



不可压缩两相冲击喷流的唯一性

何蕊岑, 王永富*

西南财经大学数学学院, 教育部哲学社会科学实验室 - 西南财经大学金融安全与行为大数据实验室, 成都 611130

E-mail: 2956387067@qq.com, wangyf@swufe.edu.cn

收稿日期: 2026-01-25; 接受日期: 2026-04-03; 网络出版日期: 2026-04-29; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12171394)、四川省自然科学基金 (批准号: 2025ZNSFSC0069) 和四川省科技计划 (批准号: 2025ZYD0157) 资助项目

摘要 在两相冲击喷流问题的研究中, Du 和 Wang (2017 和 2021) 通过变分法, 证明了二维和三维轴对称情形中不可压缩、无黏性两相冲击喷流问题解的存在性. 然而, 当速度在自由界面有非零跳跃时, 自由界面左右两侧的流体速度是不连续的, 在这种情形下解的唯一性目前尚未得到解决. 基于 Du 和 Wang (2017 和 2021) 的存在性结果, 本文证明当自由界面两侧的流速不连续时, 二维两相冲击喷流问题解的唯一性结果, 并给出解的渐近方向也是唯一确定的. 本文主要采用极值原理、移动平面法和 Hopf 引理来对椭圆方程和自由边界条件进行精细分析讨论.

关键词 唯一性 自由边界 两相冲击喷流 接触间断

MSC (2020) 主题分类 76B10, 76B03, 35Q31

1 引言

有关喷流和自由流线的数学理论引起了数学家们的广泛关注, 在诸多著作中都有体现, 如 Birkhoff 和 Zarantonello [10] 及 Wu [36] 和 Gurevich [31]. 他们对喷流问题的研究主要借助实验观察、速度图变换和共形映射理论. 然而, 这种方法会受到给定的喷嘴或障碍物的几何形状所限制. 1981 年, Alt 和 Caffarelli [1] 及 Alt 等 [2-7] 结合几何测度理论和变分法来研究线性椭圆方程及其自由边界. Friedman [27] 系统地介绍了变分法和自由边界相关问题. 进一步地, 他们还在文献 [7] 中介绍了带自由边界的两相流问题的研究框架, 这些都大大地推进了数学家们对各种物理结构中的自由流线问题的研究, 如轴对称喷流 [4]、非对称喷流 [2]、Laval 管道中的喷流 [19]、可压缩亚音速喷流 [8, 20]、带重力的喷流 [3]、冲击喷流 [14, 16, 17, 21]、槽道流体注入主流的双自由边界两相流 [15, 28]、两相冲击喷流 [23, 24] 以及其他自由流线问题 [9, 26, 29, 30, 32, 33, 35, 37]. 此外, Caffarelli [11-13] 建立了一套用于分析自由边界问题正则性理论的框架. 他运用单调性公式和 Harnack 不等式证明, 自由边界在平坦点附近是 Lipschitz 的, 且 Lipschitz 的自由边界具有 $C^{1,\alpha}$ 正则性.

英文引用格式: He R C, Wang Y F. The uniqueness of the two-phase incompressible collision jet flows (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 1-22, doi: 10.1360/SSM-2026-0019

目前, 关于自由流线问题的唯一性理论, 主要是利用移动平面法和比较引理, 再结合自由边界条件进行分析. Du 和 Zhao [25] 研究了将流体从槽道中注入的情形, 此问题中存在两个自由边界; 他们还研究了上游区域流体流动的渐近行为, 并证明了这个问题的唯一性结论. Du 和 Huang [22] 研究了两相不可压缩喷流的唯一性, 并证明了流体流出管道时形成的两个自由边界都是单调递增的. Du 和 Wang [23, 24] 研究了二维和三维不可压无黏的两相冲击喷流问题的数学理论, 并证明了流体连续地穿过自由界面时解的唯一性. 而二维不可压缩、无旋、无黏性、无限长管道中两相流的数学理论, 已经在文献 [34] 中给出, 此外它还证明了流体不连续地穿过自由界面时解的唯一性. 最后, 文献 [18] 对于不可压缩和可压缩的亚音速轴对称喷流问题均已建立了解的唯一性结果.

速度突变是工程与自然界中广泛存在的流体运动现象, 针对该场景下的两相冲击喷流问题, 本文系统开展了解的唯一性理论研究. 聚焦流体自由界面处的速度不连续的核心特征, 本文通过构建严格的数学分析框架, 深入研究该类问题的解唯一性理论, 拓展了文献 [23] 的结果. 本文研究的关键挑战在于分析可能发生缠绕的自由边界, 这受到非线性边界条件的约束和无穷远场的渐近行为所影响. 本文采用移动平面法结合极值原理来进行分析, 证明在固定参数的前提下, 解是唯一的. 此外, 本文还推导出解关于渐近方向也是唯一确定的.

本文基于文献 [23, 24] 的存在性结果而展开研究. 文献 [23] 证明了二维两相冲击喷流问题解的存在性. 文献 [24] 证明了三维轴对称两相冲击喷流问题的存在性结果. 在此基础上, 本文重点研究当流体速度在自由交界面上不连续、产生非零跳跃时解的唯一性问题.

接下来, 首先介绍两个半无限长管道 N_1 和 N_2 , 并对管道作一些假设.

- (1) 假设 N_1 和 N_2 分别代表两个管道的管道壁, $N_0 : \{y = 0\}$ 表示对称轴, 见图 1.
- (2) 记 $A_1 = (-1, a_1)$ 和 $A_2 = (1, a_2)$ 分别为两个管道 N_1 和 N_2 的端点, 不失一般性, 假设 $a_1 = a_2 \triangleq a$, 则 $A_1 = (-1, a)$, $A_2 = (1, a)$.
- (3) 假设 $i = 1, 2$, 两个管道 N_1 和 N_2 满足

$$N_i : x = g_i(y), \quad g_i(y) \in C^{2,\sigma}([h_i, a]), \quad (1.1)$$

这里 $0 < \sigma < 1$, $0 < h_i < a$, 且 $g_1(y)$ 和 $g_2(y)$ 满足

$$\text{当 } y \leq a \text{ 时, } g_1(y) < g_2(y); \quad \text{当 } y \in (h_i, a] \text{ 时, } |g_i(y)| < +\infty; \quad (1.2)$$

以及

$$g_i(a) = (-1)^i; \quad \text{当 } y \rightarrow h_i \text{ 时, } (-1)^i g_i(y) \rightarrow +\infty. \quad (1.3)$$

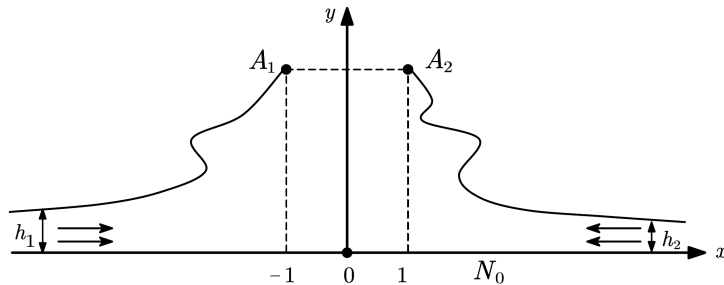


图 1 两个半无限长管道 N_1 和 N_2

1.1 冲击喷流的存在性结果

首先, 介绍一些符号, 并回顾具有两个自由边界的二维不可压缩无黏性两相冲击喷流问题及其已有研究结果.

(u_1, v_1, p_1, ρ_1) 和 (u_2, v_2, p_2, ρ_2) 表示两种不相溶、无黏性和无旋度的流体, 它们的密度分别是 ρ_1 和 ρ_2 , (u_i, v_i) 和 p_i 分别对应第 i ($i = 1, 2$) 种流体的速度场和压力. 它们以相反的方向从两个半无限长管道中喷出, 在碰撞时会形成一个自由交界面 Γ , Γ 将这两个不可压缩的流域分隔开. 此外, 用 A 表示曲线 Γ 与对称轴 N_0 之间的相交点. 当流体从管道口喷出并流向无穷远时, 会形成两条自由边界 Γ_1 和 Γ_2 , 见图 2.

现在, 将第一种流体 (u_1, v_1, p_1, ρ_1) 的流域记为 Ω_1 , 它由 N_1 , N_0 , Γ 和 Γ_1 所围成. 将第二种流体 (u_2, v_2, p_2, ρ_2) 的流域记为 Ω_2 , 它由 N_2 , N_0 , Γ 和 Γ_2 所围成. 定义 $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$, 则这两种流体满足以下二维不可压缩 Euler 方程组:

$$\begin{cases} \partial_x(\rho_i u_i) + \partial_y(\rho_i v_i) = 0, & \text{当 } (x, y) \in \Omega_i \text{ 时,} \\ \partial_x\left(u_i^2 + \frac{p_i}{\rho_i}\right) + \partial_y(u_i v_i) = 0, & \text{当 } (x, y) \in \Omega_i \text{ 时,} \\ \partial_x(u_i v_i) + \partial_y\left(v_i^2 + \frac{p_i}{\rho_i}\right) = 0, & \text{当 } (x, y) \in \Omega_i \text{ 时,} \end{cases} \quad (1.4)$$

并且满足无旋条件

$$\partial_x v_i - \partial_y u_i = 0,$$

其中 $i = 1, 2$. 接下来, 设

$$(u, v, p, \rho) = \begin{cases} (u_1, v_1, p_1, \rho_1), & \text{当 } (x, y) \in \Omega_1 \text{ 时,} \\ (u_2, v_2, p_2, \rho_2), & \text{当 } (x, y) \in \Omega_2 \text{ 时,} \end{cases}$$

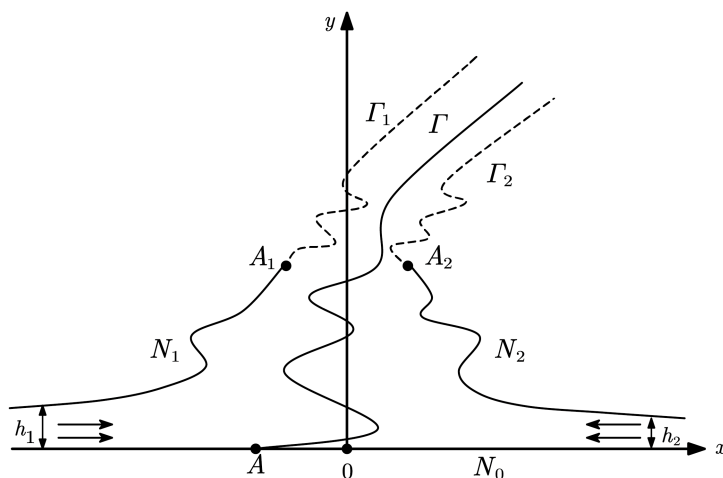


图 2 两相冲击喷流

分别为两相流的水平速度、垂直速度、压力和密度. 在固定管道壁 N_1 和 N_2 上, 两种流体满足滑移边界条件, 即有

$$(u_i, v_i) \cdot \vec{n}_i = 0 \quad \text{在 } N_i \text{ 上}, \quad (1.5)$$

其中 $\vec{n}_i$ 表示管道壁 N_i 的单位外法向量, 这里 $i = 1, 2$. 实际上, 由流体的对称性, 有

$$v = 0 \quad \text{在 } N_0 \text{ 上}. \quad (1.6)$$

此外, 从 Euler 方程组 (1.4) 可以得出两个流体都满足 Bernoulli 定律, 即

$$(u_i, v_i) \cdot \nabla \left(\frac{1}{2}(u_i^2 + v_i^2) + \frac{p_i}{\rho_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2.$$

由于自由边界 Γ_1 , Γ_2 和 Γ 都是流线, 所以有

$$\frac{\rho_1}{2}(u_1^2 + v_1^2) = \rho_1 B_1 - p_1 \quad \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}, \quad (1.7)$$

$$\frac{\rho_2}{2}(u_2^2 + v_2^2) = \rho_2 B_2 - p_2 \quad \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}, \quad (1.8)$$

以及

$$\frac{\rho_1}{2}(u_1^2 + v_1^2) = \rho_1 B_1 - p_1 \quad \text{和} \quad \frac{\rho_2}{2}(u_2^2 + v_2^2) = \rho_2 B_2 - p_2 \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上}. \quad (1.9)$$

此处 B_1 和 B_2 分别对应于第一种流体和第二种流体的 Bernoulli 常数.

接下来, 由于自由边界上的压力是连续的, 设大气压为 p_0 , 则有在 Γ_1 上 $p_1 = p_0$, 在 Γ_2 上 $p_2 = p_0$, 以及在 Γ 上 $p_1 = p_2$. 定义参数 $\lambda > 0$ 和 Λ , 根据 (1.7)–(1.9), 可以得出以下结论:

$$\frac{\rho_1}{2}(u_1^2 + v_1^2) = \rho_1 B_1 - p_0 \triangleq \frac{\Lambda + \lambda}{2} \quad \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}, \quad (1.10)$$

$$\frac{\rho_2}{2}(u_2^2 + v_2^2) = \rho_2 B_2 - p_0 \triangleq \frac{\lambda}{2} \quad \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}, \quad (1.11)$$

以及

$$\frac{\rho_1}{2}(u_1^2 + v_1^2) - \frac{\rho_2}{2}(u_2^2 + v_2^2) = \rho_1 B_1 - \rho_2 B_2 \triangleq \frac{\Lambda}{2} \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上}. \quad (1.12)$$

由于 ρ_1 和 ρ_2 是两个非零常数, 所以为了简化符号表示, 将两相流的解简写为 $(u, v, p, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma)$. 两相冲击喷流问题解的存在性定理叙述如下.

定理 1.1 (参见文献 [23, 定理 2.1] 和 [24, 定理 1.1]) 假设两个半无限长管道壁 N_1 和 N_2 满足条件 (1.1)–(1.3). 给定两个管道入口质量通量分别为 $m_1 > 0$ 和 $m_2 > 0$ 以及参数 $\Lambda \in (-\infty, +\infty)$, 则存在一个满足两相冲击喷流问题的解 $(u, v, p, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma)$, 并且对于 $i = 1, 2$, 解满足以下性质.

(1) $(u, v, p) \in (C^{1,\sigma}(\Omega \cup N_0) \cap C^0(\bar{\Omega}))^3$ ($0 < \sigma < 1$) 在流域 Ω (该流域由固定管道 N_i 、自由边界 Γ_i 和 N_0 所围成) 中满足不可压缩 Euler 方程组 (1.4), 且满足边界条件 (1.5), (1.6) 和 (1.10)–(1.12).

(2) 存在一对参数 $(\lambda, \mathbf{e})$ (其中 $\lambda > 0$, $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ 是单位向量且 $e_2 > 0$), 使得自由边界 $\Gamma_1 : x = f_1(y)$ 和 $\Gamma_2 : x = f_2(y)$ 都是 C^1 光滑的, 且当 $a \leq y < +\infty$ 时, 有 $f_2(y) > f_1(y)$. 此外, 自由边界还满

足连续连接条件和光滑连接条件:

$$f_1(a) = -1, \quad f_2(a) = 1 \quad (\text{连续连接条件}), \quad (1.13)$$

$$f'_1(a+0) = g'_1(a-0), \quad f'_2(a+0) = g'_2(a-0) \quad (\text{光滑连接条件}), \quad (1.14)$$

且存在两个常数 γ_1 和 γ_2 使得

$$f_1(y) \rightarrow y \cot \beta + \gamma_1 \quad \text{和} \quad f_2(y) \rightarrow y \cot \beta + \gamma_2, \quad \text{当 } y \rightarrow +\infty \text{ 时}, \quad (1.15)$$

其中 $\beta = \operatorname{arccot} \frac{e_1}{e_2} \in (0, \pi)$.

(3) 在 $\Omega \setminus (N_0 \cup \Gamma)$ 中垂直速度 $v > 0$, 存在一条光滑曲线 $\Gamma: x = f(y) \in C^1((0, +\infty))$ 且 $h = \lim_{y \rightarrow 0^+} f(y)$ 将两种流体分隔开, 并且在对称轴 N_0 上存在唯一的驻点 $(h, 0)$. 此外,

$$f(y) \rightarrow y \cot \beta + \gamma, \quad \text{当 } y \rightarrow +\infty \text{ 时}, \quad (1.16)$$

其中 $\gamma \in (\gamma_1, \gamma_2)$ 满足

$$\frac{m_1^2}{\rho_1(\gamma - \gamma_1)^2} - \frac{m_2^2}{\rho_2(\gamma - \gamma_2)^2} = \frac{\Lambda}{1 + \cot^2 \beta}.$$

在驻点 $(h, 0)$ 处, 自由界面 Γ 满足

$$f'(0+0) = \begin{cases} +\infty, & \text{当 } \Lambda > 0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } \Lambda = 0 \text{ 时}, \\ -\infty, & \text{当 } \Lambda < 0 \text{ 时}. \end{cases} \quad (1.17)$$

(4) 两相冲击喷流 (u, v, p) 在无限远场满足以下渐近行为:

(i) 当 $x \rightarrow -\infty$ 且 $y \in (0, h_1)$ 时, 有

$$(u(x, y), v(x, y), p(x, y)) \rightarrow \left(\frac{m_1}{\rho_1 h_1}, 0, B_1 \rho_1 - \frac{m_1^2}{2\rho_1 h_1^2} \right)$$

和

$$\nabla u \rightarrow 0, \quad \nabla v \rightarrow 0, \quad \nabla p \rightarrow 0;$$

(ii) 当 $x \rightarrow +\infty$ 且 $y \in (0, h_2)$ 时, 有

$$(u(x, y), v(x, y), p(x, y)) \rightarrow \left(-\frac{m_2}{\rho_2 h_2}, 0, B_2 \rho_2 - \frac{m_2^2}{2\rho_2 h_2^2} \right)$$

和

$$\nabla u \rightarrow 0, \quad \nabla v \rightarrow 0, \quad \nabla p \rightarrow 0;$$

(iii) 当 $y \rightarrow +\infty$ 时,

$$(u(x, y), v(x, y), p(x, y)) \rightarrow \left(\frac{m_1 \cos \beta}{\rho_1(\gamma - \gamma_1)}, \frac{m_1 \sin \beta}{\rho_1(\gamma - \gamma_1)}, B_1 \rho_1 - \frac{m_1^2}{2\rho_1(\gamma - \gamma_1)^2} \right)$$

在集合 $\{f_1(y) < x < f(y)\}$ 的任意紧子集中一致收敛;

(iv) 当 $y \rightarrow +\infty$ 时,

$$(u(x, y), v(x, y), p(x, y)) \rightarrow \left(\frac{m_2 \cos \beta}{\rho_2(\gamma_2 - \gamma)}, \frac{m_2 \sin \beta}{\rho_2(\gamma_2 - \gamma)}, B_2 \rho_2 - \frac{m_2^2}{2\rho_2(\gamma_2 - \gamma)^2} \right)$$

在集合 $\{f(y) < x < f_2(y)\}$ 的任意紧子集中一致收敛;

(v) 当 $y \rightarrow +\infty$ 时,

$$\nabla u \rightarrow 0, \quad \nabla v \rightarrow 0, \quad \nabla p \rightarrow 0$$

在集合 $\{f_1(y) < x < f(y)\} \cup \{f(y) < x < f_2(y)\}$ 的任意紧子集中一致收敛.

注 1.1 实际上, 当管道口的高度不一致 ($a_1 \neq a_2$), 且两个管道 N_1 和 N_2 依然满足上述假设时, 两相冲击喷流在无穷远处的渐近角度 $\beta \in (0, \arccos \frac{2}{a_2 - a_1})$, 定理 1.1 仍然成立.

1.2 主要结果

本文重点研究当流体在自由界面 Γ 左右两侧的速度不连续时, 两相冲击喷流问题解的唯一性.

定理 1.2 (两相冲击喷流问题的唯一性) (1) 若存在参数 $(\lambda, \mathbf{e})$ 使得连续连接条件 (1.13) 和光滑连接条件 (1.14) 成立, 则满足定理 1.1 中的两相冲击喷流是唯一的.

(2) 假设存在两组参数 $(\lambda, \mathbf{e})$ 和 $(\lambda, \tilde{\mathbf{e}})$ 使得连续连接条件 (1.13) 和光滑连接条件 (1.14) 成立, 则 $\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{e}}$.

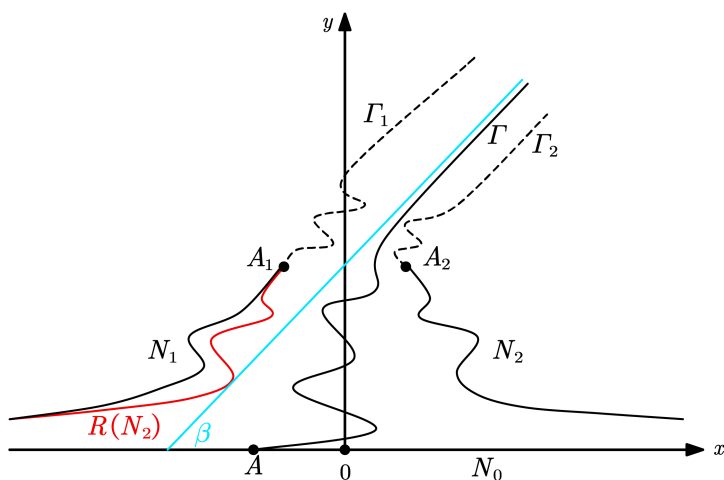
注 1.2 根据文献 [34, 命题 4.3] 和 (1.17), 可知当参数 $\Lambda \neq 0$ 时, 自由边界 Γ 与 N_0 在点 A 处相切, 这意味着当 $\Lambda \neq 0$ 时 $\Gamma \cup N_0$ 在点 $(h, 0)$ 的一个邻域内是 C^1 光滑的.

注 1.3 本文旨在建立当自由界面两侧的流速不连续时, 两相冲击喷流问题解的唯一性. 其证明过程依赖于通过移动平面法将原本可能缠绕的自由边界分离开, 然后通过极值原理结合自由边界条件进行进一步分析. 此外, 该问题存在三条自由边界, 其关键挑战在于分析这些非线性边界条件和流体在无穷远处的渐近行为. 据我们所知, 这是关于具有三条自由边界的两相冲击喷流问题的第一个唯一性结果.

接下来, 给出一个特殊的例子, 并对两相冲击喷流问题在无限远处的渐近角度范围进行估计. 具体地, 当 $h_1 = h_2$, $m_1 = m_2$ 且管道壁 N_2 关于 y 轴的反射位于管道壁 N_1 的右侧时, 下面定理表明此时渐近角度被限制在区间 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 中. 设 $(u^R, v^R, p^R, \Gamma_1^R, \Gamma, \Gamma_2^R)$ 为反射问题的解, 其中 $\Gamma^R: x = f^R(y)$.

定理 1.3 假设 $h_1 = h_2$, $m_1 = m_2$, $-f(y) \geq f^R(y)$, 且 $\int_0^y (\sqrt{\rho_i} u_i^R(x, s) + \sqrt{\rho_j} u_j^R(-x, s)) ds \leq 0$ ($i = 1, j = 2$ 或者 $i = 2, j = 1$), 用 $R(N_2)$ 表示管道壁 N_2 关于 y 轴的反射. 当 $R(N_2)$ 位于管道壁 N_1 的右侧时 (见图 3), 冲击喷流 $(u, v, p, \Gamma_1, \Gamma, \Gamma_2)$ 在无限远处的渐近角度 β 位于区间 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 中.

本文余下内容的结构安排如下. 第 2.1 小节首先引入流函数, 得到它满足的椭圆方程. 第 2.2 小节在给定参数 $(\lambda, \mathbf{e})$ 的前提下, 基于无限远处的渐近行为给出解的唯一性证明. 第 2.3 小节基于文献 [23, 24] 中关于冲击喷流在无限远处的渐近方向的单调性定理结果, 推导出二维两相冲击喷流的解关于渐近方向 $\mathbf{e}$ 的唯一性. 第 3 节给出管道壁 N_2 关于 y 轴的反射位于管道壁 N_1 的右侧时, 两相冲击喷流在无限远处的渐近角度 $\beta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 的证明.

图 3 (网络版彩图) 管道壁 N_2 关于 y 轴的反射 $R(N_2)$

2 两相冲击喷流问题解的唯一性

2.1 流函数表达式

根据 Euler 方程组 (1.4), 引入流函数 φ , 将 φ 定义为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \varphi^+(x, y), & \text{当 } (x, y) \in \Omega_1 \text{ 时,} \\ \varphi^-(x, y), & \text{当 } (x, y) \in \Omega_2 \text{ 时,} \end{cases}$$

其中

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\rho_1}} \frac{\partial \varphi^+}{\partial y}, \quad v_1 = -\frac{1}{\sqrt{\rho_1}} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \quad \text{在 } \Omega_1 \text{ 中,}$$

且

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{\rho_2}} \frac{\partial \varphi^-}{\partial y}, \quad v_2 = -\frac{1}{\sqrt{\rho_2}} \frac{\partial \varphi^-}{\partial x} \quad \text{在 } \Omega_2 \text{ 中.}$$

注 2.1 当参数 $\Lambda = 0$ 时, 解的唯一性理论已经在文献 [23] 中给出. 故不失一般性, 本文重点关注参数 $\Lambda > 0$ 时的情形. 实际上, 本文的方法和证明过程同样适用于参数 $\Lambda < 0$ 的情形.

假设两个管道中的质量通量分别为 $m_1, m_2 > 0$, 则根据 Euler 方程组 (1.4)、边界条件 (1.6) 和 (1.10)–(1.12), 有

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0, & \text{当 } (x, y) \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \text{ 时,} \\ \varphi = m_1, & \text{当 } (x, y) \in \Gamma_1 \cup N_1 \text{ 时,} \\ \varphi = -m_2, & \text{当 } (x, y) \in \Gamma_2 \cup N_2 \text{ 时,} \\ \varphi = 0, & \text{当 } (x, y) \in \Gamma \cup N_0 \text{ 时,} \\ |\nabla \varphi|^2 = \Lambda + \lambda, & \text{当 } (x, y) \in \Gamma_1 \text{ 时,} \\ |\nabla \varphi|^2 = \lambda, & \text{当 } (x, y) \in \Gamma_2 \text{ 时,} \\ |\nabla \varphi_+|^2 - |\nabla \varphi_-|^2 = \Lambda, & \text{当 } (x, y) \in \Gamma \text{ 时,} \end{cases}$$

其中 $\Lambda > 0$, $\lambda > 0$, $\varphi_+ := \max(\varphi, 0)$ 且 $\varphi_- := \max(-\varphi, 0)$.

在接下来的小节中, 用 $(\varphi, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma)$ 表示二维两相冲击喷流问题的解. 首先证明在固定参数 (λ, e) 的前提下, 二维两相冲击喷流问题的解是唯一存在的.

2.2 解 $(\varphi, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma)$ 的唯一性

对于任意的参数 (λ, e) , 假设二维两相冲击喷流存在两个不同的解 $(\varphi, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma)$ 和 $(\tilde{\varphi}, \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Gamma})$, 设 $\Gamma_i : x = f_i(y)$, $\tilde{\Gamma}_i : x = \tilde{f}_i(y)$, $\Gamma : x = f(y)$ 和 $\tilde{\Gamma} : x = \tilde{f}(y)$ 分别为它们的自由边界, 其中 $i = 1, 2$. 由连续连接条件知

$$f_1(a) = \tilde{f}_1(a) = g_1(a), \quad f_2(a) = \tilde{f}_2(a) = g_2(a).$$

由于解 φ 和 $\tilde{\varphi}$ 不同, 所以在区域 Ω 内至少存在一个点 (x, y) 使得 $\varphi(x, y) \neq \tilde{\varphi}(x, y)$. 由 (1.15) 和 (1.16) 可知, 当 $y \rightarrow +\infty$ 时, 对于 $i = 1, 2$, 有 $f_i(y) \rightarrow y \cot \beta + \gamma_i$, $\tilde{f}_i(y) \rightarrow y \cot \beta + \tilde{\gamma}_i$ 和 $f(y) \rightarrow y \cot \beta + \gamma$, $\tilde{f}(y) \rightarrow y \cot \beta + \tilde{\gamma}$ 成立.

第 1 步 证明对于任意给定的 (λ, e) , 如果 $\Gamma_1 = \tilde{\Gamma}_1$ 且 $\Gamma_2 = \tilde{\Gamma}_2$, 则 $\Gamma = \tilde{\Gamma}$. 这种情形等价于固定管道壁 N_1 和 N_2 是无限长的情形, 已经在文献 [34, 命题 6.1] 中给出了证明.

第 2 步 考虑一般情形 (见图 4), 即对于任意给定的参数 (λ, e) , 有 $(\varphi, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma) = (\tilde{\varphi}, \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Gamma})$. 若不然, 则有 $\varphi \neq \tilde{\varphi}$. 不失一般性, 假设 $\gamma_1 \geq \tilde{\gamma}_1$, 则有 $\gamma_2 \geq \tilde{\gamma}_2$ 和 $\gamma \geq \tilde{\gamma}$.

为了分离可能缠绕在一起的自由边界, 构造函数 $\varphi^\varepsilon(x, y) := \varphi(x - \varepsilon, y)$, 并定义集合 $\Sigma := \{\varepsilon \geq 0 \mid \varphi^\varepsilon(x, y) \geq \tilde{\varphi}(x, y) \text{ 在 } \Omega \text{ 中}\}$, 记 Γ_1^ε , Γ^ε 和 Γ_2^ε 为解 φ^ε 所对应的自由边界.

首先, 证明 $\Sigma \neq \emptyset$. 因为 φ 和 $\tilde{\varphi}$ 都是有界的, 所以存在一个足够大的常数 $\tilde{\varepsilon}$, 使得当 $\varepsilon \geq \tilde{\varepsilon}$ 时, 在 Ω 中有

$$\tilde{\varphi}(x, y) \leq \varphi^\varepsilon(x, y).$$

因此, 令 $\varepsilon_0 := \inf_{\varepsilon \in \Sigma} \varepsilon$, 则 ε_0 是使得 $\varphi^\varepsilon(x, y) \geq \tilde{\varphi}(x, y)$ 在 Ω 中成立的最小的 ε .

接下来, 证明在 $\bar{\Omega}$ 中至少存在一点 $X_0 = (x, y)$ 使得

$$\varphi^{\varepsilon_0}(X_0) = \tilde{\varphi}(X_0).$$

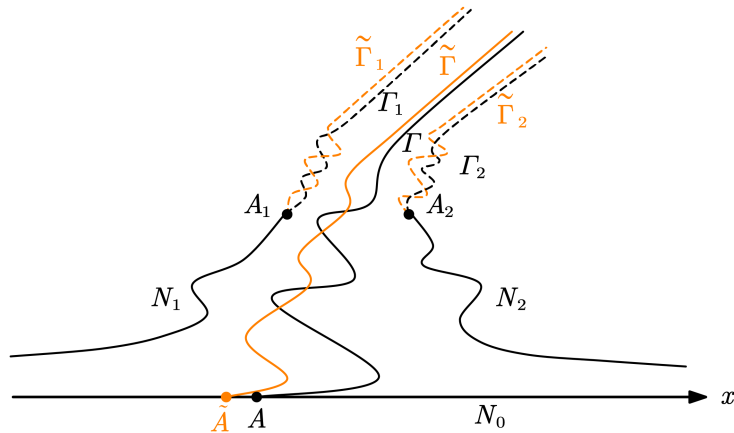


图 4 (网络版彩图) 固定参数 (λ, e) 时, φ 和 $\tilde{\varphi}$ 的自由边界

假设在 Ω 中 $\varphi^{\varepsilon_0}(x, y) > \tilde{\varphi}(x, y)$. 取 $d = \min_{(x, y) \in \Omega} (\varphi^{\varepsilon_0}(x, y) - \tilde{\varphi}(x, y)) > 0$, 并且令

$$\hat{\varepsilon} := \varepsilon_0 - \frac{d}{3} < \varepsilon_0,$$

则有

$$\varphi^{\hat{\varepsilon}}(x, y) \geq \tilde{\varphi}(x, y)$$

在 Ω 中成立, 这与 ε_0 的定义相矛盾.

最后, 证明 $X_0 \notin \Omega \cap \{-m_2 < \tilde{\varphi} \leq \varphi^{\varepsilon_0} < 0\}$ 且 $X_0 \notin \Omega \cap \{0 < \tilde{\varphi} \leq \varphi^{\varepsilon_0} < m_1\}$. 事实上, 假设 $X_0 \in \Omega \cap \{-m_2 < \tilde{\varphi} \leq \varphi^{\varepsilon_0} < 0\}$, 则

$$\begin{cases} \Delta(\varphi^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi}) = 0, & \text{当 } (x, y) \in \Omega \cap \{-m_2 < \tilde{\varphi} \leq \varphi^{\varepsilon_0} < 0\} \text{ 时,} \\ \varphi^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi} \geq 0, & \text{当 } (x, y) \in \Omega \cap \{-m_2 < \tilde{\varphi} \leq \varphi^{\varepsilon_0} < 0\} \text{ 时.} \end{cases}$$

如果 $X_0 \in \Omega \cap \{-m_2 < \tilde{\varphi} \leq \varphi^{\varepsilon_0} < 0\}$, 根据强极值原理, 在 X_0 的一个邻域内, 有 $\varphi^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi} \equiv 0$. 而由区域的连通性可以推导出在区域 $\Omega \cap \{-m_2 < \tilde{\varphi} \leq \varphi^{\varepsilon_0} < 0\}$ 中,

$$\varphi^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi} \equiv 0.$$

类似地, 可以证明 $X_0 \notin \Omega \cap \{0 < \tilde{\varphi} \leq \varphi^{\varepsilon_0} < m_1\}$.

情形 1 $\varepsilon_0 > 0$. 先讨论交点 X_0 的位置, 根据交点 X_0 不出现在区域内部而且 $|X_0| < +\infty$, 可知它有可能出现在 $\tilde{\Gamma}_1 \cap \Gamma_1^{\varepsilon_0}$, $\tilde{\Gamma} \cap \Gamma^{\varepsilon_0}$, $\tilde{\Gamma}_2 \cap \Gamma_2^{\varepsilon_0}$ 或者 A 上, 所以接下来讨论以下四种情形.

情形 1.1 $X_0 \in \Gamma_1^{\varepsilon_0} \cap \tilde{\Gamma}_1$ (见图 5). 考虑区域 $\Omega \cap \{0 < \varphi^{\varepsilon_0} < m_1\}$, 取 r 足够小, 则有

$$\begin{cases} \Delta(\varphi^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi}) = 0, & \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap \{0 < \varphi^{\varepsilon_0} < m_1\} \text{ 时,} \\ \varphi^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi} > 0, & \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap \{0 < \varphi^{\varepsilon_0} < m_1\} \text{ 时.} \end{cases}$$

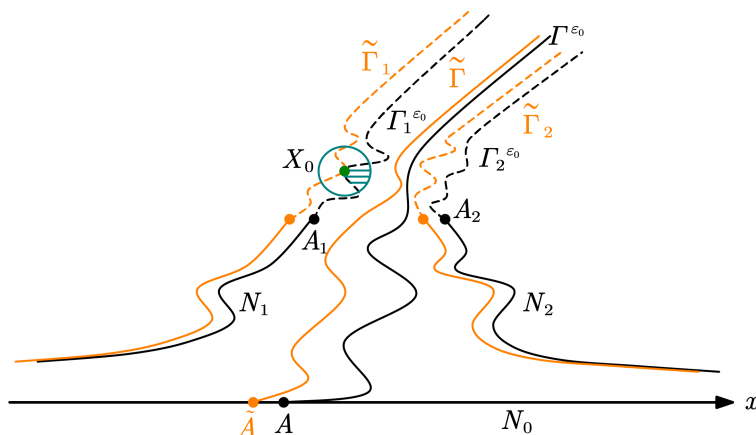


图 5 (网络版彩图) $X_0 \in \Gamma_1^{\varepsilon_0} \cap \tilde{\Gamma}_1$

根据 Hopf 引理, 可以得到

$$\frac{\partial(\varphi^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi})}{\partial \nu} < 0 \quad \text{在 } X_0 \text{ 处,}$$

其中 ν 是 $\Gamma_1^{\varepsilon_0}$ 在点 X_0 处的单位外法向量, 则

$$\sqrt{\Lambda + \lambda} = |\nabla \tilde{\varphi}| > |\nabla \varphi^{\varepsilon_0}| = \sqrt{\Lambda + \lambda} \quad \text{在 } X_0 \text{ 处,}$$

由此即可得到矛盾.

情形 1.2 $X_0 \in \Gamma^{\varepsilon_0} \cap \tilde{\Gamma}$ (见图 6). 考虑区域 $\Omega \cap \{-m_2 < \tilde{\varphi} \leq \varphi^{\varepsilon_0} < m_1\}$. 取 r 足够小, 则有

$$\varphi^{\varepsilon_0} > \tilde{\varphi}, \quad \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap (\{0 < \tilde{\varphi} < m_1\} \cup \{-m_2 < \varphi^{\varepsilon_0} < 0\}) \text{ 时,}$$

所以

$$\begin{cases} \Delta(\varphi_+^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi}_+) = 0, & \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap \{0 < \tilde{\varphi} < m_1\} \text{ 时,} \\ \varphi_+^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi}_+ > 0, & \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap \{0 < \tilde{\varphi} < m_1\} \text{ 时,} \\ \Delta(\varphi_-^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi}_-) = 0, & \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap \{-m_2 < \varphi^{\varepsilon_0} < 0\} \text{ 时,} \\ \varphi_-^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi}_- < 0, & \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap \{-m_2 < \varphi^{\varepsilon_0} < 0\} \text{ 时.} \end{cases}$$

由于自由边界 Γ^{ε_0} 和 $\tilde{\Gamma}$ 都是解析的, 所以根据 Hopf 引理, 在 X_0 处有

$$\frac{\partial(\varphi_+^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi}_+)}{\partial \nu} < 0 \quad \text{和} \quad \frac{\partial(\varphi_-^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi}_-)}{\partial \nu} < 0,$$

其中 ν 为 $\partial\{\tilde{\varphi} > 0\}$ 在点 X_0 处的单位外法向量, 且 $\nu = -\frac{\nabla \varphi_+}{|\nabla \varphi_+|} = \frac{\nabla \varphi_-}{|\nabla \varphi_-|}$, 所以

$$|\nabla \varphi_+^{\varepsilon_0}| > |\nabla \tilde{\varphi}_+| \quad \text{和} \quad |\nabla \varphi_-^{\varepsilon_0}| < |\nabla \tilde{\varphi}_-| \quad \text{在 } X_0 \text{ 处,}$$

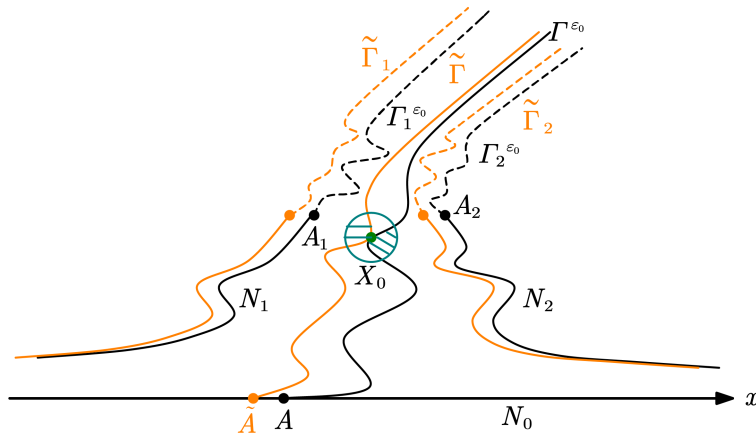


图 6 $X_0 \in \Gamma^{\varepsilon_0} \cap \tilde{\Gamma}$

这表明

$$\Lambda = |\nabla \varphi_+^{\varepsilon_0}|^2 - |\nabla \varphi_-^{\varepsilon_0}|^2 > |\nabla \tilde{\varphi}_+|^2 - |\nabla \tilde{\varphi}_-|^2 = \Lambda \quad \text{在 } X_0 \text{ 处,}$$

由此即可得到矛盾.

情形 1.3 $X_0 \in \Gamma_2^{\varepsilon_0} \cap \tilde{\Gamma}_2$ (见图 7). 考虑区域 $\Omega \cap \{-m_2 < \tilde{\varphi} < 0\}$, 取 r 足够小, 则有

$$\begin{cases} \Delta(\varphi^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi}) = 0, & \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap \{-m_2 < \tilde{\varphi} < 0\} \text{ 时,} \\ \varphi^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi} > 0, & \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap \{-m_2 < \tilde{\varphi} < 0\} \text{ 时.} \end{cases}$$

根据 Hopf 引理, 可以得到

$$\frac{\partial(\varphi^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi})}{\partial \nu} < 0 \quad \text{在 } X_0 \text{ 处,}$$

其中 ν 是 $\Gamma_2^{\varepsilon_0}$ 在点 X_0 处的单位外法向量, 则

$$\sqrt{\lambda} = |\nabla \tilde{\varphi}| > |\nabla \varphi^{\varepsilon_0}| = \sqrt{\lambda} \quad \text{在 } X_0 \text{ 处,}$$

由此即可得到矛盾.

情形 1.4 $X_0 = A$ (见图 8). 考虑区域 $\Omega \cap \{m_1 > \varphi^{\varepsilon_0} \geq \tilde{\varphi} > 0\}$. 此时考虑 φ^{ε_0} 和 $\tilde{\varphi}$ 在点 X_0 处的爆破序列 $\{\phi_{r_k}^{\varepsilon_0}\}$ 和 $\{\tilde{\phi}_{r_k}\}$, 其中 $\phi_{r_k}^{\varepsilon_0} = \frac{\varphi^{\varepsilon_0}(X_0 + r_k X)}{r_k}$, $\tilde{\phi}_{r_k} = \frac{\tilde{\varphi}(X_0 + r_k X)}{r_k}$. 定义 $N_0^{\varepsilon_0} = \{(x, 0) \mid x \leq f^{\varepsilon_0}(0)\}$, 则区域 $\{m_1 > \varphi^{\varepsilon_0} > 0\}$ 由 $N_0^{\varepsilon_0}$, Γ^{ε_0} , N_1 和 $\Gamma_1^{\varepsilon_0}$ 所围成.

而根据文献 [23, 命题 4.3] 和 [24, 命题 3.3] 可知, 爆破序列 $\{\phi_{r_k}^{\varepsilon_0}\}$ 和 $\{\tilde{\phi}_{r_k}\}$ 存在收敛子列, 仍记为 $\{\phi_{r_k}^{\varepsilon_0}\}$ 和 $\{\tilde{\phi}_{r_k}\}$. 当 $k \rightarrow +\infty$ 时, 对于任意的 $0 < \alpha < 1$ 和 $D \subset \subset \Omega \cap \{m_1 > \varphi^{\varepsilon_0} \geq \tilde{\varphi} > 0\}$, 在 $C^{0,\alpha}(D)$ 上有

$$\phi_{r_k}^{\varepsilon_0} \rightarrow \phi^{\varepsilon_0} \quad \text{和} \quad \tilde{\phi}_{r_k} \rightarrow \tilde{\phi},$$

其中当 $k \rightarrow +\infty$ 时, $r_k \rightarrow 0$.

接下来, 设 $N = \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$, 且 $\Gamma_0^{\varepsilon_0}$ 和 $\tilde{\Gamma}_0$ 分别为爆破极限 ϕ^{ε_0} 和 $\tilde{\phi}$ 的两相自由边界, 取 $X_r \in \Gamma_0^{\varepsilon_0}$ 和 $Z_r \in \tilde{\Gamma}_0$ 满足 $|X_r - X_0| = r$ 和 $|Z_r - X_0| = r$, 则由文献 [7] 中的非退化引理可知, 存在常

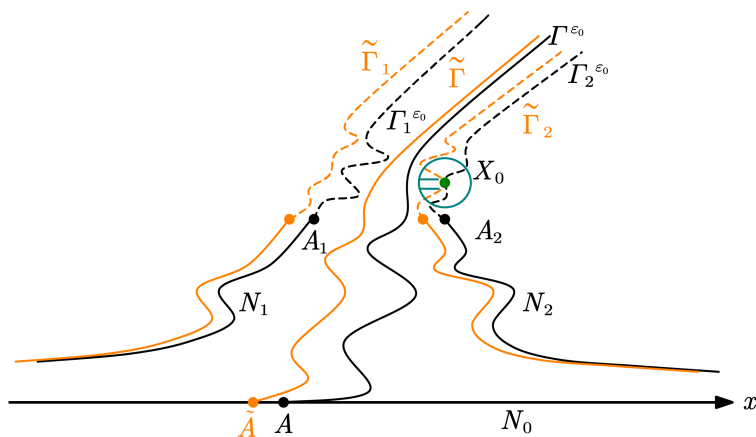
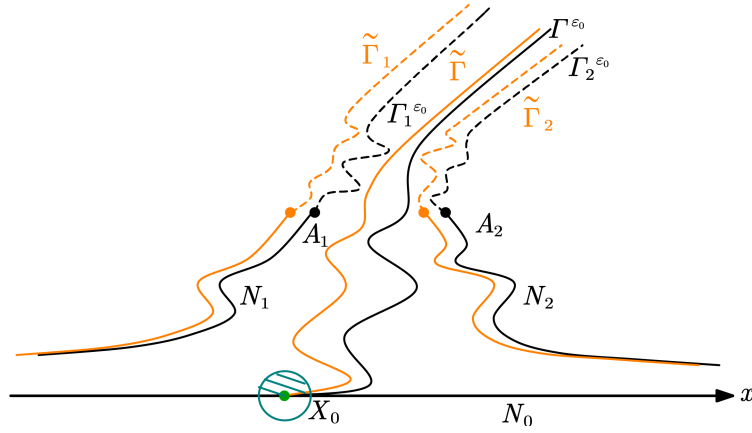


图 7 (网络版彩图) $X_0 \in \Gamma_2^{\varepsilon_0} \cap \tilde{\Gamma}_2$


 图 8 (网络版彩图) $X_0 = A$

数 $c > 0$ 使得

$$\frac{1}{\rho} \int_{\partial B_\rho(X_0)} \phi_+^{\varepsilon_0} dS \geq c\sqrt{\Lambda} \quad \text{和} \quad \frac{1}{\rho} \int_{\partial B_\rho(X_0)} \tilde{\phi}_+ dS \geq c\sqrt{\Lambda},$$

其中 $\rho = \frac{r}{2}$.

令 $Y_r = \frac{X_r - X_0}{r}$ 和 $H_r = \frac{Z_r - X_0}{r}$, 则有

$$\int_{\partial B_{\frac{1}{2}}(Y_r)} \phi_{r,+}^{\varepsilon_0} dS \geq c\sqrt{\Lambda} \quad \text{和} \quad \int_{\partial B_{\frac{1}{2}}(H_r)} \tilde{\phi}_{r,+} dS \geq c\sqrt{\Lambda}.$$

所以存在子列 $\{Y_{r_k}\}$ 和 $\{H_{r_k}\}$ 使得当 $k \rightarrow +\infty$ 时, $Y_{r_k} \rightarrow Y_0$, $H_{r_k} \rightarrow H_0$, 此时有

$$\int_{\partial B_{\frac{1}{2}}(Y_0)} \phi_+^{\varepsilon_0} dS \geq c\sqrt{\Lambda} \quad \text{和} \quad \int_{\partial B_{\frac{1}{2}}(H_0)} \tilde{\phi}_+ dS \geq c\sqrt{\Lambda}.$$

由文献 [7, 引理 5.1] 中单调公式可知

$$\frac{1}{r^4} \int_{B_r(Y_0)} |\nabla \phi_+^{\varepsilon_0}|^2 dX \cdot \int_{B_r(Y_0)} |\nabla \phi_-^{\varepsilon_0}|^2 dX \geq 0$$

和

$$\frac{1}{r^4} \int_{B_r(H_0)} |\nabla \tilde{\phi}_+|^2 dX \cdot \int_{B_r(H_0)} |\nabla \tilde{\phi}_-|^2 dX \geq 0.$$

则根据文献 [7, 引理 6.6] 可知 ϕ^{ε_0} 和 $\tilde{\phi}$ 可能为二平面解、单平面解或零. 通过与文献 [15, 定理 2.6] 同样的讨论, 可以得到 ϕ^{ε_0} 和 $\tilde{\phi}$ 为单平面解. 因此, 有

$$\phi^{\varepsilon_0} = \sqrt{\Lambda} \max\{y, 0\}$$

和

$$\tilde{\phi} = \sqrt{\Lambda} \max\{y, 0\}.$$

而根据文献 [23, 命题 4.22] 同样的讨论可以得到, 存在 $\tau > 0$ 使得比较函数 $\hat{\varphi} = \varphi^{\varepsilon_0} - (1+\tau)\tilde{\varphi} > 0$ 在 $B_r(X_0) \cap \{\tilde{\varphi} > 0\}$ 上成立. 接下来考虑 $\hat{\varphi}$ 在点 X_0 处的爆破序列 $\{\hat{\varphi}_{r_k}\}$, 则 $\hat{\varphi}_{r_k} = \varphi_{r_k}^{\varepsilon_0} - (1+\tau)\tilde{\varphi}_{r_k}$. 设爆破序列 $\{\hat{\varphi}_{r_k}\}$ 的爆破极限为 $\hat{\phi}$, 则 $\hat{\phi} \geq 0$, 即 $\phi^{\varepsilon_0} \geq (1+\tau)\tilde{\phi}$, 这与 $\phi^{\varepsilon_0} = \sqrt{\Lambda} \max\{y, 0\}$, $\tilde{\phi} = \sqrt{\Lambda} \max\{y, 0\}$ 且 $\tau > 0$ 矛盾.

此外, 当 $\varepsilon_0 > 0$ 时, φ^{ε_0} 和 $\tilde{\varphi}$ 可能同时切到两个及以上的点. 在这种情形下, 可以选取上述四种情形里面的切点为 X_0 , 即可推导出矛盾.

情形 2 $\varepsilon_0 = 0$. 则 $\varphi^{\varepsilon_0} = \varphi$, 根据连续连接条件 (1.13), 可知 φ 和 $\tilde{\varphi}$ 在点 A_1 和 A_2 处必然同时相切. 不失一般性, 假设 $X_0 = A_1$ (见图 9).

考虑区域 $\Omega \cap \{0 < \varphi < m_1\}$. 取 r 足够小, 注意曲线 $\Gamma_1 \cup N_1$ 和 $\tilde{\Gamma}_1 \cup N_1$ 在点 X_0 的一个邻域内是 C^1 光滑的, 这表明此时 Hopf 引理不能在点 X_0 处使用. 取足够小的 $\tau > 0$, 构造比较函数

$$\hat{\varphi} := (m_1 - \tilde{\varphi}) - (1+\tau)(m_1 - \varphi), \quad \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap \{0 < \varphi < m_1\} \text{ 时},$$

根据文献 [23, 命题 4.22] 同样的讨论, 可以得到存在充分小的 $\tau > 0$ 和 $r > 0$ 使得

$$\hat{\varphi} \geq 0, \quad \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap \{m_1 > \varphi > 0\} \text{ 时}.$$

所以

$$\begin{cases} \Delta \hat{\varphi} = 0, & \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap \{0 < \varphi < m_1\} \text{ 时}, \\ \hat{\varphi} \geq 0, & \text{当 } (x, y) \in \partial\{B_r(X_0) \cap \{0 < \varphi < m_1\}\} \text{ 时}. \end{cases}$$

根据极值原理, 有

$$\sqrt{\Lambda + \lambda} = |\nabla \tilde{\varphi}| \geq (1+\tau)|\nabla \varphi| = (1+\tau)\sqrt{\Lambda + \lambda} \quad \text{在 } X_0 \text{ 处},$$

由 $\tau > 0$ 即可得到矛盾.

另外, 假设 $\gamma_1 \leq \tilde{\gamma}_1$. 对于 $\varepsilon \geq 0$, 令 $\varphi^\varepsilon = \varphi(x + \varepsilon, y)$. 同样地, 根据之前的论证, 可以得到当固定参数 λ 和 e 不变时, 二维两相冲击喷流问题的解是唯一确定的. 至此完成了定理 1.2 的第一部分的证明.

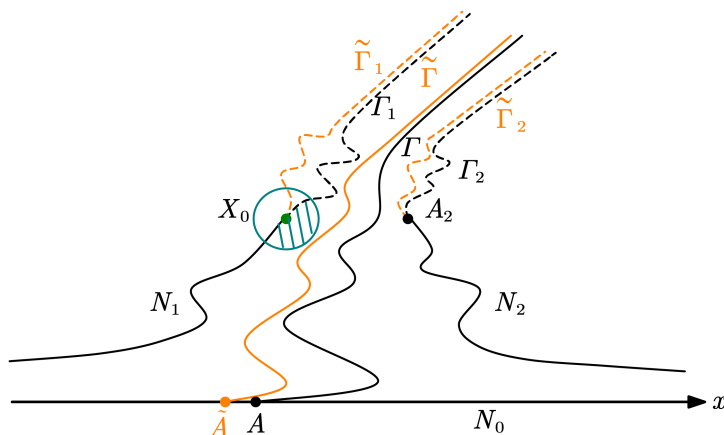


图 9 (网络版彩图) $X_0 = A_1$

2.3 参数 e 的唯一性

本小节证明参数 e 的唯一性, 即若存在 (λ, e) 和 $(\lambda, \tilde{e})$ 使得连续连接条件 (1.13) 和光滑连接条件 (1.14) 成立, 则 $e = \tilde{e}$.

假设 $e \neq \tilde{e}$, 其中 e 和 $\tilde{e}$ 分别对应 φ 和 $\tilde{\varphi}$ 的渐近方向. 不失一般性, 假设 $\tilde{e}$ 是通过 e 逆时针旋转一个小于 π 的角度得到的. 根据文献 [23, 命题 4.18] 和 [24, 命题 3.19], 可知 $\varphi \geq \tilde{\varphi}$, 见图 10.

考虑函数 $\varphi^\varepsilon(x, y) := \varphi(x - \varepsilon, y)$, 并定义集合 $\Sigma := \{\varepsilon \geq 0 \mid \varphi^\varepsilon(x, y) \geq \tilde{\varphi}(x, y) \text{ 在 } \Omega \text{ 中}\}$. 采用与第 2.2 小节中第 2 步同样的讨论, 令 $\varepsilon_0 := \inf_{\varepsilon \in \Sigma} \varepsilon$, 则 ε_0 是使得 $\varphi^\varepsilon(x, y) \geq \tilde{\varphi}(x, y)$ 在 Ω 中成立的最小的 ε . 存在 $X_0 \in \Omega$ 使得 $\varphi^{\varepsilon_0}(X_0) = \tilde{\varphi}(X_0)$ 成立, 且

$$X_0 \notin \Omega \cap (\{-m_2 < \tilde{\varphi} \leq \varphi^{\varepsilon_0} < 0\} \cup \{0 < \tilde{\varphi} \leq \varphi^{\varepsilon_0} < m_1\}).$$

情形 1 $\varepsilon_0 > 0$. 因为 $|X_0| < +\infty$, 与第 2.2 小节类似, X_0 的位置有四种可能的情形, 即 $X_0 \in \Gamma_1^{\varepsilon_0} \cap \tilde{\Gamma}_1$, $X_0 \in \Gamma^{\varepsilon_0} \cap \tilde{\Gamma}$, $X_0 \in \Gamma_2^{\varepsilon_0} \cap \tilde{\Gamma}_2$ 和 $X_0 = A$.

情形 1.1 $X_0 \in \Gamma_1^{\varepsilon_0} \cap \tilde{\Gamma}_1$. 考虑区域 $\Omega \cap \{0 < \varphi^{\varepsilon_0} < m_1\}$, 取 r 足够小, 则有

$$\begin{cases} \Delta(\varphi^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi}) = 0, & \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap \{0 < \varphi^{\varepsilon_0} < m_1\} \text{ 时,} \\ \varphi^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi} > 0, & \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap \{0 < \varphi^{\varepsilon_0} < m_1\} \text{ 时.} \end{cases}$$

通过 Hopf 引理, 可以推导出

$$\frac{\partial(\varphi^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi})}{\partial \nu} < 0 \text{ 在 } X_0 \text{ 处,}$$

其中 ν 是 $\Gamma_1^{\varepsilon_0}$ 在点 X_0 处的单位外法向量, 则

$$\sqrt{\Lambda + \lambda} = |\nabla \tilde{\varphi}| > |\nabla \varphi^{\varepsilon_0}| = \sqrt{\Lambda + \lambda} \text{ 在 } X_0 \text{ 处,}$$

由此即可得到矛盾.

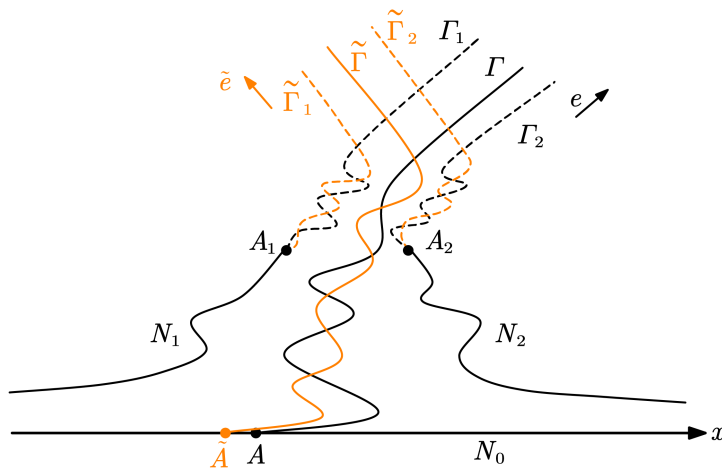


图 10 (网络版彩图) 固定参数 λ 时, φ 和 $\tilde{\varphi}$ 的自由边界

情形 1.2 $X_0 \in \Gamma^{\varepsilon_0} \cap \tilde{\Gamma}$. 考虑区域 $\Omega \cap \{-m_2 < \tilde{\varphi} \leq \varphi^{\varepsilon_0} < m_1\}$. 取 r 足够小, 则有

$$\varphi^{\varepsilon_0} > \tilde{\varphi}, \quad \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap (\{0 < \tilde{\varphi} < m_1\} \cup \{-m_2 < \varphi^{\varepsilon_0} < 0\}) \text{ 时,}$$

所以

$$\begin{cases} \Delta(\varphi_+^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi}_+) = 0, & \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap \{0 < \tilde{\varphi} < m_1\} \text{ 时,} \\ \varphi_+^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi}_+ > 0, & \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap \{0 < \tilde{\varphi} < m_1\} \text{ 时,} \\ \Delta(\varphi_-^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi}_-) = 0, & \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap \{-m_2 < \varphi^{\varepsilon_0} < 0\} \text{ 时,} \\ \varphi_-^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi}_- < 0, & \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap \{-m_2 < \varphi^{\varepsilon_0} < 0\} \text{ 时.} \end{cases}$$

由于自由边界 Γ^{ε_0} 和 $\tilde{\Gamma}$ 都是解析的, 所以根据 Hopf 引理, 在 X_0 处有

$$\frac{\partial(\varphi_+^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi}_+)}{\partial \nu} < 0 \quad \text{和} \quad \frac{\partial(\varphi_-^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi}_-)}{\partial \nu} < 0,$$

其中 ν 为 $\partial\{\tilde{\varphi} > 0\}$ 在点 X_0 处的单位外法向量, 且

$$\nu = -\frac{\nabla \varphi_+}{|\nabla \varphi_+|} = \frac{\nabla \varphi_-}{|\nabla \varphi_-|},$$

所以

$$|\nabla \varphi_+^{\varepsilon_0}| > |\nabla \tilde{\varphi}_+|, \quad |\nabla \varphi_-^{\varepsilon_0}| < |\nabla \tilde{\varphi}_-| \quad \text{在 } X_0 \text{ 处,}$$

$$\Lambda = |\nabla \varphi_+^{\varepsilon_0}|^2 - |\nabla \varphi_-^{\varepsilon_0}|^2 > |\nabla \tilde{\varphi}_+|^2 - |\nabla \tilde{\varphi}_-|^2 = \Lambda, \quad \text{在 } X_0 \text{ 处,}$$

由此即可得到矛盾.

情形 1.3 $X_0 \in \Gamma_2^{\varepsilon_0} \cap \tilde{\Gamma}_2$. 考虑区域 $\Omega \cap \{-m_2 < \tilde{\varphi} < 0\}$. 取 r 足够小, 则有

$$\begin{cases} \Delta(\varphi^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi}) = 0, & \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap \{-m_2 < \tilde{\varphi} < 0\} \text{ 时,} \\ \varphi^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi} > 0, & \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap \{-m_2 < \tilde{\varphi} < 0\} \text{ 时.} \end{cases}$$

通过 Hopf 引理, 可得

$$\frac{\partial(\varphi^{\varepsilon_0} - \tilde{\varphi})}{\partial \nu} < 0 \quad \text{在 } X_0 \text{ 处,}$$

其中 ν 是 $\Gamma_2^{\varepsilon_0}$ 在点 X_0 处的单位外法向量, 则

$$\sqrt{\lambda} = |\nabla \tilde{\varphi}| > |\nabla \varphi^{\varepsilon_0}| = \sqrt{\lambda} \quad \text{在 } X_0 \text{ 处,}$$

由此即可得到矛盾.

情形 1.4 $X_0 = A$. 考虑区域 $\Omega \cap \{m_1 > \varphi^{\varepsilon_0} \geq \tilde{\varphi} > -m_2\}$. 此时考虑 φ^{ε_0} 和 $\tilde{\varphi}$ 在点 X_0 处的爆破

序列 $\{\phi_{r_k}^{\varepsilon_0}\}$ 和 $\{\tilde{\phi}_{r_k}\}$, 其中

$$\phi_{r_k}^{\varepsilon_0} = \frac{\varphi^{\varepsilon_0}(X_0 + r_k X)}{r_k}, \quad \tilde{\phi}_{r_k} = \frac{\tilde{\varphi}(X_0 + r_k X)}{r_k}.$$

与第 2.2 小节中情形 1.4 类似, 可以得到

$$\phi^{\varepsilon_0} = \sqrt{\Lambda} \max\{y, 0\}, \quad \tilde{\phi} = \sqrt{\Lambda} \max\{y, 0\}$$

且存在 $\tau > 0$ 使得

$$(1 + \tau)\tilde{\phi} \leq \phi^{\varepsilon_0}, \quad \text{当 } (x, y) \in B_1(0) \cap \{m_1 > \tilde{\varphi} > 0\} \text{ 时.}$$

这结合 $\tau > 0$ 即可得出矛盾.

同样地, φ^{ε_0} 和 $\tilde{\varphi}$ 还有可能同时切到两个及以上的交点. 在这种情形下, 可以随意选取上述四种情形中的一个切点作为 X_0 , 然后参考以上四种情形即可推导出矛盾.

情形 2 $\varepsilon_0 = 0$, 则 $\varphi^{\varepsilon_0} = \varphi$. 根据连续连接条件 (1.13), 可得 φ 和 $\tilde{\varphi}$ 必然在 A_1 和 A_2 处同时相切. 不失一般性, 假设 $X_0 = A_1$. 考虑区域 $\Omega \cap \{0 < \varphi < m_1\}$. 注意曲线 $\Gamma_1 \cup N_1$ 和 $\tilde{\Gamma}_1 \cup N_1$ 在点 X_0 的一个邻域内是 C^1 的, 这表明在点 X_0 处不能使用 Hopf 引理. 取足够小的 $\tau > 0$, 构造比较函数

$$\hat{\varphi} := (m_1 - \tilde{\varphi}) - (1 + \tau)(m_1 - \varphi), \quad \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap \{0 < \varphi < m_1\} \text{ 时.}$$

与第 2.2 小节中情形 2 类似, 根据文献 [23, 命题 4.22] 中同样的讨论, 可以得到

$$\hat{\varphi} \geq 0, \quad \text{当 } (x, y) \in B_r(X_0) \cap \{m_1 > \varphi^{\varepsilon_0} > 0\} \text{ 时,}$$

根据极值原理, 可以得到

$$\sqrt{\Lambda + \lambda} = |\nabla \tilde{\varphi}| \geq (1 + \tau)|\nabla \varphi| = (1 + \tau)\sqrt{\Lambda + \lambda} \quad \text{在 } X_0 \text{ 处,}$$

结合 $\sqrt{\Lambda + \lambda} > 0$ 即可得到矛盾. 至此完成了定理 1.2 第二部分的证明.

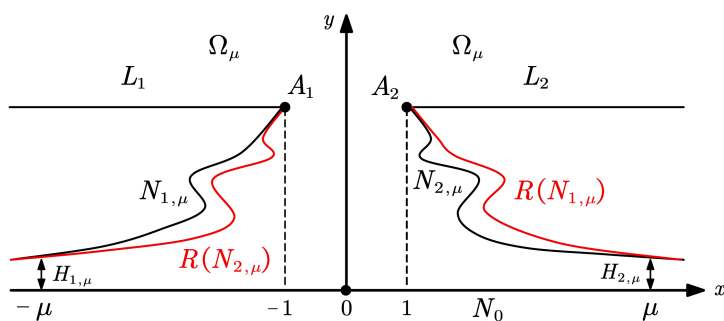
3 定理 1.3 的证明

假设 $h_1 = h_2$, $m_1 = m_2$, 对于 $i = 1, 2$, 记 $N_{0,\mu} = N_0 \cap \{-\mu < x < \mu\}$, $h_{i,\mu} = \min\{y \mid (-1)^i \mu = g_i(y)\}$, $H_{i,\mu} = \{((-1)^i \mu, y) \mid 0 \leq y \leq h_{i,\mu}\}$, $N_{i,\mu} = \{(x, y) \mid x = g_i(y), h_{i,\mu} \leq y \leq a\}$, $L_1 = \{(x, a) \mid x \leq -1\}$ 和 $L_2 = \{(x, a) \mid x \geq 1\}$. 另外, 不妨假设 $-\lambda < \Lambda \leq 0$.

接下来, 介绍一个截断区域 Ω_μ , 它以 $N_{i,\mu}$, L_1 , L_2 , $N_{0,\mu}$ 和 $H_{i,\mu}$ 为边界. 用 $R(N_{i,\mu})$ 和 $H_{i,\mu}^R$ 分别表示 $N_{i,\mu}$ 和 $H_{i,\mu}$ 关于 y 轴的反射 ($i = 1, 2$) (见图 11). 接着, 定义截断区域 Ω_μ^R , 它以 $R(N_{i,\mu})$, L_1 , L_2 , $N_{0,\mu}$ 和 $H_{i,\mu}^R$ 为边界.

首先, 在截断区域 Ω_μ 中, 考虑如下截断变分问题 $J_{\lambda,e,\mu}$:

$$J_{\lambda,e,\mu}(\varphi) = \int_{\Omega_\mu} |\nabla \varphi - (\sqrt{\Lambda + \lambda} \chi_{\{0 \leq \varphi < m_1\}} + \sqrt{\lambda} \chi_{\{-m_2 < \varphi < 0\}}) e^\perp|^2 dX,$$

图 11 (网络版彩图) 截断区域 Ω_μ

其中 $\lambda > 0$, $e = (e_1, e_2)$ 且 $e^\perp = (-e_2, e_1)$.

对于任意的 $\mu > 0$ 和单位向量 e , 存在一个 $\varphi_{\lambda, e, \mu} \in K_{\lambda, e, \mu}$ 使得

$$J_{\lambda, e, \mu}(\varphi_{\lambda, e, \mu}) = \min_{\varphi \in K_{\lambda, e, \mu}} J_{\lambda, e, \mu}(\varphi),$$

其中容许集 $K_{\lambda, e, \mu} = \{\varphi \in H_{\text{loc}}^1(\Omega_\mu) \mid -m_2 \leq \varphi \leq m_1, \varphi = \frac{(-1)^{i+1}m_i}{h_{i, \mu}}y \text{ 在 } H_{i, \mu} \text{ 上}\}$.

以上变分问题的极小化子的存在性和唯一性, 在文献 [24, 第 3.2 和 3.3 小节] 已经分别给出.

假设 $\varphi_{\lambda, e, \mu}$ 是截断变分问题 $J_{\lambda, e, \mu}$ 的一个极小化子, 则根据文献 [23, 24], 可知 $\varphi_{\lambda, e, \mu}(x, y)$ 关于 x 是单调递增的.

接下来, 取 $e_0 = (1, 0)$, 对于任意的 $\mu > 0$, 在区域 Ω_μ^R 中, 考虑截断变分问题 $J_{\lambda, e_0, \mu}^R$. 对于任意的 $\mu > 0$ 和单位向量 $e_0 = (1, 0)$, 存在一个 $\varphi_{\lambda, e_0, \mu}^R \in K_{\lambda, e_0, \mu}^R$ 使得

$$J_{\lambda, e_0, \mu}^R(\varphi_{\lambda, e_0, \mu}^R) = \min_{\varphi^R \in K_{\lambda, e_0, \mu}^R} J_{\lambda, e_0, \mu}^R(\varphi^R),$$

其中容许集 $K_{\lambda, e_0, \mu}^R = \{\varphi^R \in H_{\text{loc}}^1(\Omega_\mu^R) \mid -m_2 \leq \varphi^R \leq m_1, \varphi^R = \frac{(-1)^i m_i}{h_{i, \mu}}y \text{ 在 } H_{i, \mu}^R \text{ 上}\}$.

令 $\varphi_{\lambda, e_0, \mu}$ 在 Ω_μ 中是截断变分问题 $J_{\lambda, e_0, \mu}$ 的一个极小化子, 则

$$\varphi_{\lambda, e_0, \mu}^R(x, y) \leq -\varphi_{\lambda, e_0, \mu}(-x, y)$$

是变分问题 $J_{\lambda, e_0, \mu}^R$ 的唯一极小化子.

同时, 由于 $R(N_2)$ 位于 N_1 的右侧, 所以有

$$h_{1, \mu} \geq h_{2, \mu}, \quad g_1(y) \leq -g_2(y), \quad y \in [h_{1, \mu}, a],$$

这意味着 $V = \max\{\varphi_{\lambda, e_0, \mu}^R, \varphi_{\lambda, e_0, \mu}\} \in K_{\lambda, e_0, \mu}^R$ 和 $v = \min\{\varphi_{\lambda, e_0, \mu}^R, \varphi_{\lambda, e_0, \mu}\} \in K_{\lambda, e_0, \mu}$.

为了简化符号表示, 令 $\varphi_0 = \varphi_{\lambda, e_0, \mu}$ 和 $\varphi_0^R = \varphi_{\lambda, e_0, \mu}^R$. 下面证明

$$J_{\lambda, e_0, \mu}(\varphi_0) + J_{\lambda, e_0, \mu}^R(\varphi_0^R) = J_{\lambda, e_0, \mu}(v) + J_{\lambda, e_0, \mu}^R(V). \quad (3.1)$$

对于任意的 $L > \max_{X \in N_{1, \mu} \cup R(N_{1, \mu})} |X|$, 考虑以 $(0, 0)$ 为球心、 L 为半径的球 B_L , 记 $\Omega_{\mu, L}^R =$

$B_L \cap \Omega_\mu^R$ 和 $\Omega_{\mu,L} = B_L \cap \Omega_\mu$, 则只需要证明以下事实:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{\mu,L}^R} \left(|\nabla \varphi_0^R|^2 - |\nabla V|^2 \right) dX = \int_{\Omega_{\mu,L}} \left(|\nabla v|^2 - |\nabla \varphi_0|^2 \right) dX, \\
 & (\Lambda + \lambda) \int_{\Omega_{\mu,L}^R} \left(\chi_{\{0 \leq \varphi_0^R < m_1\}} - \chi_{\{0 \leq V < m_1\}} \right) dX = (\Lambda + \lambda) \int_{\Omega_{\mu,L}} \left(\chi_{\{0 \leq v < m_1\}} - \chi_{\{0 \leq \varphi_0 < m_1\}} \right) dX, \\
 & \lambda \int_{\Omega_{\mu,L}^R} \left(\chi_{\{-m_2 < \varphi_0^R < 0\}} - \chi_{\{-m_2 < V < 0\}} \right) dX = \lambda \int_{\Omega_{\mu,L}} \left(\chi_{\{-m_2 < v < 0\}} - \chi_{\{-m_2 < \varphi_0 < 0\}} \right) dX, \\
 & \sqrt{\Lambda + \lambda} \int_{\Omega_{\mu,L}^R} \left(\nabla \varphi_0^R \cdot e_0^\perp \chi_{\{0 \leq \varphi_0^R < m_1\}} - \nabla V \cdot e_0^\perp \chi_{\{0 \leq V < m_1\}} \right) dX \\
 & = \sqrt{\Lambda + \lambda} \int_{\Omega_{\mu,L}} \left(\nabla v \cdot e_0^\perp \chi_{\{0 \leq v < m_1\}} - \nabla \varphi_0 \cdot e_0^\perp \chi_{\{0 \leq \varphi_0 < m_1\}} \right) dX
 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\lambda} \int_{\Omega_{\mu,L}^R} \left(\nabla \varphi_0^R \cdot e_0^\perp \chi_{\{-m_2 < \varphi_0^R < 0\}} - \nabla v \cdot e_0^\perp \chi_{\{-m_2 < v < 0\}} \right) dX \\
 & = \sqrt{\lambda} \int_{\Omega_{\mu,L}} \left(\nabla V \cdot e_0^\perp \chi_{\{-m_2 < V < 0\}} - \nabla \varphi_0 \cdot e_0^\perp \chi_{\{-m_2 < \varphi_0 < 0\}} \right) dX.
 \end{aligned}$$

注意在 $\Omega_{\mu,L} \setminus \Omega_{\mu,L}^R$ 中 $v = \varphi_0$ 且在 $\Omega_{\mu,L}^R \setminus \Omega_{\mu,L}$ 中 $V = \varphi_0^R$, 所以容易验证

$$\int_{\Omega_{\mu,L}^R} |\nabla \varphi_0^R|^2 dX + \int_{\Omega_{\mu,L}} |\nabla \varphi_0|^2 dX = \int_{\Omega_{\mu,L}^R} |\nabla V|^2 dX + \int_{\Omega_{\mu,L}} |\nabla v|^2 dX, \quad (3.2)$$

$$\int_{\Omega_{\mu,L}^R} \chi_{\{0 \leq \varphi_0^R < m_1\}} dX + \int_{\Omega_{\mu,L}} \chi_{\{0 \leq \varphi_0 < m_1\}} dX = \int_{\Omega_{\mu,L}^R} \chi_{\{0 \leq V < m_1\}} dX + \int_{\Omega_{\mu,L}} \chi_{\{0 \leq v < m_1\}} dX \quad (3.3)$$

和

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{\mu,L}^R} \chi_{\{-m_2 < \varphi_0^R < 0\}} dX + \int_{\Omega_{\mu,L}} \chi_{\{-m_2 < \varphi_0 < 0\}} dX \\
 & = \int_{\Omega_{\mu,L}^R} \chi_{\{-m_2 < V < 0\}} dX + \int_{\Omega_{\mu,L}} \chi_{\{-m_2 < v < 0\}} dX.
 \end{aligned} \quad (3.4)$$

通过分部积分, 有

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{\mu,L}^R \cap \{0 \leq \varphi_0^R < m_1\}} \nabla \varphi_0^R \cdot e_0^\perp dX + \int_{\Omega_{\mu,L} \cap \{0 \leq \varphi_0 < m_1\}} \nabla \varphi_0 \cdot e_0^\perp dX \\
 & = \int_{\Omega_{\mu,L}^R \cap \{0 \leq \varphi_0^R < m_1\}} \frac{\partial \varphi_0^R}{\partial y} dX + \int_{\Omega_{\mu,L} \cap \{0 \leq \varphi_0 < m_1\}} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} dX \\
 & = \int_{\partial(\Omega_{\mu,L}^R \cap \{0 \leq \varphi_0^R < m_1\})} (0, \varphi_0^R) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\partial(\Omega_{\mu,L} \cap \{0 \leq \varphi_0 < m_1\})} (0, \varphi_0) \cdot \mathbf{n} dS
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{L_1 \cap B_L \cap \{0 \leq \varphi_0^R < m_1\}} \varphi_0^R dx + \int_{\partial B_L \cap \Omega_\mu^R \cap \{0 \leq \varphi_0^R < m_1\}} (0, \varphi_0^R) \cdot \mathbf{n} dS \\
&\quad + \int_{\partial \{\varphi_0^R = m_1\} \cap \Omega_\mu^R \cap B_L} (0, \varphi_0^R) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{L_1 \cap B_L \cap \{0 \leq \varphi_0 < m_1\}} \varphi_0 dx \\
&\quad + \int_{\partial B_L \cap \Omega_\mu \cap \{0 \leq \varphi_0 < m_1\}} (0, \varphi_0) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\partial \{\varphi_0 = m_1\} \cap \Omega_\mu \cap B_L} (0, \varphi_0) \cdot \mathbf{n} dS \\
&= - \int_{L_1 \cap B_L \cap \{0 \leq V < m_1\}} V dx + \int_{\partial B_L \cap \Omega_\mu^R \cap \{0 \leq V < m_1\}} (0, V) \cdot \mathbf{n} dS \\
&\quad + \int_{\partial \{V = m_1\} \cap \Omega_\mu^R \cap B_L} (0, V) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{L_1 \cap B_L \cap \{0 \leq v < m_1\}} v dx \\
&\quad + \int_{\partial B_L \cap \Omega_\mu \cap \{0 \leq v < m_1\}} (0, v) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\partial \{v = m_1\} \cap \Omega_\mu \cap B_L} (0, v) \cdot \mathbf{n} dS \\
&= \int_{\partial(\Omega_{\mu,L}^R \cap \{0 \leq V < m_1\})} (0, V) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\partial(\Omega_{\mu,L} \cap B_L \cap \{0 \leq v < m_1\})} (0, v) \cdot \mathbf{n} dS \\
&= \int_{\Omega_{\mu,L}^R \cap \{0 \leq V < m_1\}} \frac{\partial V}{\partial y} dX + \int_{\Omega_{\mu,L} \cap \{0 \leq v < m_1\}} \frac{\partial v}{\partial y} dX \\
&= \int_{\Omega_{\mu,L}^R \cap \{0 \leq V < m_1\}} \nabla V \cdot e_0^\perp dX + \int_{\Omega_{\mu,L} \cap \{0 \leq v < m_1\}} \nabla v \cdot e_0^\perp dX, \tag{3.5}
\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{n}$ 为单位外法向量.

同理可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{\mu,L}^R \cap \{-m_2 < \varphi_0^R < 0\}} \nabla \varphi_0^R \cdot e_0^\perp dX + \int_{\Omega_{\mu,L} \cap \{-m_2 < \varphi_0 < 0\}} \nabla \varphi_0 \cdot e_0^\perp dX \\
&= \int_{\Omega_{\mu,L}^R \cap \{-m_2 < V < 0\}} \nabla V \cdot e_0^\perp dX + \int_{\Omega_{\mu,L} \cap \{-m_2 < v < 0\}} \nabla v \cdot e_0^\perp dX. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

结合 (3.2)–(3.6), 令 $L \rightarrow +\infty$, 可以得到 (3.1) 成立. 因为 φ_0^R 和 φ_0 分别是截断变分问题 $J_{\lambda, e_0, \mu}^R$ 和 $J_{\lambda, e_0, \mu}$ 的极小化子. 所以有

$$J_{\lambda, e_0, \mu}^R(\varphi_0^R) = J_{\lambda, e_0, \mu}^R(V) \quad \text{和} \quad J_{\lambda, e_0, \mu}(\varphi_0) = J_{\lambda, e_0, \mu}(v).$$

变分问题 $J_{\lambda, e_0, \mu}$ 极小化子的唯一性表明在 Ω_μ 中, 有

$$-\varphi_{\lambda, e_0, \mu}(-x, y) \geq \varphi_{\lambda, e_0, \mu}^R(x, y) = V(x, y) \geq v(x, y) = \varphi_{\lambda, e_0, \mu}(x, y). \tag{3.7}$$

选取一个子列 $\{\varphi_{\lambda, e_0, \mu_n}\}$ 且令 $\mu_n \rightarrow +\infty$, 则可以得到

$\varphi_{\lambda, e_0, \mu_n} \rightarrow \varphi_{\lambda, e_0}$ 在 $H_{\text{loc}}^1(\Omega)$ 中弱收敛且在 Ω 的任意紧子集中一致收敛.

结合 (3.7), 有

$$-\varphi_{\lambda, e_0}(-x, y) \geq \varphi_{\lambda, e_0}(x, y).$$

这意味着

$$-f_{2, \lambda, e_0}(a) \geq f_{1, \lambda, e_0}(a). \quad (3.8)$$

接下来, 证明 $e_1 \geq 0$. 若不然, 则有 $e_1 < 0$. 通过文献 [23, 24] 中关于 e 的单调性定理, 可以推导出

$$\varphi_{\lambda, e_0}(x, y) \geq \varphi_{\lambda, e}(x, y).$$

这表明

$$\begin{aligned} f_{1, \lambda, e_0}(y) &\geq f_{1, \lambda, e}(y), & \text{当 } y \geq a \text{ 时,} \\ f_{2, \lambda, e_0}(y) &\geq f_{2, \lambda, e}(y), & \text{当 } y \geq a \text{ 时.} \end{aligned}$$

最后, 证明不等式严格成立, 即

$$\begin{aligned} f_{1, \lambda, e_0}(y) &> f_{1, \lambda, e}(y), & \text{当 } y \geq a \text{ 时,} \\ f_{2, \lambda, e_0}(y) &> f_{2, \lambda, e}(y), & \text{当 } y \geq a \text{ 时.} \end{aligned}$$

假设上式不严格成立, 则可以通过与第 2.3 小节相同的讨论得出矛盾. 所以有

$$f_{1, \lambda, e_0}(a) > f_{1, \lambda, e}(a) = -1 \quad (3.9)$$

和

$$f_{2, \lambda, e_0}(a) > f_{2, \lambda, e}(a) = 1. \quad (3.10)$$

则结合 (3.8) 和 (3.9) 可以得到

$$-1 > -f_{2, \lambda, e_0}(a) \geq f_{1, \lambda, e_0}(a) > -1,$$

这显然矛盾, 所以 $e_1 \geq 0$. 至此完成了关于定理 1.3 的证明.

致谢 感谢评审专家给我们提出的宝贵意见, 以使本文得到了进一步完善.

参考文献

- Alt H W, Caffarelli L A. Existence and regularity for a minimum problem with free boundary. *J Reine Angew Math*, 1981, 325: 105–144
- Alt H W, Caffarelli L A, Friedman A. Asymmetric jet flows. *Comm Pure Appl Math*, 1982, 35: 29–68
- Alt H W, Caffarelli L A, Friedman A. Jet flows with gravity. *J Reine Angew Math*, 1982, 331: 58–103
- Alt H W, Caffarelli L A, Friedman A. Axially symmetric jet flows. *Arch Ration Mech Anal*, 1983, 81: 97–149
- Alt H W, Caffarelli L A, Friedman A. Jets with two fluids. I. One free boundary. *Indiana Univ Math J*, 1984, 33: 213–247
- Alt H W, Caffarelli L A, Friedman A. Jets with two fluids. II. Two free boundaries. *Indiana Univ Math J*, 1984, 33: 367–391
- Alt H W, Caffarelli L A, Friedman A. Variational problems with two phases and their free boundaries. *Trans Amer*

- [Math Soc](#), 1984, 282: 431–461
- 8 Alt H W, Caffarelli L A, Friedman A. Compressible flows of jets and cavities. [J Differential Equations](#), 1985, 56: 82–141
 - 9 Bae M. Stability of contact discontinuity for steady Euler system in infinite duct. [Z Angew Math Phys](#), 2013, 64: 917–936
 - 10 Birkhoff G, Zarantonello E H. Jets, Wakes, and Cavities. New York: Academic Press, 1957
 - 11 Caffarelli L A. A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. Part I: Lipschitz free boundaries are $C^{1,\alpha}$. [Rev Mat Iberoam](#), 1987, 3: 139–162
 - 12 Caffarelli L A. A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. III. Existence theory, compactness, and dependence on X . [Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci \(5\)](#), 1988, 15: 583–602
 - 13 Caffarelli L A. A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries part II: Flat free boundaries are Lipschitz. [Comm Pure Appl Math](#), 1989, 42: 55–78
 - 14 Cheng J F, Du L L. Hydrodynamic jet incident on an uneven wall. [Math Models Methods Appl Sci](#), 2018, 28: 771–827
 - 15 Cheng J F, Du L L. Oblique injection of incompressible ideal fluid from a slot into a free stream. [SIAM J Math Anal](#), 2021, 53: 754–794
 - 16 Cheng J F, Du L L, Wang Y F. Two-dimensional impinging jets in hydrodynamic rotational flows. [Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire](#), 2017, 34: 1355–1386
 - 17 Cheng J F, Du L L, Wang Y F. On incompressible oblique impinging jet flows. [J Differential Equations](#), 2018, 265: 4687–4748
 - 18 Cheng J F, Du L L, Wang Y F. The uniqueness of the asymmetric jet flow. [J Differential Equations](#), 2020, 269: 3794–3815
 - 19 Cheng J F, Du L L, Xiang W. Incompressible jet flows in a de Laval nozzle with smooth detachment. [Arch Ration Mech Anal](#), 2019, 232: 1031–1072
 - 20 Cheng J F, Du L L, Xiang W. Compressible subsonic jet flows issuing from a nozzle of arbitrary cross-section. [J Differential Equations](#), 2019, 266: 5318–5359
 - 21 Cheng J F, Du L L, Xin Z P. Incompressible impinging jet flow with gravity. [Calc Var Partial Differential Equations](#), 2023, 62: 110
 - 22 Du L L, Huang J L. The uniqueness and monotonicity of incompressible jet with two fluids. [Nonlinearity](#), 2022, 35: 4727–4748
 - 23 Du L L, Wang Y F. Collision of incompressible inviscid fluids effluxing from two nozzles. [Calc Var Partial Differential Equations](#), 2017, 56: 136
 - 24 Du L L, Wang Y F. Steady collision of two jets issuing from two axially symmetric channels. [SIAM J Math Anal](#), 2021, 53: 2523–2566
 - 25 Du L L, Zhao Y H. Injection of fluid from a slot into a stream: Uniqueness. [J Math Fluid Mech](#), 2024, 26: 61
 - 26 Finn R. Some theorems on discontinuous plane fluid motions. [J Anal Math](#), 1956, 4: 246–291
 - 27 Friedman A. Variational Principles and Free-Boundary Problems. Pure and Applied Mathematics. New York: John Wiley & Sons, 1982
 - 28 Friedman A. Injection of ideal fluid from a slot into a free stream. [Arch Ration Mech Anal](#), 1986, 94: 335–361
 - 29 Garabedian P R, Lewy H, Schiffer M. Axially symmetric cavitation flow. [Ann of Math \(2\)](#), 1952, 56: 560–602
 - 30 Gilbarg D. Jets and cavities. In: *Handbuch der Physik*, vol. 9. Part 3. Berlin: Springer-Verlag, 1960, 311–445
 - 31 Gurevich M I. The Theory of Jets in an Ideal Fluid. Oxford-New York-Toronto: Pergamon Press, 1966
 - 32 Huang F M, Kuang J, Wang D, et al. Stability of supersonic contact discontinuity for two-dimensional steady compressible Euler flows in a finite nozzle. [J Differential Equations](#), 2019, 266: 4337–4376
 - 33 Qu A, Xiang W. Three-dimensional steady supersonic Euler flow past a concave cornered wedge with lower pressure at the downstream. [Arch Ration Mech Anal](#), 2018, 228: 431–476
 - 34 Wang Y F, Xiang W. Two-phase fluids in collision of incompressible inviscid fluids effluxing from two nozzles. [J Differential Equations](#), 2019, 267: 6783–6830
 - 35 Wang Y G, Yu F. Stability of contact discontinuities in three-dimensional compressible steady flows. [J Differential Equations](#), 2013, 255: 1278–1356
 - 36 Wu T Y T. Cavity and wake flows. [Annu Rev Fluid Mech](#), 1972, 4: 243–284
 - 37 Xiang W, Zhang Y, Zhao Q. Two-dimensional steady supersonic exothermically reacting Euler flows with strong contact discontinuity over a Lipschitz wall. [Interfaces Free Bound](#), 2018, 20: 437–481

The uniqueness of the two-phase incompressible collision jet flows

Ruicen He & Yongfu Wang

Abstract Du and Wang (2017 and 2021) established the existence of solutions to the impinging outgoing jet problem of incompressible inviscid fluids issuing from two nozzles by a variational approach to two-dimensional or three-dimensional axial cases. However, when the free interface exhibits a nonzero constant jump in the Bernoulli constant, the velocity is discontinuous across the interface, and the uniqueness of solutions for such a case remains unresolved. Building on existence results, we prove the uniqueness of solutions to the two-dimensional collision jet flow problem when the velocity is discontinuous across the interface. Furthermore, we establish the uniqueness of the asymptotic direction parameter based on the monotonicity theorem for the asymptotic direction. Our proof is based on the moving-plane technique, the maximum principle, and rigorous analysis of free boundary conditions.

Keywords uniqueness, free boundaries, two-phase collision jet flows, contact discontinuity

MSC(2020) 76B10, 76B03, 35Q31

doi: 10.1360/SSM-2026-0019