中国科学: 数学 2023 年 第 53 卷 第 7 期: 973～992
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

双线性分数次积分交换子在广义 Morrey 空间上的有界性

陈嵩箐[1], 库福立[2*], 伍火熊[2]

1. 湖北经济学院财经高等研究院, 武汉 430205;
2. 厦门大学数学科学学院, 厦门 361005
E-mail: chensongqing@hbue.edu.cn, kfl20180325@163.com, huoxwu@xmu.edu.cn

收稿日期: 2022-07-12; 接受日期: 2023-01-18; 网络出版日期: 2023-04-06; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12171399 和 11871101) 资助项目

摘要 本文研究双线性分数次积分 $\mathcal{I}_\alpha$ 与广义 Campanato 空间函数 b 生成的交换子 $[b,\mathcal{I}_\alpha]_i$ $(i=1,2)$ 在广义 Morrey 空间上的有界性. 对带变量增长条件的广义 Morrey 空间和广义 Campanato 空间, 本文给出 $[b,\mathcal{I}_\alpha]_i$ $(i=1,2)$ 从广义 Morrey 空间的乘积空间到广义 Morrey 空间有界的充分条件和必要条件.

关键词 双线性分数次积分 交换子 Campanato 空间 Morrey 空间 变量增长条件

MSC (2020) 主题分类 42B20, 42B25, 42B35, 46E30

1 引言

设 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维 Euclid 空间, $n\geqslant 2$, $0<\alpha<2n$, $b\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$. 双线性分数次积分算子 $\mathcal{I}_\alpha$ 及交换子 $[b,\mathcal{I}_\alpha]_i$ $(i=1,2)$ 定义如下:

$$\mathcal{I}_\alpha(f,g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)g(z)}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz$$

及

$$[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f,g)=b\mathcal{I}_\alpha(f,g)-\mathcal{I}_\alpha(bf,g),$$
$$[b,\mathcal{I}_\alpha]_2(f,g)=b\mathcal{I}_\alpha(f,g)-\mathcal{I}_\alpha(f,bg).$$

众所周知, p_1、p_2 和 q $(1<p_1,p_2,q<\infty)$ 满足 $1/q=1/p_1+1/p_2-\alpha/n$. Kenig 和 Stein [11] 及 Grafakos 和 Kalton [7] 首先获得了 $\mathcal{I}_\alpha$ 的 $(L^{p_1}(\mathbb{R}^n)\times L^{p_2}(\mathbb{R}^n),L^q(\mathbb{R}^n))$ 有界性, 其在相应加权 Lebesgue 空间上的有界性则由 Moen [12] 和 Chen 和 Xue [5] 建立. 随后, $\mathcal{I}_\alpha$ 在 Morrey 空间的有界性由 Tang [15]、Tao

英文引用格式: Chen S Q, Ku F L, Wu H X. Boundedness for the commutators of bilinear fractional integral operators on generalized Morrey spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 973–992, doi: 10.1360/SSM-2022-0131

© 2023《中国科学》杂志社

和 Zheng[16] 及 Iida 等[9,10] 先后进行了研究. Ding 和 Mei[6] 进一步给出了 $\mathcal{I}_\alpha$ 在一类广义 Morrey 空间的有界性. 对于交换子 $[b,\mathcal{I}_\alpha]_i$ $(i=1,2)$, Chen 和 Xue[5] 及 Chen 和 Wu[4] 证明了, 当 $b\in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 时, $[b,\mathcal{I}_\alpha]_i$ $(i=1,2)$ 是 $(L^{p_1}(\omega_1^{p_1})\times L^{p_2}(\omega_2^{p_2}), L^q(\vec{\nu}_\omega^q))$ 有界的. Chaffee[2]、Chaffee 和 Cruz-Uribe[3] 及 Guo 等[8] 获得了 $(L^{p_1}(\mathbb{R}^n)\times L^{p_2}(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n))$ 有界性对 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 空间的刻画. Ding 和 Mei[6] 给出了 $b\in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 时, $[b,\mathcal{I}_\alpha]_i$ $(i=1,2)$ 在 Morrey 空间和广义 Morrey 空间的有界性.

另外, Arai 和 Nakai[1] 研究了奇异积分交换子 $[b,T]$ 和广义分数次交换子 $[b,I_\rho]$ 在广义 Morrey 空间的有界性, 对 b 属于一类广义的 Campanato 空间 $\mathcal{L}^{(1,\psi)}(\mathbb{R}^n)$ (参见定义 1.2) 的情形, 他们给出了 $[b,T]$ 和 $[b,I_\rho]$ 在广义 Morrey 空间有界的充分条件与必要条件, 其中 $\mathcal{L}^{(1,\psi)}(\mathbb{R}^n)$ 是经典 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 与 $\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ 的一般化. 受上述工作启发, 本文研究当 $b\in\mathcal{L}^{(1,\psi)}(\mathbb{R}^n)$ 时, $[b,\mathcal{I}_\alpha]_i$ $(i=1,2)$ 在广义 Morrey 空间的有界性. 在叙述本文的结果之前, 先引入一些记号与定义.

记 $B(x,r)$ 为中心在 $x\in\mathbb{R}^n$、半径为 r 的开球, 即

$$B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n:|y-x|<r\}.$$

对于可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$, 记 $|E|$ 为 E 的 Lebesgue 测度, χ_E 为 E 的特征函数, $E^{\complement}=\mathbb{R}^n\backslash E$. 对函数 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 和球 $B\subset\mathbb{R}^n$, 记

$$f_B=\fint_B f(y)dy:=\frac{1}{|B|}\int_B f(y)dy.$$

为简单起见, 对于可测函数 $\varphi:\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\to(0,\infty)$, 当 $B=B(x,r)$ 时, 记 $\varphi(B):=\varphi(x,r)$.

定义 1.1 (广义 Morrey 空间)　设 $\varphi(x,r)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 上的非负可测函数, $p\in[1,\infty)$, 则称

$$L^{(p,\varphi)}(\mathbb{R}^n):=\left\{f:\|f\|_{L^{(p,\varphi)}(\mathbb{R}^n)}=\sup_B\left(\frac{1}{\varphi(B)}\fint_B|f(y)|^pdy\right)^{1/p}<\infty\right\}$$

为广义的 Morrey 空间. 记 $\|f\|_{L^{(p,\varphi)}(\mathbb{R}^n)}$ 为 f 在 $L^{(p,\varphi)}(\mathbb{R}^n)$ 中的范数.

易知 $L^{(p,\varphi)}(\mathbb{R}^n)$ 是 Banach 空间. 当 $\lambda\in[-n,0]$ 时, 若 $\varphi_\lambda(x,r)=r^\lambda$, 则 $L^{(p,\varphi_\lambda)}(\mathbb{R}^n)=L^{(p,\lambda)}(\mathbb{R}^n)$ 为经典的 Morrey 空间. 特别地, $L^{(p,\varphi_{-n})}(\mathbb{R}^n)=L^p(\mathbb{R}^n)$, $L^{(p,\varphi_0)}(\mathbb{R}^n)=L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

定义 1.2 (广义 Campanato 空间)　设 $\psi(x,r)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 上的非负可测函数, $p\in[1,\infty)$, 则称

$$\mathcal{L}^{(p,\psi)}(\mathbb{R}^n):=\left\{f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n):\|f\|_{\mathcal{L}^{(p,\psi)}(\mathbb{R}^n)}=\sup_B\left(\frac{1}{\psi(B)}\fint_B|f(y)-f_B|^pdy\right)^{1/p}<\infty\right\}$$

为广义的 Campanato 空间. 记 $\|f\|_{\mathcal{L}^{(p,\psi)}(\mathbb{R}^n)}$ 为 f 在 $\mathcal{L}^{(p,\psi)}(\mathbb{R}^n)$ 中的范数.

不难验证 $\mathcal{L}^{(p,\psi)}(\mathbb{R}^n)$ 是 Banach 空间. 当 $p=1$ 且 $\psi\equiv1$ 时, $\mathcal{L}^{(p,\psi)}(\mathbb{R}^n)=\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$; 当 $p=1$ 且 $\psi(x,r)=r^\alpha$ $(0<\alpha\leqslant1)$ 时, $\mathcal{L}^{(p,\psi)}(\mathbb{R}^n)=\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$.

对于可测函数 $\theta:\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\to(0,\infty)$, 若存在正的常数 C, 对于所有 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $r,s\in(0,\infty)$, 有

$$\frac{1}{C}\leqslant\frac{\theta(x,r)}{\theta(x,s)}\leqslant C,\quad \frac{1}{2}\leqslant\frac{r}{s}\leqslant2, \tag{1.1}$$

则称 θ 满足双倍条件.

对于可测函数 $\theta:\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\to(0,\infty)$, 引入下列条件: 存在正的常数 C, 对于所有 $x,y\in\mathbb{R}^n$ 和 $r\in(0,\infty)$, 有

$$\frac{1}{C}\leqslant\frac{\theta(x,r)}{\theta(y,r)}\leqslant C,\quad |x-y|\leqslant r. \tag{1.2}$$

对于可测函数 $\theta,\kappa:\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\to(0,\infty)$, 若存在正的常数 C, 对于所有 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $r\in(0,\infty)$, 有

$$\frac{1}{C}\leqslant\frac{\theta(x,r)}{\kappa(x,r)}\leqslant C, \tag{1.3}$$

则称 θ 与 κ 等价, 记为 $\theta\sim\kappa$.

定义 1.3 (i) 设函数 $\varphi:\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\to(0,\infty)$. 对于所有 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $r,s\in(0,\infty)$, 若存在正的常数 C, 使得

$$C\varphi(x,r)\geqslant\varphi(x,s),\quad \varphi(x,r)r^n\leqslant C\varphi(x,s)s^n,\quad \forall\, r<s,$$

则称 φ 是几乎递减的且 $r\mapsto\varphi(x,r)r^n$ 是几乎递增的. 记满足上述条件的所有 φ 构成的集合为 $\mathcal{G}^{\rm dec}$;

(ii) 设函数 $\varphi:\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\to(0,\infty)$. 对于所有 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $r,s\in(0,\infty)$, 若存在正的常数 C, 使得

$$\varphi(x,r)\leqslant C\varphi(x,s),\quad \frac{C\varphi(x,r)}{r}\geqslant\frac{\varphi(x,s)}{s},\quad \forall\, r<s,$$

则称 φ 是几乎递增的且 $r\mapsto\varphi(x,r)/r$ 是几乎递减的. 记满足上述条件的所有 φ 构成的集合为 $\mathcal{G}^{\rm inc}$.

注 1.1 (i) 若 $\varphi\in\mathcal{G}^{\rm dec}$ 或 $\varphi\in\mathcal{G}^{\rm inc}$, 则 φ 满足双倍条件 (1.1).

(ii) (参见文献 [1]) 对于 $\varphi\in\mathcal{G}^{\rm dec}$, 若 φ 满足

$$\lim_{r\to0}\varphi(x,r)=\infty,\quad \lim_{r\to\infty}\varphi(x,r)=0, \tag{1.4}$$

则存在 $\widetilde{\varphi}\in\mathcal{G}^{\rm dec}$ 使得 $\varphi\sim\widetilde{\varphi}$, 其中 $\widetilde{\varphi}(x,\cdot)$ 是连续、严格递减的且对于每个 x, $\widetilde{\varphi}$ 是从 $(0,\infty)$ 到 $(0,\infty)$ 的双射.

(iii) 对于 $\varphi\in\mathcal{G}^{\rm dec}$, 还引入如下条件: 存在正的常数 C 使得

$$\int_r^\infty\frac{\varphi(x,t)}{t}dt\leqslant C\varphi(x,r),\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n,\quad r\in(0,\infty). \tag{1.5}$$

对于 $f\in L^{(p_1,\varphi_1)}(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^{(p_2,\varphi_2)}(\mathbb{R}^n)$, $1<p_1,p_2<\infty$, 在每个球 $B\subset\mathbb{R}^n$ 上, 定义 $[b,\mathcal{I}_\alpha]_i(f,g)$ $(i=1,2)$ 如下:

$$\begin{aligned}[b,\mathcal{I}_\alpha]_i(f,g)(x)&=[b,\mathcal{I}_\alpha]_i(f_1,g_1)(x)+[b,\mathcal{I}_\alpha]_i(f_1,g_2)(x)\\&\quad+[b,\mathcal{I}_\alpha]_i(f_2,g_1)(x)+[b,\mathcal{I}_\alpha]_i(f_2,g_2)(x),\quad \forall\, x\in B,\end{aligned} \tag{1.6}$$

其中, $f_1:=f\chi_{2B}$, $f_2:=f\chi_{(2B)^\complement}$, $g_1:=g\chi_{2B}$, $g_2:=g\chi_{(2B)^\complement}$. 由注 4.1 知, 上述定义是合理的. 本文的主要结果如下:

定理 1.1 设 $p,p_1,p_2,q\in(1,\infty)$ 和 $\alpha\in(0,2n)$ 满足 $1/p_1+1/p_2=1/p=1/q+\alpha/n$. $\varphi,\varphi_1,\varphi_2$, $\psi:\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\to(0,\infty)$ 满足 $\varphi,\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{G}^{\rm dec}$ 及 $\psi\in\mathcal{G}^{\rm inc}$, 并且

$$\varphi_1^{1/p_1}\varphi_2^{1/p_2}=\varphi^{1/p}. \tag{1.7}$$

(i) 假设 ψ 满足 (1.2), φ、φ_1 和 φ_2 满足 (1.5), 并且对所有 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $r\in(0,\infty)$, 存在正的常数 C_0、C_1 和 $\widetilde{p}\in(p,q]$ 满足

$$\int_0^r t^{\alpha-1}dt\varphi(x,r)^{1/p}+\int_r^\infty t^{\alpha-1}\varphi(x,t)^{1/p}dt\leqslant C_0\varphi(x,r)^{1/\tilde{p}}, \tag{1.8}$$

$$\psi(x,r)\varphi(x,r)^{1/\tilde{p}}\leqslant C_1\varphi(x,r)^{1/q}. \tag{1.9}$$

若 $b\in\mathcal{L}^{(1,\psi)}(\mathbb{R}^n)$, $f\in L^{(p_1,\varphi_1)}(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^{(p_2,\varphi_2)}(\mathbb{R}^n)$, 则 (1.6) 中的 $[b,\mathcal{I}_\alpha]_i(f,g)$ $(i=1,2)$ 有定义且满足

$$\|[b,\mathcal{I}_\alpha]_i(f,g)\|_{L^{(q,\varphi)}}\lesssim\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}},\quad i=1,2. \tag{1.10}$$

(ii) 反之, 假设 φ、φ_1 和 φ_2 满足 (1.2), 并且存在正的常数 C_0 使得

$$C_0\psi(x,r)r^\alpha\varphi(x,r)^{1/p}\geqslant\varphi(x,r)^{1/q}. \tag{1.11}$$

若 $[b,\mathcal{I}_\alpha]_i$ $(i=1,2)$ 从 $L^{(p_1,\varphi_1)}(\mathbb{R}^n)\times L^{(p_2,\varphi_2)}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{(q,\varphi)}(\mathbb{R}^n)$ 有界, 则 $b\in\mathcal{L}^{(1,\psi)}(\mathbb{R}^n)$ 且满足

$$\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\lesssim\|[b,\mathcal{I}_\alpha]_i\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}\times L^{(p_2,\varphi_2)}\to L^{(q,\varphi)}},\quad i=1,2.$$

注 1.2 当 $\varphi(x,r)=\varphi_1(x,r)=\varphi_2(x,r)=r^\lambda$、$-n<\lambda<0$ 和 $\psi(x)\equiv1$ 时, 定理 1.1(i) 即为文献 [6, 定理 3.1]; 在上述相同条件下, 定理 1.1(ii) 为文献 [2, 定理 1.1] 中 $0<\alpha<2n$ 的相应结果. 因此, 定理 1.1 可看作上述结果的一般化.

为了方便起见, 本文引入以下记号: 记 C 为正的常数, 但在不同的地方可能不同. 有时为了区分, 引入带下标的常数, 如 C_p. 若 $f\leqslant Cg$, 则记 $f\lesssim g$; 若 $f\lesssim g\lesssim f$, 则记 $f\sim g$. 对于 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 当 $1/p+1/p'=1$ 时, 记 p' 是 p 的共轭指标.

2 辅助引理

引理 2.1 [1] 设 $p\in(1,\infty)$ 及 $\psi\in\mathcal{G}^{\mathrm{inc}}$. 若 ψ 满足 (1.2), 则 $\mathcal{L}^{(p,\psi^p)}(\mathbb{R}^n)=\mathcal{L}^{(1,\psi)}(\mathbb{R}^n)$ 且两者范数等价.

引理 2.2 [1] 设 $p\in(1,\infty)$ 及 $\psi\in\mathcal{G}^{\mathrm{inc}}$. 若 ψ 满足 (1.2), 则存在与 n、p 及 ψ 无关的正的常数 C, 对于所有 $f\in\mathcal{L}^{(1,\psi)}(\mathbb{R}^n)$ 及 $x\in\mathbb{R}^n$, $r,s\in(0,\infty)$, 有下式成立:

$$\left(\fint_{B(x,s)}|f(y)-f_{B(x,r)}|^pdy\right)^{1/p}\leqslant C\int_r^s\frac{\psi(x,t)}{t}dt\|f\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}},\quad 2r<s \tag{2.1}$$

及

$$\left(\fint_{B(x,s)}|f(y)-f_{B(x,r)}|^pdy\right)^{1/p}\leqslant C\left(\log_2\frac{s}{r}\right)\psi(x,s)\|f\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}},\quad 2r<s. \tag{2.2}$$

引理 2.3 [1] 设 $p,p_1,p_2\in[1,\infty)$ 满足 $1/p_1+1/p_2=1/p$ 以及 $\varphi,\varphi_1,\varphi_2:\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\to(0,\infty)$ 且满足 (1.7), 则

$$\|fg\|_{L^{(p,\varphi)}}\leqslant\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}.$$

引理 2.4 [1] 设 φ 满足双倍条件 (1.1) 和 (1.5), 则存在正的常数 C_p, 对于所有 $p\in(0,\infty)$、$x\in\mathbb{R}^n$ 和 $r>0$, 有

$$\int_r^\infty \frac{\varphi(x,t)^{1/p}}{t}dt \leqslant C_p\varphi(x,r)^{1/p}. \tag{2.3}$$

引理 2.5 [1] 设 $1<p\leqslant q<\infty$ 且 ρ 和 φ 是定义在 $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\to(0,\infty)$ 上的可测函数. 假设 $\varphi\in\mathcal{G}^{\rm dec}$ 满足 (1.4). 若存在正的常数 C_0, 对于所有 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $r\in(0,\infty)$, 有

$$\rho(x,r)\varphi(x,r)^{1/p}\leqslant C_0\varphi(x,r)^{1/q}, \tag{2.4}$$

则 M_ρ 是 $(L^{(p,\varphi)}(\mathbb{R}^n),L^{(q,\varphi)}(\mathbb{R}^n))$ 有界的, 其中 $M_\rho(f)(x):=\sup_{B\ni x}\rho(B)\fint_B|f(y)|dy$ 是广义 Hardy-Littlewood 极大函数. 特别地, 当 $\rho\equiv1$ 时, M_ρ 是经典 Hardy-Littlewood 极大算子 M, 此时有 $\|M(f)\|_{L^{(p,\varphi)}}\lesssim\|f\|_{L^{(p,\varphi)}}$.

3 双线性极大算子和双线性分数次积分的有界性

设 $\rho:\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\to(0,\infty)$ 是非负可测函数, 相应于 ρ 的广义双线性极大算子 $\mathcal{M}_\rho$ 定义如下:

$$\mathcal{M}_\rho(f,g)(x):=\sup_{B\ni x}\rho(B)\fint_B|f(y)|dy\fint_B|g(z)|dz. \tag{3.1}$$

显然, 当 $\rho(B)=|B|^{\alpha/n}$ 时, $\mathcal{M}_\rho(f,g)$ 是经典的双线性分数次极大算子 $\mathcal{M}_\alpha$, 即

$$\mathcal{M}_\alpha(f,g)(x)=\sup_{B\ni x}|B|^{\alpha/n}\fint_B|f(y)|dy\fint_B|g(z)|dz.$$

当 $\rho\equiv1$ 时, $\mathcal{M}_\rho$ 是双线性极大算子 $\mathcal{M}$, 即

$$\mathcal{M}(f,g)(x)=\sup_{B\ni x}\fint_B|f(y)|dy\fint_B|g(z)|dz. \tag{3.2}$$

对于极大算子 $\mathcal{M}$ 和广义极大算子 $\mathcal{M}_\rho$ 的有界性, 本文得到如下结论:

定理 3.1 设 $p,p_1,p_2\in(1,\infty)$ 满足 $1/p_1+1/p_2=1/p$ 及 $\varphi,\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{G}^{\rm dec}$ 且满足 (1.7), 则 $\mathcal{M}$ 是 $(L^{(p_1,\varphi_1)}(\mathbb{R}^n)\times L^{(p_2,\varphi_2)}(\mathbb{R}^n),L^{(p,\varphi)}(\mathbb{R}^n))$ 有界的.

证明 注意到 $\mathcal{M}(f,g)(x)\leqslant M(f)(x)M(g)(x)$, 由引理 2.3 和 2.5 知

$$\begin{aligned}\|\mathcal{M}(f,g)\|_{L^{(p,\varphi)}}&\leqslant\|M(f)M(g)\|_{L^{(p,\varphi)}}\leqslant\|M(f)\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|M(g)\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}\\&\lesssim\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}.\end{aligned}$$

定理 3.1 得证. □

定理 3.2 设 $p,p_1,p_2,q\in(1,\infty)$ 满足 $1/p_1+1/p_2=1/p$, $p\leqslant q$. 设 $\rho,\varphi,\varphi_1,\varphi_2:\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\to(0,\infty)$ 是可测函数. 假设 $\varphi,\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{G}^{\rm dec}$ 满足 (1.4) 和 (1.7). 若存在正的常数 C_0 满足

$$\rho(x,r)\varphi(x,r)^{1/p}\leqslant C_0\varphi(x,r)^{1/q},\quad\forall\,x\in\mathbb{R}^n,\quad r\in(0,\infty), \tag{3.3}$$

则 $\mathcal{M}_\rho$ 是 $(L^{(p_1,\varphi_1)}(\mathbb{R}^n)\times L^{(p_2,\varphi_2)}(\mathbb{R}^n),L^{(q,\varphi)}(\mathbb{R}^n))$ 有界的.

证明 由 $\varphi(x,t)$ 满足的条件及 (1.4) 知, 对于每个 $x\in\mathbb{R}^n$, 可以将 $\varphi(x,\cdot)$ 看作连续、严格递减及从 $(0,\infty)$ 到 $(0,\infty)$ 的双射. 设函数 $f\in L^{(p_1,\varphi_1)}(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^{(p_2,\varphi_2)}(\mathbb{R}^n)$ 且不妨设 $\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}=\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}=1$. 由定理 3.1, 欲证定理 3.2, 只需证明

$$\mathcal{M}_\rho(f,g)(x)\leqslant C\mathcal{M}(f,g)(x)^{p/q},\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n.$$

为此只需要证明对于任意球 $B=B(x,r)$ 有

$$\rho(B)\fint_B|f(y)|dy\fint_B|g(z)|dz\leqslant C_0\mathcal{M}(f,g)(x)^{p/q}.$$

取 $u>0$ 使得 $\varphi(x,u)=\mathcal{M}(f,g)(x)^p$. 若 $r\leqslant u$, 则 $\varphi(B)=\varphi(x,r)\geqslant\mathcal{M}(f,g)(x)^p$ 且 $\varphi(B)^{1/q-1/p}\leqslant\mathcal{M}(f,g)(x)^{p/q-1}$. 由 (3.3), 有

$$\rho(B)\fint_B|f(y)|dy\fint_B|g(z)|dz\leqslant C_0\varphi(B)^{1/q-1/p}\fint_B|f(y)|dy\fint_B|g(z)|dz\leqslant C_0\mathcal{M}(f,g)(x)^{p/q}.$$

若 $r>u$, 则 $\varphi(B)=\varphi(x,r)<\mathcal{M}(f,g)(x)^p$ 且 $\varphi(B)^{1/q}<\mathcal{M}(f,g)(x)^{p/q}$. 再利用 (3.3) 得

$$\begin{aligned}\rho(B)\fint_B|f(y)|dy\fint_B|g(z)|dz&\leqslant\rho(B)\bigg(\fint_B|f(y)|^{p_1}dy\bigg)^{1/p_1}\bigg(\fint_B|g(z)|^{p_2}dz\bigg)^{1/p_2}\\&\leqslant\rho(B)\varphi(B)^{1/p}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}\\&\leqslant C_0\varphi(B)^{1/q}\leqslant C_0\mathcal{M}(f,g)(x)^{p/q}.\end{aligned}$$

定理 3.2 得证. □

定理 3.3 设 $s,s_1,s_2\in(1,\infty)$, $1/s_1+1/s_2=1$, $\rho(t)=t^\alpha$. 若存在某个正数 ε 使得 $\rho(r)/r^{n/s-\varepsilon}$ 单调递增, 则存在 N- 函数 $\Phi:[0,\infty)\to(0,\infty)$ 和常数 $C\geqslant1$ 使得

$$C^{-1}\Phi^{-1}\bigg(\frac{1}{r^n}\bigg)\leqslant\frac{r^\alpha}{r^{n/s}}\leqslant C\Phi^{-1}\bigg(\frac{1}{r^n}\bigg),\quad\forall\, r>0\tag{3.4}$$

成立且

$$\|\mathcal{I}_\alpha(f,g)\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)}\lesssim\|f\|_{L^{s_1}(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^{s_2}(\mathbb{R}^n)},\tag{3.5}$$

其中 $\|f\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)}=\inf\{\lambda>0:\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(\frac{|f(x)|}{\lambda})dx\leqslant1\}$.

证明 Φ 的存在性由文献 [1, 定理 3.5] 直接得出, 下面证明 (3.5). 设 $f\in L^{s_1}(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^{s_2}(\mathbb{R}^n)$, 对于任意 $x\in\mathbb{R}^n$, 取 $B:=B(x,r)$, $r>0$ 待定. 直接计算得

$$\begin{aligned}\bigg|\int_B\int_B\frac{f(y)g(z)}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz\bigg|&\leqslant\int_B\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha/2}}dy\int_B\frac{|g(z)|}{|x-z|^{n-\alpha/2}}dz\\&\lesssim r^\alpha M(f)(x)M(g)(x),\\\bigg|\int_B\int_{B^\complement}\frac{f(y)g(z)}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz\bigg|&\leqslant\int_B\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha/2}}dy\int_{B^\complement}\frac{|g(z)|}{|x-z|^{n-\alpha/2}}dz\\&\lesssim\frac{r^\alpha}{r^{n/s_2}}\|g\|_{L^{s_2}}M(f)(x).\end{aligned}$$

类似地,

$$\bigg|\int_{B^\complement}\int_B\frac{f(y)g(z)}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz\bigg|\lesssim\frac{r^\alpha}{r^{n/s_1}}\|f\|_{L^{s_1}}M(g)(x).$$

最后, 运用 Hölder 不等式知

$$\begin{aligned}\left|\int_{B^{\complement}}\int_{B^{\complement}}\frac{f(y)g(z)}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz\right| &\leqslant \int_{B^{\complement}}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha/2}}dy\int_{B^{\complement}}\frac{|g(z)|}{|x-y|^{n-\alpha/2}}dz\\ &\leqslant \left(\int_{B^{\complement}}\frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha/2)s_1'}}dy\right)^{1/s_1'}\left(\int_{B^{\complement}}|f|^{s_1}dy\right)^{1/s_1}\\ &\quad\times\left(\int_{B^{\complement}}\frac{1}{|x-z|^{(n-\alpha/2)s_2'}}dy\right)^{1/s_2'}\left(\int_{B^{\complement}}|g|^{s_2}dy\right)^{1/s_2}\\ &\lesssim \frac{r^{\alpha/2}}{r^{n/s_1}}\|f\|_{L^{s_1}}\frac{r^{\alpha/2}}{r^{n/s_2}}\|g\|_{L^{s_2}}\\ &\lesssim \frac{r^{\alpha}}{r^{n/s}}\|f\|_{L^{s_1}}\|g\|_{L^{s_2}}.\end{aligned}$$

综上可得

$$\begin{aligned}|\mathcal{I}_\alpha(f,g)(x)|\lesssim r^\alpha\bigg(&M(f)(x)M(g)(x)+\frac{\|f\|_{L^{s_1}}}{r^{n/s_1}}M(g)(x)+\frac{\|g\|_{L^{s_2}}}{r^{n/s_2}}M(f)(x)\\&+\|f\|_{L^{s_1}}\|g\|_{L^{s_2}}\frac{1}{r^{n/s}}\bigg),\quad\forall\, r>0.\end{aligned}$$

取 $\sigma=M(f)(x)M(g)(x)/(C_{s_1}C_{s_2}\|f\|_{L^{s_1}}\|g\|_{L^{s_2}})$ 和 $r=(1/\sigma)^{s/n}$, 可得

$$\begin{aligned}&M(f)(x)M(g)(x)+\frac{\|f\|_{L^{s_1}}}{r^{n/s_1}}M(g)(x)+\frac{\|g\|_{L^{s_2}}}{r^{n/s_1}}M(f)(x)+\|f\|_{L^{s_1}}\|g\|_{L^{s_2}}\frac{1}{r^{n/s}}\\&=\left(1+\frac{1}{C_{s_1}}+\frac{1}{C_{s_2}}+\frac{1}{C_{s_1}C_{s_2}}\right)M(f)(x)M(g)(x).\end{aligned}$$

再由 (3.4) 知

$$r^\alpha\leqslant Cr^{n/s}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right)\lesssim r^{n/s}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right)=\frac{\Phi^{-1}(\sigma^s)}{\sigma}.$$

从而

$$|\mathcal{I}_\alpha(f,g)(x)|\lesssim M(f)(x)M(g)(x)\frac{\Phi^{-1}(\sigma^s)}{\sigma}=C_{s_1}C_{s_2}\Phi^{-1}\left(\left(\frac{M(f)(x)M(g)(x)}{C_{s_1}C_{s_2}\|f\|_{L^{s_1}}\|g\|_{L^{s_2}}}\right)^s\right)\|f\|_{L^{s_1}}\|g\|_{L^{s_2}},$$

其中 $\Phi^{-1}(t)$ 为 $\Phi(t)$ 的逆函数. 利用 $\Phi(\Phi^{-1}(t))\leqslant t$ $(\forall\, t>0)$ (参见文献 [13]), 可得

$$\Phi\left(\frac{|\mathcal{I}_\alpha(f,g)(x)|}{C''\|f\|_{L^{s_1}}\|g\|_{L^{s_2}}}\right)\leqslant\left(\frac{M(f)(x)M(g)(x)}{C_{s_1}C_{s_2}\|f\|_{L^{s_1}}\|g\|_{L^{s_2}}}\right)^s,$$

其中 C'' 与 f 和 g 无关. 上式两边同时取积分, 再利用 Hölder 不等式和 M 的有界性, 可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{|\mathcal{I}_\alpha(f,g)(x)|}{C''\|f\|_{L^{s_1}}\|g\|_{L^{s_2}}}\right)dx\lesssim 1.$$

从而

$$\|\mathcal{I}_\alpha(f,g)\|_{L^\Phi}\lesssim\|f\|_{L^{s_1}}\|g\|_{L^{s_2}}.$$

定理 3.3 得证. □

4 主要引理

引理 4.1 设 p_1、p_2、p、q、$\tilde{p}$、φ_1、φ_2 和 φ 如定理 1.1 所述. 若 $f\in L^{(p_1,\varphi_1)}(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^{(p_2,\varphi_2)}(\mathbb{R}^n)$, 则对于任意球 $B=B(\omega,r)$, $r\in(0,\infty)$, 有下列不等式成立:

$$\int_{(2B)^\complement}\int_{2B}\frac{|f(y)g(z)|}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz\lesssim\int_{2r}^{\infty}t^{\alpha-1}\varphi(\omega,t)^{1/p}dt\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}},\quad\forall\,x\in B,\tag{4.1}$$

$$\int_{2B}\int_{(2B)^\complement}\frac{|f(y)g(z)|}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz\lesssim\int_{2r}^{\infty}t^{\alpha-1}\varphi(\omega,t)^{1/p}dt\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}},\quad\forall\,x\in B,\tag{4.2}$$

$$\int_{((2B)^\complement)^2}\frac{|f(y)g(z)|}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz\lesssim\int_{2r}^{\infty}t^{\alpha-1}\varphi(\omega,t)^{1/p}dt\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}},\quad\forall\,x\in B.\tag{4.3}$$

进一步地, 对于 $f\in L^{(p_1,\varphi_1)}(\mathbb{R}^n)$ 和 $g\in L^{(p_2,\varphi_2)}(\mathbb{R}^n)$, 若定义

$$\mathcal{I}_\alpha(f,g)(x)=\mathcal{I}_\alpha(f_1,g_1)(x)+\mathcal{I}_\alpha(f_1,g_2)(x)+\mathcal{I}_\alpha(f_2,g_1)(x)+\mathcal{I}_\alpha(f_2,g_2)(x),\quad\forall\,x\in B,\tag{4.4}$$

其中 $f_1=f\chi_{2B}$, $f_2=f\chi_{(2B)^\complement}$, $g_1=g\chi_{2B}$, $g_2=g\chi_{(2B)^\complement}$, 则对于任意 $x\in\mathbb{R}^n$, $\mathcal{I}_\alpha(f,g)(x)$ 有定义, 且满足

$$\|\mathcal{I}_\alpha(f,g)\|_{L^{(\tilde{p},\varphi)}}\lesssim\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}.\tag{4.5}$$

证明 首先证明 (4.1). 注意到 $x\in B$, $y\in 2^{k+2}B\backslash 2^{k+1}B$, 则有 $|x-y|>2^{k+1}r$. 由 Hölder 不等式及 φ、φ_1 和 φ_2 的双倍条件, 有

$$\begin{aligned}\int_{(2B)^\complement}\int_{2B}\frac{|f(y)g(z)|}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz&\lesssim\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^{k+2}B}\int_{2^{k+2}B}\frac{|f(y)g(z)|}{(2^{k+1}r)^{2n-\alpha}}dydz\\&\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}(2^{k+1}r)^{\alpha}\varphi(\omega,2^{k+2}r)^{1/p}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}\\&\lesssim\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^{k+1}r}^{2^{k+2}r}\frac{t^{\alpha}\varphi(\omega,t)^{1/p}}{t}dt\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}\\&\lesssim\int_{2r}^{\infty}t^{\alpha-1}\varphi(\omega,t)^{1/p}dt\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}.\end{aligned}$$

(4.1) 得证. 类似可得 (4.2).

接下来证明 (4.3). 注意到 $x\in B, y,z\in(2^{k+2}B)\backslash(2^{k+1}B)$, 则有 $|x-y|+|x-z|>2^{k+1}r$. 由 Hölder 不等式及 φ、φ_1 和 φ_2 的双倍条件, 有

$$\begin{aligned}\int_{((2B)^\complement)^2}\frac{|f(y)g(z)|}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz&\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\int_{(2^{k+2}B)^2}\frac{|f(y)g(z)|}{(2^{k+1}r)^{2n-\alpha}}dydz\\&\lesssim\sum_{k=0}^{\infty}(2^{k+1}r)^{\alpha}\fint_{2^{k+2}B}\fint_{2^{k+2}B}|f(y)g(z)|dydz\\&\lesssim\int_{2r}^{\infty}t^{\alpha-1}\varphi(\omega,t)^{1/p}dt\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}.\end{aligned}$$

(4.3) 得证.

由 f 和 g 的局部可积性和 (4.1)–(4.3) 易知, 定义 (4.4) 是合理的且与球 B 的选取无关. 下面证明 (4.5). 由定理 3.3 的证明及 (1.8) 可推导出

$$|\mathcal{I}_\alpha(f_1,g_1)(x)|\lesssim r^\alpha M(f)(x)M(g)(x)\lesssim\varphi(x,r)^{1/\tilde{p}-1/p}M(f)(x)M(g)(x).$$

又由 (4.1)–(4.3) 和 (1.8), 可得

$$\begin{aligned}|\mathcal{I}_\alpha(f_1,g_2)(x)|,|\mathcal{I}_\alpha(f_2,g_1)(x)|,|\mathcal{I}_\alpha(f_2,g_2)(x)|&\lesssim\int_r^\infty t^{\alpha-1}\varphi(\omega,t)^{1/p}dt\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}\\&\lesssim\varphi(x,r)^{1/\tilde{p}}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}},\end{aligned}$$

于是

$$|\mathcal{I}_\alpha(f,g)(x)|\lesssim\varphi(x,r)^{1/\tilde{p}-1/p}M(f)(x)M(g)(x)+\varphi(x,r)^{1/\tilde{p}}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}.$$

由文献 [14] 及注 1.1(ii) 知, 对于每个 x, 存在 $r>0$, 使得

$$\varphi(x,r)^{1/p}=(M(f)(x)M(g)(x))/(\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}),$$

代入上式得

$$|\mathcal{I}_\alpha(f,g)(x)|\lesssim(\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}})^{1-p/\tilde{p}}(M(f)(x)M(g)(x))^{p/\tilde{p}}.$$

从而由 Hölder 不等式和引理 2.5 得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{I}_\alpha(f,g)\|_{L^{(\tilde{p},\varphi)}}&\lesssim\|(M(f)M(g))^{p/\tilde{p}}\|_{L^{(\tilde{p},\varphi)}}(\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}})^{1-p/\tilde{p}}\\&=\sup_B\left\{\frac{1}{\varphi(B)}\fint_B(M(f)(x)M(g)(x))^pdx\right\}^{1/\tilde{p}}(\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}})^{1-p/\tilde{p}}\\&\leqslant\sup_B\left\{\frac{1}{\varphi(B)^{1/p}}\left(\fint_B(M(f)(x))^{p_1}dx\right)^{1/p_1}\left(\fint_B(M(g)(x))^{p_2}dx\right)^{1/p_2}\right\}^{p/\tilde{p}}\\&\quad\times(\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}})^{1-p/\tilde{p}}\\&=(\|Mf\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|Mg\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}})^{p/\tilde{p}}(\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}})^{1-p/\tilde{p}}\\&\lesssim\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}.\end{aligned}$$

从而引理 4.1 得证. □

对于交换子 $[b,\mathcal{I}_\alpha]_i$ $(i=1,2)$, 有如下引理. 本文只证明 $i=1$ 的情形. 对于 $i=2$ 的情形, 类似可得.

引理 4.2 如定理 1.1 所述, 若 $b\in\mathcal{L}^{(1,\psi)}(\mathbb{R}^n)$, $f\in L^{(p_1,\varphi_1)}(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^{(p_2,\varphi_2)}(\mathbb{R}^n)$, 则对于任意球 $B=B(\omega,r)$, $r\in(0,\infty)$, 有下列不等式成立:

$$\begin{aligned}&\int_{2B}\int_{(2B)^\complement}\frac{|b(y)-b_B||f(y)g(z)|}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz\\&\quad\lesssim\int_{2r}^\infty\frac{\psi(\omega,t)}{t}\left(\int_t^\infty u^{\alpha-1}\varphi(\omega,u)^{1/p}du\right)dt\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}},\quad\forall\,x\in B,\\&\int_{(2B)^\complement}\int_{2B}\frac{|b(y)-b_B||f(y)g(z)|}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz\end{aligned}\tag{4.6}$$

$$\lesssim \int_{2r}^{\infty} \frac{\psi(\omega,t)}{t}\bigg(\int_t^{\infty} u^{\alpha-1}\varphi(\omega,u)^{1/p}du\bigg)dt\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}, \quad \forall\, x\in B, \tag{4.7}$$

$$\int_{((2B)^{\complement})^2} \frac{|b(y)-b_B||f(y)g(z)|}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz$$

$$\lesssim \int_{r}^{\infty} \frac{\psi(\omega,t)}{t}\bigg(\int_t^{\infty} u^{\alpha-1}\varphi(\omega,u)^{1/p}du\bigg)dt\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}, \quad \forall\, x\in B. \tag{4.8}$$

证明 下面证明 (4.6). 注意到 $x\in B, z\in 2^{k+2}B\backslash 2^{k+1}B$, 则有 $|x-y|+|x-z|>2^{k+1}r$. 由 Hölder 不等式及 φ、φ_1 和 φ_2 的双倍条件以及引理 2.1 和 2.4 有

$$\begin{aligned}
&\int_{2B}\int_{(2B)^{\complement}} \frac{|b(y)-b_B||f(y)g(z)|}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz\\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty}(2^{k+1}r)^{\alpha}\fint_{2^{k+2}B}\fint_{2^{k+2}B}|b(y)-b_B||f(y)||g(z)|dydz\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}(2^{k+1}r)^{\alpha}\bigg(\fint_{2^{k+2}B}|b(y)-b_B|^{p_1'}dy\bigg)^{1/p_1'}\varphi(2^{k+2}B)^{1/p}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}\\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty}\int_r^{2^{k+1}r}\frac{\psi(\omega,t)}{t}dt\int_{2^{k+1}r}^{2^{k+2}r}\mu^{\alpha-1}\varphi(\omega,\mu)^{1/p}d\mu\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^{k+1}r}^{2^{k+2}r}\bigg(\int_r^{\mu}\frac{\psi(\omega,t)}{t}dt\bigg)\mu^{\alpha-1}\varphi(\omega,\mu)^{1/p}d\mu\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}\\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty}\bigg(\int_r^{\mu}\frac{\psi(\omega,t)}{t}dt\bigg)\mu^{\alpha-1}\varphi(\omega,\mu)^{1/p}d\mu\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}\\
&\lesssim \int_r^{\infty}\frac{\psi(\omega,t)}{t}\bigg(\int_t^{\infty}\mu^{\alpha-1}\varphi(\omega,\mu)^{1/p}d\mu\bigg)dt\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}.
\end{aligned}$$

(4.6) 得证. 类似可证 (4.7).

下面证明 (4.8). 注意到 $x\in B, y,z\in (2^{k+2}B)\backslash(2^{k+1}B)$, 则有 $|x-y|+|x-z|>2^{k+1}r$. 由 Hölder 不等式及 φ、φ_1 和 φ_2 的双倍条件以及引理 2.4 有

$$\begin{aligned}
&\int_{((2B)^{\complement})^2} \frac{|b(y)-b_B||f(y)g(z)|}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz\\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty}\int_{(2^{k+2}B)^2}\frac{|b(y)-b_B||f(y)g(z)|}{(2^{k+1}r)^{2n-\alpha}}dydz\\
&\lesssim \int_r^{\infty}\frac{\psi(\omega,t)}{t}\bigg(\int_t^{\infty}\mu^{\alpha-1}\varphi(\omega,\mu)^{1/p}d\mu\bigg)dt\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}.
\end{aligned}$$

证毕. □

注 4.1 在定理 1.1(i) 的条件下, 任取 $b\in\mathcal{L}^{(1,\psi)}(\mathbb{R}^n)$ 且 $f\in L^{(p_1,\varphi_1)}(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^{(p_2,\varphi_2)}(\mathbb{R}^n)$. 由引理 2.1, 有 $f\in L^{p_1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 以及对于所有 $p_0<p$, 有 $bf\in L^{p_0}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. 对于任意球 $B:=B(x,r)$, $\mathcal{I}_{\alpha}(|f|\chi_{2B},|g|\chi_{2B})$ 和 $\mathcal{I}_{\alpha}(|bf|\chi_{2B},|g|\chi_{2B})$ 均有定义. 由 (1.8)、(1.9) 和引理 2.4 知

$$\int_r^{\infty}t^{\alpha-1}\varphi(x,t)^{1/p}dt\lesssim\varphi(x,r)^{1/\tilde{p}}$$

和

$$\int_r^{\infty}\frac{\psi(x,t)}{t}\bigg(\int_t^{\infty}u^{\alpha-1}\varphi(x,u)^{1/p}du\bigg)dt\lesssim\int_r^{\infty}\frac{\psi(x,t)\varphi(x,t)^{1/\tilde{p}}}{t}dt\lesssim\int_r^{\infty}\frac{\varphi(x,t)^{1/q}}{t}dt\lesssim\varphi(x,r)^{1/q}.$$

故由引理 4.1 和 4.2 知下列积分

$$\int_{2B}\int_{(2B)^{\complement}}\frac{f(y)g(z)}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz,\quad \int_{(2B)^{\complement}}\int_{2B}\frac{f(y)g(z)}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz,$$
$$\int_{(2B)^{\complement}}\int_{(2B)^{\complement}}\frac{f(y)g(z)}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz,\quad \int_{(2B)^{\complement}}\int_{2B}\frac{b(y)f(y)g(z)}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz,$$
$$\int_{2B}\int_{(2B)^{\complement}}\frac{b(y)f(y)g(z)}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz,\quad \int_{(2B)^{\complement}}\int_{(2B)^{\complement}}\frac{b(y)f(y)g(z)}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz$$

均收敛. 于是

$$\begin{aligned}[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f,g)(x)=&\,[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f_1,g_1)(x)+[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f_1,g_2)(x)\\&+[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f_2,g_1)(x)+[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f_2,g_2)(x),\quad \forall\, x\in B\end{aligned}$$

有定义.

又当 $x\in B_1\cap B_2$ 时, 任取 B_3 满足 $B_1\cup B_2\subset B_3$, 则

$$\begin{aligned}&([b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{2B_j},g\chi_{2B_j})(x)+[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{2B_j},g\chi_{(2B_j)^{\complement}})(x)\\&\quad+[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{(2B_j)^{\complement}},g\chi_{2B_j})(x)+[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{(2B_j)^{\complement}},g\chi_{(2B_j)^{\complement}})(x))\\&\quad-([b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{2B_3},g\chi_{2B_j})(x)+[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{2B_3},g\chi_{(2B_j)^{\complement}})(x)\\&\quad+[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{(2B_3)^{\complement}},g\chi_{2B_j})(x)+[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{(2B_3)^{\complement}},g\chi_{(2B_j)^{\complement}})(x))\\&\quad=-[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{2B_3\setminus 2B_j},g\chi_{2B_j})(x)+[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{2B_3\setminus 2B_j},g\chi_{2B_j})(x)\\&\qquad-[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{2B_3\setminus 2B_j},g\chi_{(2B_3)^{\complement}})(x)+[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{2B_3\setminus 2B_j},g\chi_{(2B_3)^{\complement}})(x)=0,\quad j=1,2.\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}&[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{2B_1},g\chi_{2B_1})(x)+[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{2B_1},g\chi_{(2B_1)^{\complement}})(x)\\&\quad+[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{(2B_1)^{\complement}},g\chi_{2B_1})(x)+[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{(2B_1)^{\complement}},g\chi_{(2B_1)^{\complement}})(x)\\&\quad=[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{2B_2},g\chi_{2B_2})(x)+[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{2B_2},g\chi_{(2B_2)^{\complement}})(x)\\&\qquad+[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{(2B_2)^{\complement}},g\chi_{2B_2})(x)+[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{(2B_2)^{\complement}},g\chi_{(2B_2)^{\complement}})(x),\quad \forall\, x\in B_1\cap B_2.\end{aligned}$$

这表明 (1.6) 中定义的 $[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f,g)(x)$ 与包含 x 的球 B 的选取无关. $[b,\mathcal{I}_\alpha]_2(f,g)(x)$ 类似可得.

引理 4.3 在定理 1.1(i) 的假设下, 对于所有 $b\in\mathcal{L}^{(1,\psi)}(\mathbb{R}^n)$, $f\in L^{(p_1,\varphi_1)}(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^{(p_2,\varphi_2)}(\mathbb{R}^n)$ 及任意球 $B:=B(\omega,r)$, 有

$$\left|\fint_B\int_{(2B)^{\complement}}\int_{(2B)^{\complement}}\frac{(b(x)-b(y))f(y)g(z)}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydzdx\right|\lesssim\varphi(B)^{1/q}\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}.$$

证明 对于 $x\in B=B(\omega,r)$, 记

$$G_1(x)=|b(x)-b_B|\int_{(2B)^{\complement}}\int_{(2B)^{\complement}}\frac{|f(y)||g(z)|}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz,$$

$$G_2(x)=\int_{(2B)^{\complement}}\int_{(2B)^{\complement}}|b(y)-b_B|\frac{|f(y)||g(z)|}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}dydz,$$

则

$$\left|\int_{(2B)^{\complement}}\int_{(2B)^{\complement}}\frac{(b(x)-b(y))}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}f(y)g(z)dydz\right|\leqslant G_1(x)+G_2(x).$$

对于 $G_1(x)$, 由 (4.3) 可得

$$G_1(x)\lesssim|b(x)-b_B|\int_{2r}^{\infty}t^{\alpha-1}\varphi(x,t)^{1/p}dt\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}.$$

对于 $G_2(x)$, 由 (4.6) 可得

$$G_2(x)\lesssim\int_r^{\infty}\frac{\psi(x,t)}{t}\bigg(\int_t^{\infty}u^{\alpha-1}\varphi(x,u)^{1/p}du\bigg)dt\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}.$$

从而有

$$\begin{aligned}\fint_B G_1(x)dx&\lesssim\fint_B|b(x)-b_B|dx\varphi(\omega,r)^{1/\tilde{p}}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}\\&\lesssim\psi(\omega,r)\varphi(z,r)^{1/\tilde{p}}\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}\\&\lesssim\varphi(\omega,r)^{1/q}\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}\end{aligned}$$

和

$$\fint_B G_2(x)dx\lesssim\varphi(\omega,r)^{1/q}\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}.$$

引理 4.3 得证. □

5 $[b,\mathcal{I}_\alpha]_i$ $(i=1,2)$ 的 sharp 极大算子的点态估计

设 $f\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$, 令

$$M^{\sharp}f(x)=\sup_{B\ni x}\fint_B|f(y)-f_B|dy,\quad x\in\mathbb{R}^n,\tag{5.1}$$

其中上确界是对包含 x 的所有球 B 取的.

命题 5.1 设 $p,p_1,p_2,\eta\in(1,\infty)$, $\varphi,\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{G}^{\rm dec}$ 满足 (1.7), $\psi\in\mathcal{G}^{\rm inc}$, $\rho(r)=r^{\alpha}$, 且 $1/p_1+1/p_2=1/p$. 若对于每个 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $r>0$ 有

$$\int_r^{\infty}t^{\alpha-1}\varphi(x,t)^{1/p}dt<\infty,\quad\int_r^{\infty}\frac{\psi(x,t)}{t}\bigg(\int_t^{\infty}u^{\alpha-1}\varphi(x,u)^{1/p}du\bigg)dt<\infty,\tag{5.2}$$

则对于所有 $b\in\mathcal{L}^{(1,\psi)}(\mathbb{R}^n)$, $f\in L^{(p_1,\varphi_1)}(\mathbb{R}^n)$ 和 $g\in L^{(p_2,\varphi_2)}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\begin{aligned}&M^{\sharp}([b,\mathcal{I}_\alpha]_i(f,g))(x)\\&\quad\lesssim\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}((\mathcal{M}_{\psi^\eta}(|\mathcal{I}_\alpha(f,g)|^\eta)(x))^{1/\eta}+(\mathcal{M}_{(\rho\psi)^\eta}(|f|^\eta,|g|^\eta)(x))^{1/\eta}),\quad i=1,2.\end{aligned}\tag{5.3}$$

证明 只需证明 $i=1$ 的情形, $i=2$ 的情形类似可得. 在 (5.2) 的假设下, 不难得出 $\mathcal{I}_\alpha$ 与 $[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f,g)$ 有定义. 对于任意球 $B=B(x,r)$, 令 $B^*=2B$, 作如下分解: $f=f_1+f_2$ 和 $g=g_1+g_2$, 其中, $f_1=f\chi_{B^*}$, $f_2=f\chi_{(B^*)^{\complement}}$, $g_1=f\chi_{B^*}$, $g_2=g\chi_{(B^*)^{\complement}}$. 记

$$F_1(t)=(b(t)-b_{B^*})\mathcal{I}_\alpha(f,g)(t),\quad F_2(t)=\mathcal{I}_\alpha((b(t)-b_{B^*})f_1,g_1)(t),$$

$$F_3(t)=\mathcal{I}_\alpha((b(t)-b_{B^*})f_1,g_2)(t)-C_B^1,\quad F_4(t)=\mathcal{I}_\alpha((b(t)-b_{B^*})f_2,g_1)(t)-C_B^2,$$
$$F_5(t)=\mathcal{I}_\alpha((b(t)-b_{B^*})f_2,g_2)(t)-C_B^3,$$

其中, $C_B^1=\mathcal{I}_\alpha((b(t)-b_{B^*})f_1,g_2)(x)$, $C_B^2=\mathcal{I}_\alpha((b(t)-b_{B^*})f_2,g_1)(x)$, $C_B^3=\mathcal{I}_\alpha((b(t)-b_{B^*})f_2,g_2)(x)$. 记 $C_B=C_B^1+C_B^2+C_B^3$. 由注 4.1, 得

$$[b,\mathcal{I}_\alpha](f,g)(t)+C_B=[b-b_{B^*},\mathcal{I}_\alpha](f,g)(t)+C_B=F_1(t)-F_2(t)-F_3(t)-F_4(t)-F_5(t),\quad \forall\, t\in B.$$

想要证明 (5.3), 只需证明对于任意 $t\in B$, 恒有

$$\fint_B|F_i(t)|dt\lesssim\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}((\mathcal{M}_{\psi^\eta}(|\mathcal{I}_\alpha(f,g)|^\eta)(x))^{1/\eta}+(\mathcal{M}_{(\rho\psi)^\eta}(|f|^\eta,|g|^\eta)(x))^{1/\eta}),\quad i=1,2,3,4,5.\tag{5.4}$$

对于 $F_1(t)$, 由 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}\fint_B|F_1(t)|dt&\leqslant\frac{1}{\psi(B)}\bigg(\fint_B|b(t)-b_{B^*}|^{\eta'}dt\bigg)^{1/\eta'}\bigg(\psi(B)^\eta\fint_B|\mathcal{I}_\alpha(f,g)(t)|^\eta dt\bigg)^{1/\eta}\\&\lesssim\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}(\mathcal{M}_{\psi^n}(|\mathcal{I}_\alpha(f,g)|^\eta)(x))^{1/\eta}.\end{aligned}\tag{5.5}$$

对于 $F_2(t)$, 由定理 3.3 知, 存在一个 N- 函数 Φ 满足: $\mathcal{I}_\alpha$ 是从 $L^{s_1}(\mathbb{R}^n)\times L^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ 上有界的. 令 Ψ 是 Φ 的补函数, 则由广义 Hölder 不等式有

$$\int_B|F_2(t)|dt\leqslant\frac{2}{|B|}\|\chi_B\|_{L^\Psi(\mathbb{R}^n)}\|F_2\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)}\lesssim\frac{\rho(r)}{|B|^{1/s}}\|(b-b_{2B})f\|_{L^{s_1}(2B)}\|g\|_{L^{s_2}(2B)}.$$

取 $1/s_1=1/u+1/\eta$, $s_2=\eta$, 则由 Hölder 不等式和引理 2.1, 有

$$\begin{aligned}\fint_B|F_2(t)|dt&\lesssim\rho(r)\bigg(\fint_{2B}|b(y)-b_{B^*}|^u dy\bigg)^{1/u}\bigg(\fint_{2B}|f(y)|^\eta dy\bigg)^{1/\eta}\bigg(\fint_{2B}|g(z)|^\eta dz\bigg)^{1/\eta}\\&\lesssim\frac{1}{\psi(2B)}\bigg(\fint_{2B}|b(y)-b_{B^*}|^u dy\bigg)^{1/u}\bigg((\rho\psi)^\eta\fint_{2B}|f(y)|^\eta dy\fint_{2B}|g(z)|^\eta dz\bigg)^{1/\eta}\\&\lesssim\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}(\mathcal{M}_{(\rho\psi)^\eta}(|f|^\eta,|g|^\eta)(x))^{1/\eta}.\end{aligned}$$

对于 $F_3(t)$, 因为 $x,t\in B$, $y\in 2B$, $z\in 2^{k+1}B\backslash 2^kB$, 所以 $|x-y|+|x-z|\geqslant 2^kr$ 且 $|x-z|\sim|t-z|$. 由 Hölder 不等式和引理 2.2, 可得

$$\begin{aligned}|F_3(t)|&\lesssim\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\bigg|\frac{(b(y)-b_{B^*})f_1(y)g_2(z)}{(|t-y|+|t-z|)^{2n-\alpha}}-\frac{(b(y)-b_{B^*})f_1(y)g_2(z)}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}}\bigg|dydz\\&\lesssim r\int_{2B}\int_{(2B)^c}\frac{|b(y)-b_{B^*}||f(y)g(z)|}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha+1}}dydz\\&\lesssim r\sum_{k=1}^\infty(2^kr)^{-(2n-\alpha+1)}\int_{2B}\int_{2^{k+1}B\backslash 2^kB}|b(y)-b_{B^*}||f(y)g(z)|dydz\\&\leqslant r\sum_{k=1}^\infty(2^kr)^{-(2n-\alpha+1)}\int_{2^{k+1}B}\int_{2^{k+1}B}|b(y)-b_{B^*}||f(y)g(z)|dydz\\&\lesssim\sum_{k=1}^\infty\bigg(\frac{k}{2^k}\bigg)\frac{1}{\psi(2^{k+1}B)}\bigg(\fint_{2^{k+1}B}|b(y)-b_{2^{k+1}B}|^{\eta'}dy\bigg)^{1/\eta'}\end{aligned}$$

$$\times\left\{(\psi(2^{k+1}B)\rho(r))^{\eta}\left(\fint_{2^{k+1}B}|f(y)|^{\eta}dy\right)\times\left(\fint_{2^{k+1}B}|g(z)|^{\eta}dz\right)\right\}^{1/\eta}$$
$$\lesssim\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\mathcal{M}_{(\rho\psi)^{\eta}}(|f|^{\eta},|g|^{\eta})(x)^{1/\eta}.$$

对于 $F_4(t)$, 类似可得

$$|F_4(t)|\lesssim\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\mathcal{M}_{(\rho\psi)^{\eta}}(|f|^{\eta},|g|^{\eta})(x)^{1/\eta}.$$

最后

$$\begin{aligned}|F_5(t)|&\leqslant r\int_{(2B)^c}\int_{(2B)^c}\frac{|b(y)-b_{B^*}||f(y)g(z)|}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha+1}}dydz\\&\leqslant r\sum_{k=1}^{\infty}(2^k r)^{-(2n-\alpha+1)}\int_{(2^{k+1}B)^2\setminus(2^kB)^2}|b(y)-b_{B^*}||f(y)g(z)|dydz\\&\lesssim\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\mathcal{M}_{(\rho\psi)^{\eta}}(|f|^{\eta},|g|^{\eta})(x)^{1/\eta}.\end{aligned}$$

于是

$$\fint_B(|F_3(t)|+|F_4(t)|+|F_5(t)|)dt\lesssim\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\mathcal{M}_{(\rho\psi)^{\eta}}(|f|^{\eta},|g|^{\eta})(x)^{1/\eta}.$$

命题 5.1 得证. □

6 主要定理的证明

在证明定理 1.1 之前, 先给出如下两个基本事实:

(i) (参见文献 [1]) 设 $p\in[1,\infty)$, $\varphi:\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\to(0,\infty)$. 假设 $\varphi\in\mathcal{G}^{\mathrm{dec}}$ 且满足 (1.5). 若对于 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 有 $\lim_{r\to\infty}f_{B(0,r)}=0$, 则

$$\|f\|_{L^{(p,\varphi)}}\lesssim\|M^{\sharp}f\|_{L^{(p,\varphi)}}. \tag{6.1}$$

(ii) 对于 $0<\eta<\infty$, 有

$$\||f|^{\eta}\|_{L^{(p,\varphi)}}=(\|f\|_{L^{(p\eta,\varphi)}})^{\eta}. \tag{6.2}$$

定理 1.1(i) 的证明 (1.6) 中 $[b,\mathcal{I}_\alpha]_i(f,g)(x)$ $(i=1,2)$ 的定义合理性见注 4.1. 下面证明不等式 (1.10). 在定理 1.1(i) 的假设下, 取 $1<\eta<p$. 由 (1.9) 有

$$\psi(x,r)^{\eta}\varphi(x,r)^{\eta/\widetilde{p}}\leqslant {C_1}^{\eta}\varphi(x,r)^{\eta/q}.$$

因而由引理 2.5 知

$$\|\mathcal{M}_{\psi^{\eta}}(f)\|_{L^{(q/\eta,\varphi)}}\lesssim\|f\|_{L^{(\widetilde{p}/\eta,\varphi)}}.$$

再由 (1.8) 和 (4.5) 得

$$\|\mathcal{I}_\alpha(f,g)\|_{L^{(\widetilde{p},\varphi)}}\lesssim\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}.$$

由此并结合 (6.2) 可得

$$\|(\mathcal{M}_{\psi^{\eta}}(|\mathcal{I}_\alpha(f,g)|^{\eta}))^{1/\eta}\|_{L^{(q,\varphi)}}=(\|\mathcal{M}_{\psi^{\eta}}(|\mathcal{I}_\alpha(f,g)|^{\eta})\|_{L^{(q/\eta,\varphi)}})^{1/\eta}\lesssim(\||\mathcal{I}_\alpha(f,g)|^{\eta}\|_{L^{(\widetilde{p}/\eta,\varphi)}})^{1/\eta}$$

$$\lesssim \|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}.$$

再由定理 3.2 和 (6.2) 知

$$\|(\mathcal{M}_{(\rho\psi)^\eta}(|f|^\eta,|g|^\eta))^{1/\eta}\|_{L^{(q,\varphi)}} \lesssim (\||f|^\eta\|_{L^{(p_1/\eta,\varphi_1)}}\||g|^\eta\|_{L^{(p_2/\eta,\varphi_2)}})^{1/\eta} = \|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}.$$

于是由命题 5.1, 得

$$\|M^\sharp([b,\mathcal{I}_\alpha]_i(f,g))\|_{L^{(q,\varphi)}} \lesssim \|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}, \quad i=1,2.$$

若能证明, 对于 $B_r := B(0,r)$ 有

$$⨍_{B_r}[b,\mathcal{I}_\alpha]_i(f,g)dx \to 0, \quad r\to\infty, \quad i=1,2, \tag{6.3}$$

则由 (6.1) 知

$$\|[b,\mathcal{I}_\alpha]_i(f,g)\|_{L^{(q,\varphi)}} \lesssim \|M^\sharp([b,\mathcal{I}_\alpha]_i(f,g))\|_{L^{(q,\varphi)}} \lesssim \|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}, \quad i=1,2.$$

于是, 接下来只需证明 (6.3). 本文仅对 $i=1$ 的情形证明, 其余情形可类似证明. 注意到

$$[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f,g)(x) = b(x)\mathcal{I}_\alpha(f,g)(x) - \mathcal{I}_\alpha(bf,g)(x).$$

想要证明 (6.3), 只需证明当 $r\to\infty$ 时有

$$⨍_{B_r} b\mathcal{I}_\alpha(f,g)(x)dx \to 0, \quad ⨍_{B_r}\mathcal{I}_\alpha(bf,g)(x)dx\to 0.$$

情形 1 对于 $f\in L^{(p_1,\varphi_1)}(\mathbb{R}^n)$ 和 $g\in L^{(p_2,\varphi_2)}(\mathbb{R}^n)$, 首先考虑 f 和 g 都具有紧支集的情形. 令 $\mathrm{supp} f\subset B_s = B(0,s)$ 且 $s\geqslant 1$, $\mathrm{supp} g\subset B_s$, 则对于所有 $p_0\in(1,\infty)$, 有 $f\in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ 与 $b\in L^{p_0}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. 由于 $\frac{1}{(|y|+|z|)^{2n-\alpha}}$ 关于 y 和 z 局部可积, 故作如下分解:

$$(1)\ b\mathcal{I}_\alpha(f,g) = b\mathcal{I}_\alpha(f,g)\chi_{B_{2s}} + b\mathcal{I}_\alpha(f,g)\chi_{(B_{2s})^\complement}, \quad (2)\ \mathcal{I}_\alpha(bf,g) = \mathcal{I}_\alpha(bf,g)\chi_{B_{2s}} + \mathcal{I}_\alpha(bf,g)\chi_{(B_{2s})^\complement}.$$

取 $1/q+1/p_0=1$, $q>p$. 由 Hölder 不等式得

$$\int_{\mathbb{R}^n}|b\mathcal{I}_\alpha(f,g)\chi_{B_{2s}}|dx \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n}|b|^{p_0}\chi_{B_{2s}}dx\right)^{1/p_0}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{I}_\alpha(f,g)|^q\chi_{B_{2s}}dx\right)^{1/q} \leqslant \|b\|_{L^{p_0}_{\mathrm{loc}}}\|f\|_{L^{p_1}}\|g\|_{L^{p_2}}.$$

取 $1/q_2'+1/p_2-\alpha/n=1/\gamma$, $1/q_2'=1/p_0+1/p_1$, 则有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{I}_\alpha(bf,g)\chi_{B_{2s}}|dx &= |B_{2s}|⨍_{B_{2s}}|\mathcal{I}_\alpha(bf,g)|dx \leqslant |B_{2s}|\left(⨍_{B_{2s}}|\mathcal{I}_\alpha(bf,g)|^\gamma dx\right)^{1/\gamma}\\ &\lesssim \left(\int_{B_{2s}}|bf|^{q_2'}dy_1\right)^{1/q_2'}\left(\int_{B_{2s}}|g|^{p_2}dy_2\right)^{1/p_2}\\ &\lesssim \left(\int_{B_{2s}}|b|^{p_0}dy_1\right)^{1/p_0}\left(\int_{B_{2s}}|f|^{p_1}dy_1\right)^{1/p_1}\left(\int_{B_{2s}}|g|^{p_2}dy_2\right)^{1/p_2}\\ &\leqslant \|b\|_{L^{p_0}_{\mathrm{loc}}}\|f\|_{L^{p_1}}\|g\|_{L^{p_2}}.\end{aligned}$$

由此可得, 当 $r\to\infty$ 时,

$$\fint_{B_r}|b\mathcal{I}_\alpha(f,g)|\chi_{B_{2s}}dx\leqslant\frac{1}{|B_r|}\int_{\mathbb{R}^n}|b\mathcal{I}_\alpha(f,g)|\chi_{B_{2s}}dx\leqslant\frac{1}{|B_r|}\|b\|_{L^{p_0}_{\mathrm{loc}}}\|f\|_{L^{p_1}}\|g\|_{L^{p_2}}\to 0.$$

类似地, 当 $r\to\infty$ 时,

$$\fint_{B_r}|\,\mathcal{I}_\alpha(bf,g)\chi_{B_{2s}}|dx\leqslant\frac{1}{|B_r|}\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{I}_\alpha(bf,g)|\chi_{B_{2s}}dx\leqslant\frac{1}{|B_r|}\|b\|_{L^{p_0}_{\mathrm{loc}}}\|f\|_{L^{p_1}}\|g\|_{L^{p_2}}\to 0.$$

对 $x\in(B_{2s})^{\complement}$, $y,z\in B(0,s)$, 易知 $|x|/2\leqslant|x-y|\leqslant(3/2)|x|$ 和 $|x|/2\leqslant|x-z|\leqslant(3/2)|x|$, 即 $|x-y|\sim|x-z|\sim|x|$. 于是有

$$|\mathcal{I}_\alpha(f,g)(x)|\lesssim\frac{1}{|x|^{2n-\alpha}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)g(z)|dydz=\frac{1}{|x|^{2n-\alpha}}\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1},\tag{6.4}$$

$$|\mathcal{I}_\alpha(bf,g)(x)|\lesssim\frac{1}{|x|^{2n-\alpha}}\|bf\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.\tag{6.5}$$

由于

$$\begin{aligned}&\int_{B_r}b\mathcal{I}_\alpha(f,g)(x)\chi_{(B_{2s})^{\complement}}(x)dx\\&=\int_{B_r}(b(x)-b_{B_{2s}}+b_{B_{2s}})\mathcal{I}_\alpha(f,g)(x)\chi_{(B_{2s})^{\complement}}(x)dx\\&=b_{B_{2s}}\int_{B_r}\mathcal{I}_\alpha(f,g)(x)\chi_{(B_{2s})^{\complement}}(x)dx+\int_{B_r}(b(x)-b_{B_{2s}})\mathcal{I}_\alpha(f,g)(x)\chi_{(B_{2s})^{\complement}}(x)dx,\end{aligned}$$

并联立 (6.4) 和 (6.5), 得

$$\begin{aligned}|b_{B_{2s}}|\fint_{B_r}|\mathcal{I}_\alpha(f,g)\chi_{(B_{2s})^{\complement}}|dx&\leqslant|b_{B_{2s}}|\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}\frac{\chi_{(B_{2s})^{\complement}}}{|x|^{2n-\alpha}}\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}dx\\&\lesssim|b_{B_{2s}}|\frac{r^\alpha}{|B_r|^2}\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}\to 0,\quad r\to\infty\end{aligned}$$

以及

$$\fint_{B_r}|\mathcal{I}_\alpha(bf,g)\chi_{(B_{2s})^{\complement}}|dx\leqslant\fint_{B_r}\frac{1}{|x|^{2n-\alpha}}\chi_{(B_{2s})^{\complement}}\|bf\|_{L^1}\|g\|_{L^1}dx\to 0,\quad r\to\infty.$$

于是, 只需证明当 $r\to\infty$ 时,

$$\fint_{B_r}(b-b_{B_{2s}})\mathcal{I}_\alpha(f,g)\chi_{(B_{2s})^{\complement}}dx\to 0\tag{6.6}$$

成立, 则 (6.3) 对于所有具有紧支集的 $f\in L^{(p_1,\varphi_1)}(\mathbb{R}^n)$ 和 $g\in L^{(p_2,\varphi_2)}(\mathbb{R}^n)$ 都成立.

为了证明 (6.6), 取 $\epsilon\in(0,1)$ 满足 $1+1/q-1/p_1-1/p_2=1+1/q-1/p>\epsilon$, 令 $v=1/(1-\epsilon)$, 则

$$\left|\fint_{B_r}(b-b_{B_{2s}})(\mathcal{I}_\alpha(f,g))(1-\chi_{B_{2s}})dx\right|\leqslant\left(\fint_{B_r}|b-b_{B_2}|^{v'}dx\right)^{1/v'}\left(\fint_{B_r}|(\mathcal{I}_\alpha(f,g))(1-\chi_{B_{2s}})|^{v}dx\right)^{1/v}.$$

由 (1.9) 和 (2.2) 可推导出

$$\left(\fint_{B_r}|b-b_{B_{2s}}|^{v'}dx\right)^{1/v'}\lesssim\int_{2s}^{r}\frac{\psi(0,t)}{t}dt\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\lesssim\psi(0,r)(\log r)\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}$$

$$\lesssim \varphi(0,r)^{1/q-1/\tilde{p}}(\log r)\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}. \tag{6.7}$$

当 $s\geqslant 1$ 且 $2s<r$ 时, 由 (1.9) 有

$$\left(\fint_{B_r}|(\mathcal{I}_\alpha(f,g))(1-\chi_{B_{2s}})|^v dx\right)^{1/v}\lesssim \frac{1}{r^{2n}}\varphi(0,r)^{1/\tilde{p}-1/p}\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}. \tag{6.8}$$

运用 (1.9) 和 (6.8), 当 $r\to\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\fint_{B_r}(b-b_{B_{2s}})(\mathcal{I}_\alpha(f,g))(1-\chi_{B_{2s}})dx\right| &\lesssim \varphi(0,r)^{1/q-1/\tilde{p}}\log r\frac{1}{r^{2n}}\varphi(0,r)^{1/\tilde{p}-1/p}\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}\\ &=\frac{\log r}{r^{n(2+1/q-1/p)}}\left(\frac{1}{r^n\varphi(0,r)}\right)^{1/p-1/q}\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}\\ &\leqslant\frac{\log r}{r^{n(1+\epsilon)}}\left(\frac{1}{r^n\varphi(0,r)}\right)^{1/p-1/q}\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}\to 0.\end{aligned}$$

因为 $r^n\varphi(0,r)$ 几乎递增, 所以 (6.3) 对于所有具有紧支集的 $f\in L^{(p_1,\varphi_1)}(\mathbb{R}^n)$ 和 $g\in L^{(p_2,\varphi_2)}(\mathbb{R}^n)$ 都成立.

情形 2 对于 $f\in L^{(p_1,\varphi_1)}(\mathbb{R}^n)$ 和 $g\in L^{(p_2,\varphi_2)}(\mathbb{R}^n)$, 考虑 f 和 g 有一个具有紧支集的情形. 不妨设 g 具有紧支集, 先固定 $r>0$ 且 $\operatorname{supp} g\subset B_{2r}$, 作分解: $f=f\chi_{B_{2r}}+f\chi_{(B_{2r})^\complement}$, 则

$$\begin{aligned}[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f,g)(x)&=[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{B_{2r}},g)(x)+[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{(B_{2r})^\complement},g)(x)\\ &=[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{B_{2r}},g\chi_{B_{2r}})(x)+[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{(B_{2r})^\complement},g\chi_{B_{2r}})(x).\end{aligned}$$

想要证明 (6.3), 只需证明当 $r\to\infty$ 时, 有

$$[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{B_{2r}},g\chi_{B_{2r}})(x)\to 0,\quad [b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{(B_{2r})^\complement},g\chi_{B_{2r}})(x)\to 0.$$

对于 $[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{B_{2r}},g\chi_{B_{2r}})(x)$, 由情形 1 可知

$$\begin{aligned}\|[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{B_{2r}},g\chi_{B_{2r}})\|_{L^{(q,\varphi)}}&\lesssim\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\chi_{B_{2r}}\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\chi_{B_{2r}}\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}\\ &\leqslant\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}.\end{aligned} \tag{6.9}$$

对于 $\mathcal{I}_\alpha(bf\chi_{(B_{2r})^\complement},g\chi_{B_{2r}})(x)$, 由证明命题 5.1 过程中 $F_2(t)$ 的估计, 有

$$|\mathcal{I}_\alpha(bf\chi_{(B_{2r})^\complement},g\chi_{B_{2r}})(x)|\lesssim\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}(\mathcal{M}_{\psi^n}(|f|^\eta,|g|^\eta)(x))^{1/\eta}.$$

由 (6.2) 和定理 3.2, 可得

$$\|\mathcal{I}_\alpha(bf\chi_{(B_{2r})^\complement},g\chi_{B_{2r}})\|_{L^{(q,\varphi)}}\lesssim\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}. \tag{6.10}$$

联立 (6.9) 与 (6.10), 由 (1.4), 当 $r\to\infty$ 时, 有

$$\fint_{B_r}[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f,g)dx\leqslant\varphi(0,r)^{1/q}\|[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f,g)\|_{L^{(q,\varphi)}}\lesssim\varphi(0,r)^{1/q}\|b\|_{\mathcal{L}^{(1,\psi)}}\|f\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}\to 0.$$

从而得 (6.3) 对于所有一般的 $f\in L^{(p_1,\varphi_1)}(\mathbb{R}^n)$ 和具有支集的 $g\in L^{(p_2,\varphi_2)}(\mathbb{R}^n)$ 都成立.

情形 3 对于 $f\in L^{(p_1,\varphi_1)}(\mathbb{R}^n)$ 和 $g\in L^{(p_2,\varphi_2)}(\mathbb{R}^n)$ 的一般情形, 任意取定 $x\in\mathbb{R}^n$ 和固定 $r>0$, 作如下分解: $f=f\chi_{B_{2r}}+f\chi_{(B_{2r})^\complement}$ 和 $g=g\chi_{B_{2r}}+g\chi_{(B_{2r})^\complement}$, 则有

$$\begin{aligned}[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f,g)(x)&=[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{B_{2r}},g\chi_{B_{2r}})(x)+[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{(B_{2r})^\complement},g\chi_{B_{2r}})(x)\\&\quad+[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{B_{2r}},g\chi_{(B_{2r})^\complement})(x)+[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f\chi_{(B_{2r})^\complement},g\chi_{(B_{2r})^\complement})(x)\\&=:\mathrm{I}(x)+\mathrm{II}(x)+\mathrm{III}(x)+\mathrm{IV}(x).\end{aligned}$$

由情形 1 和 2 可知, 当 $r\to\infty$ 时, 有

$$⨍_{B_r}\mathrm{I}(x)dx\to0,\quad ⨍_{B_r}\mathrm{II}(x)dx\to0,\quad ⨍_{B_r}\mathrm{III}(x)dx\to0,$$

再由引理 4.3 知 $⨍_{B_r}\mathrm{IV}(x)\to0$. 从而定理 1.1(i) 得证. □

定理 1.1(ii) 的证明 由对称性, 仅需证明 $[b,\mathcal{I}_\alpha]_1$ 的情形. 记 $K(y,z)=(|y|+|z|)^{-2n+\alpha}$. 取球 $B_0:=B((y_0,z_0),2\sqrt{2}\delta)\subset\mathbb{R}^{2n}$ 使得 $1/K(y,z)$ 在球 B_0 上的 Fourier 级数展开式绝对收敛. 可设

$$\frac{1}{K(y,z)}=\sum a_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{v_k}\cdot(y,z)},$$

其中 $\sum|a_j|<\infty$, $\vec{v_k}=(v_k^1,v_k^2)\in(\mathbb{R}^n)^2$. 取 (y_0,z_0) 满足 $|(y_0,z_0)|>2$ 且 $0<\delta<1$ (足够小), $\overline{B}\cap\{0\}=\emptyset$. 设 $y_1=\delta^{-1}y_0$, $z_1=\delta^{-1}z_0$. 若 $(|y-y_1|^2+|z-z_1|^2)^{1/2}<2\sqrt{2}$, 则有

$$(|\delta y-y_0|^2+|\delta z-z_0|^2)^{1/2}<2\sqrt{2}\delta.$$

于是对于满足上述不等式的 (y,z) 恒有

$$\frac{1}{K(y,z)}=\frac{\delta^{-2n+\alpha}}{K(\delta y,\delta z)}=\delta^{-2n+\alpha}\sum_j a_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta\vec{v_j}\cdot(y,z)}.$$

令 $B=B(x_0,r)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中任意球. 设 $\tilde{y}=x_0+ry_1$ 和 $\tilde{z}=x_0+rz_1$, 取 $B'=B(\tilde{y},r)\subset\mathbb{R}^n$ 和 $B''=B(\tilde{z},r)\subset\mathbb{R}^n$, 则对于任意 $x\in B$ 和 $y\in B'$, 有

$$\left|\frac{x-y}{r}-y_1\right|\leqslant\left|\frac{x-x_0}{r}\right|+\left|\frac{y-\tilde{y}}{r}\right|\leqslant2.$$

对于 $x\in B$ 和 $z\in B''$ 有类似结果, 可推导出

$$\left(\left|\frac{x-y}{r}-y_1\right|^2+\left|\frac{x-z}{r}-z_1\right|^2\right)^{1/2}\leqslant2\sqrt{2}.$$

记 $\sigma(x)=\mathrm{sgn}(b(x)-b_{B'})$, 则

$$\begin{aligned}\int_B|b(x)-b_{B'}|dx&=\int_B(b(x)-b_{B'})\sigma(x)dx\\&=\frac{1}{|B''|}\frac{1}{|B'|}\int_B\int_{B'}\int_{B''}(b(x)-b(y))\sigma(x)dzdydx\\&=\frac{1}{|B(0,1)|^2r^{2n}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}(b(x)-b(y))\frac{r^{2n-\alpha}K(x-y,x-z)}{K((x-y)/r,(x-z)/r)}\\&\quad\times\sigma(x)\chi_B(x)\chi_{B'}(y)\chi_{B''}(z)dzdydx\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|B(0,1)|^2}\delta^{-2n+\alpha}r^{-\alpha}\iiint (b(x)-b(y))K(x-y,x-z) \times \sum_j a_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta/r)\vec{v_j}\cdot(x-y,x-z)} \times \sigma(x)\chi_B(x)\chi_{B'}(y)\chi_{B''}(z)dzdydx.$$

记 $f_j(y) := \exp(-\mathrm{i}\frac{\delta}{r}v_j^1\cdot y)\chi_{B'}(y)$, $g_j(z) := \exp(-\mathrm{i}\frac{\delta}{r}v_j^2\cdot z)\chi_{B''}(z)$, $h_j(x) := \exp(\mathrm{i}\frac{\delta}{r}\vec{v_j}\cdot(x,x))\sigma(x)\chi_B(x)$. 由于 B、B' 和 B'' 有相同半径 r, 故可断定 $B\cap B'\cap B''=\emptyset$, 即 $|x_0-\tilde{y}|>r$ 或 $|x_0-\tilde{z}|>r$ 至少有一个成立. 由 (y_0,z_0) 模的大小条件, 可知 $|y_0|>1$ 或 $|z_0|>1$ 至少有一个成立. 若 $|y_0|>1$, 则

$$|x_0-\tilde{y}| = \left|x_0-x_0+r\frac{y_0}{\delta}\right| \geqslant r|y_0| > r.$$

类似地, 若 $|z_0|>1$, 则有 $|x_0-\tilde{z}|>r$. 故有 $B\cap B'\cap B''=\emptyset$, 从而有 B' 和 B'' 中至少有一个与 B 不相交. 对于所有 x、y 和 z, 点 $(x-y,x-z)$ 满足核 K 的条件, 即 $[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f_j,g_j)$ 有 Fourier 级数展开式

$$\begin{aligned}\int_B |b(x)-b_{B'}|dx &= \frac{1}{|B(0,1)|^2}\delta^{-2n+\alpha}r^{-\alpha}\sum_j a_j\int h_j(x)\iint (b(x)-b(y))\\ &\quad\times K(x-y,x-z)f_j(y)g_j(z)dzdydx\\ &= \frac{1}{|B(0,1)|^2}\delta^{-2n+\alpha}|B|^{-\alpha/n}\sum_j a_j\int h_j(x)[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f_j,g_j)(x)dx\\ &\leqslant \frac{1}{|B(0,1)|^2}\delta^{-2n+\alpha}|B|^{-\alpha/n}\sum_j |a_j|\int |h_j(x)||[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f_j,g_j)(x)|dx\\ &\leqslant \frac{1}{|B(0,1)|^2}\delta^{-2n+\alpha}|B|^{-\alpha/n}\sum_j |a_j||B|\left(\fint |[b,\mathcal{I}_\alpha]_1(f_j,g_j)(x)|^q dx\right)^{1/q}\\ &\leqslant C|B|^{-\alpha/n}\varphi(B)^{1/q}|B|\|[b,\mathcal{I}_\alpha]_1\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}\times L^{(p_2,\varphi_2)}\to L^{(q,\varphi)}}\|f_j\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\|g_j\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}},\end{aligned}$$

其中 $C=\delta^{-2n+\alpha}\sum_j|a_j|$.

由于 $\varphi_1\in\mathcal{G}^{\mathrm{dec}}$ 且 φ_1 满足 (1.2), 所以 $\|f_j\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}} = \|\chi_{B'}\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}} \sim \frac{1}{\varphi_1(B')^{1/p_1}}$. 再由 $|x_0-y_0| = r|z_1|$ 可知 $\varphi_1(B')\sim\varphi_1(B)$, 因而有 $\|f_j\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}}\sim\frac{1}{\varphi_1(B)^{1/p_1}}$. 类似地, $\|g_j\|_{L^{(p_2,\varphi_2)}}\sim\frac{1}{\varphi_2(B)^{1/p_2}}$. 故

$$\begin{aligned}\int_B |b(x)-b_{B'}|dx &\lesssim \varphi(B)^{1/q}|B|\|[b,\mathcal{I}_\alpha]_1\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}\times L^{(p_2,\varphi_2)}\to L^{(q,\varphi)}}\frac{1}{\varphi_1(B)^{1/p_1}}\frac{1}{\varphi_2(B)^{1/p_2}}r^\alpha\\ &\lesssim \varphi(B)^{1/q}|B|\|[b,\mathcal{I}_\alpha]_1\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}\times L^{(p_2,\varphi_2)}\to L^{(q,\varphi)}}\varphi(B)^{1/p}r^\alpha\\ &\lesssim r^\alpha|B|\varphi(B)^{1/q-1/p}\|[b,\mathcal{I}_\alpha]_1\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}\times L^{(p_2,\varphi_2)}\to L^{(q,\varphi)}}.\end{aligned}$$

由上式和 (1.11), 可得

$$\frac{1}{\psi(B)}\fint_B |b(x)-b_B|dx \leqslant \frac{2}{\psi(B)}\fint_B |b(x)-b_{B'}|dx \lesssim \|[b,\mathcal{I}_\alpha]_1\|_{L^{(p_1,\varphi_1)}\times L^{(p_2,\varphi_2)}\to L^{(q,\varphi)}}.$$

定理 1.1 证毕. □

致谢 作者衷心感谢审稿人提出的宝贵意见.

参考文献

1 Arai R, Nakai E. Commutators of Calderón-Zygmund and generalized fractional integral operators on generalized Morrey spaces. Rev Mat Complut, 2018, 31: 287–331

2 Chaffee L. Characterizations of bounded mean oscillation through commutators of bilinear singular integral operators. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 2016, 146: 1159–1166
3 Chaffee L, Cruz-Uribe D. Necessary conditions for the boundedness of linear and bilinear commutators on Banach function spaces. Math Inequal Appl, 2018, 21: 1–16
4 Chen S Q, Wu H X. Multiple weighted estimates for commutators of multilinear fractional integral operators. Sci China Math, 2013, 56: 1879–1894
5 Chen X, Xue Q Y. Weighted estimates for a class of multilinear fractional type operators. J Math Anal Appl, 2010, 362: 355–373
6 Ding Y, Mei T. Boundedness and compactness for the commutators of bilinear operators on Morrey spaces. Potential Anal, 2015, 42: 717–748
7 Grafakos L, Kalton N. Some remarks on multilinear maps and interpolation. Math Ann, 2001, 319: 151–180
8 Guo W C, Lian J L, Wu H X. The unified theory for the necessity of bounded commutators and applications. J Geom Anal, 2020, 30: 3995–4035
9 Iida T, Sato E, Sawano Y, et al. Multilinear fractional integrals on Morrey spaces. Acta Math Sin (Engl Ser), 2012, 28: 1375–1384
10 Iida T, Sato E, Sawano Y, et al. Sharp bounds for multilinear fractional integral operators on Morrey type spaces. Positivity, 2012, 16: 339–358
11 Kenig C E, Stein E M. Multilinear estimates and fractional integration. Math Res Lett, 1999, 6: 1–15
12 Moen K. Weighted inequalities for multilinear fractional integral operators. Collect Math, 2009, 60: 213–238
13 Rao M M, Ren Z D. Theory of Orlicz Spaces. New York: Marcel Dekker, 1991
14 Sawano Y, Sugano S, Tanaka H. Generalized fractional integral operators and fractional maximal operators in the framework of Morrey spaces. Trans Amer Math Soc, 2011, 363: 6481–6503
15 Tang L. Endpoint estimates for multilinear fractional integrals. J Aust Math Soc, 2008, 84: 419–429
16 Tao X, Zheng T. Multilinear commutators of fractional integrals over Morrey spaces with non-doubling measures. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl, 2011, 18: 287–308

Boundedness for the commutators of bilinear fractional integral operators on generalized Morrey spaces

Songqing Chen, Fuli Ku & Huoxiong Wu

Abstract In this paper, we consider the commutators $[b,\mathcal{I}_\alpha]_i$ $(i=1,2)$, where $\mathcal{I}_\alpha$ is a bilinear fractional integral operator, and b is a function in generalized Campanato spaces with the variable growth condition. We give necessary and sufficient conditions for the boundedness of $[b,\mathcal{I}_\alpha]_i$ $(i=1,2)$ on generalized Morrey spaces with the variable growth condition.

Keywords **bilinear fractional integral, commutator, Campanato space, Morrey space, variable growth condition**

MSC(2020) **42B20, 42B25, 42B35, 46E30**

doi: 10.1360/SSM-2022-0131