借助初始值的小性, 从而得到比这个先验假设更好的估计. 该证明的关键是如下命题.

**命题 5.2** 在定理 1.1 的假设下, 若存在时间  $T > 0$ , 使得

$$\Lambda(t) \leq \delta_0^{\frac{1}{2}}, \quad \forall t \in [0, T],\tag{5.6}$$

则有

$$\Lambda(t) \leq C\delta_0^{\frac{3}{4}}, \quad \forall t \in [0, T],$$

其中,  $C$  是与时间无关的正常数.

**证明** 命题 5.2 的证明包括以下三个步骤.

**步骤 1** 基本能量估计.

基于先验假设 (5.6), 容易验证

$$\|\mathcal{H}_1(\tilde{U}, U_h)\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \lesssim \|(\tilde{m}, m_h)\|_{L^2}^2 + \|(\tilde{n}, \tilde{m}, n_h, m_h)\|_{L^2} \|\nabla(\tilde{n}, \tilde{m}, n_h, m_h)\|_{L^2}$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim (1+t)^{-\frac{3}{2}}(\delta_0^2 + \delta_0^{\frac{3}{2}}\Lambda^2(t)), \\
\|\mathcal{H}_1(\tilde{U}, U_h)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\lesssim \|(\tilde{m}, m_h)\|_{L^\infty} \|(\tilde{m}, m_h)\|_{L^2} + \|(\tilde{n}, \tilde{m}, n_h, m_h)\|_{L^\infty} \|\nabla(\tilde{n}, \tilde{m}, n_h, m_h)\|_{L^2} \\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{9}{4}}(\delta_0^2 + \delta_0^{\frac{3}{2}}\Lambda^2(t)), \\
\|\mathcal{H}_2(\tilde{U}, U_h)\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} &\lesssim \|(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E}, n_h, m_h, E_h)\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \|(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E}, n_h, m_h, E_h)\|_{L^2} \|\nabla(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E}, n_h, m_h, E_h)\|_{L^2} \\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{3}{2}}(\delta_0^2 + \delta_0^{\frac{3}{2}}\Lambda^2(t)), \\
\|\mathcal{H}_2(\tilde{U}, U_h)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\lesssim \|(\tilde{m}, m_h)\|_{L^\infty} \|(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E}, n_h, m_h, E_h)\|_{L^2} \\
&\quad + \|(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E}, n_h, m_h, E_h)\|_{L^\infty} \|\nabla(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E}, n_h, m_h, E_h)\|_{L^2} \\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{9}{4}}(\delta_0^2 + \delta_0^{\frac{3}{2}}\Lambda^2(t)), \\
\|\nabla\mathcal{H}_1(U, V)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\lesssim \|(\tilde{n}, \tilde{m}, n_h, m_h)\|_{L^\infty} (\|\nabla(\tilde{m}, m_h)\|_{L^2} + \|\nabla^2(\tilde{n}, \tilde{m}, n_h, m_h)\|_{L^2}) \\
&\quad + \|\nabla(\tilde{n}, n_h)\|_{L^\infty} \|\nabla(\tilde{m}, m_h)\|_{L^2} \\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{11}{4}}(\delta_0^2 + \delta_0^{\frac{9}{8}}\Lambda^2(t)), \\
\|\nabla\mathcal{H}_2(U, V)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\lesssim \|(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E}, n_h, m_h, E_h)\|_{L^\infty} (\|\nabla(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E}, n_h, m_h, E_h)\|_{L^2} \\
&\quad + \|\nabla^2(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E}, n_h, m_h, E_h)\|_{L^2}) \\
&\quad + \|\nabla(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E}, n_h, m_h, E_h)\|_{L^\infty} \|\nabla(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E}, n_h, m_h, E_h)\|_{L^2} \\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{11}{4}}(\delta_0^2 + \delta_0^{\frac{9}{8}}\Lambda^2(t)).
\end{aligned}$$

经过复杂但直接的计算, 有

$$\begin{aligned}
&\|(n_h, m_h, E_h)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\lesssim \int_0^t \|(\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathcal{Q})(t-\tau) * H_1(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\tau + \int_0^t \|(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}, \mathfrak{Q})(t-\tau) * H_2(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\tau \\
&\lesssim \int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{5}{4}} (\|\mathcal{H}_1(\tau)\|_{L^1} + \|\mathcal{H}_1(\tau)\|_{L^2} + \|\mathcal{H}_2(\tau)\|_{L^1} + \|\mathcal{H}_2(\tau)\|_{L^2}) d\tau \\
&\lesssim (\delta_0^2 + \delta_0^{\frac{3}{2}}\Lambda^2(t)) \int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{5}{4}} (1+\tau)^{-\frac{3}{2}} d\tau \\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{5}{4}} (\delta_0^2 + \delta_0^{\frac{3}{2}}\Lambda^2(t)), \quad \forall t \in [0, T].
\end{aligned} \tag{5.7}$$

类似地, 估计  $\nabla(n_h, m_h, E_h)$  如下:

$$\begin{aligned}
&\|\nabla(n_h, m_h, E_h)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\lesssim \int_0^{\frac{t}{2}} (\|\nabla(\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathcal{Q})(t-\tau) * H_1(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}, \mathfrak{Q})(t-\tau) * H_2(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}) d\tau \\
&\quad + \int_{\frac{t}{2}}^t (\|(\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathcal{Q})(t-\tau) * \nabla H_1(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}, \mathfrak{Q})(t-\tau) * \nabla H_2(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}) d\tau \\
&\lesssim \int_0^{\frac{t}{2}} (1+t-\tau)^{-\frac{7}{4}} (\|\mathcal{H}_1(\tau)\|_{L^1} + \|\nabla\mathcal{H}_1(\tau)\|_{L^2} + \|\mathcal{H}_2(\tau)\|_{L^1} + \|\nabla\mathcal{H}_2(\tau)\|_{L^2}) d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{t}{2}}^t (1+t-\tau)^{-\frac{1}{2}} (\|\nabla \mathcal{H}_1(\tau)\|_{L^2} + \|\nabla \mathcal{H}_2(\tau)\|_{L^2}) d\tau \\
& \lesssim (\delta_0^2 + \delta_0^{\frac{9}{8}} \Lambda^2(t)) \int_0^{\frac{t}{2}} (1+t-\tau)^{-\frac{7}{4}} (1+\tau)^{-\frac{3}{2}} d\tau \\
& \quad + (\delta_0^2 + \delta_0^{\frac{9}{8}} \Lambda^2(t)) \int_{\frac{t}{2}}^t (1+t-\tau)^{-\frac{1}{2}} (1+\tau)^{-\frac{11}{4}} d\tau \\
& \lesssim (1+t)^{-\frac{7}{4}} (\delta_0^2 + \delta_0^{\frac{9}{8}} \Lambda^2(t)), \quad \forall t \in [0, T].
\end{aligned} \tag{5.8}$$

不难验证,

$$\begin{aligned}
& \|\nabla^2 \mathcal{H}_1(U, V)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
& \lesssim \|(\tilde{n}, \tilde{m}, n_h, m_h)\|_{L^\infty} (\|\nabla^2(\tilde{m}, m_h)\|_{L^2} + \|\nabla^3(\tilde{n}, \tilde{m}, n_h, m_h)\|_{L^2}) \\
& \quad + \|\nabla(\tilde{n}, \tilde{m}, n_h, m_h)\|_{L^\infty} (\|\nabla(\tilde{m}, m_h)\|_{L^2} + \|\nabla^2(\tilde{n}, \tilde{m}, n_h, m_h)\|_{L^2}) \\
& \lesssim (1+t)^{-\frac{3}{2}} (\delta_0 + \delta_0^{\frac{3}{4}} \Lambda(t)) \|\nabla^3(n_h, m_h)\|_{L^2} + (1+t)^{-\frac{13}{4}} (\delta_0^2 + \delta_0^{\frac{9}{8}} \Lambda^2(t)), \\
& \|\nabla^2 \mathcal{H}_2(U, V)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
& \lesssim \|(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E}, n_h, m_h, E_h)\|_{L^\infty} (\|\nabla^2(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E}, n_h, m_h, E_h)\|_{L^2} + \|\nabla^3(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E}, n_h, m_h, E_h)\|_{L^2}) \\
& \quad + \|\nabla(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E}, n_h, m_h, E_h)\|_{L^\infty} (\|\nabla(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E}, n_h, m_h, E_h)\|_{L^2} + \|\nabla^2(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{E}, n_h, m_h, E_h)\|_{L^2}) \\
& \lesssim (1+t)^{-\frac{3}{2}} (\delta_0 + \delta_0^{\frac{3}{4}} \Lambda(t)) \|\nabla^3(n_h, m_h, E_h)\|_{L^2} + (1+t)^{-\frac{13}{4}} (\delta_0^2 + \delta_0^{\frac{9}{8}} \Lambda^2(t)).
\end{aligned}$$

沿着同样的思路, 经过多次计算, 有

$$\begin{aligned}
& \|\nabla^2(n_h, m_h, E_h)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
& \lesssim \int_0^{\frac{t}{2}} (\|\nabla^2(\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathcal{Q})(t-\tau) * H_1(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla^2(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}, \mathfrak{Q})(t-\tau) * H_2(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}) d\tau \\
& \quad + \int_{\frac{t}{2}}^t (\|(\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathcal{Q})(t-\tau) * \nabla^2 H_1(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}, \mathfrak{Q})(t-\tau) * \nabla^2 H_2(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}) d\tau \\
& \lesssim \int_0^{\frac{t}{2}} (1+t-\tau)^{-\frac{9}{4}} (\|\mathcal{H}_1(\tau)\|_{L^1} + \|\nabla^2 \mathcal{H}_1(\tau)\|_{L^2} + \|\mathcal{H}_2(\tau)\|_{L^1} + \|\nabla^2 \mathcal{H}_2(\tau)\|_{L^2}) d\tau \\
& \quad + \int_{\frac{t}{2}}^t (1+t-\tau)^{-\frac{1}{2}} (\|\nabla^2 \mathcal{H}_1(\tau)\|_{L^2} + \|\nabla^2 \mathcal{H}_2(\tau)\|_{L^2}) d\tau \\
& \lesssim (\delta_0^2 + \delta_0^{\frac{9}{8}} \Lambda^2(t)) \left( \int_0^{\frac{t}{2}} (1+t-\tau)^{-\frac{9}{4}} (1+\tau)^{-\frac{3}{2}} d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^t (1+t-\tau)^{-\frac{1}{2}} (1+\tau)^{-\frac{13}{4}} d\tau \right) \\
& \quad + (\delta_0 + \delta_0^{\frac{3}{4}} \Lambda(t)) \int_{\frac{t}{2}}^t (1+t-\tau)^{-\frac{1}{2}} (1+\tau)^{-\frac{3}{2}} \|\nabla^3(n_h, m_h, E_h)(\tau)\|_{L^2} d\tau \\
& \lesssim (1+t)^{-\frac{9}{4}} (\delta_0^2 + \delta_0^{\frac{9}{8}} \Lambda^2(t)) + (\delta_0 \Lambda(t) + \delta_0^{\frac{3}{4}} \Lambda^2(t)) \int_{\frac{t}{2}}^t (1+t-\tau)^{-\frac{1}{2}} (1+\tau)^{-\frac{13}{4}} d\tau \\
& \lesssim (1+t)^{-\frac{9}{4}} (\delta_0^2 + \delta_0 \Lambda(t) + \delta_0^{\frac{3}{4}} \Lambda^2(t)), \quad \forall t \in [0, T].
\end{aligned} \tag{5.9}$$

**步骤 2** 最高阶能量估计.

为了封闭先验估计和证明命题 5.2, 需要证明最高阶导数的  $(n_h, m_h, E_h)$  的衰减率. 由 (2.10) 知, 存在某些正常数  $C_1$  和  $C_2$ , 使得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 u \cdot \nabla^3 n dx + C_1 \|\nabla^3 n\|_{L^2}^2 dx \\ & \leq C_2 (\|\nabla^3(u, q)\|_{L^2}^2 + \|\nabla^4 u\|_{L^2}^2) + C(1+t)^{-\frac{3}{2}} (\delta_0 + \delta_0^{\frac{3}{8}} \Lambda(t)) (\|\nabla^2(n, u, q)\|_{L^2}^2 + \|\nabla^3 u\|_{L^2}^2). \end{aligned} \quad (5.10)$$

利用 (2.5) 和 (2.6), 容易得到存在某个正常数  $C_3$ , 使得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{R_1}{\bar{\rho}} \|\nabla^2 n\|_{H^1}^2 + \|\nabla^2 u\|_{H^1}^2 + \frac{R}{R_2} \|\nabla^2 q\|_{H^1}^2 \right) + C_3 (\|\nabla^3 u\|_{H^1}^2 + \|\nabla^3 q\|_{H^1}^2) \\ & \leq C(1+t)^{-\frac{3}{2}} (\delta_0 + \delta_0^{\frac{3}{8}} \Lambda(t)) (\|\nabla^2(n, u, q)\|_{L^2}^2 + \|\nabla^3(n, u, q)\|_{L^2}^2). \end{aligned} \quad (5.11)$$

将 (5.10) 乘以  $\frac{\epsilon_1 C_3}{C_2}$  与 (5.11) 相加, 令  $\epsilon_1 > 0$  适当地小, 从而推断出存在某个正常数  $C_4$ , 使得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{R_1}{\bar{\rho}} \|\nabla^2 n\|_{H^1}^2 + \|\nabla^2 u\|_{H^1}^2 + \frac{R}{R_2} \|\nabla^2 q\|_{H^1}^2 + \frac{\epsilon_1 C_3}{C_2} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 u \cdot \nabla^3 n dx \right) \\ & + C_4 (\|\nabla^3 n\|_{L^2}^2 + \|\nabla^3 u\|_{H^1}^2 + \|\nabla^3 q\|_{H^1}^2) \\ & \leq C(1+t)^{-\frac{3}{2}} \|\nabla^2(n, u, q)\|_{L^2}^2 (\delta_0 + \delta_0^{\frac{3}{8}} \Lambda(t)). \end{aligned}$$

接下来, 定义  $\mathcal{E}_1(t)$  为  $C_4^{-1}$  乘以上述不等式中时间导数下的表达式. 注意到由于  $\epsilon_1 > 0$  充分小, 则存在正常数  $C_5$ , 使得

$$C_5^{-1} (\|\nabla^2 n\|_{H^1}^2 + \|\nabla^2 u\|_{H^1}^2 + \|\nabla^2 q\|_{H^1}^2) \leq \mathcal{E}_1(t) \leq C_5 (\|\nabla^2 n\|_{H^1}^2 + \|\nabla^2 u\|_{H^1}^2 + \|\nabla^2 q\|_{H^1}^2).$$

因此,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_1(t) + \|\nabla^3 n\|_{L^2}^2 + \|\nabla^3 u\|_{H^1}^2 + \|\nabla^3 q\|_{H^1}^2 \lesssim (1+t)^{-5} (\delta_0 + \delta_0^{\frac{3}{8}} \Lambda(t)) (\delta_0^2 + \delta_0^{\frac{3}{2}} \Lambda^2(t)). \quad (5.12)$$

定义  $S(t) = \{\xi \mid |\xi| \leq \sqrt{3(1 + \frac{R_1}{\bar{\rho}} + \frac{R}{R_2})} (1+t)^{-\frac{1}{2}}\}$ , 其中与时间相关的子域是一个  $n$  维球体. 该分解允许我们得到  $L^2$  的衰减估计与  $(\hat{n}, \hat{u}, \hat{q})$  在  $\xi \in S(t)$  取值的依赖关系, 即

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \|\nabla^3(n, u, q)(x)\|_{L^2(\mathbb{R}_x^3)}^2 \\ & \geq \frac{1}{3} \int_{S(t)^c} |\xi|^6 |(\hat{n}, \hat{u}, \hat{q})(\xi)|^2 d\xi \\ & \geq \left(1 + \frac{R_1}{\bar{\rho}} + \frac{R}{R_2}\right) (1+t)^{-1} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^4 |(\hat{n}, \hat{u}, \hat{q})(\xi)|^2 d\xi - \int_{S(t)} |\xi|^4 |(\hat{n}, \hat{u}, \hat{q})(\xi)|^2 d\xi \right). \end{aligned} \quad (5.13)$$

由 (5.12) 和 (5.13) 得到

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \mathcal{E}_1(t) + (1+t)^{-1} \mathcal{E}_1(t) + \frac{1}{3} (\|\nabla^3 n\|_{L^2}^2 + \|\nabla^3 u\|_{H^1}^2 + \|\nabla^3 q\|_{H^1}^2) \\ & \lesssim (1+t)^{-5} (\delta_0 + \delta_0^{\frac{3}{8}} \Lambda(t)) (\delta_0^2 + \delta_0^{\frac{3}{2}} \Lambda^2(t)) \\ & \quad + (1+t)^{-1} \int_{S(t)} |\xi|^4 |(\hat{n}, \hat{u}, \hat{q})(\xi)|^2 d\xi + (1+t)^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 u \cdot \nabla^3 n dx. \end{aligned}$$

两边同时乘以  $(1+t)^{\frac{9}{2}}$ , 则存在正常数  $C_6$ , 使得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}((1+t)^{\frac{9}{2}}\mathcal{E}_1(t)) + C_6(1+t)^{\frac{9}{2}}(\|\nabla^3 n\|_{L^2}^2 + \|\nabla^3 u\|_{H^1}^2 + \|\nabla^3 q\|_{H^1}^2) \\ & \lesssim (1+t)^{-\frac{1}{2}}(\delta_0 + \delta_0^{\frac{3}{2}}\Lambda(t))(\delta_0^2 + \delta_0^{\frac{3}{2}}\Lambda^2(t)) + (1+t)^{\frac{7}{2}}\|(\nabla^2 n, \nabla^2 u, \nabla^2 q)\|_{L^2}^2 \\ & \lesssim \delta_0^2 + \delta_0^{\frac{3}{2}}\Lambda^2(t). \end{aligned}$$

直接关于时间积分, 推导出

$$\begin{aligned} & (1+t)^{\frac{9}{2}}\mathcal{E}_1(t) + C_6 \int_0^t (1+s)^{\frac{9}{2}}(\|\nabla^3 n(s)\|_{L^2}^2 + \|\nabla^3 u(s)\|_{H^1}^2 + \|\nabla^3 q(s)\|_{H^1}^2) ds \\ & \lesssim \mathcal{E}_1(0) + (1+t)(\delta_0^2 + \delta_0^{\frac{3}{2}}\Lambda^2(t)). \end{aligned}$$

最终, 有

$$\begin{aligned} & \|\nabla^2 n(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\nabla^2 u(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\nabla^2 q(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2 \\ & \leq C_5 \mathcal{E}_1(t) \\ & \lesssim \delta_0^2(1+t)^{-\frac{9}{2}} + (1+t)^{-\frac{7}{2}}(\delta_0^2 + \delta_0^{\frac{3}{2}}\Lambda^2(t)), \end{aligned}$$

这意味着

$$\|\nabla^3(n_h, m_h, E_h)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \lesssim (1+t)^{-\frac{7}{4}}(\delta_0 + \delta_0^{\frac{3}{4}}\Lambda(t)), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.14)$$

**步骤 3** 封闭能量估计.

在先验假设 (5.6) 下, 我们证明了 (5.7)–(5.9) 和 (5.14), 证实了若 (5.6) 对所有  $t \in [0, T]$  成立, 则

$$\Lambda(t) \leq C(\delta_0 + \delta_0^{\frac{1}{4}}\Lambda(t) + \Lambda^2(t)) \leq C\delta_0^{\frac{3}{4}} \quad (5.15)$$

对所有  $t \in [0, T]$  也成立, 从而完成了命题 5.2 的证明.  $\square$

借助局部适定性理论、标准的连续性论证方法、命题 5.2 和  $\delta_0 > 0$  的小性, 我们证明了对任意  $t \geq 0$ , 有  $\Lambda(t) \leq C\delta_0^{\frac{3}{4}}$ . 此外, 从 (5.7)–(5.9)、(5.14) 和 (5.15) 推导出  $(n_h, m_h, E_h)$  的衰减估计:

$$\begin{aligned} & \|(n_h, m_h, E_h)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \lesssim \delta_0^2(1+t)^{-\frac{5}{4}}, \quad \forall t \geq 0, \\ & \|\nabla(n_h, m_h, E_h)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \lesssim \delta_0^2(1+t)^{-\frac{7}{4}}, \quad \forall t \geq 0, \\ & \|\nabla^2(n_h, m_h, E_h)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \lesssim \delta_0^{\frac{7}{4}}(1+t)^{-\frac{9}{4}}, \quad \forall t \geq 0, \\ & \|\nabla^3(n_h, m_h, E_h)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \lesssim \delta_0(1+t)^{-\frac{7}{4}}, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

因此, 对任意  $t \geq 0$ , 有

$$\Lambda(t) \leq C\delta_0. \quad (5.16)$$

再次利用 (5.9) 和 (5.16), 得出

$$\|\nabla^2(n_h, m_h, E_h)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \lesssim \delta_0^2(1+t)^{-\frac{9}{4}}, \quad \forall t \geq 0.$$

至此, 完成了命题 5.1 的证明. 于是定理 1.1 成立.

## 参考文献

- 1 Chen Y, Pan R, Tong L. The sharp time decay rate of the isentropic Navier-Stokes system in  $\mathbb{R}^3$ . *Electron Res Arch*, 2021, 29: 1945–1967
- 2 Deckelnick K. Decay estimates for the compressible Navier-Stokes equations in unbounded domains. *Math Z*, 1992, 209: 115–130
- 3 Deckelnick K.  $L^2$  decay for the compressible Navier-Stokes equations in unbounded domains. *Comm Partial Differential Equations*, 1993, 18: 1445–1476
- 4 Duan R, Liu H, Ukai S, et al. Optimal  $L^p$ - $L^q$  convergence rates for the compressible Navier-Stokes equations with potential force. *J Differential Equations*, 2007, 238: 220–233
- 5 Duan R, Ukai S, Yang T, et al. Optimal convergence rates for the compressible Navier-Stokes equations with potential forces. *Math Models Methods Appl Sci*, 2007, 17: 737–758
- 6 Guo Y, Wang Y. Decay of dissipative equations and negative Sobolev spaces. *Comm Partial Differential Equations*, 2012, 37: 2165–2208
- 7 Hoff D, Zumbrun K. Multi-dimensional diffusion waves for the Navier-Stokes equations of compressible flow. *Indiana Univ Math J*, 1995, 44: 603–676
- 8 Hoff D, Zumbrun K. Pointwise decay estimates for multidimensional Navier-Stokes diffusion waves. *Z Angew Math Phys*, 1997, 48: 597–614
- 9 Kagei Y, Kawashima S. Stability of planar stationary solutions to the compressible Navier-Stokes equation on the half space. *Comm Math Phys*, 2006, 266: 401–430
- 10 Kagei Y, Kobayashi T. On large-time behavior of solutions to the compressible Navier-Stokes equations in the half space in  $\mathbb{R}^3$ . *Arch Ration Mech Anal*, 2002, 165: 89–159
- 11 Kagei Y, Kobayashi T. Asymptotic behavior of solutions of the compressible Navier-Stokes equations on the half space. *Arch Ration Mech Anal*, 2005, 177: 231–330
- 12 Kobayashi T. Some estimates of solutions for the equations of motion of compressible viscous fluid in the three-dimensional exterior domain. *J Differential Equations*, 2002, 184: 587–619
- 13 Kobayashi T, Shibata Y. Decay estimates of solutions for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive gases in an exterior domain in  $\mathbb{R}^3$ . *Comm Math Phys*, 1999, 200: 621–659
- 14 Li H, Matsumura A, Zhang G. Optimal decay rate of the compressible Navier-Stokes-Poisson system in  $\mathbb{R}^3$ . *Arch Ration Mech Anal*, 2010, 196: 681–713
- 15 Liu T, Wang W. The pointwise estimates of diffusion wave for the Navier-Stokes systems in odd multi-dimensions. *Comm Math Phys*, 1998, 196: 145–173
- 16 Liu T, Zeng Y. Large Time Behavior of Solutions for General Quasilinear Hyperbolic-Parabolic Systems of Conservation Laws. *Memoirs of the American Mathematical Society*, no. 599. Providence: Amer Math Soc, 1997
- 17 Matsumura A. An energy method for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids. *MRC Technical Summary Report 2194*, 1981
- 18 Matsumura A, Nishida T. The initial value problem for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids. *Proc Japan Acad Ser A Math Sci*, 1979, 55: 337–342
- 19 Matsumura A, Nishida T. The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases. *J Math Kyoto Univ*, 1980, 20: 67–104
- 20 Matsumura A, Nishida T. Initial-boundary value problems for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids. *Comm Math Phys*, 1983, 89: 445–464
- 21 Ponce G. Global existence of small solutions to a class of nonlinear evolution equations. *Nonlinear Anal*, 1985, 9: 339–418
- 22 Schonbek M. Large time behaviour of solutions to the Navier-Stokes equations. *Comm Partial Differential Equations*, 1986, 11: 733–763
- 23 Schonbek M. Lower bounds of rates of decay for solutions to the Navier-Stokes equations. *J Amer Math Soc*, 1991, 4: 423–449
- 24 Shibata Y, Tanaka K. On the steady flow of compressible viscous fluid and its stability with respect to initial disturbance. *J Math Soc Japan*, 2003, 55: 797–826

- 25 Shibata Y, Tanaka K. Rate of convergence of non-stationary flow to the steady flow of compressible viscous fluid. *Comput Math Appl*, 2007, 53: 605–623
- 26 Zeng Y.  $L^1$  asymptotic behavior of compressible, isentropic, viscous 1-D flow. *Comm Pure Appl Math*, 1994, 47: 1053–1082
- 27 Zhang G, Li H, Zhu C. Optimal decay rate of the non-isentropic compressible Navier-Stokes-Poisson system in  $\mathbb{R}^3$ . *J Differential Equations*, 2011, 250: 866–891

## The sharp time decay rate of the three-dimensional compressible Navier-Stokes-Fourier system

Yuhui Chen & Ronghua Pan

**Abstract** In this paper, we are concerned with the sharp time decay rate of the solution  $U(t, x)$  for the compressible Navier-Stokes-Fourier system for  $x \in \mathbb{R}^3$  to the constant steady state  $\bar{U} = (\bar{\rho} > 0, 0, \bar{\theta} > 0)$  when the initial data are small smooth perturbations near  $\bar{U}$ . This is achieved by proving that  $U(t, x)$  shares the same decay rate with  $\tilde{U}(t, x)$ , the solution to the corresponding linearized problem for the evolution of the initial perturbation. Under a mild non-degenerate condition on the initial perturbations, we show that the  $L^2$ -norm of  $U - \tilde{U}$  decays at least at the rate of  $(1+t)^{-\frac{5}{4}}$ , which is faster than the rate  $(1+t)^{-\frac{3}{4}}$  for  $\tilde{U}$ . Our method combines the linear sharp time decay rate (for both upper and lower bounds) obtained from the spectral analysis and the carefully designed energy method.

**Keywords** compressible Navier-Stokes-Fourier system, sharp decay rate, spectral analysis, energy method

**MSC(2020)** 35Q30, 35A01, 35B40

**doi:** 10.1360/SSM-2024-0108