



区组设计的 s - 旗传递性质

黄铮^{1*}, 蔡雷¹, 李冬梅¹, 刘伟俊^{2,3}

1. 湖南科技大学数学与统计学院, 湘潭 411201;

2. 中南大学数学与统计学院, 长沙 410083;

3. 广东科技学院通识教育学院, 东莞 523083

E-mail: huangzhengmath@163.com, CL114131@126.com, dmli@hnust.edu.cn, wjliu6210@126.com

收稿日期: 2024-09-04; 接受日期: 2024-12-14; 网络出版日期: 2025-03-06; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12401020, 12271154 和 12471022) 资助项目

摘要 设计的 s - 旗传递性质由旗传递性质推广而来. 本文首先详细介绍 s - 旗传递设计的基本概念与性质. 接着, 当设计的 s - 旗传递性质能够推广到任意小于 s 的正整数 s' 时, 称这种性质为关于 s 的向下遗传, 对应的设计简称为遗传的 s - 旗传递设计. 本文证明了遗传的 s - 旗传递设计的参数 s 的上界是 5. 最后完全分类了遗传的 4- 旗传递设计和 5- 旗传递设计.

关键词 s - 旗 s - 旗传递 遗传的 s - 旗传递设计 遗传性质

MSC (2020) 主题分类 05B05, 20B25

1 引言

令 $\mathcal{P}$ 表示 v 个点的集合, $\mathcal{B}$ 表示 b 个区的集合, 其中区是指 $\mathcal{P}$ 中点的 k - 子集. 一个 t - (v, k, λ) 区组设计是指满足 $\mathcal{P}$ 中任意 t 个点恰好出现在 $\mathcal{B}$ 中的 λ 个区里的有限关联结构 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$. 称 $\lambda = 1$ 的设计为 Steiner 设计, 称满足 $t < k < v$ 的设计为非平凡的设计. 令 $\mathcal{P}^{[k]}$ 表示点集 $\mathcal{P}$ 的所有 k - 子集构成的集合, 通常 $\mathcal{B} = \mathcal{P}^{[k]}$ 的设计称为完全设计, 完全设计也是平凡的设计. 如无特别说明, 本文所研究的所有设计都是非平凡的不完全设计. 设计 $\mathcal{D}$ 的旗是指由 $\mathcal{P}$ 中的点 x 和与之关联的区 B 构成的点区对 (x, B) , 而设计 $\mathcal{D}$ 的 s - 旗是指由 $\mathcal{P}^{[s]}$ 中的元素 S 和与之关联的区 B 构成的二元结构 (S, B) . 若点集上的置换依旧保持所有的区, 则称这个置换是设计的一个自同构. 设计 $\mathcal{D}$ 的所有自同构在置换的乘积下构成一个群, 记作 $\text{Aut}(\mathcal{D})$. $\text{Aut}(\mathcal{D})$ 的子群 G 也称为设计的自同构群. 如果 $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 在设计的旗集合 (区集合, 点的 s 长有序集合或点的 s 长无序集合) 上传递, 则称 G 是旗传递的 (区传递的, 点 s - 传递的或点 s - 齐次的), 相应的也称 $\mathcal{D}$ 是旗传递的 (区传递的, 点 s - 传递的或点 s - 齐次的).

具有旗传递性质的设计的分类问题一直是代数组合学里一个热门问题之一, 群理论的不断发展为组合设计的研究提供了坚实的理论支撑与新的研究方法. 迄今为止, 旗传递设计的分类问题中只有关

英文引用格式: Huang Z, Cai L, Li D M, et al. The s -flag-transitivity of designs (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 1627–1640, doi: 10.1360/SSM-2024-0272

于 Steiner 设计的部分得到了解决, 早在 1987 年 Kantor^[13] 就完成了对旗传递点本原 $2-(v, k, 1)$ 对称设计的分类工作. Buekenhout 等^[3,4] 的六人小组利用有限单群分类定理和有限本原置换群分类定理分类了除自同构群为一维仿射群以外的旗传递 Steiner 2- 设计, 但直到 Liebeck^[14] 和 Saxl^[17] 对该项工作进行了整理, 这项工作才最终完成. 2005-2007 年, Huber^[9-11] 先后分类刻画了旗传递 Steiner 3-, 4- 和 5- 设计, 并证明了不存在旗传递 Steiner 6- 设计, 到此为止旗传递 Steiner 设计的分类问题基本完全解决. 对于其他的旗传递设计的研究也取得一些有趣的成果, 文献 [16, 20, 21] 还研究了 $\lambda \neq 1$ 的旗传递对称设计, 本文不再一一介绍. 近年来, 周胜林和他的团队对旗传递设计 λ 较大 (不超过 100) 的情形和非对称的情形进行了一些研究, 参见文献 [18, 19] 及其参考文献等. 当然, 关于旗传递设计还有很多有趣的结果, 此处不再一一列出介绍.

尽管旗传递设计的研究已经取得丰富的成果, 但是离完全刻画还有很长一段路需要走. 为了推进这项工作的发展, 我们分析了学者们对旗传递设计的研究, 发现研究者经常会利用设计的 s - 旗来进行计数, 另外 s - 旗也可以作为一个研究旗传递设计的一个数量约束条件来确定或者排除某些情形. 事实上, 由旗自然推导来的 s - 旗也是设计一个延伸出来的关联结构, 而设计的自同构群在这个结构上的作用可以自然地得到设计的一种对称性, 即 s - 旗传递性, 因而我们也可以对这样的性质展开研究. 在 2022 年, 本文第一作者和第四作者合作发表了第一篇关于 s - 旗传递设计文章 (参见文献 [8]), 其后继续对该类设计展开了研究, 得到了一些相关的结论. 为了规范这类设计的研究, 使读者和相关研究者更深入地了解 s - 旗传递设计, 本文首先规范关于 s - 旗的各类定义; 然后给出设计是 s - 旗传递的充要条件; 最后为了更深入地研究 s - 旗传递设计, 定义 s - 旗传递设计关于 s 的遗传性质并对其进行一些研究.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节列出本文所需要的群论知识及设计的性质. 第 3 节给出 s - 旗、 s - 旗传递性和 s - 旗传递设计关于 s 向下遗传性质的定义, 并给出设计是 s - 旗传递设计的两个充要条件. 第 4 节研究遗传的 s - 旗传递设计, 给出 s 的上界并刻画遗传的 4- 旗传递设计和 5- 旗传递设计. 第 5 节提出一些关于 s - 旗传递设计值得关注的问题.

2 预备知识

首先介绍几个本文所需要的关于置换群与区组设计的经典结论.

定理 2.1^[15] 设 $k \geq 2$, $n \geq 2k$. 群 G 作用在 n 个点的 k - 无序子集构成的集合上是传递的, 则下面的结论也成立:

- (1) 群 G 在 n 个点的 $(k-1)$ - 有序子集构成的集合上是传递的, 该群是 $(k-1)$ - 重传递群;
- (2) 当 $k \geq 5$ 时, 群 G 在 n 个点的 k - 有序子集构成的集合上是传递的, 该群是 k - 重传递群.

定理 2.2^[12] 设 G 是作用在 n 个点的有限集合 Ω 上的 k - 齐次但不 k - 重传递的置换群, 其中 $n \geq 2k$, 则下面的情形成立:

- (1) $k = 2$, $G \leq \text{AGL}(1, q)$, 其中 $n = q \equiv 3 \pmod{4}$;
- (2) $k = 3$, $\text{PSL}(2, q) \leq G \leq \text{P}\Gamma\text{L}(2, q)$, 其中 $n - 1 = q \equiv 3 \pmod{4}$;
- (3) $k = 3$, $G \cong \text{AGL}(1, 8)$, $\text{AGL}(1, 8)$ 或 $\text{AGL}(1, 32)$;
- (4) $k = 4$, $G \cong \text{PSL}(2, 8)$, $\text{P}\Gamma\text{L}(2, 8)$ 或 $\text{P}\Gamma\text{L}(2, 32)$.

定理 2.3^[6] 当 $t \geq 4$ 时, 令 G 是作用在有限集合 Ω 上的 t - 重传递置换群.

- (1) 当 $t = n - 2$ 时, $G \cong A_n$, 其中 $n \geq 6$;

(2) 当 $t = n$ 时, $G \cong S_n$, 其中 $n \geq 4$;

(3) 当 $t = 4$ 时, $G \cong M_{11}$ 或 $G \cong M_{23}$;

(4) 当 $t = 5$ 时, $G \cong M_{12}$ 或 $G \cong M_{24}$.

引理 2.1^[1] 对于满足 $1 \leq s \leq t$ 的整数 s , 一个 t -(v, k, λ) 设计也是一个 s -(v, k, λ_s) 设计, 其中

$$\lambda_s = \lambda \frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}.$$

引理 2.2^[1] 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个非平凡的 t -(v, k, λ) 设计, 则有

(i) $bk = vr$;

(ii) $\binom{v}{t}\lambda = b\binom{k}{t}$;

(iii) 当 $t \geq 2$ 时, $r(k-1) = \lambda_2(v-1)$, 这里 λ_2 为包含给定两点的区组数.

下面这个引理容易由设计的定义以及多重传递群的性质得到, 故省略证明过程.

引理 2.3 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个非平凡的 Steiner t -设计. 若 $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 作用在 $\mathcal{D}$ 上是点 t -重传递的, 则 G 作用在 $\mathcal{D}$ 上是 s -旗传递的, 其中 $1 \leq s \leq t$.

本文关于 Mathieu 群的讨论较多, 为了方便后续的介绍, 本文规定一些符号. 用 $\Omega^{\{m\}}$ 表示集合 Ω 的所有 m -子集组成的集合. 令 Ω_n 表示 Mathieu 群 M_n 作用的 n 点集合. 每个 M_n 的元素都诱导出 $\Omega_n^{\{m\}}$ 上的一个置换, 因而 M_n 也可以看作 $\Omega_n^{\{m\}}$ 上的置换群. 但是对于某些满足 $m < n$ 的整数 m , M_n 在 $\Omega_n^{\{m\}}$ 上的作用不一定是传递的, 因而这个作用可能有不止一个轨道. 用 $\mathcal{O}_{m,1}^n, \mathcal{O}_{m,2}^n, \dots$ 表示 M_n 作用在 $\Omega_n^{\{m\}}$ 上的轨道, 这里当 $i \leq j$ 时, 总设 $|\mathcal{O}_{m,i}^n| \leq |\mathcal{O}_{m,j}^n|$.

下面介绍两个关于 Mathieu 群的结论.

引理 2.4^[8] 设 $G \cong M_{11}$, 令 ω_m 表示 G 作用在 $\Omega_{11}^{\{m\}}$ 上的轨道数, 下列结论成立:

(1) 若 $m = 5$, 则 $\omega_m = 2$ 且 $|\mathcal{O}_{5,1}^{11}| = 66$, $|\mathcal{O}_{5,2}^{11}| = 396$;

(3) 若 $m = 6$, 则 $\omega_m = 2$ 且 $\mathcal{O}_{6,i}^{11} = \{\Delta_6 \mid \Delta_6 = \Omega_{11} - \Delta_5, \Delta_5 \in \mathcal{O}_{5,i}^{11}\}$, $i = 1, 2$.

引理 2.5^[8] 设 $G \cong M_{12}$. 令 ω_6 表示 G 作用在 $\Omega_{12}^{\{6\}}$ 上的轨道数, 则 $\omega_6 = 2$ 且 $|\mathcal{O}_{6,1}^{12}| = 132$, $|\mathcal{O}_{6,2}^{12}| = 792$.

3 设计的 s -旗与 s -旗传递性质

3.1 设计的 s -旗与 s -旗传递性质的基本定义

本节详细介绍设计的 s -旗与 s -旗传递性质相关定义和性质. 首次给出设计的 s -旗的规范定义如下.

定义 3.1 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个设计, s 是一个正整数. 令 $\mathcal{P}^{\{s\}}$ 表示点集 $\mathcal{P}$ 的所有 s -子集构成的集合. 设计 $\mathcal{D}$ 的一个 s -旗是指满足 $S \in \mathcal{P}^{\{s\}}$ 和 $S \subset B \in \mathcal{B}$ 的二元集合 (S, B) . 为方便研究, 用 $\mathcal{F}_s(\mathcal{D})$ 表示设计所有 s -旗构成的集合.

s -旗的定义由设计的旗的定义推广而来, 当 $s = 1$ 时, “1-旗”就是通常说的“旗”. 注意, 对于点集的任意 s -子集, 只要存在区组包含它就可以构成一个 s -旗, 因此当 $s \leq k$ 时设计就一定存在某些 s -旗, 即 $\mathcal{F}_s(\mathcal{D})$ 非空. 显然, 当 $s > k$ 时, $\mathcal{F}_s(\mathcal{D})$ 为空集. 综上所述, 设计的 s -旗事实上是定义在 $s \leq k$ 的条件下的, 且此时有 $|\mathcal{F}_s(\mathcal{D})| = \binom{k}{s}b$.

对于设计的任意一个 s - 旗 (S, B) , 由设计的自同构 g 作用可得 $(S, B)^g = (S^g, B^g)$, 由于 $S \subset B$, 因此必有 $S^g \subset B^g$, 这意味着 $(S, B)^g \in \mathcal{F}_s(\mathcal{D})$, 进一步可知 $\mathcal{F}_s(\mathcal{D})^g = \mathcal{F}_s(\mathcal{D})$. 于是设计的每一个自同构都可诱导出设计 s - 旗集上的一个置换, 可以等同地看成是 $\mathcal{F}_s(\mathcal{D})$ 的置换, 因此有 $\text{Aut}(\mathcal{D}) \leq \text{Aut}(\mathcal{F}_s(\mathcal{D}))$. 于是可推导出设计 s - 旗传递性质的定义:

定义 3.2 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个设计, 如果 $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 作用在设计 s - 旗集合 $\mathcal{F}_s(\mathcal{D})$ 上传递, 则称 G 是 s - 旗传递的, 相应地称 $\mathcal{D}$ 是具有 s - 旗传递性质的设计.

因为任意一个 s - 旗都与集合 $\mathcal{P}^{\{s\}}$ 和 $\mathcal{B}$ 相关联, 所以当 s 满足定义时, 每一个区组都与 $\binom{k}{s}$ 个 s - 旗相关联. 但是对于 $\mathcal{P}^{\{s\}}$ 里的任意 s - 子集, 当 $s \leq k$ 时是否总是存在 s - 旗与之相关联呢? 答案是否定的, 因为当满足条件 $t < s \leq k$ 时, 由设计的定义与性质并不能保证每一个 s - 旗都存在关联的 s - 旗, 这时 $\mathcal{P}^{\{s\}}$ 不具备普遍性或者说里面的 s - 子集在设计 s - 旗集合里的地位并不一致, 这时集合上的性质特别是群作用下的传递性不具备全局上的研究价值. 因此即使设计具有 s - 旗传递性, 这个性质也无法用来描述设计在其结构整体上的对称性. 鉴于性质研究必须对结构研究有意义, 所以在研究具体的 t - 设计的 s - 旗传递性时规定 $s \leq t$. 于是定义 3.2 应当规范为如下定义:

定义 3.3 对于满足 $1 \leq s \leq t$ 的整数 s , 如果 $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 作用在设计 s - 旗集合 $\mathcal{F}_s(\mathcal{D})$ 上传递, 则称 G 是 s - 旗传递的, 相应地称 $\mathcal{D}$ 是具有 s - 旗传递性质的设计.

注意, 由引理 2.1 可知, 对任意满足 $s \leq t$ 的整数 s , 原设计也可看成是一个 s - 设计. 由设计的定义可知, 任意一个点集的 s - 子集恰好包含在 λ_s 个区组里. 因此对于任意给定的 s - 子集, 与其关联的 s - 旗个数为 λ_s . 所以由 $\mathcal{P}^{\{s\}}$ 出发计数可知 $|\mathcal{F}(\mathcal{D})_s| = \binom{v}{s} \lambda_s$.

在严格规范了设计的 s - 旗传递性质的定义之后, 借鉴研究者对设计旗传递性质的研究思路, 下面给出设计是 s - 旗传递设计的两个充要条件.

定理 3.1 (第一充要条件) 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个 t - (v, k, λ) 设计, 其中 $t \geq 2$. 设 $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$, $1 \leq s \leq t$, 则 G 在 $\mathcal{D}$ 上是 s - 旗传递的当且仅当 G 在 $\mathcal{B}$ 上传递, 且对于某个区组 B , G_B 作用在区组 B 的点是 s - 齐次的.

证明 充分性 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是满足题设条件的设计, 任取设计 $\mathcal{D}$ 的两个 s - 旗 (S_1, B_1) 和 (S_2, B_2) . 根据设计的区传递性可知存在 $g_1, g_2 \in G$ 使得 $B^{g_1} = B_1$ 和 $B^{g_2} = B_2$, 于是存在两个 s - 子集 $S_3, S_4 \subseteq B$ 使得 $S_3^{g_1} = S_1$ 和 $S_4^{g_2} = S_2$. 又因为 G_B 作用在 B 的点是 s - 齐次的, 所以存在 $h \in G_B$ 使得 $(S_3, B)^h = (S_4, B)$. 因而存在 $g^{-1}hg_2 \in G$ 使得 $(S_1, B_1)^{g^{-1}hg_2} = (S_3, B)^{hg_2} = (S_4, B)^{g_2} = (S_2, B_2)$. 因此 G 在 $\mathcal{D}$ 上是 s - 旗传递的.

必要性 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个 s - 旗传递的设计, 对任意两个 s - 旗 (S_1, B_1) 和 (S_2, B_2) , 存在 $g \in G$ 使得 $(S_1, B_1)^g = (S_2, B_2)$, 根据 s - 旗选取的任意性可知区传递性. 对于任意两个 s - 子集 $S_3, S_4 \subseteq B$, 由设计的 s - 旗传递性可知, 存在 $h \in G$ 使得 $(S_3, B)^h = (S_4, B)$, 此时有 $h \in G_B$, 再根据 S_3 和 S_4 的任意性可知 G_B 作用在 B 的点是 s - 齐次的. $\square$

定理 3.2 (第二充要条件) 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个 t - (v, k, λ) 设计, 其中 $t \geq 2$. 设 $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$, $1 \leq s \leq t$, 则 G 在 $\mathcal{D}$ 上是 s - 旗传递的当且仅当 G 在 $\mathcal{P}$ 上 s - 齐次, 且对于 $\mathcal{P}$ 的某 s - 子集 S , 集型稳定子群 G_S 在包含 S 的区组构成的集合上传递.

证明 充分性 设 G 在 $\mathcal{P}$ 上 s - 齐次, 且对于 $\mathcal{P}$ 的某 s - 子集 S , 集型稳定子群 G_S 在包含 S 的区组构成的集合上传递. 对于任意两个 s - 旗 (S_1, B_1) 和 (S_2, B_2) , 由于 G 在 $\mathcal{P}$ 上 s - 齐次, 故存在 $g_1, g_2 \in G$ 使得 $S_1^{g_1} = S$ 且 $S_2^{g_2} = S$, 于是有 $(S_1, B_1)^{g_1} = (S, B_1^{g_1})$ 和 $(S_2, B_2)^{g_2} = (S, B_2^{g_2})$. 又因为集型稳定子群 G_S 在包含 S 的区组构成的集合上传递, 因此存在 $g_3 \in G_S \subseteq G$ 使得 $(S, B_1^{g_1})^{g_3} = (S, B_2^{g_2})$,

从而存在 $g_1 g_3 g_2^{-1} \in G$ 使得 $(S_1, B_1)^{g_1 g_3 g_2^{-1}} = (S_2, B_2)$. 综上可知 G 在 $\mathcal{D}$ 上是 s -旗传递的.

必要性 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个 s -旗传递的设计, 对任意两个 s -旗 (S_1, B_1) 和 (S_2, B_2) , 存在 $g \in G$ 使得 $(S_1, B_1)^g = (S_2, B_2)$, 根据 s -旗选取的任意性可知设计的点 s -齐次性. 对于任意两个包含某 s -子集的区域 B_1 和 B_2 , 由设计的 s -旗传递性可知, 存在 $h \in G$ 使得 $(S, B_1)^h = (S, B_2)$, 此时 h 包含在集型稳定子群 G_S 中, 再根据 B_1 和 B_2 的任意性可知 G_S 在包含 S 的区域构成的集合上传递. $\square$

注意, 上述两个充要条件对任意的 s -旗传递设计都是成立的 (对平凡的设计也是成立的), 具备普遍性.

3.2 具有遗传性质的 s -旗传递性质

规范了 s -旗传递性质的定义后, 本小节展开对具有 s -旗传递性质的设计的研究. 首先注意下面这个事实.

定理 3.3 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个非平凡的 t -设计. 对于任意 $1 \leq s \leq t$, 若 $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 作用在 $\mathcal{D}$ 上是 s -旗传递的, 且如果 $k-s \leq t$, 则 $\mathcal{D}$ 也是 $(k-s)$ -旗传递的.

证明 对于任意 $(S_1, B_1), (S_2, B_2) \in \mathcal{F}_{k-s}(\mathcal{D})$, 用 $B_1 - S_1$ 和 $B_2 - S_2$ 分别表示集合 B_1 去除 S_1 后余下部分构成的集合和 B_2 去除 S_2 后余下部分构成的集合, 于是有 $(B_1 - S_1, B_1), (B_2 - S_1, B_2) \in \mathcal{F}_s(\mathcal{D})$. 根据设计的 s -旗传递性可知存在 $g \in G$ 使得 $(B_1 - S_1, B_1)^g = (B_2 - S_1, B_2)$, 因此 $(S_1, B_1)^g = (S_2, B_2)$, 再根据 $(k-s)$ -旗选取的任意性可知设计也是 $(k-s)$ -旗传递的. $\square$

这个定理表明, 在研究 s -旗传递设计时只需要考虑 $s \leq \frac{k}{2}$ 的 s 取值部分即可, 对于 $s > \frac{k}{2}$ 的 s , 当 $s \leq t$ 时必定有 $k-s \leq t$, 此时如果设计是 $(k-s)$ -旗传递的则必是 s -旗传递的. 同时值得注意的是, 这个定理也说明了设计的每一个满足 $s > \frac{k}{2}$ 的 s -旗传递性事实上都与一个较小的 s -旗传递性对应. 但是对于这些较大的 s 而言, 对于任意 $s' < s$, 设计的 s -旗传递性并不能总推导出 s' -旗传递性. 例如, 对于一个 $k=8$ 的 2-旗传递 4-设计, 如果其自同构群不是 3-齐次的, 则容易推导出这个设计必不具备 3-旗传递性, 更不会有 5-旗传递性, 但由定理 3.3 可知其具备 6-旗传递性. 因此对于任意 $s' < s$, 能够由 s -旗传递性推导出 s' -旗传递性的这类设计是非常特殊且具备相当高的对称性的, 为了研究清楚设计的 s -旗传递性, 本文给出如下定义:

定义 3.4 设 $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 作用在非平凡设计 $\mathcal{D}$ 上是 s -旗传递的, 若对于任意 $s' < s$, G 作用在设计 $\mathcal{D}$ 上也是 s' -旗传递的, 则称这种现象为设计 s -旗传递性的遗传性质, 称 G 是关于 s 向下遗传的 s -旗传递的, 也称设计 $\mathcal{D}$ 是具有关于 s 向下遗传性质的 s -旗传递设计, 简称为遗传 s -旗传递设计; 反之, 则称 $\mathcal{D}$ 是非遗传的 s -旗传递设计.

注 3.1 当 $s=1$ 时, 通常意义下的旗传递设计也称是遗传的旗传递设计.

下面具体研究遗传的 s -旗传递设计的参数约束条件. 通过下面这个定理来说明 $s \leq \frac{k}{2}$ 部分的 s -旗传递性质的重要性.

定理 3.4 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个非平凡的 t -设计. 对于任意 $2 \leq s \leq t$, 若 $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 作用在 $\mathcal{D}$ 上是 s -旗传递的, 且如果 $s \leq \frac{k}{2}$, 则 $\mathcal{D}$ 也是 $(s-1)$ -旗传递的, 进一步 $\mathcal{D}$ 是遗传的 s -旗传递的.

证明 对于任意 $(S_1, B_1), (S_2, B_2) \in \mathcal{F}_{s-1}(\mathcal{D})$, 取 $x \in B_1 - S_1, y \in B_2 - S_2$, 则有 $(S_1 \cup \{x\}, B_1), (S_2 \cup \{y\}, B_2) \in \mathcal{F}_s(\mathcal{D})$. 由设计的 s -旗传递性可知存在 $g \in G$ 使得 $(S_1 \cup \{x\}, B_1)^g = (S_2 \cup \{y\}, B_2)$. 记 $S_1^g = S_3$, 显然 $S_3 \subseteq S_2 \cup \{y\} \subseteq B_2$. 再次利用设计的 s -旗传递性可知 G_B 作用在 B 的点是 s -齐次的, 又由条件 $s \geq 2$ 和 $k \geq 2s$, 所以由定理 2.1(1) 可知 G_B 作用在 B 的点是 $(s-1)$ -重传递的. 由于 S_2 和 S_3 都是 B_2 的 $(s-1)$ -子集, 所以存在 $g' \in G_{B_2}$, 使得 $(S_3, B_2)^{g'} = (S_2, B_2)$. 这时

$(S_1, B_1)^{gg'} = (S_3, B_2)^{g'} = (S_2, B_2)$, 且显然有 $gg' \in G$, 因此可得设计的 $(s-1)$ - 旗传递性. 再根据定义, 由归纳递推可知 $\mathcal{D}$ 是遗传的 $(s-1)$ - 旗传递设计. $\square$

接下来可以得到如下关于非遗传的 s - 旗传递设计的推论.

推论 3.1 设 $\mathcal{D}$ 是一个非平凡的设计. 若对某个满足定义的 s , $\mathcal{D}$ 是一个非遗传的 s - 旗传递设计, 则 $\mathcal{D}$ 一定是一个遗传的 $(k-s)$ - 旗传递设计.

证明 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个非遗传的 s - 旗传递 $t(v, k, \lambda)$ 设计, 由定理 3.3 可知 $s > \frac{k}{2}$, 所以 $(k-s) < \frac{k}{2}$. 显然, $(k-s) < s \leq t$, 因而根据定理 3.4 可知设计是 $(k-s)$ - 旗传递设计, 再由定理 3.4 可知 $\mathcal{D}$ 一定是一个遗传的 $(k-s)$ - 旗传递设计. $\square$

根据上面这个推论不难看出, 设计的每一个非遗传的 s - 旗传递性质都与某个遗传的 s' - 旗传递性质一一对应. 这是因为每一个遗传的 s - 旗传递设计的 s - 旗集合与该设计的一个 $(k-s)$ - 旗集合一一对应, 如果将 $(B-S, B)$ 称为 s - 旗 (S, B) 的 s - 补旗, 则这样的 s - 旗集合与它的 s - 补旗集合一一对应, 并且 $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 作用在 s - 旗集合上是传递的当且仅当作用在其 s - 补旗集合上也是传递的. 综上所述可知, 在刻画具有 s - 旗传递性质的设计时, 只需要将所有遗传的 s - 旗传递设计刻画出来即可, 非遗传 s - 旗传递性都可以由某个遗传的 s' - 旗传递性在其 s' - 补旗集上得到.

4 遗传的 s - 旗传递设计

遗传的 s - 旗传递设计的研究主要集中在该类设计的分类刻画, 是研究 s - 旗传递设计的核心课题. 依据第二充要条件可知任意一个 s - 旗传递设计的自同构群作用在设计点集上是 s - 齐次的, 根据有限 s - 齐次群分类定理, 将所有的 s - 旗传递设计分成如下两大类展开研究:

第一类, 设计的自同构群作用在设计点集上是一个 s - 齐次群且满足 $v \geq 2s$;

第二类, 设计的自同构群作用在设计点集上是一个 s - 齐次群且满足 $v < 2s$.

需要说明的是, 第二类也可能存在. 例如, 7 个点上的 3- 齐次群作用在这 7 点上也是 4- 齐次的但不是这 7 个点上的 4- 齐次群, 当 t 和 s 都取 4 时, 如果能够做到 3- 旗传递, 则需要讨论这样的 3- 旗传递是否是遗传的, 如果是, 则根据定义可知该设计是遗传的 4- 旗传递的.

值得注意的是, 由引理 2.1 可知任意 $t > s$ 的 t - 设计都可以看作一个 s - 设计, 而根据定义有 $t \geq s$, 所以在研究某个给定 s 的遗传的 s - 旗传递 t - 设计的分类问题时, 只要将所有遗传的 s - 旗传递 s - 设计进行刻画, 实际上所有遗传的 s - 旗传递设计的点集和区集结构就都清楚了, 只需要进一步对 t 这个参数进行研究分析即可.

4.1 s 的上界

由第 3.2 小节中给出的遗传的 s - 旗传递性质的定义可知, 该性质事实上是一种高度的对称性, 但是这样的对称性关于 s 的取值并不是无限存在的, 所以关于 s 的取值上界的寻找是需要考虑的问题, 即刻画出遗传的 s - 旗传递设计的参数 s 的上界. 下面这个定理给出了这个上界.

定理 4.1 若 $\mathcal{D}$ 是遗传的 s - 旗传递性质的设计, 则 $s \leq 5$.

证明 下面用反证法证明. 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个非平凡的 $t(v, k, \lambda)$ 设计, 由定义 3.4 可知, 如果设计是遗传的 s - 旗传递设计, 其中 $s \geq 6$, 则 $\mathcal{D}$ 一定是遗传的 6- 旗传递设计. 又由 s - 旗的定义可知 $t \geq 6$, 因此根据引理 2.1 不妨设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个遗传的 6- 旗传递 $6(v, k, \lambda)$ 设计. 由第二充要条件

可知 $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 作用在 $\mathcal{P}$ 上应是 6- 齐次的. 又由第一充要条件可知 6- 旗传递设计一定是区传递的, 因此 $\mathcal{B}$ 应该是 G 作用在 $\mathcal{P}^{\{k\}}$ 上的完整轨道.

下面首先设 $v \geq 12$, 根据定理 2.1 可知 G 是 $\mathcal{P}$ 上的 6- 齐次群. 由定理 2.2 和 2.3 可知 $G \cong A_v$ ($v \geq 13$) 或 $G \cong S_v$ ($v \geq 13$). 若 $G \cong A_v$, 由于此时 G 是 $v-2$ 重传递的, 如果 $k \leq (v-2)$, 此时 $\mathcal{B}$ 取 $\mathcal{P}$ 所有 k - 子集构成的集合, 设计是平凡的设计; 如果 $k = v-1$, 此时 $|\mathcal{P}^{\{v-1\}}| = v$, 根据 Fisher 不等式可知此时必有 $\mathcal{B} = \mathcal{P}^{\{v-1\}}$, 设计也是平凡的. 若 $G \cong S_v$, 由于此时 G 是 v 重传递的, 此时对应的区传递的设计总是平凡的. 再设 $8 \leq v \leq 11$, 当 $v = 11$ 时, 有 $k = 7, 8, 9$ 或 10 , 然后根据引理 2.1 和 2.2 的参数约束可知此时 $\mathcal{D}$ 是一个 6-(11, 7, 5) 设计或 6-(11, 8, 10) 设计或 6-(11, 9, 10) 设计或 6-(11, 10, 5) 设计, 这 4 个设计都是平凡的. 当 $v = 8, 9, 10$ 时, 类似地分析可知可能的 6- 旗传递设计都是平凡的.

综上所述, 不存在遗传的 6- 旗传递设计, 结论成立. $\square$

4.2 第二类遗传的 s - 旗传递设计

对于遗传的 s - 旗传递设计而言, 如果第二类的设计不存在, 则可以依托于有限 s - 齐次群的分类定理对其展开刻画分类. 下面这个定理证明了这个事实.

定理 4.2 不存在第二类遗传的 s - 旗传递性质的非平凡设计.

证明 设 $\mathcal{D}$ 是一个第二类遗传的 s - 旗传递 s -(v, k, λ) 设计. 由定理 4.1 可知 $2 \leq s \leq 5$. 又根据设计的非平凡性和 s - 旗传递的遗传性质, 我们有 $v > k > s$, 于是有约束条件 $s+2 \leq v \leq 2s-1$. 下面需要根据 s 的取值不同, 一一展开讨论予以排除. 由于每一类的讨论方法类似, 此处以 $s = 5$ 为例予以介绍, 其他情形不再一一详述. 当 $s = 5$ 时, 此时由约束条件 $s+2 \leq v \leq 2s-1$ 知 $v = 7, 8$ 或 9 . 当 $v = 7$ 时, $k = 6$, 这时对应的设计是一个平凡的 5-(7, 6, 2) 设计. 当 $v = 8$ 时, $k = 6$ 或 $k = 7$. 若 $k = 7$, 这时对应的设计是一个平凡的 5-(8, 7, 3) 设计. 若 $k = 6$, $\mathcal{D}$ 是一个 5-(8, 6, λ) 设计, 此时 $b \leq \binom{v}{k} = 28$, 又由引理 2.1 和 2.2 可知 $b = \binom{v}{k} \lambda_2 = \frac{28\lambda_2}{15} \leq 28$, 这说明 $b = \binom{v}{k} = 28$, 对应的设计是一个平凡的 5-(8, 6, 3) 设计. 当 $v = 9$ 时, $k = 6$ 或 $k = 7$ 或 $k = 8$. 若 $k = 8$, 这时对应的设计是一个平凡的 5-(9, 8, 2) 设计. 若 $k = 7$, $\mathcal{D}$ 是一个 5-(9, 7, λ) 设计, 此时 $b \leq \binom{v}{k} = 36$, 又根据引理 2.1 和 2.2, 一方面可知 $b = \binom{v}{k} \lambda_2 = \frac{12\lambda_2}{7}$, 这说明 $12 \mid b$; 另一方面有 $b = \binom{v}{k} \lambda_4 = \frac{18\lambda_2}{7}$, 这说明 $18 \mid b$, 因此必有 $b = 36$, 此时对应的设计是一个平凡的 5-(9, 7, 6) 设计. 若 $k = 6$, $\mathcal{D}$ 是一个 5-(9, 6, λ) 设计, 此时 $b \leq \binom{v}{k} = 84$, 又根据引理 2.1 和 2.2, 一方面可知 $b = \binom{v}{k} \lambda = 21\lambda$, 这说明 $21 \mid b$; 另一方面有 $b = \binom{v}{k} \lambda_2 = \frac{12\lambda_2}{5}$, 这说明 $12 \mid b$, 因此必有 $b = 84$, 对应的设计是一个平凡的 5-(9, 6, 4) 设计.

综上所述, 不存在第二类非平凡的遗传 s - 旗传递设计. $\square$

由此可知, 非平凡遗传的 s - 旗传设计都是第一类的.

4.3 s 较大的遗传的 s - 旗传递设计

2022 年, Huang 等^[8] 对第一类的 $s = 4$ 和 $s = 5$ 的 s - 旗传递设计进行规约得到了如下两个定理:

定理 4.3 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个 t -(v, k, λ) 设计. $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 作用在 $\mathcal{D}$ 上 4- 旗传递当且仅当下面的情形之一成立.

(1) $\mathcal{D}$ 同构于一个 4-(33, 5, 4) 设计, $G \cong \text{PTL}(2, 32)$. 这个设计的点集是 $\text{GF}(2^5) \cup \{\infty\}$, 区集 $\mathcal{B} = B^G$, 其中 B 是一个被有限域 $\text{GF}(2^5)$ 的 Frobenius 自同构稳定的 $\text{GF}(2^5)$ 的 5- 子集.

(2) $G \cong M_{11}$, $\mathcal{P} = \Omega_{11}$, $\mathcal{D}$ 同构于 Mathieu-Witt4-(11, 5, 1) 设计, $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{5,2}^{11}$ 的 4-(11, 5, 6) 设计或 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,1}^{11}$ 的 4-(11, 6, 3) 设计.

(3) $G \cong M_{12}$, $\mathcal{P} = \Omega_{12}$, $\mathcal{D}$ 同构于 Mathieu-Witt5-(12, 6, 1) 设计或满足 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,2}^{12}$ 的 5-(12, 6, 6) 设计.

(4) $G \cong M_{23}$, $\mathcal{P} = \Omega_{23}$, $\mathcal{D}$ 为参数满足 $(k, \lambda) = (5, 3), (5, 16), (6, 3), (6, 24), (7, 1), (7, 16), (8, 4)$ 或 (11, 48) 的 4- 设计, 对应的区集依次为 $\mathcal{O}_{5,1}^{23}, \mathcal{O}_{5,2}^{23}, \mathcal{O}_{6,1}^{23}, \mathcal{O}_{6,2}^{23}, \mathcal{O}_{7,1}^{23}, \mathcal{O}_{7,2}^{23}, \mathcal{O}_{8,1}^{23}$ 和 $\mathcal{O}_{11,1}^{23}$.

(5) $G \cong M_{24}$, $\mathcal{P} = \Omega_{24}$, $\mathcal{D}$ 的参数满足 $(k, \lambda) = (6, 3), (6, 16), (7, 3), (8, 1), (11, 336)$ 或 (12, 48) 的 5- 设计, 且对应的区集依次为 $\mathcal{O}_{6,1}^{24}, \mathcal{O}_{6,2}^{24}, \mathcal{O}_{7,1}^{24}, \mathcal{O}_{8,1}^{24}, \mathcal{O}_{11,1}^{24}$ 和 $\mathcal{O}_{12,1}^{24}$.

特别地, (3) 和 (5) 中的 5- 设计作为 4- 设计时也是 4- 旗传递的.

定理 4.4 设 $\mathcal{D}$ 是一个 t - 设计. $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 作用在 $\mathcal{D}$ 上 5- 旗传递当且仅当下面的情形之一成立.

(1) $G \cong M_{12}$, $\mathcal{P} = \Omega_{12}$, $\mathcal{D}$ 同构于 Mathieu-Witt5-(12, 6, 1) 设计或满足 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,2}^{12}$ 的 5-(12, 6, 6) 设计;

(2) $G \cong M_{24}$, $\mathcal{P} = \Omega_{24}$, $\mathcal{D}$ 的参数满足 $(k, \lambda) = (6, 3), (6, 16), (7, 3), (8, 1)$ 或 (12, 48), 对应的区集依次为 $\mathcal{O}_{6,1}^{24}, \mathcal{O}_{6,2}^{24}, \mathcal{O}_{7,1}^{24}, \mathcal{O}_{8,1}^{24}$ 和 $\mathcal{O}_{12,1}^{24}$.

下面根据遗传的 s - 旗传递设计的定义, 以上述两个定理为基础结合定理 4.2 展开对 $s = 4$ 和 $s = 5$ 的遗传的 s - 旗传递设计的规约.

4.3.1 遗传的 4- 旗传递设计

本小节研究遗传的 4- 旗传递 4- 设计, 得到如下定理:

定理 4.5 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个非平凡 4- (v, k, λ) 设计, $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$. $\mathcal{D}$ 是遗传的 4- 旗传递设计当且仅当下面的情形之一成立.

(1) $G \cong M_{11}$, $\mathcal{P} = \Omega_{11}$, $\mathcal{D}$ 同构于 Mathieu-Witt4-(11, 5, 1) 设计, $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{5,2}^{11}$ 的 4-(11, 5, 6) 设计或 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,1}^{11}$ 的 4-(11, 6, 3) 设计.

(2) $G \cong M_{12}$, $\mathcal{P} = \Omega_{12}$, $\mathcal{D}$ 同构于 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,2}^{12}$ 的 4-(12, 6, 4) 设计或 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,2}^{12}$ 的 4-(12, 6, 24) 设计.

(3) $G \cong M_{23}$, $\mathcal{P} = \Omega_{23}$, $\mathcal{D}$ 同构于下列设计之一:

- (i) 区集 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{5,1}^{23}$ 的 4-(23, 5, 3) 设计;
- (ii) 区集 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{5,2}^{23}$ 的 4-(23, 5, 16) 设计;
- (iii) 区集 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,1}^{23}$ 的 4-(23, 6, 3) 设计;
- (iv) 区集 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,2}^{23}$ 的 4-(23, 6, 24) 设计;
- (v) Mathieu-Witt4-(23, 7, 1) 设计;
- (vi) 区集 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{7,2}^{23}$ 的 4-(23, 7, 16) 设计;
- (vii) 区集 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{8,1}^{23}$ 的 4-(23, 8, 4) 设计;
- (viii) 区集 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{11,1}^{23}$ 的 4-(23, 11, 48) 设计.

(4) $G \cong M_{24}$, $\mathcal{P} = \Omega_{24}$, $\mathcal{D}$ 是下列设计之一:

- (i) 区集 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,1}^{24}$ 的 4-(24, 6, 30) 设计;
- (ii) 区集 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,2}^{24}$ 的 4-(24, 6, 160) 设计;
- (iii) 区集 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{7,1}^{24}$ 的 4-(24, 7, 20) 设计;
- (iv) 区集 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{8,1}^{24}$ 的 4-(24, 8, 5) 设计;
- (v) 区集 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{11,1}^{24}$ 的 4-(24, 11, 960) 设计;
- (vi) 区集 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{12,1}^{24}$ 的 4-(24, 12, 120) 设计.

在证明这个结论之前, 首先给出如下几个命题.

命题 4.1 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是满足 $\mathcal{P} = \Omega_{11}$, $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{5,2}^{11}$ 和 $M_{11} = G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 的 4 -(11, 5, 6) 设计, 则对于任意 $B \in \mathcal{B}$, G_B 作用在 B 的点是 2- 齐次的.

证明 由引理 2.4 有 $|\mathcal{O}_{5,2}^{11}| = 396$. 设 $B \in \mathcal{B}$, 则由区传递性有 $|G_B| = \frac{|G|}{b} = 20$. 令 $\Omega_{11} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, 利用数学软件 MAGMA^[2] 计算可知 M_{11} 的 20 阶子群只有一个共轭类, 其中的一个 20 阶子群为 $H = \langle (1, 11, 9, 4)(5, 7, 10, 6), (1, 11, 4, 9, 2)(5, 7, 6, 10, 8) \rangle$. 记 $a = (1, 11, 9, 4)(5, 7, 10, 6)$, $b = (1, 11, 4, 9, 2)(5, 7, 6, 10, 8)$. 因此 G_B 与 H 共轭, 则存在 $g \in G$ 使得 $G_B^g = H$, 即 $H = G_{B^g}$. 记 $B' = B^g$, 显然 $B' \in \mathcal{B}$. 下面确认 B' 的结构, 注意, 若 1, 2, 4, 9, 11 中任意一点在 B' 中, 则 $B' = \{1, 2, 4, 9, 11\}$; 若 5, 6, 7, 8, 10 中任意一点在 B' 中, 则 $B' = \{5, 6, 7, 8, 10\}$. 根据 B' 的点选取范围和长度可知 $B' = \{1, 2, 4, 9, 11\}$ 或 $B' = \{5, 6, 7, 8, 10\}$. 注意 H 的结构, 不难看出这两种取法事实上是等价的, 因此探究其中一种情形即可, 另一个对应的用相同方法可处理. 不失一般性, 设 $B' = \{1, 2, 4, 9, 11\}$, 此时有 $\{1, 2\}^{ab} = \{4, 1\}$, $\{1, 2\}^{a^3b} = \{9, 1\}$, $\{1, 2\}^b = \{11, 1\}$, $\{1, 2\}^{a^3} = \{4, 2\}$, $\{1, 2\}^{a^2} = \{9, 2\}$, $\{1, 2\}^a = \{11, 2\}$, $\{1, 2\}^{b^3} = \{9, 4\}$, $\{1, 2\}^{b^2} = \{4, 11\}$ 和 $\{1, 2\}^{ba} = \{9, 11\}$, 因此 $G_{B'}$ 作用在 B' 的点集上是 2- 齐次的, 再由设计的区传递性可知, 对于任意 $B \in \mathcal{B}$, G_B 作用在 B 的点集上是 2- 齐次的. $\square$

命题 4.2 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是满足 $\mathcal{P} = \Omega_{11}$, $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,1}^{11}$ 和 $M_{11} = G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 的 4 -(11, 6, 3) 设计, 则对于任意 $B \in \mathcal{B}$, G_B 作用在 B 的点集上是 3- 齐次的.

证明 由引理 2.4 有 $|\mathcal{O}_{6,1}^{11}| = 66$, 设 $B \in \mathcal{B}$, 由区传递性有 $|G_B| = \frac{|G|}{b} = 120$. 令 $\Omega_{11} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, 利用数学软件 MAGMA^[2] 计算可知 M_{11} 的 120 阶子群只有一个共轭类, 其中的一个 120 阶子群为 $H = \langle (1, 10)(2, 6)(3, 9)(4, 7), (1, 7, 9, 4, 3, 10)(2, 8)(5, 6, 11) \rangle$. 记 $a = (1, 10)(2, 6)(3, 9)(4, 7)$, $b = (1, 7, 9, 4, 3, 10)(2, 8)(5, 6, 11)$ 和 $\Delta = \{1, 3, 4, 7, 9, 10\}$. 不难看出 $H \leq G_\Delta$, 于是 $|G_\Delta| \geq 120$. 注意由引理 2.4 知 M_{11} 在 $\Omega_{11}^{\{6\}}$ 上有两个轨道 $\mathcal{O}_{6,1}^{11}$ 和 $\mathcal{O}_{6,2}^{11}$. 由 $|\mathcal{O}_{6,2}^{11}| = 396$ 知, 对于任意 $\Delta_6 \in \mathcal{O}_{6,2}^{11}$, 有 $|G_{\Delta_6}| = 20$, 这意味着 $\Delta \in \mathcal{B}$ 且 $G_\Delta = H$. 注意此时有 $\{1, 3, 4\}^{ab^5} = \{3, 7, 1\}$, $\{1, 3, 4\}^{ab^3a} = \{3, 1, 9\}$, $\{1, 3, 4\}^{b^2a} = \{3, 10, 1\}$, $\{1, 3, 4\}^{b^3} = \{4, 7, 1\}$, $\{1, 3, 4\}^{ab} = \{1, 4, 9\}$, $\{1, 3, 4\}^{ab^4} = \{4, 1, 10\}$, $\{1, 3, 4\}^{b^2ab^2} = \{1, 7, 9\}$, $\{1, 3, 4\}^{ab^4a} = \{7, 10, 1\}$, $\{1, 3, 4\}^{b^2} = \{9, 1, 10\}$, $\{1, 3, 4\}^{ab^2} = \{7, 3, 4\}$, $\{1, 3, 4\}^{b^4a} = \{9, 3, 4\}$, $\{1, 3, 4\}^{b^4ab} = \{4, 10, 3\}$, $\{1, 3, 4\}^{b^4} = \{3, 9, 7\}$, $\{1, 3, 4\}^b = \{7, 10, 3\}$, $\{1, 3, 4\}^{ab^3} = \{9, 10, 3\}$, $\{1, 3, 4\}^{ab^2a} = \{4, 9, 7\}$, $\{1, 3, 4\}^{b^3a} = \{7, 4, 10\}$, $\{1, 3, 4\}^{b^5} = \{10, 4, 9\}$ 和 $\{1, 3, 4\}^a = \{10, 9, 7\}$. 这意味着 G_Δ 作用在 Δ 的点集上是 3- 齐次的. 再根据 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,1}^{11}$ 和 $M_{11} \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 易知这个设计是区传递的, 因此对于任意 $B \in \mathcal{B}$, G_B 作用在 B 的点是 3- 齐次的. $\square$

命题 4.3 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是满足 $\mathcal{P} = \Omega_{12}$, $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,2}^{12}$ 和 $M_{12} = G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 的设计, 则对于任意 $B \in \mathcal{B}$, G_B 作用在 B 的点集上是 3- 齐次的.

证明 注意, 对于任意 $B \in \mathcal{O}_{6,2}^{12}$, $\Omega_{12} - B$ 也是一个 6- 子集. 对于任意 $B_1, B_2 \in \mathcal{O}_{6,2}^{12}$, 存在 $g \in M_{12}$ 使得 $B_1^g = B_2$, 于是也有 $(\Omega_{12} - B_1)^g = \Omega_{12} - B_2$, 这意味着 $\mathcal{O}_{6,2}^{12}$ 中任意 6- 子集的余集也在同一个轨道里. 因此 $|(\Omega_{12} - B)^{M_{12}}| \geq |\mathcal{O}_{6,2}^{12}|$. 再由引理 2.5 可知 $(\Omega_{12} - B)^{M_{12}} = \mathcal{O}_{6,2}^{12}$. 所以对于任意 $B \in \mathcal{O}_{6,2}^{12}$, 有 $\Omega_{12} - B \in \mathcal{O}_{6,2}^{12}$. 又根据 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,2}^{12}$ 和 $M_{12} \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$, 可知该设计是区传递的, 因此 $|G_B| = \frac{|G|}{b} = 120$, 所以 $\mathcal{O}_{6,2}^{12}$ 中的每一个区的区稳定子都是 M_{12} 的 120 阶子群. 一方面, 由区传递性可知对任意两个不同区组 B_1 和 B_2 , 存在 $g \in G$ 使得 $B_1^g = B_2$, 于是 $G_{B_2} = G_{B_1^g} = G_{B_1}^g$, 这说明任意两个不同区的区稳定子是共轭的. 另外不难发现 $G_B \leq G_{\Omega_{12}-B}$, 又因为 $\Omega_{12} - B \in \mathcal{O}_{6,2}^{12}$, 因此 $\mathcal{D}$ 的每一个区稳定子都至少稳定两个区组. 另一方面, 对于任意与 G_B 共轭的子群 H , $g \in G$ 使得 $H = G_B^g = G_{B^g}$, 由此可知 H 也

是某个区的区稳定子. 又对于任意两个不同的共轭子群 X 和 Y , 显然, 如果它们可作为区稳定子, 则对应的区必不相同. 若否, 则有 $X = G_B = Y$, 此时 $|G_B| \geq |X \cup Y|$, 从而 $X = Y$, 这与其取法矛盾. 因而, 给定某区 $B \in \mathcal{B}$, $G_B^{M_{12}}$ 中的每个群都是至少两个区的点稳定子, 所以必有 $2|G_B^{M_{12}}| \leq b$. 这意味着这个设计的区稳定子所在的子群共轭类的长度至多为 $\frac{b}{2} = 396$. 令 $\Omega_{12} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, 利用数学软件 MAGMA [2] 计算可知, M_{12} 的 120 阶子群共有 5 个共轭类且长分别为 396, 396, 396, 792 和 792. 因此这个设计的区稳定子应该是前 3 个共轭类中的群, 这 3 类子群的共轭类分别如下:

第一类, 与 $H_1 = \langle (1, 10)(2, 12)(3, 4)(5, 8)(6, 9)(7, 11), (1, 9, 2, 11, 7, 4)(3, 10, 8, 5, 6, 12) \rangle$ 共轭的子群;

第二类, 与 $H_2 = \langle (1, 2)(3, 6)(4, 9)(5, 11)(7, 8)(10, 12), (1, 3, 2, 8, 7, 6)(4, 12, 9, 10, 11, 5) \rangle$ 共轭的子群;

第三类, 与 $H_3 = \langle (1, 8)(3, 6)(4, 9)(11, 12), (1, 6, 3)(2, 8, 7)(4, 9, 12)(5, 10, 11), (1, 12)(2, 10)(3, 9)(4, 6)(5, 7)(8, 11) \rangle$ 共轭的子群.

下面逐一分析以上 3 类子群作为设计区稳定子的可能性.

首先, 如果该设计的区稳定子是第一类共轭类子群, 则存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $G_B = H_1$. 由 H 的元素组成情形可知, 元素 $(1, 9, 2, 11, 7, 4)(3, 10, 8, 5, 6, 12)$ 稳定的 6- 子集有且只有两个, 分别是 $\{1, 2, 4, 7, 9, 11\}$ 和 $\{3, 5, 6, 8, 10, 12\}$, 但是元素 $(1, 10)(2, 12)(3, 4)(5, 8)(6, 9)(7, 11)$ 并不稳定这两个 6- 子集, 因此该群不能稳定任何一个 6- 子集, 这种情形不存在.

其次, 如果该设计的区稳定子是第二类共轭类子群, 则存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $G_B = H_2$. 不难得到 H_2 稳定的 6- 子集有且只有两个, 分别为 $\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$ 和 $\{4, 5, 9, 10, 11, 12\}$. 由前面可知, 如果 H_2 是该设计的区稳定子, 则这两个 6- 子集就是被 H_2 稳定的区组. 记 $a = (1, 2)(3, 6)(4, 9)(5, 11)(7, 8)(10, 12)$, $b = (1, 3, 2, 8, 7, 6)(4, 12, 9, 10, 11, 5)$. 不失一般性, 设 $B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$. 注意到 $\{1, 2, 3\}^a = \{2, 1, 6\}$, $\{1, 2, 3\}^{ab^3ab^2a} = \{2, 1, 6\}$, $\{1, 2, 3\}^{ab^3ab^2} = \{8, 1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}^{bab} = \{1, 6, 3\}$, $\{1, 2, 3\}^{ab^3a} = \{3, 7, 1\}$, $\{1, 2, 3\}^{b^3aba} = \{3, 1, 8\}$, $\{1, 2, 3\}^{b^4} = \{7, 1, 6\}$, $\{1, 2, 3\}^{ab^2a} = \{8, 1, 6\}$, $\{1, 2, 3\}^{b^2a} = \{1, 8, 7\}$, $\{1, 2, 3\}^{ab^3ab} = \{2, 6, 3\}$, $\{1, 2, 3\}^{ab^2} = \{7, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}^b = \{3, 8, 2\}$, $\{1, 2, 3\}^{aba} = \{7, 6, 2\}$, $\{1, 2, 3\}^{ab^3} = \{6, 8, 2\}$, $\{1, 2, 3\}^{b^2} = \{2, 7, 8\}$, $\{1, 2, 3\}^{b^2ab} = \{3, 7, 6\}$, $\{1, 2, 3\}^{b^2aba} = \{6, 8, 3\}$, $\{1, 2, 3\}^{b^3a} = \{7, 3, 8\}$ 和 $\{1, 2, 3\}^{b^3} = \{8, 6, 7\}$. 这也就是说 H_2 作用在 B 上是 3- 齐次的, 再由区传递性可知, 对于任意 $B' \in \mathcal{B}$, $G_{B'}$ 作用在 B' 的点集上是 3- 齐次的.

最后, 如果该设计的区稳定子是第三类共轭类子群, 则存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $G_B = H_3$. 记 $a = (1, 8)(3, 6)(4, 9)(11, 12)$, $b = (1, 6, 3)(2, 8, 7)(4, 9, 12)(5, 10, 11)$ 和 $c = (1, 12)(2, 10)(3, 9)(4, 6)(5, 7)(8, 11)$. 下面来分析 B 的结构. 若点 $1 \in B$, 由于 $1^a = 8$, $1^b = 6$, $1^{b^2} = 3$, $1^c = 12$, $1^{ab} = 7$, $1^{ab^2} = 2$, $G_B = H_3$, 则必有 $\{1, 2, 3, 6, 7, 8, 12\} \subseteq B$, 这与 $|B| = 6$ 矛盾, 因此 $1 \notin B$. 但此时有 $8^a = 3^b = 6^{b^2} = 12^c = 7^{b^{-1}a^{-1}} = 2^{(b^{-1})^2a} = 1 \notin B$, 故由 $G_B = H_3$ 可知 1, 2, 3, 6, 7, 8 和 12 都不在 B 中, 这同样与 $|B| = 6$ 矛盾, 因此 H_3 不能稳定任意一个 6- 子集, 这种情形也不存在.

综上所述, 结论成立. □

通过对定理 4.3 (文献 [8, 定理 1.1]) 的证明过程的总结分析, 可以得到如下两个命题. 由于相应的分析证明已经在文献 [8] 中都有详细叙述, 此处不再介绍, 只提炼出本文证明所需要的结论.

命题 4.4 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是满足 $\mathcal{P} = \Omega_{23}$ 的设计. 若 $M_{23} \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 区传递作用 $\mathcal{D}$ 上, 则下面结论成立:

- (1) 若 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{5,1}^{23}$, 则 $G_B^B \cong S_5$;
- (2) 若 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{5,2}^{23}$, 则 $G_B^B \cong S_5$;
- (3) 若 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,1}^{23}$, 则 $G_B^B \cong S_6$ 或 A_6 ;

- (4) 若 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,2}^{23}$, 则 $G_B^B \cong S_6$;
 (5) 若 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{7,2}^{23}$, 则 $G_B \cong A_7$;
 (6) 若 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{8,1}^{23}$, 则 $G_B \cong A_8$;
 (7) 若 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{11,1}^{23}$, 则 $G_B \cong M_{11}$.

命题 4.5 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是满足 $\mathcal{P} = \Omega_{24}$ 的设计. 若 $M_{24} \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 区传递作用 $\mathcal{D}$ 上, 则下面结论成立:

- (1) 若 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,1}^{24}$, 则 $G_{(B)} = \text{Syl}_2(M_{19})$, $G_B/G_{(B)} \cong S_6$;
 (2) 若 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,2}^{24}$, 则 $G_{(B)} = \text{Syl}_3(M_{19})$, $G_B/G_{(B)} \cong S_6$;
 (3) 若 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{7,1}^{24}$, 则 $G_B/G_{(B)} \cong A_7$;
 (4) 若 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{11,1}^{24}$, 则 $G_B \cong M_{11}$;
 (5) 若 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{12,1}^{24}$, 则 $G_B \cong M_{12}$.

下面开始对遗传的 4- 旗传递 4- 设计的分类定理进行证明.

定理 4.5 的证明 由定理 4.2 知任意遗传的 4- 旗传递 4- 设计都是第一类的, 因此利用定理 4.3 的分类结果, 判定定理 4.3 中的每一类是否满足遗传性质即可. 设 $\mathcal{D}$ 是定理 4.3 中的 4- 旗传递设计, 下面分情形讨论如下.

情形 1 若 $\mathcal{D}$ 同构于一个 4-(33, 5, 4) 设计且 $G \cong \text{PTL}(2, 32)$. 设 $B \in \mathcal{B}$, 根据第一充要条件可知该设计也是区传递的, 故有 $|G_B| = \frac{|G|}{b} = 5$. 若 $\mathcal{D}$ 是遗传的 4- 旗传递设计, 则 $\mathcal{D}$ 也是 2- 旗传递的, 根据第一充要条件可知 G_B 作用在 B 的点上 2- 齐次的, 这意味着 $\binom{k}{2} \mid |G_B|$, 但事实上 $\binom{k}{2} > |G_B|$, 这产生了矛盾, 故该设计不是 2- 旗传递的. 因此根据定义可知其为非遗传的 4- 旗传递设计.

情形 2 $G \cong M_{11}$, $\mathcal{P} = \Omega_{11}$. 若 $\mathcal{D}$ 同构于 Mathieu-Witt4-(11, 5, 1) 设计, 由于 M_{11} 是 $\mathcal{P}$ 上的 4- 重传递群, 因此根据引理 2.3 易知 G 作用在 $\mathcal{D}$ 上是 s - 旗传递的, 其中 $1 \leq s \leq 4$, 所以该设计是遗传的 4- 旗传递设计. 其次, 若 $\mathcal{D}$ 同构于 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{5,2}^{11}$ 的 4-(11, 5, 6) 设计, 根据命题 4.1 可知, 对于任意 $B \in \mathcal{B}$, G_B 作用在 B 的点集上是 2- 齐次的. 由于 $|B| = 5$, 因此 B 的每一个 3- 子集都是一个 2- 子集在 B 中的余集, 因此 G_B 作用在 B 的点集上也是 3- 齐次的. 又根据定理 2.1 可知 G_B 作用在 B 的点集上是传递的. 再结合设计的区传递性, 由第一充要条件可知该设计是 3- 旗传递的、2- 旗传递的和旗传递的, 所以该设计是遗传的 4- 旗传递设计. 最后, 若 $\mathcal{D}$ 同构于 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,1}^{11}$ 的 4-(11, 6, 3) 设计, 根据命题 4.2 可知, 对于任意 $B \in \mathcal{B}$, G_B 作用在 B 的点集上是 3- 齐次的. 由于 $|B| = 6$, 根据定理 2.1 可知 G_B 作用在 B 的点集上是点 2- 传递的, 因此结合设计的区传递性, 由第一充要条件可知该设计是 3- 旗传递的、2- 旗传递的和旗传递的, 所以该设计也是遗传的 4- 旗传递设计.

情形 3 $G \cong M_{12}$, $\mathcal{P} = \Omega_{12}$. 若 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,1}^{12}$ 的 4-(12, 6, 4) 设计, 注意该设计作为 5- 设计时是 Mathieu-Witt5-(12, 6, 1) 设计, 由于 M_{12} 是 $\mathcal{P}$ 上的 4- 重传递群, 因此根据引理 2.3 可知 G 作用在 $\mathcal{D}$ 上是 s - 旗传递的, 其中 $1 \leq s \leq 4$, 因此该设计是遗传的 4- 旗传递设计. 若 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,2}^{12}$ 的 4-(12, 6, 24) 设计, 回顾命题 4.3 可知, 对于任意 $B \in \mathcal{B}$, G_B 作用在 B 的点集上是 3- 齐次的. 又因为 $|B| = 6$, 根据定理 2.1 可知 G_B 作用在 B 的点是点 2- 传递的, 因此结合设计的区传递性, 由第一充要条件可知该设计是 3- 旗传递的、2- 旗传递的和旗传递的, 所以该设计是遗传的 4- 旗传递设计.

情形 4 $G \cong M_{23}$, $\mathcal{P} = \Omega_{23}$, $\mathcal{D}$ 是定理 4.3(4) 中的 8 个设计之一. 设 $B \in \mathcal{B}$, 根据命题 4.4 可知, 当 $k = 5$ 时, G_B^B 或 G_B 是 S_5 或 A_5 ; 当 $k = 6$ 时, G_B^B 或 G_B 是 S_6 或 A_6 ; 当 $k = 7$ 时, G_B 是 A_7 或 A_8 ; 当 $k = 11$ 时, G_B 是 M_{11} . 对于这些群, 根据其性质易得其作用在相应的区的点上都是 3- 重传递的, 因此由群的性质与遗传的 4- 旗传递设计的定义可知这 8 个设计都是遗传的 4- 旗传递设计.

情形 5 $G \cong M_{24}$, $\mathcal{P} = \Omega_{24}$, $\mathcal{D}$ 是定理 4.3(5) 中的 6 个设计之一. 除去区集 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{8,1}^{24}$ 的 4-(24, 8, 5) 设计以外的每一个设计, 我们都可以根据命题 4.5 的结论得到该设计对应的 G^B 或 G_B^B , 然后采用与情形 4 一样的分析都可得到对应的设计是遗传的 4- 旗传递设计. 对于区集 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{8,1}^{24}$ 的 4-(24, 8, 5) 设计而言, 该设计作为 5- 设计时恰好是 Mathieu-Witt5-(24, 8, 1) 设计, 由于 M_{24} 是 $\mathcal{P}$ 上的 4- 重传递群, 因此根据引理 2.3 可知 G 作用在 $\mathcal{D}$ 上是 s - 旗传递的, 其中 $1 \leq s \leq 4$, 因此该设计是遗传的 4- 旗传递设计.

综上所述, 结论成立. $\square$

4.3.2 遗传的 5- 旗传递设计

本小节研究遗传的 5- 旗传递 5- 设计, 得到如下定理:

定理 4.6 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个非平凡的 5-(v, k, λ) 设计, $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$. $\mathcal{D}$ 是遗传的 5- 旗传递当且仅当下面的情形之一成立.

- (1) $G \cong M_{12}$, $\mathcal{P} = \Omega_{12}$, $\mathcal{D}$ 同构于 Mathieu-Witt5-(12, 6, 1) 设计或满足 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,2}^{12}$ 的 5-(12, 6, 6) 设计.
- (2) $G \cong M_{24}$, $\mathcal{P} = \Omega_{24}$, $\mathcal{D}$ 是下列设计之一:
 - (i) 区集 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,1}^{24}$ 的 5-(24, 6, 3) 设计;
 - (ii) 区集 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,2}^{24}$ 的 5-(24, 6, 16) 设计;
 - (iii) 区集 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{7,1}^{24}$ 的 5-(24, 7, 3) 设计;
 - (iv) Mathieu-Witt5-(24, 8, 1) 设计;
 - (v) 区集 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{12,1}^{24}$ 的 5-(24, 12, 48) 设计.

证明 根据定理 4.2 可知任意遗传的 5- 旗传递 5- 设计都是第一类的, 因此利用定理 4.4 的分类结果, 判定定理 4.4 中的每一类是否满足遗传性质即可.

情形 1 $G \cong M_{12}$, $\mathcal{P} = \Omega_{12}$. 若 $\mathcal{D}$ 同构于 Mathieu-Witt5-(12, 6, 1) 设计, 由于 M_{12} 是 $\mathcal{P}$ 上的 5- 重传递群, 因此根据引理 2.3 可知 G 作用在 $\mathcal{D}$ 上是 s - 旗传递的, 其中 $1 \leq s \leq 5$, 所以该设计是遗传的 5- 旗传递设计. 其次, 若 $\mathcal{D}$ 同构于 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,2}^{12}$ 的 5-(12, 6, 6) 设计, 根据命题 4.3 可知, 对于任意 $B \in \mathcal{B}$, G_B 作用在 B 的点集上是 3- 齐次的. 又因为 $|B| = 6$, 根据定理 2.1 可知 G_B 作用在 B 的点集上是点 2- 传递的, 而 B 的每一个 4- 子集都是 2- 子集的余集, 故 G_B 作用在 B 的点集上是点 4- 齐次的. 因此结合设计的区传递性, 由第一充要条件可知该设计是 4- 旗传递的、3- 旗传递的、2- 旗传递的和旗传递的, 所以该设计是遗传的 5- 旗传递设计.

情形 2 $G \cong M_{24}$, $\mathcal{P} = \Omega_{24}$, $\mathcal{D}$ 是定理 4.4(2) 中的 5 个设计之一. 根据命题 4.5, 可以得到这 5 个设计分别对应的区稳定子群, 而且这 5 个对应的区稳定子群在各自的区的点上的作用都是 5- 重传递的, 因此根据 5- 重传递群的性质, 结合设计的区传递性, 不难得出这些设计都是 4- 旗传递、3- 旗传递的、2- 旗传递的和旗传递的, 因此这些设计都是遗传的 5- 旗传递设计.

综上所述, 结论成立. $\square$

5 公开问题

对于 s 旗传递设计的研究主要集中在两个方向, 即归约问题与应用, 下面简单介绍几个关于这两个方向值得关注的问题.

首先, 根据第 4.2 小节不难看出 $s > 1$ 的 s -旗传递设计的规约问题重点在于遗传的 s -旗传递设计的规约, 而在这个方面就剩下如下两个问题:

问题 5.1 刻画分类遗传的 2-旗传递设计 2-设计.

问题 5.2 刻画分类遗传的 3-旗传递设计 3-设计.

其次, 在 s -旗传递设计的应用上, 主要考虑其在代数图论领域的应用. 事实上很多特殊图的某些分类就是某个设计的关联图, 例如, 围长为 4 的 2-弧传递图中就有很多是设计的关联图 (详见文献 [5]). 因此也考虑利用 s -旗传递设计的高度对称性来构造特殊的图, 为此推广定义了设计的 s -关联图如下:

定义 5.1 设计 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 的 s -关联图, 记作 $\text{IG}_s(\mathcal{D})$, 是指由顶点集 $V(\text{IG}_s(\mathcal{D})) = \mathcal{P}^{\{s\}} \cup \mathcal{B}$ 和边集合 $E(\text{IG}_s(\mathcal{D})) = \{(S, B) \mid (S, B) \in \mathcal{F}_s(\mathcal{D})\}$ 构成的简单无向图.

近年来, 我们研究了设计的 s -关联图性质与设计的传递性之间的关系 (参见文献 [7]), 得到了如下结论:

定理 5.1 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个非平凡的 t -(v, k, λ) 设计, 其中 $t \leq 6$. 若 $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 作用在 $\mathcal{D}$ 上 s -旗传递, 则当 $1 \leq s < t$ 时, $\text{IG}_s(\mathcal{D})$ 是连通图; 当 $1 \leq s \leq t$ 时, $\text{IG}_s(\mathcal{D})$ 是边传递图.

进一步有如下思考:

问题 5.3 什么样的区组设计的 s -关联图是半对称图呢?

近期利用设计的 s -旗传递性得到了一些半对称图的例子, 例如, 定理 4.6(1) 中 $G \cong M_{12}$, $\mathcal{P} = \Omega_{12}$, $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{6,2}^{12}$ 的 5-(12, 6, 6) 设计的 5-关联图就是一个半对称图. 关于 s -旗传递设计与半对称图之间的联系还有待进一步深入研究.

致谢 感谢评审专家对本文提出的宝贵的修改意见与建议, 特别感谢审稿专家建议的名词“遗传性质”和“关于 s 向下遗传的”.

参考文献

- Beth T, Jungnickel D, Lenz H. Design Theory, Volumes 1 and 2, 2nd ed. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1999
- Bosma W, Cannon J, Playoust C. The MAGMA algebra system I: The user language. J Symbolic Comput, 1997, 24: 235–265
- Buekenhout F, Delandtsheer A, Doyen J. Finite linear spaces with flag-transitive groups. J Combin Theory Ser A, 1988, 49: 268–293
- Buekenhout F, Delandtsheer A, Doyen J, et al. Linear spaces with flag-transitive automorphism groups. Geom Dedicata, 1990, 36: 89–94
- Cameron P J, Praeger C E. On 2-arc transitive graphs of girth 4. J Combin Theory Ser B, 1983, 35: 1–11
- Dixon J D, Mortimer B. Permutation Groups, 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 1996
- Huang Z. Combinatorial designs with good transitivity and semisymmetric graphs (in Chinese). PhD Thesis. Changsha: Central South University, 2023 [黄铮. 具有良好传递性的组合设计与半对称图. 博士学位论文. 长沙: 中南大学, 2023]
- Huang Z, Liu W J, Feng L H. s -flag-transitive designs for $s \geq 4$. Appl Math Comput, 2022, 429, 127242
- Huber M. The classification of flag-transitive Steiner 3-designs. Adv Geom, 2005, 5: 195–221
- Huber M. The classification of flag-transitive Steiner 4-designs. J Algebraic Combin, 2007, 26: 183–207
- Huber M. A census of highly symmetric combinatorial designs. J Algebraic Combin, 2007, 26: 453–476
- Kantor W M. k -Homogeneous groups. Math Z, 1972, 124: 261–265
- Kantor W M. Primitive permutation groups of odd degree, and an application to finite projective planes. J Algebra, 1987, 106: 15–45
- Liebeck M W. The classification of finite linear spaces with flag-transitive automorphism groups of affine type. J Combin Theory Ser A, 1998, 84: 196–235
- Livingstone D, Wagner A. Transitivity of finite permutation groups on unordered sets. Math Z, 1965, 90: 393–403
- O'Reilly-Regueiro E. Flag-transitive symmetric designs. PhD Thesis. London: University of London, 2003

- 17 Saxl J. On finite linear spaces with almost simple flag-transitive automorphism groups. J Combin Theory Ser A, 2002, 100: 322–348
- 18 Shen J X, Zhou S L. Flag-transitive $2-(v, 5, \lambda)$ designs with sporadic socle. Front Math China, 2020, 15: 1201–1210
- 19 Zhao Y W, Zhou S L. Flag-transitive $2-(v, k, \lambda)$ designs with $r > \lambda(k - 3)$. Des Codes Cryptogr, 2022, 90: 863–869
- 20 Zhou S L, Dong H L. Sporadic groups and flag-transitive triplanes. Sci China Ser A, 2009, 52: 394–400
- 21 Zhou S L, Dong H L, Fang W D. Finite classical groups and flag-transitive triplanes. Discrete Math, 2009, 309: 5183–5195

The s -flag-transitivity of designs

Zheng Huang, Lei Cai, Dongmei Li & Weijun Liu

Abstract The s -flag-transitivity of a design is an extension of the flag-transitivity. In this paper, we first introduce the basic concepts and properties of s -flag-transitive designs in detail. Then, when the s -flag-transitivity of the design can be extended to any positive integer s' less than s , this property is referred to as the downward hereditary with respect to s , and the corresponding design is abbreviated as a hereditary s -flag-transitive design. We prove that the upper bound for the parameter s of hereditary s -flag-transitive designs is 5. Finally, we completely classify the hereditary 4-flag transmission designs and 5-flag transmission designs.

Keywords s -flag, s -flag-transitive, hereditary s -flag-transitive design, hereditary property

MSC(2020) 05B05, 20B25

doi: 10.1360/SSM-2024-0272