



关于流形刚性的一些问题

王友德

中国科学院数学与系统科学研究院华罗庚重点实验室, 北京 100190

E-mail: wyd@math.ac.cn

收稿日期: 2025-08-21; 接受日期: 2025-11-25; 网络出版日期: 2026-01-13

国家自然科学基金 (批准号: 12431003) 资助项目

摘要 本文系统回顾流形体积与 Sobolev 常数、Ricci 曲率或数量曲率的内在关联, 梳理流形 Sobolev 常数刚性的研究进展, 并概述定义在非负 Ricci 曲率非紧完备流形上的临界 p -Laplace 方程正解的分类成果. 基于上述两大研究方向的现状, 本文进一步提出一些待解决的关键问题.

关键词 Ricci 曲率 流形刚性 Sobolev 常数 p -Laplace 算子 Aubin-Talenti 泡泡

MSC (2020) 主题分类 53C21, 53C24, 58J05

1 关于流形体积与 Sobolev 常数的联系

1.1 回眸 Sobolev 不等式

假定 (M, g) 为一个维数为 $n \geq 3$ 的完备流形. 称一个维数 $\dim(M) \geq 3$ 的完备 Riemann 流形 (M, g) 的 Sobolev 常数具有正的下界, 假如存在 $S_2(M) > 0$ 使得如下不等式成立:

$$S_2(M) \left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} d\text{vol}_g(x) \right)^{1-2/n} \leq \int_M |\nabla u|^2 d\text{vol}_g(x), \quad \forall u \in C_0^\infty(M).$$

记半径为 R 的测地球 $B(x, R) \subset M$ 的 Sobolev 常数为 $S_2(B(x, R))$. 下面回顾 Sobolev 常数具有正下界的流形之体的积估计与 Moser 迭代的深刻联系.

• 令 (M, g) 为具有 $S_2(M) > 0$ 的非紧完备 Riemann 流形, $B_R \subset M$ 为一个半径为 R 的测地球. 对于方程

$$\Delta u \geq 0, \quad \text{在 } B_R \text{ 上},$$

我们使用 Nash-Moser 迭代方法可以推导出下面的不等式成立:

$$\sup_{B_{\theta R}} u \leq C(n, p, \theta, S_2(M)) \frac{1}{R^{\frac{n}{p}}} \left(\int_{B_R} (u^+)^p d\text{vol}_g(x) \right)^{\frac{1}{p}},$$

这里 $u^+ = \max\{u, 0\}$, $p > 0$ 及 $0 < \theta < 1$.

• 特别地, 选取 $u \equiv 1$ 和 $p = 1$, 可以得到 $\text{Vol}(B_R) \geq C(n, S_2(M)) R^n$.

英文引用格式: Wang Y D. Some problems concerning the rigidity of manifolds (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 887–896, doi: 10.1360/SSM-2025-0203

定理 1.1 ^[39] 设 (M, g) 是一个维数大于 2 且 Sobolev 常数具有正下界的完备非紧的 Riemann 流形, 即 $S_2(M, g) > 0$. 则对于任意测地球 $B_R(x) \subset M$, 有

$$\text{Vol}(B_R(x)) \geq C(n, S_2(M))R^n,$$

这里 $n = \dim(M)$, $C(n, S_2(M))$ 不依赖于点 x .

这个定理在研究 Ricci 流时经常会用到, 人们研究一系列 Riemann 度量的 Gromov-Hausdorff 收敛时经常会用到此列度量的非塌缩条件, 即关于此列度量具固定半径的测地球的体积具有一个正的下界. 具体可以参考 Cheeger 在 20 世纪 60 年代的工作.

另外, Wang ^[39] 也讨论了一类在一个紧集外 Ricci 曲率非负的 Riemann 流形上有界调和函数所构成的线性空间的维数及这些调和函数的分析性质; 特别地, 引进了一种估计此类流形的“端”(end) 的个数的方法, 所得有关“端”的计数的界只依赖几何量.

法国人 Carron ^[7] 声称他于 1992 年在法国召开的一个微分几何会议上报告他也得到了定理 1.1, 其文章于 1996 年正式发表于会议论文集上. 本质上, 他的证明方法与文献 [39] 中的相同. Hebey ^[28] 于 2000 年将 Carron 的证明写在了他本人的讲义中. 另外, Akutagawa ^[1] 于 1994 年也证明了同一结果, 他的文章于 1993 年提交给所发表的期刊.

1.2 Sobolev 常数的刚性

Ledoux ^[30] 于 1999 年研究了 Sobolev 常数的刚性, 得到了下面的结果:

• 令 (M, g) 为一个具非负 Ricci 曲率的 n 维完备 Riemann 流形. 假设在此流形上, 下面的 Sobolev 不等式成立:

$$\left(\int |f|^p d\text{vol}_g(x) \right)^{1/p} \leq C \left(\int |\nabla f|^q d\text{vol}_g(x) \right)^{1/q}, \quad \forall f \in C_0^\infty(M),$$

$1 \leq q < n$, $1/p = 1/q - 1/n$, 且 C 为以上不等式在 $\mathbb{R}^n$ 情形的最优常数, 则 (M, g) 等距同构于 $\mathbb{R}^n$.

Cheeger 和 Colding ^[11] 证明了一个令人称道的定理: 对任意给定的整数 $n \geq 2$, 总是存在一个常数 $\delta(n) > 0$ 使得任意 n 维具非负 Ricci 曲率的完备 Riemann 流形, 若对 $x \in M$ 及所有 $r > 0$, 有

$$\text{Vol}[B(x, r)] \geq (1 - \delta(n))V_0(r),$$

则 (M, g) 微分同胚于 $\mathbb{R}^n$, 这里 $V_0(r)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 r 的球的体积.

结合 Cheeger 和 Colding ^[11] 的这个定理与 Bishop-Gromov 体积比较定理, 可以得出下面结论: 任意具有非负 Ricci 曲率的完备 Riemann 流形, 若其不微分同胚于 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$, 则 $\text{vol}[B(x, r)] < (1 - \delta(n))V_0(r)$.

问题 1.1 假设 (M, g) 为一个在其上满足下面 Sobolev 不等式的一个非紧完备流形:

$$S_2(M) \left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} d\text{vol}_g(x) \right)^{1-2/n} \leq \int_M |du|^2 d\text{vol}_g(x), \quad \forall u \in C_0^\infty(M).$$

如果 $S_2(M) = S_2(\mathbb{R}^n)$, 我们试问是否存在一个常数 $\epsilon(n) > 0$ 使得, 若对任意的测地球 $B(x, r) \subset M$ 均成立 $\text{Vol}[B(x, r)] \leq (1 + \epsilon(n))V_0(r)$, 则 (M, g) 等距同构于 $\mathbb{R}^n$?

这个问题的一个弱一点的版本如下:

问题 1.2 假设 (M, g) 为一个在其上满足下面 Sobolev 不等式的一个非紧完备流形:

$$S_2(M) \left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} d\text{vol}_g(x) \right)^{1-2/n} \leq \int_M |du|^2 d\text{vol}_g(x), \quad \forall u \in C_0^\infty(M),$$

且对任意的 $r > 0$ 和 x 有 $\text{Vol}[B(x, r)] \leq V_0(r)$, 试问当 $S_2(M) = S_2(\mathbb{R}^n)$ 时是否 (M, g) 等距同构于 $\mathbb{R}^n$?

与以上两个问题有关联的猜想如下:

猜想 1.1 (Gromov) 存在一个只依赖于流形 M 维数的常数使得: 若 (M, g) 满足 $\text{Ric} \geq 0$ 和数量曲率 $R \geq 2$, 则

$$\sup_{p \in M, r > 0} \frac{\text{Vol}(B_p(r))}{r^{n-2}} \leq C(n),$$

这里 $B_p(r)$ 表示一个中心在 p 、半径为 r 的测地球.

尚有另外一个近似的版本: 在与上面猜想同样的假设下, 存在一个仅依赖于 M 维数的常数 $C(n)$ 使得不等式 $\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(B_p(r))}{r^{n-2}} \leq C(n)$ 成立. 根据体积比较定理, 可知这个上极限不会依赖于点 p 的选择, 从而这个量是几何量. 到目前为止, 对这个猜想的研究集中于这个近似版本的研究.

如果另外假设这个流形的体积非塌缩, Zhu^[42] 应用流形收敛理论与球面 Lipschitz 上界定理证明了上面的这个近似猜想为真. 若 $\dim(M) = 3$, Munteanu 和 Wang^[31] 用调和函数理论证明了这一近似猜想. 随即 Chodosh 等^[14] 利用 Cheeger-Colding 理论和 μ -泡泡 (μ -bubble) 技巧给出了一个完全不同的新证明. 进一步地, Wei 等^[41] 证明了三维情形时上述最佳上界是 8π , 并证明了达到最佳上界时相应的刚性.

2 Riemann 流形上的临界 p -Laplace 方程与刚性

历史回顾 在过去的半个多世纪, 人们关注并研究了下面的定义在一个 n - 维的完备 Riemann 流形 (M^n, g) 上的 Lane-Emden 方程全局解的存在性与不存在性:

$$\Delta_g u + u^\alpha = 0, \quad (2.1)$$

这里 Δ_g 为关于度量 g 的 Laplace-Beltrami 算子 (参见文献 [13, 20, 21, 25, 40]). 如果 $-\infty < \alpha < \frac{n+2}{n-2}$ 并且承载流形 (M, g) 具有非负 Ricci 曲率, 人们已经证明这个方程不会容许有任何的正解 (参见文献 [25, 40]). 另外, 通过使用“有界域逼近”, Ding 和 Ni^[21] 证明了下面的结论: 对于任意给定的 $c > 0$, 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的 $\Delta u + au^\alpha = 0$, 这里 $\alpha \geq \frac{n+2}{n-2}$, a 为一个正常数, 容许有一个正解 v 其满足 $\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = c$. Ding^[20] 进一步证明了定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的且具 $\alpha = \frac{n+2}{n-2}$ 的 Lane-Emden 方程 (2.1) 容许有无穷多的变号解.

人们也研究了定义在 M^n 上的拟线性的 Lane-Emden 方程

$$\Delta_p u + u^\alpha = 0, \quad (2.2)$$

这里的 p -Laplace 算子 Δ_p 定义如下: $\Delta_p u = \text{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$. 例如, 文献 [34, 推论 II] 证明了定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的经典拟线性 Lane-Emden 方程 (2.2) 不容许有任何正解, 若

$$0 < \alpha < \frac{(n+1)p-n}{n-p} \quad \text{和} \quad 1 < p < n.$$

实际上, 上面所述的在文献 [25, 34] 所建立的 Liouville 定理已经被延拓到了如下情形:

$$-\infty < \alpha < \frac{(n+1)p-n}{n-p}, \quad 1 < p < n,$$

详情可参见文献 [27]. 更进一步地, 当 (M, g) 为一个 Ricci 曲率有下界的完备 Riemann 流形且 $p < \frac{n+3}{n-1}$ 时, He 等 [27] 也建立了关于正解的所谓的万有对数梯度估计. 新近, He 等 [26] 证明了关于定义在具非负 Ricci 曲率的完备非紧流形上的拟线性 Lane-Emden 方程的最优的 Liouville 定理. 更具体地, 他们证明了定义在具非负 Ricci 曲率的完备非紧流形上的拟线性 Lane-Emden 方程不会容许任何正解, 若 $\alpha \in (-\infty, p_S - 1)$, 这里 p_S 为临界 Sobolev 指数,

$$p_S \equiv \frac{np}{(n-p)^+},$$

当 $1 < p < n$ 时, $p_S = \frac{np}{n-p}$ 为关联到 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上 Sobolev 空间的嵌入: $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p_S}(\Omega)$ 的指数.

而在 Lane-Emden 方程 (2.2) 中, 若 $\alpha = p_S - 1$, 则可得到 $\mathbb{R}^n$ 上的临界 p -Laplace 方程

$$\Delta_p u + u^{p_S-1} = 0.$$

这个方程直接关联到 Sobolev 不等式的极化子. 众所周知, 这个方程有下面的解族:

$$u(x) = (a + b|x - x_0|^{\frac{p}{p-1}})^{-\frac{n-p}{p}} \quad \text{及} \quad n \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^{p-1} ab^{p-1} = 1, \quad (2.3)$$

这里 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $a > 0$ 及 $b > 0$. 这个解族常常被称为 Aubin-Talenti 泡泡. 进一步地, 人们也已证明这个解族为此临界 p -Laplace 方程唯一的 $\mathcal{D}^{1,p}$ -解族 ($1 < p < n$), 这里

$$\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \equiv \left\{ v \in L^{p_S}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^p < +\infty \right\}.$$

这个结果可以看作对应于临界 p -Laplace 方程的 Liouville 定理.

回顾临界 p -Laplace 方程的近亲, 即 $\mathbb{R}^2$ 上定义的 Liouville 方程: $\Delta u + e^{2u} = 0$. 这个方程也容许有一族标准解如下:

$$u(x) = -\ln(a + b|x - x_0|^2), \quad (2.4)$$

这里 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 及参数 a 和 b 为满足 $4ab = 1$ 的正常数. Chen 和 Li [12] 分类了 Liouville 方程满足 $e^{2u} \in L^1(\mathbb{R}^2)$ 的解 u 正是形如 (2.4) 的解族. 人们也就定义在维数大于或等于 2 的 Riemann 流形 (M^n, g) 上的 Liouville 方程的光滑径向解的渐近行为、稳定性与相交性质进行了完整的分类, 详情可参见文献 [3].

我们聚焦于所谓的“临界 p -Laplace 方程 ($1 < p < n$)”

$$-\Delta_p u = u^{p_S-1} \quad (2.5)$$

和拟线性 (或称为) “ n -Laplace Liouville 方程”

$$-\Delta_n u = e^{nu}, \quad (2.6)$$

其定义在一个 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 或一个具非负 Ricci 曲率的完备 Riemann 流形 (M^n, g) 上.

回顾一些与方程 (2.5) 相关的基本事实与结论. 首先回顾临界 p -Laplace 方程的变分性质, 其作用泛函为

$$E_M(u) \equiv \frac{1}{p} \int_M |\nabla u|^p d\text{vol}_g(x) - \frac{1}{p_S} \int_M |u|^{p_S} d\text{vol}_g(x).$$

显然, 其 Euler-Lagrange 方程即为临界 p -Laplace 方程. 我们知道临界 Sobolev 空间嵌入定理: $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_S}(\mathbb{R}^n)$ 断定存在一个正常数 $\mathcal{S}_p(\mathbb{R}^n)$ 使得对每一个函数 $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\|v\|_{L^{p_S}(\mathbb{R}^n)} \leq \mathcal{S}_p(\mathbb{R}^n) \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.7)$$

容易看出, 上面 Sobolev 不等式的极化函数若存在, 则必定满足方程 (2.5).

最佳常数 $\mathcal{S}_p(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < n$) 的确定需要回溯到 Aubin^[2] (当 $p = 2$ 时) 和 Talenti^[36] (一般的 p). 为了得到这个最佳常数, Aubin 和 Talenti 均通过使用 Schwarz 对称化和精准的等周不等式再借助 Pólya-Szegő 不等式, 将问题约化为一个容易处理的一维问题. 当 $p \in (1, n)$ 时, 不等式 (2.7) 中的最佳常数 $\mathcal{S}_p(\mathbb{R}^n)$ 可以明晰表达, 而极化函数就是上面给出的所谓的 Aubin-Talenti 泡泡.

在极限情形 $p = 1$, 我们得到 $\lim_{p \rightarrow 1} \mathcal{S}_p(\mathbb{R}^n) = n^{-1} \omega_n^{-1/n}$, 这里 ω_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积, 而 (2.7) 即为精准的 L^1 -Sobolev 不等式, 其等价于 $\mathbb{R}^n$ 中精准的等周不等式.

一些学者也对 Riemann 流形上的最佳 Sobolev 不等式的研究作出努力并获得有价值的成果. 例如, Kristály^[29] 避开对称化程序提供了一个基于 L^2 -最优输运的精准 L^p -Sobolev 不等式的证明. 他也解决了由 Cordero-Erausquin 等^[18] 就 Riemann 流形情形所提出的一个相关问题. 具体地, 他们的主要结果陈述如下: 令 (M^n, g) 为一个具非负 Ricci 曲率的非紧完备 Riemann 流形且具有 Euclid 体积增长, 即 $0 < \text{AVR}_g \leq 1$. 若 $p \in [1, n)$, 则对所有 $v \in C_0^\infty(M^n)$, 成立

$$\|v\|_{L^{p_S}(M^n)} \leq \mathcal{S}_p(\mathbb{R}^n) \text{AVR}_g^{-1/n} \|\nabla v\|_{L^p(M^n)}.$$

更进一步地, 可以证明常数 $\mathcal{S}_p(\mathbb{R}^n) \text{AVR}_g^{-1/n}$ 是精准的. 这里, AVR_g 为 (M^n, g) 的渐近体积率, 其定义为

$$\text{AVR}_g = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(B_R(o))}{\omega_n R^n}.$$

当 Ricci 曲率非负时, 由 Bishop-Gromov 体积比较定理可知渐近体积率独立于基点 o , 所以 AVR_g 是一个几何量. 应该指出, 这个精准的 Sobolev 不等式也被 Brendle^[4] 用 Alexandrov-Bakelman-Pucci 方法独立证明.

一些公开问题 虽然定义于 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 上的临界 p -Laplace 方程 (2.5) 已经广为人们所研究, 但是一个有趣且具有挑战性的问题依然存在:

问题 2.1 在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 上所定义的临界 p -Laplace 方程 (2.5) ($1 < p < n$) 的正解是否必定是 Aubin-Talenti 泡泡解?

自然地, 人们想要将定义于 Euclid 空间的方程 (2.5) 推广到其定义区域 (M^n, g) 为一个完备的 Riemann 流形, 例如, 将上面的关于临界 Laplace 方程 ($p = 2$) 的 Liouville 定理推广到定义在 Riemann 流形上定义的临界 Laplace 方程 ($p = 2$) 的情形.

问题 2.2 我们有下面两个问题.

(1) 事实上, 有这样一个关于强刚性的猜想: 令 (M^n, g) 为一个具非负 Ricci 曲率的非紧完备流形及 $u \in C^2(M^n)$ 为其上方程 $\Delta_g u + u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0$ 的一个正解, 则要么于 M^n 上 $u \equiv 0$, 要么 (M^n, g) 等距同构于标准 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 且 u 为一个所谓的 Aubin-Talenti 泡泡 (参见文献 [10]).

(2) 自然地, 人们想要知道是否如下的关于临界 p -Laplace 方程 ($1 < p < n$) 的强刚性结论成立: 令 (M^n, g) 为一个具非负 Ricci 曲率的非紧完备流形及 u 为临界 p -Laplace 方程 (2.5) ($1 < p < n$) 一个非负弱解, 则或者于 M^n 上 $u \equiv 0$, 或者 (M^n, g) 等距同构于标准 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 且 u 必定为一个 Aubin-Talenti 泡泡.

而对于方程 (2.6), 可以问下面的问题:

问题 2.3 令 (M^n, g) 为一个具非负 Ricci 曲率的非紧完备流形及 $u \in C^2(M^n)$ 为上述 Liouville 方程 (2.6) 的一个正解. 关于其解 u 的何种条件会迫使 M^n 等距同构于 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 且 u 具有下面形式:

$$u(x) = -\ln(a + b|x - x_0|^{\frac{n}{n-1}}), \quad \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} ab^{n-1} = 1,$$

这里 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 及参数 a 和 b 为正常数?

就对应于临界 p -Laplace 方程的“问题 2.1”而言, “是否定义于 $\mathbb{R}^n$ 上的方程 (2.5) 的正解必须是如 (2.3) 所示的解族”, 下面回顾一些散落在文献中的已有结果.

当 $p = 2$ 时, 这个问题被 Caffarelli 等^[5] 所解决. 他们用移动平面方法与 Kelvin 变换等证明了定义于 $\mathbb{R}^n$ 上的方程 (2.5) 的正解为径向的, 从而被 (2.3) 所决定. 当 $p \neq 2$ 时, 不再有所谓的 Kelvin 变换可以利用, 问题变得更为复杂. 然而, 相应的移动平面方法也为人们所发现, Damascelli 等^[19] 就 $\frac{2n}{n+2} \leq p < 2$ 的情形, Sciunzi^[33] 就 $2 < p < n$ 的情形, 及 Vétois^[37] 就 $1 < p \leq 2$ 的情形, 外加解能量有界的条件, 他们证明了定义于 $\mathbb{R}^n$ 上的方程 (2.5) 的正解必须是 Aubin-Talenti 泡泡解, 即“定义于 $\mathbb{R}^n$ 上的 (2.5) 的任意正解若满足 $u \in L^{ps}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则必须是如 (2.3) 所示的解族”.

这种分类结果后来又又被 Ciraolo 等^[16] 推广至定义在 Euclid 空间的一个凸锥上的各向异性的椭圆算子的情形 (可参见文献 [17]).

但是, 对于 $p \neq 2$ 且无任何进一步的关于正解的假设, 这个问题所获得的结果并不多. 最近 Catino 等^[9] 就维数 $n = 2, 3$ 且 $\frac{n}{2} < p < 2$ 得到了一些结果. 这些结果被 Ou^[32] 改进到一个更大的区域 $p \in [\frac{n+1}{3}, n)$. 旋即 Vétois^[38] 通过精细的分析将 Ou^[32] 的结果推广到区域 $p \in (\tilde{p}_n, n)$, 这里

$$\tilde{p}_n \in \left(\frac{n}{3}, \frac{n+1}{3}\right) \quad \text{和} \quad \tilde{p}_n \sim \frac{n}{3} + \frac{1}{n}, \quad \text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}.$$

另外, 定义在一个具非负 Ricci 曲率的非紧完备流形上 M^n 上的临界 p -Laplace 方程 (2.5) 也被一些数学家研究. 例如, Fogagnolo 等^[24]、Catino 和 Monticelli^[8] 以及 Ciraolo 等^[15] 探索了半线性的情形, 即 $p = 2$ 的情形. 后来, Catino 等^[9] 研究了拟线性的情形 (即 $p \neq 2$), 在外加一些几何或分析条件的情况下得到了一些有关正解的分类结果.

特别地, Catino 和 Monticelli^[8] 证明了, 若承载流形具非负 Ricci 曲率且维数为 $n = 3$, 当 $p = 2$ 时方程 (2.5) 具有正解当且仅当此承载流形等距同构于 Euclid 空间, 且此解由 Aubin-Talenti 泡泡 (2.3) 所给定. 此外, 若 $n \geq 4$ 且正解 u 具有有限能量或在无穷远处满足一些适当的条件, 则同样的结论成立. 这些结果很快被 Ciraolo 等^[15] 所改进. 实际上, 人们已经知道问题 2.2 中与 (2.5) 有关的猜想在 $p = 2$ 及流形维数 $n = 3, 4, 5$ (参见文献 [8, 15]) 成立; 否则, 至今人们没有获得任何结果, 除非人们外加一些有关正解的条件.

关于拟线性 Liouville 方程 (2.6), 众所周知, 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的 (拟线性) Liouville 方程 (2.6) 的标准解可以表示为

$$u(x) = -\ln(a + b|x - x_0|^{\frac{n}{n-1}}), \quad (2.8)$$

这里 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 为一个固定点, 参数 a 和 b 为满足下面条件的正常数:

$$\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} ab^{n-1} = 1.$$

前面已经提到, 当 $n = 2$ 时, 定义在二维 Euclid 空间上的 (2.6) 的满足 $e^{2u} \in L^1(\mathbb{R}^2)$ 的解 u 已经被 Chen 和 Li^[12] 分类清楚, u 一定具有如 (2.8) 的形式. 后来, Esposito^[23] 完全分类了定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的方程 (2.6) 具有有限质量的解, 这些解必定是如 (2.8) 所示的解.

同时, Catino 和 Monticelli^[8], Cai 和 Lai^[6] 以及 Ciraolo 等^[15] 也研究了定义在完备非紧流形上的 Liouville 方程. 特别地, Cai 和 Lai^[6] 证明了下面的结果: 设 u 为定义在一个连通、完备非紧且具有非负 Gauss 曲率的曲面 Σ 上的 Liouville 方程 (2.6) 的一个解. 令 $r(x)$ 为 Σ 上关于一个固定点的距离函数. 如果 $e^{2u} \in L^1(\Sigma)$ 且当 $r(x)$ 比较大时成立 $u(x) \geq -2 \ln r(x) - o(\ln r(x))$, 则 Σ 必然等距于 $\mathbb{R}^2$. 进一步地, 当 $\gamma < -2$ 时存在一个非平坦 Σ 在其上 Liouville 方程容许一个解 $u(x) \sim \gamma \ln r(x)$ 的意义下, 可以证明 -2 为最优的. 而 Eremenko 等^[22] 给出了二维 Liouville 方程的上方有界的解的完整分类, 也给出了高维 Liouville 方程的凹刚性.

最近, Sun 和 Wang^[35] 考察了定义在一个具非负 Ricci 曲率的非紧完备流形上的临界 p -Laplace 方程 (2.5) 和 Liouville 方程 (2.6) 解的分类. 我们也进一步检测了这些解的存在性与定义域流形的几何性质的关系. 下面是 Sun 和 Wang^[35] 所得到的最新结果:

定理 2.1 令 M^n 为一个连通、完备非紧的具有非负 Ricci 曲率的 n 维 Riemann 流形. 设 u 为在 M^n 上定义的临界 p -Laplace 方程 (2.5) 的正解, 即 u 满足

$$-\Delta_p u = u^{\frac{np}{n-p}-1}.$$

如果下面条件之一满足:

(1) $p_n < p < n$, 这里

$$p_n = \begin{cases} \frac{n^2}{3n-2}, & n \in \{2, 3, 4\}, \\ \frac{n^2+2}{3n}, & n \geq 5; \end{cases}$$

(2) $1 < p < n$ 且关于某固定点 $o \in M^n$ 和某个常数 $q > \frac{(n^2-3n+1)p+n}{(n-1)p}$ 有

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} R^{q-n} \int_{B_R(o)} u^{\frac{pq}{n-p}} < \infty;$$

(3) $1 < p < n$, 存在正常数 C 和 d 满足 $d > \frac{(n-3p)(p-1)(n-p)}{p^2(n+2-3p)}$ 使得

$$u(x) \leq Cr(x)^{-d}, \quad \forall r(x) \geq C^{-1},$$

这里 $r(x) = \text{dist}(x, o)$ 为从 x 到某固定点 $o \in M^n$ 的距离函数,

则 M^n 等距同构于 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 且这个解 u 是一个 Aubin-Talenti 泡泡解, 即 u 可表述为

$$u(x) = (a + b|x - x_0|^{\frac{p}{p-1}})^{-\frac{n-p}{p}}, \quad n \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^{p-1} ab^{p-1} = 1,$$

这里 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 为一个固定点, a 和 b 为正常数.

定理 2.2 ^[35] 令 M^n 为一个连通、完备非紧的具有非负 Ricci 曲率的 n 维 Riemann 流形. 设 F 为一个正的单调增加函数且满足

$$\int^{\infty} \frac{ds}{sF(s)} = \infty.$$

如果 u 为在 M^n 上定义的临界 Liouville 方程 (2.6) 的解, 即 u 满足

$$-\Delta_n u = e^{nu}$$

且使得

$$u(x) \geq -\frac{n}{n-1} \ln(r(x)F^{1/2}(r(x))) - C, \quad \forall r(x) \geq C^{-1},$$

这里 C 为一个正常数, $r(x) = \text{dist}(x, o)$ 是从 x 到固定点 $o \in M^n$ 的距离函数, 则 M^n 等距同构于 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 且解必为

$$u(x) = -\ln(a + b|x - x_0|^{\frac{n}{n-1}}), \quad \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} ab^{n-1} = 1,$$

这里 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 为一个固定点, 常数 $a > 0$ 和 $b > 0$.

最后指出, 上述所提出的一些问题都是关于 Sobolev 常数或流形刚性领域重要而又极具挑战性的问题, 就本文作者所知, 到目前为止的研究状况粗略如上所述, 可以说人们所取得的进展不大亦或完全为公开问题.

参考文献

- 1 Akutagawa K. Yamabe metrics of positive scalar curvature and conformally flat manifolds. *Differential Geom Appl*, 1994, 4: 239–258
- 2 Aubin T. Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev. *J Differential Geom*, 1976, 11: 573–598
- 3 Berchio E, Ferrero A, Ganguly D, et al. Classification of radial solutions to $-\Delta_g u = e^u$ on Riemannian models. *J Differential Equations*, 2023, 361: 417–448
- 4 Brendle S. Sobolev inequalities in manifolds with nonnegative curvature. *Comm Pure Appl Math*, 2023, 76: 2192–2218
- 5 Caffarelli L A, Gidas B, Spruck J. Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth. *Comm Pure Appl Math*, 1989, 42: 271–297
- 6 Cai X, Lai M. Liouville equations on complete surfaces with nonnegative Gauss curvature. *Pacific J Math*, 2024, 332: 23–37
- 7 Carron G. Inégalités isopérimétriques de Faber-Krahn et conséquences. In: *Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle (Luminy, 1992)*. Seminars and Congresses, vol. 1. Paris: Soc Math France, 1996, 205–232
- 8 Catino G, Monticelli D D. Semilinear elliptic equations on manifolds with nonnegative Ricci curvature. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2026, in press
- 9 Catino G, Monticelli D D, Roncoroni A. On the critical p -Laplace equation. *Adv Math*, 2023, 433: 109331
- 10 Catino G, Monticelli D D, Roncoroni A, et al. Liouville theorems on pseudo-Hermitian manifolds with nonnegative Tanaka-Webster curvature. *arXiv:2412.08500*, 2024
- 11 Cheeger J, Colding T H. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I. *J Differential Geom*, 1997, 46: 406–480
- 12 Chen W X, Li C M. Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations. *Duke Math J*, 1991, 63: 615–622
- 13 Cheng K S, Ni W M. On the structure of the conformal Gaussian curvature equation on $\mathbb{R}^2$. *Duke Math J*, 1991, 62: 721–737
- 14 Chodosh O, Li C, Stryker D. Volume growth of 3-manifolds with scalar curvature lower bounds. *Proc Amer Math Soc*, 2023, 151: 4501–4511

- 15 Ciraolo G, Farina A, Polvara C C. Classification results, rigidity theorems and semilinear PDEs on Riemannian manifolds: A P -function approach. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2026, in press
- 16 Ciraolo G, Figalli A, Roncoroni A. Symmetry results for critical anisotropic p -Laplacian equations in convex cones. *Geom Funct Anal*, 2020, 30: 770–803
- 17 Ciraolo G, Li X L. Classification of solutions to the anisotropic N -Liouville equation in $\mathbb{R}^N$. *Int Math Res Not IMRN*, 2024, 2024: 12824–12856
- 18 Cordero-Erausquin D, Nazaret B, Villani C. A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities. *Adv Math*, 2004, 182: 307–332
- 19 Damascelli L, Merchán S, Montoro L, et al. Radial symmetry and applications for a problem involving the $-\Delta_p(\cdot)$ operator and critical nonlinearity in $\mathbb{R}^N$. *Adv Math*, 2014, 265: 313–335
- 20 Ding W Y. On a conformally invariant elliptic equation on $\mathbb{R}^n$. *Comm Math Phys*, 1986, 107: 331–335
- 21 Ding W Y, Ni W M. On the existence of positive entire solutions of a semilinear elliptic equation. *Arch Ration Mech Anal*, 1986, 91: 283–308
- 22 Eremenko A, Gui C F, Li Q, et al. Rigidity results on Liouville equation. *Comm Anal Geom*, 2025, 33: 163–184
- 23 Esposito P. A classification result for the quasi-linear Liouville equation. *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 2018, 35: 781–801
- 24 Fogagnolo M, Malchiodi A, Mazzieri L. A note on the critical Laplace equation and Ricci curvature. *J Geom Anal*, 2023, 33: 178
- 25 Gidas B, Spruck J. Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations. *Comm Pure Appl Math*, 1981, 34: 525–598
- 26 He J, Sun L L, Wang Y D. Optimal Liouville theorems for the Lane-Emden equation on Riemannian manifolds. *arXiv:2411.06956*, 2024
- 27 He J, Wang Y D, Wei G D. Gradient estimate for solutions of the equation $\Delta_p v + av^q = 0$ on a complete Riemannian manifold. *Math Z*, 2024, 306: 42
- 28 Hebey E. *Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities*. Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 5. New York: Amer Math Soc, 1999
- 29 Kristály A. Sharp Sobolev inequalities on noncompact Riemannian manifolds with $\text{Ric} \geq 0$ via optimal transport theory. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2024, 63: 200
- 30 Ledoux M. On manifolds with non-negative Ricci curvature and Sobolev inequalities. *Comm Anal Geom*, 1999, 7: 347–353
- 31 Munteanu O, Wang J P. Geometry of three-dimensional manifolds with scalar curvature lower bound. *arXiv:2201.05595v2*, 2022
- 32 Ou Q Z. On the classification of entire solutions to the critical p -Laplace equation. *Math Ann*, 2025, 392: 1711–1729
- 33 Sciunzi B. Classification of positive $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ -solutions to the critical p -Laplace equation in $\mathbb{R}^N$. *Adv Math*, 2016, 291: 12–23
- 34 Serrin J, Zou H. Cauchy-Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities. *Acta Math*, 2002, 189: 79–142
- 35 Sun L L, Wang Y D. Critical quasilinear equations on Riemannian manifolds. *arXiv:2502.08495*, 2025
- 36 Talenti G. Best constant in Sobolev inequality. *Ann Mat Pura Appl (4)*, 1976, 110: 353–372
- 37 Vétois J. A priori estimates and application to the symmetry of solutions for critical p -Laplace equations. *J Differential Equations*, 2016, 260: 149–161
- 38 Vétois J. A note on the classification of positive solutions to the critical p -Laplace equation in $\mathbb{R}^n$. *Adv Nonlinear Stud*, 2024, 24: 543–552
- 39 Wang Y D. Harmonic maps from noncompact Riemannian manifolds with non-negative Ricci curvature outside a compact set. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 1994, 124: 1259–1275
- 40 Wang Y D, Wei G D. On the nonexistence of positive solution to $\Delta u + au^{p+1} = 0$ on Riemannian manifolds. *J Differential Equations*, 2023, 362: 74–87
- 41 Wei G D, Xu G Y, Zhang S. Volume growth and positive scalar curvature. *Trans Amer Math Soc*, 2025, 378: 6109–6136
- 42 Zhu B. Geometry of positive scalar curvature on complete manifold. *J Reine Angew Math*, 2022, 791: 225–246

Some problems concerning the rigidity of manifolds

Youde Wang

Abstract In this paper, we systematically review the intrinsic relationships between the volume of manifolds and Sobolev constants, Ricci curvature, or scalar curvature, summarize the research progress on the rigidity of Sobolev constants on manifolds, and outline the classification results for positive solutions of the critical p -Laplace equation defined on non-compact complete manifolds with non-negative Ricci curvature. Based on the current state of the two major research directions mentioned above, we further propose some key open problems.

Keywords Ricci curvature, rigidity of manifolds, Sobolev constants, p -Laplace operator, Aubin-Talenti bubble

MSC(2020) 53C21, 53C24, 58J05

doi: 10.1360/SSM-2025-0203