中国科学: 数学 2026 年 第 56 卷 第 ? 期: 1 ∼ 22
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

变环境下带移民分枝过程人口数连续击中指定水平的时间集合

王华明, 王月*

安徽师范大学数学与统计学院, 芜湖 241002
E-mail: hmking@ahnu.edu.cn, yuewang616@163.com

收稿日期: 2025-04-30; 接受日期: 2025-09-16; 网络出版日期: 2025-10-17; * 通信作者
安徽省教育厅自然科学研究 (批准号: 2023AH040025) 资助项目

摘要 考虑一类变环境下带移民的分枝过程 $\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$. 固定 $\ell\in\mathbb{N}:=\{1,2,\dots\}$, $\vec{a}=(a_1,a_2,\dots,a_\ell)\in\{\mathbb{N}\cup\{0\}\}^\ell$, 记 $T(\vec{a})=\{n\geqslant 0: Z_{n+1}=a_1, Z_{n+2}=a_2,\dots,Z_{n+\ell}=a_\ell\}$, 它表示分枝过程人口数连续击中给定水平的时间集合. 就后代分布为几何分布的情形, 首先, 给出集合 $T(\vec{a})$ 有限或无限的判定准则; 其次, 给定 $0\leqslant B<1$, 在第 $n-1$ 代个体后代期望数为 $m_n\sim\frac{B}{n}$, $n\to\infty$ 的条件下, 证明当 $n\to\infty$ 时, $\frac{|T(\vec{a})\cap[1,n]|}{C(\vec{a})\log n}\xrightarrow{d}\xi$, 其中 $C(\vec{a})=\prod_{j=1}^{\ell-1}\binom{a_j+a_{j+1}}{a_j}\frac{1}{2^{a_j+a_{j+1}+1}}$, 随机变量 $\xi\sim\Gamma(1-B,1)$.

关键词 带移民分枝过程 人口数 变环境 极限分布

MSC (2020) 主题分类 60J80, 60J10

1 引言

1.1 背景和动机

分枝过程的研究可追溯到 Watson 和 Galton[22] 在 1874 年发表的文章, 他们研究了家族姓氏灭绝的概率. 从 20 世纪开始, 分枝过程在诸如核物理、分子生物学、遗传学等领域都有广泛应用. 这些应用的具体模型和相关细节, 可参见文献 [1, 7–9, 13, 18] 及其中的参考文献. 基于文献 [22], 文献中常将每一代个体具有相同后代分布且家族中每个个体独立地产生后代的分枝过程称为 Galton-Watson 过程 (G-W 过程). 通常可根据系统中个体后代数期望 m 的取值将 G-W 过程分为临界 ($m=1$)、下临界 ($m<1$) 和上临界 ($m>1$) 三种情形, 各种情形都有了丰富的研究成果, 相关结果在上述书籍中有详细介绍.

为简化研究工作, G-W 过程假定每一代个体有相同的后代分布, 这是一种理想化的假定, 现实中存在的各种分枝机制并非如此. 针对这一假定, G-W 过程有两种很著名的拓展研究. 如果假定系统中各代个体的后代分布是随机 (独立同分布或平稳遍历) 的, 则得到随机环境中的分枝过程; 如果假定系

英文引用格式: Wang H M, Wang Y. Times of a branching process with immigration in varying environments consecutively hitting given levels (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 1–22, doi: 10.1360/SSM-2025-0113

© 2025《中国科学》杂志社

统中各代个体的后代分布是非齐次 (非随机) 的, 则得到变环境下分枝过程. 与 G-W 过程相比, 因为去除了各代分枝机制的齐次性假定, 随机环境中分枝过程与变环境下分枝过程展现出很多新的现象. 这里暂时不加区分地用 $\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$ 表示上述几种分枝过程. 以临界情形的生存概率为例, 对 G-W 过程, 生存概率满足 $P(Z_n>0)\sim \frac{2}{n\sigma^2}$, $n\to\infty$, 其中 σ^2 是后代分布的方差. 该结果可参见文献 [1, 第一章, 第 9 节, 定理 1]. 此处及下文中, 记号 $A(n)\sim B(n)$ 表示 $\lim_{n\to\infty}A(n)/B(n)=1$. 如果考虑随机环境中的分枝过程, 对非退化临界情形, 在一定条件下, 生存概率满足 $P(Z_n>0)\sim \frac{c}{\sqrt{n}}$, $n\to\infty$, 其中 $c>0$ 为常数. 该结果可参见文献 [12, 第五章, 第 5.4 小节, 定理 5.1]. 若考虑变环境下分枝过程, 生存概率可能有各种不同的阶, 例如, Fujimagari [6] 在一定条件下证明了当 $n\to\infty$ 时, $P(Z_n>0)\sim \frac{1}{\log n}$ 或 $\frac{1}{n^\beta}$, 其中 $0<\beta<1$ 是一个常数.

本文主要考虑变环境下带移民分枝过程人口数的性质. 故以下简要回顾变环境下分枝过程的相关背景. Lindvall [14] 发现, 在一定条件下, 变环境下分枝过程人口数可能几乎必然地收敛到一个有限正数. Kersting [11] 形象地描述道, 分枝过程可能会因为在某些正整数上睡着了, 所以永远停留在那里. 这种现象在 G-W 过程或非退化随机环境下的分枝过程里是不可能发生的. 对于这两种过程, 人口数的极限只可能是 0 或 ∞. MaCphee 和 Schuh [15] 发现了一种有趣的现象, 即在一定条件下, 可将变环境下分枝过程的样本空间分为两个部分, 过程人口数在这两个部分上分别以不同的指数速度趋于 ∞. 关于变环境下分枝过程的临界性的判定准则、生存概率的极限理论、Yaglom 型极限定理及其他方面, 可参见文献 [9, 11] 及其中的参考文献. 关于变环境下多物种分枝过程的结果, 可参见文献 [2, 3, 5, 10, 20].

本文的结果可以视作 Sun 等 [17] 及 Wang [19] 的后续工作. 用 $\{Z_n\}_{n\geqslant 1}$ 表示变环境下带移民分枝过程. 对后代分布为几何分布的情形, Sun 等 [17] 给出人口数 Z_n 击中 0 的次数有限或无限的判定准则. Wang [19] 考虑了更一般的情形. 对 $a\in\mathbb{Z}_+:=\{0,1,2,\ldots\}$, Wang [19] 给出了 Z_n 击中 a 的次数有限或无限的判定准则, 并进一步研究了带移民临界 G-W 过程前 n 代人口数击中 a 次数的极限分布.

给定 $\ell\in\mathbb{Z}_+/\{0\}$, $\vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_\ell)\in\mathbb{Z}_+^\ell$. 本文旨在讨论集合

$$T(\vec{a})=\{n\geqslant 0: Z_{n+1}=a_1, Z_{n+2}=a_2,\ldots,Z_{n+\ell}=a_\ell\} \tag{1.1}$$

的有限性或无限性.

集合 $T(\vec{a})$ 有其直观含义. 考虑一个族群人口数的演化规律, 记录下族群某段时间长度为 ℓ 的历史, 在族群繁衍的时间长河之中, 这段历史可能会被多次重现, 集合 $T(\vec{a})$ 记录了这段历史重演的时刻. $|T(\vec{a})|$ 表示族群这段历史重演的总次数. 其可能是有限次, 也可能是无限次.

对集合 A, 本文用记号 $|A|$ 表示其基数. 我们关注如下问题:

(a) 给出 $T(\vec{a})$ 是有限或无限的判定准则;

(b) 如果 $T(\vec{a})$ 是无限集, 则考虑 $|T(\vec{a})\cap[1,n]|$, 求其在重整化后的极限分布.

在介绍模型和主要结论前, 先介绍一些符号和约定. 用 $g^{(k)}(x)$ 表示函数 $g(x)$ 的 k 阶导数. 此外, 本文约定空乘积等于 1, 空和等于 0.

1.2 模型和主要结论

本文研究的对象是变环境下分枝过程, 所谓 "变环境" 是指系统中每个个体的后代分布依赖于该个体所属的代数. 为描述环境, 设 $\{p_k\}_{k\geqslant 1}$ 是一列取值于 $(0,1/2]$ 的数. 对 $k\geqslant 1$, 令

$$f_k(s)=\frac{p_k}{1-(1-p_k)s},\quad s\in[0,1],$$

它将被用作分枝过程第 $k-1$ 代个体后代分布的母函数.

假设 $\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个 Markov 链, 其初值为 $Z_0=0$, 繁衍机制满足

$$E\left(s^{Z_n}\mid Z_0,\ldots,Z_{n-1}\right)=(f_n(s))^{1+Z_{n-1}},\quad n\geqslant 1. \tag{1.2}$$

由 (1.2) 可知, 在 $n-1$ 时刻群体人口数是 Z_{n-1}, 此时以概率 1 会有一个外来移民加入族群, 移民和原住民共 $Z_{n-1}+1$ 人以相同母函数 $f_n(s)$ 产生第 n 代的人口. 基于这种认识, 称 $\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$ 为变环境下带移民的分枝过程. 对 $k\geqslant 1$, 记

$$m_k=f_k'(1)=\frac{q_k}{p_k},$$

它表示第 $k-1$ 代个体后代数的期望. 对 $n\geqslant k-1\geqslant 0$, 令

$$D(k,n):=1+\sum_{j=k}^{n}m_j\cdots m_n,\quad \text{并简记 } D(n)\equiv D(1,n). \tag{1.3}$$

注意到, 由于我们约定空和等于 0, 所以对 $k\geqslant 1$, $D(k,k-1)$ 是良定义的, 我们有

$$D(k,k-1)=1,\quad \forall\, k\geqslant 1 \text{ 且 } D(0)=1.$$

固定 $\ell\in\mathbb{Z}_+/\{0\}$, $\vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_\ell)\in\mathbb{Z}_+^\ell$. 记

$$C(\vec{a})=\prod_{j=1}^{\ell-1}\binom{a_j+a_{j+1}}{a_j}\frac{1}{2^{a_j+a_{j+1}+1}}. \tag{1.4}$$

本文余下部分, 集合 $T(\vec{a})$ 与常数 $C(\vec{a})$ 会出现多次, 总假定它们分别由 (1.1) 和 (1.4) 给出, 不再重复其定义.

以下定理提供了判定 $T(\vec{a})$ 是有限集或无限集的准则.

定理 1.1 假定当 $n\to\infty$ 时 $p_n\to 1/2$. 设 $D(n)$, $n\geqslant 1$ 由 (1.3) 给出.

(i) 若

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{D(n)\log n}<\infty,$$

则几乎必然有 $|T(\vec{a})|<\infty$;

(ii) 若存在 $\delta>0$, 使得对充分大的 n 有 $D(n)<\delta n\log n$, 且

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{D(n)\log n}=\infty,$$

则几乎必然有 $|T(\vec{a})|=\infty$.

注 1.1 (i) 就我们所知, 定理 1.1 类似的表述首次出现在文献 [4] 中. Csáki 等[4] 给出了半直线上空间非齐次随机游动切割点数量有限或无限的判定准则. 由于随机游动中蕴含着分枝过程的结构, 所以 Sun 等[17] 给出了变环境下带移民分枝过程 ℓ 重强再生时 (若人口数 $Z_t=\cdots=Z_{t+\ell-1}=0$, 则称 t 为 ℓ 重强再生时) 数量有限或无限的判定准则. 对一般 $a\geqslant 0$, Wang[19] 讨论了分枝过程人口数 $Z_t=a$ 发生次数, 并刻画齐次情形 (即带移民 G-W 过程) 前 n 代人口数击中 a 次数的极限分布. 在定理 1.1 中, 若取 $a_1=\cdots=a_\ell=0$, 则得到文献 [17] 中的结果; 若取 $\ell=1$, $a_1=a$, 则得到文献 [19] 中的结果.

(ii) 为证明定理 1.1, 我们沿用文献 [4] 中的思想. 但由于本文关注的是分枝过程一个历史片段重现的次数, 故证明要复杂得多. 这里以刻画事件 $\{i \in T(\vec{a})\}$ 与 $\{j \in T(\vec{a})\}$ 的相关性为例来阐述证明的困难. 假设 $\ell > 1$, 则事件 $\{i \in T(\vec{a})\}$ 依赖于 $\sigma\{Z_{i+1}, \ldots, Z_{i+\ell}\}$, 事件 $\{j \in T(\vec{a})\}$ 依赖于 $\sigma\{Z_{j+1}, \ldots, Z_{j+\ell}\}$. 注意到当 $1 \leqslant j - i \leqslant \ell - 1$ 时, 这两个 σ 代数有重叠, 故计算条件概率 $P(j \in T(\vec{a}) \,|\, i \in T(\vec{a}))$ 的过程中, 不能直接利用 Markov 性, 需讨论向量 $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_\ell)$ 的内部结构, 详见下面的引理 4.1.

以下讨论一种特殊情形. 固定 $B \geqslant 0$, 记 $n_0 = \inf\left\{n : \frac{B}{4n} < \frac{1}{2}\right\}$. 假定

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{B}{4n}, & \text{若 } n \geqslant n_0, \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{B}{4n_0}, & \text{若 } 1 \leqslant n < n_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

以下推论给出该情形下 $|T(\vec{a})| < \infty$ 的充要条件.

推论 1.1 固定 $B \geqslant 0$, 假定 $p_n, n \geqslant 1$ 由 (1.5) 给出, 则当 $B < 1$ 时, 有 $P(|T(\vec{a})| = \infty) = 1$; 当 $B \geqslant 1$ 时, 有 $P(|T(\vec{a})| < \infty) = 1$.

证明 在推论 1.1 的条件下, 当 $n \to \infty$ 时, 有 (参见文献 [19])

$$D(n) \sim \begin{cases} cn^B, & \text{若 } B > 1, \\ n \log n, & \text{若 } B = 1, \\ (1-B)^{-1} n, & \text{若 } B < 1. \end{cases} \tag{1.6}$$

于是 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{D(n) \log n} = \infty$ 当且仅当 $B < 1$, 且当 $B < 1$ 时, 对充分大的 n, 总有 $D(n) < n \log n$. 故由定理 1.1 可得到推论 1.1 的结论. □

当 $T(\vec{a})$ 为无限集时, 以下定理刻画了 $|T(\vec{a}) \cap [1, n]|$ 重整化后的极限分布.

定理 1.2 固定 $0 \leqslant B < 1$. 假定 $p_n = \frac{1}{2} - \frac{B}{4n}$, $n \geqslant 1$, 则当 $n \to \infty$ 时, 有

$$\frac{|T(\vec{a}) \cap [1, n]|}{C(\vec{a}) \log n} \xrightarrow{d} \xi,$$

其中随机变量 $\xi \sim \Gamma(1 - B, 1)$.

注 1.2 在定理 1.2 中, 若令 $B = 0$, $\ell = 1$, $a_1 = a$, 则得到文献 [19, 定理 1.7] 的结果; 若令 $\ell = 1$, $a_1 = 0$, 则得到文献 [21, 推论 2] 的结果.

由推论 1.1 可知, 当 $B \geqslant 1$ 时, $T(\vec{a})$ 为有限集. 此时, $|T(\vec{a})|$ 为一个随机变量. 这种情况下, 一个很自然的想法是寻找 $|T(\vec{a})|$ 的分布. 由 (1.6) 和第 2.2 小节引理 A 可以预见, 当 $B = 1$ 和 $B > 1$ 时, $T(\vec{a})$ 的分布会有很大差异. 目前我们还无法刻画 $|T(\vec{a})|$ 的具体分布, 第 6 节将介绍一些解决该问题的初步想法.

1.3 本文余下内容安排

本文余下内容安排如下. 第 2 节介绍证明定理 1.1 和 1.2 所需要的预备知识, 主要计算分枝过程人口数的母函数并刻画 $D(n)$ 与 $D(k, k+n)$ 的极限行为. 第 3 节刻画事件 $\{k \in T(\vec{a})\}$ 和 $\{k+n \in T(\vec{a})\}$ 的相依性, 其在证明定理 1.1 和 1.2 的过程中都起到关键作用. 第 4 和 5 节分别完成定理 1.1 和 1.2 的证明. 第 6 节提供一些在 $T(\vec{a})$ 有限的情况下刻画 $|T(\vec{a})|$ 分布的初步想法.

2 准备知识

本节给出证明定理 1.1 和 1.2 所需要的若干预备结果, 首先计算分枝过程人口数母函数, 然后分析 $D(n)$ 和 $D(k,k+n)$ 的渐近性质并介绍文献 [21] 中关于一类相依 Bernoulli 随机变量和极限分布的结论. 需说明的是, 本节所列结果或仅涉及基础性计算, 或为文献 [21] 中相关引理及定理的直接引用.

2.1 人口数分布的母函数

为求人口数分布, 我们借助母函数. 对 $n\geqslant 0$, $k\geqslant 0$, 定义

$$G_{n,k}(s\mid a)=E\left(s^{Z_{n+k}}\mid Z_k=a\right),\quad s\in[0,1], \tag{2.1}$$

它表示第 k 代人口数为 a 的条件下第 $n+k$ 代人口数的母函数. 对 $n\geqslant k-1\geqslant 0$, 记

$$f_{k,n}(s)=\begin{cases} f_k(f_{k+1}(\cdots(f_n(s)))), & \text{若 } n>k,\\ f_k(s), & \text{若 } n=k,\\ s, & \text{若 } n=k-1. \end{cases}$$

易知, $f_{k,n}(s)$ 实际上是一个 $k-1$ 代个体在第 n 代子孙数的母函数. 基于 (1.2), 由数学归纳法可证

$$G_{n,k}(s\mid a)=(f_{k+1,k+n}(s))^a\prod_{j=k+1}^{k+n}f_{j,k+n}(s),\quad n\geqslant 0,\quad k\geqslant 1. \tag{2.2}$$

事实上, 由于系统中的个体独立地产生后代, 故 $(f_{k+1,k+n})^a$ 为第 k 代的 a 个个体在第 $n+k$ 代子孙总数的母函数; 对 $k+1\leqslant j\leqslant k+n$, $f_{j,k+n}(s)$ 表示第 $j-1$ 代进入系统的那个移民在第 $k+n$ 代子孙数的母函数. 故 (2.2) 右端表示第 k 代的 a 个个体及从第 k 代到第 $k+n-1$ 代进入系统的移民在第 $n+k$ 代子孙总数的母函数, 正好等于 $G_{n,k}(s\mid a)$.

注意到 $m_k=f_k'(1)=\frac{q_k}{p_k}$, 故 $f_k(s)=1-\frac{m_k(1-s)}{1+m_k(1-s)}$, $k\geqslant 1$. 从而由数学归纳法可得

$$\begin{aligned} f_{k,n}(s)&=1-\frac{m_k\cdots m_n(1-s)}{1+\sum_{j=k}^n m_j\cdots m_n(1-s)}=\frac{1+\sum_{j=k+1}^n m_j\cdots m_n(1-s)}{1+\sum_{j=k}^n m_j\cdots m_n(1-s)}\\ &=\frac{D(k+1,n)-(D(k+1,n)-1)s}{D(k,n)-(D(k,n)-1)s},\quad n\geqslant k,\quad s\in[0,1]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

将 (2.3) 代入 (2.2) 可知, 对 $k\geqslant 1$, $n\geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned} G_{n,k}(s\mid a)=&\left(\frac{D(k+2,k+n)-(D(k+2,k+n)-1)s}{D(k+1,k+n)-(D(k+1,k+n)-1)s}\right)^a\\ &\times\frac{1}{D(k+1,k+n)-(D(k+1,k+n)-1)s}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.2 $D(n)$ 和 $D(k,k+n)$ 的极限行为及 Bernoulli 随机变量和的极限分布

首先, 给出由 (1.3) 定义的 $D(n)$ 及 $D(k,n)$ 的一些结果. 注意到对任意 $i\geqslant 1$, 有 $m_i\geqslant 1$, 从而

$$D(n)>n+1,\quad D(k,n)>n-k+2,\quad n\geqslant k\geqslant 1. \tag{2.5}$$

进而可知

$$\lim_{n\to\infty} D(n) = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{D(n)}{D(n-1)} = 1 \tag{2.6}$$

且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D(k,k+n)-1}{D(k,k+n)} = 1. \tag{2.7}$$

注意到由 (2.5) 可得 $D(k,k+n) > n+2, \forall\, k \geqslant 1$, 故 (2.7) 中的收敛关于 k 是一致的.

此外, 简单计算得

$$D(n+1) = 1 + m_{n+1} D(n), \tag{2.8}$$

$$\frac{D(k,n)}{D(n)} = 1 - \prod_{j=k-1}^{n} \left(1 - \frac{1}{D(j)}\right). \tag{2.9}$$

若 $\lim_{j\to\infty} m_j = 1$, 则由 (2.6) 和 (2.8) 立即可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D(n)}{D(n+1)} = 1. \tag{2.10}$$

除上述结论外, 我们还需如下引理, 其证明仅涉及一些基本计算.

引理 2.1 假设 $\lim_{j\to\infty} m_j = 1$, 则对任意 $\sigma > 0$, 存在 $N_1 > 0$ 使得当 $k > N_1$, $n > N_1$ 时有

$$1 - \sigma < \frac{D(k,k+n)}{D(k+\ell+1,k+n+1)} < 1 + \sigma, \quad k > N_1, \quad n > N_1. \tag{2.11}$$

证明 固定 $0 < \eta < 1$. 因为 $\lim_{j\to\infty} m_j = 1$, 故存在 $M_1 > 0$ 使得当 $j > M_1$ 时有

$$1 + \eta > m_j \geqslant 1 \geqslant m_j^{-1} > 1 - \eta. \tag{2.12}$$

注意到

$$\begin{aligned} D(k+\ell+1,k+n+1) &= 1 + m_{k+n+1}\left(1 + \sum_{j=k+\ell+1}^{k+n} m_j \cdots m_{k+n}\right) \\ &= 1 + m_{k+n+1}\left(D(k,k+n) - \sum_{j=k}^{k+\ell} m_j \cdots m_{k+n}\right). \end{aligned}$$

于是有

$$\frac{D(k+\ell+1,k+n+1)}{D(k,k+n)} = m_{k+n+1} + \frac{1}{D(k,k+n)} - m_{k+n+1}\frac{\sum_{j=k}^{k+\ell} m_j \cdots m_{k+n}}{D(k,k+n)}. \tag{2.13}$$

利用 (2.12) 可知, 当 $k > M_1$ 时有

$$\begin{aligned} \frac{m_k m_{k+1} \cdots m_{k+n}}{D(k,k+n)} &= \frac{1}{1 + \sum_{j=k}^{n+k} m_k^{-1} \cdots m_j^{-1}} < \frac{1}{1 + \sum_{j=k}^{n+k} (1-\eta)^{j-k+1}} \\ &= \frac{1}{\sum_{j=0}^{n+1} (1-\eta)^j} = \frac{\eta}{1 - (1-\eta)^{n+2}}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

取 $M_2>\eta^{-1}$, 使得当 $n>M_2$ 时 $1-(1-\eta)^{n+1}>1/2$ 成立. 则从 (2.14) 可知, 当 $k\geqslant M_1$, $n>M_2$ 时,

$$\frac{m_km_{k+1}\cdots m_{k+n}}{D(k,k+n)}<2\eta.$$

由于 $m_j\geqslant 1, \forall\, j\geqslant 1$, 所以当 $k\geqslant M_1$, $n>M_2$ 时有

$$\frac{\sum_{j=k}^{k+\ell}m_j\cdots m_{k+n}}{D(k,k+n)}\leqslant(\ell+1)\frac{m_km_{k+1}\cdots m_{k+n}}{D(k,k+n)}\leqslant 2(\ell+1)\eta. \tag{2.15}$$

结合 (2.5), (2.12) 和 (2.15), 从 (2.13) 可知, 当 $k>M_1$, $n>M_2$ 时,

$$1-2(\ell+1)(1-\eta)\eta<\frac{D(k+\ell+1,k+n+1)}{D(k,k+n)}<1+\eta+\frac{1}{n+2}<1+2\eta. \tag{2.16}$$

固定 $\sigma>0$, 取充分小的 η 使得

$$(1-2(\ell+1)(1-\eta)\eta)^{-1}<1+\sigma,\quad (1+2\eta)^{-1}>1-\sigma.$$

令 $N_1=M_1\vee M_2$, 则由 (2.16) 立即可得 (2.11). 引理证毕. □

为了证明定理 1.2, 还需要借用 Wang 和 Zhang [21] 的如下引理和定理.

引理 A (参见文献 [21, 引理 1]) 固定 $B\in[0,1)$. 如果 $p_i=\frac{1}{2}-\frac{B}{4i}$, $i\geqslant 1$, 则对任意 $\sigma>0$, 存在 $N_2\geqslant 1$ 使得当 $i\geqslant N_2$, $j-i\geqslant N_2$ 时, 有

$$1-\sigma\leqslant\frac{i}{(1-B)D(i)}\leqslant 1+\sigma,\quad 1-\sigma\leqslant\frac{j^B\left(j^{1-B}-i^{1-B}\right)}{(1-B)D(i,j)}\leqslant 1+\sigma.$$

定理 A (参见文献 [21, 定理 2]) 假定 $\{\eta_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一列 Bernoulli 随机变量, 满足对 $i\geqslant 1$, $k\geqslant 1$, $1\leqslant j_1\leqslant\cdots\leqslant j_k\leqslant j_{k+1}<\infty$, 有

$$P\left(\eta_i=1\right)=\frac{1}{\rho(0,i)},\quad P(\eta_{j_{k+1}}=1\mid\eta_{j_1}=1,\ldots,\eta_{j_k}=1)=P(\eta_{j_{k+1}}=1\mid\eta_{j_k}=1)=\frac{1}{\rho(j_k,j_{k+1})},$$

其中, 对 $j>i\geqslant 0$, 有 $\rho(j,j)=1$, $\rho(i,j)>1$. 固定 $\alpha>0$, $\beta>0$. 假设对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N_3\geqslant 1$ 使得当 $j-i\geqslant N_3$, $i\geqslant N_3$ 时, 有

$$1-\varepsilon\leqslant\frac{\beta i}{\rho(0,i)}\leqslant 1+\varepsilon,\quad 1-\varepsilon\leqslant\frac{\beta j^{1-\alpha}(j^\alpha-i^\alpha)}{\rho(i,j)}\leqslant 1+\varepsilon.$$

则当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\frac{\alpha\beta}{\log n}\sum_{j=1}^{n}\eta_j\xrightarrow{d}\xi,$$

其中随机变量 $\xi\sim\Gamma(\alpha,1)$.

3 事件 $\{k\in T(\vec{a})\}$ 和 $\{k+n\in T(\vec{a})\}$ 的概率及相依性

为判定集合 $T(\vec{a})$ 的有限性或无限性并进一步探索 $|T(\vec{a})\cap[1,n]|$ 的重整化极限分布, 需要计算事件 $\{k\in T(\vec{a})\}$ 和 $\{k+n\in T(\vec{a})\}$ 的概率并刻画其相依性. 以下引理给出了事件 $\{n\in T(\vec{a})\}$ 发生的概率.

引理 3.1 对 $n \geqslant 0$, 有

$$P\left(n \in T(\vec{a})\right) = \left(1 - \frac{1}{D(n+1)}\right)^{a_1} \frac{1}{D(n+1)} \prod_{j=1}^{\ell-1} \binom{a_j + a_{j+1}}{a_j} \frac{m_{n+j+1}^{a_{j+1}}}{(1+m_{n+j+1})^{a_j+a_{j+1}}}. \tag{3.1}$$

证明 基于 (2.4), 有

$$P\left(Z_{k+1} = b \mid Z_k = d\right) = \frac{G_{1,k}^{(b)}(0 \mid d)}{b!} = \binom{d+b}{d} \frac{m_{k+1}^b}{(1+m_{k+1})^{d+b+1}}, \quad k \geqslant 1, \quad d, b \geqslant 0, \tag{3.2}$$

$$P(Z_k = d) = \frac{G_{k,0}^{(d)}(0 \mid 0)}{d!} = \frac{(D(k)-1)^d}{(D(k))^{d+1}} = \left(1 - \frac{1}{D(k)}\right)^d \frac{1}{D(k)}, \quad k \geqslant 1. \tag{3.3}$$

利用 Markov 性, 对 $n \geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned} P\left(n \in T(\vec{a})\right) &= P\left(Z_{n+1} = a_1, Z_{n+2} = a_2, \ldots, Z_{n+\ell} = a_\ell\right) \\ &= P(Z_{n+1} = a_1) \prod_{j=1}^{\ell-1} P\left(Z_{n+j+1} = a_{j+1} \mid Z_{n+j} = a_j\right). \end{aligned}$$

于是, 由 (3.2) 和 (3.3) 立即可得 (3.1). 引理得证. □

如下命题刻画了事件 $\{k \in T(\vec{a})\}$ 和 $\{k+n \in T(\vec{a})\}$ 的相依性.

命题 3.1 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $k > N$, $n > N$ 时有

$$1 - \varepsilon \leqslant \frac{D(k, k+n)}{D(k+n)} \frac{P(k \in T(\vec{a}), k+n \in T(\vec{a}))}{P(k \in T(\vec{a}))P(k+n \in T(\vec{a}))} \leqslant 1 + \varepsilon, \tag{3.4}$$

$$1 - \varepsilon \leqslant \frac{D(k, k+n)P(k \in T(\vec{a}) \mid k+n \in T(\vec{a}))}{C(\vec{a})} \leqslant 1 + \varepsilon. \tag{3.5}$$

证明 对 $k \geqslant 0$ 时, 由 Markov 性可得

$$\begin{aligned} P(k \in T(\vec{a})) &= P(Z_{k+i} = a_i, 1 \leqslant i \leqslant \ell) \\ &= P(Z_{k+1} = a_1) \prod_{i=1}^{\ell-1} P(Z_{k+i+1} = a_{i+1} \mid Z_{k+i} = a_i), \end{aligned} \tag{3.6}$$

且当 $n \geqslant \ell$ 时有

$$\begin{aligned} &P(Z_{k+\ell} = a_\ell, Z_{k+n+i} = a_i, 1 \leqslant i \leqslant \ell) \\ &= P(Z_{k+\ell} = a_\ell) P(Z_{k+n+1} = a_1 \mid Z_{k+\ell} = a_\ell) \prod_{i=1}^{\ell-1} P(Z_{k+n+i+1} = a_{i+1} \mid Z_{k+n+i} = a_i). \end{aligned}$$

因此, 对 $n \geqslant \ell$, 有

$$\begin{aligned} P(k+n \in T(\vec{a}) \mid k \in T(\vec{a})) &= P\left(Z_{k+n+i} = a_i, 1 \leqslant i \leqslant \ell \mid Z_{k+i} = a_i, 1 \leqslant i \leqslant \ell\right) \\ &= P\left(Z_{k+n+i} = a_i, 1 \leqslant i \leqslant \ell \mid Z_{k+\ell} = a_\ell\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{P(Z_{k+\ell}=a_\ell, Z_{k+n+i}=a_i, 1\leqslant i\leqslant \ell)}{P(Z_{k+\ell}=a_\ell)}$$

$$= P\left(Z_{k+n+1}=a_1 \mid Z_{k+\ell}=a_\ell\right)\prod_{i=1}^{\ell-1} P\left(Z_{k+n+i+1}=a_{i+1}\mid Z_{k+n+i}=a_i\right). \quad (3.7)$$

现固定 $k\geqslant 0$, $n\geqslant \ell$ 并假设 $G_{(n+1-\ell),(k+\ell)}(s\,|\,a_\ell)$ 由 (2.1) 定义, 则由 (2.4) 知

$$\begin{aligned} G_{(n+1-\ell),(k+\ell)}(s\,|\,a_\ell) &= \left(\frac{D(k+\ell+2,k+n+1)-(D(k+\ell+2,k+n+1)-1)s}{D(k+\ell+1,k+n+1)-(D(k+\ell+1,k+n+1)-1)s}\right)^{a_\ell} \\ &\quad\times \frac{1}{D(k+\ell+1,k+n+1)-(D(k+\ell+1,k+n+1)-1)s} \\ &=: B(s)^{a_\ell}A(s) =: g(s)A(s), \end{aligned}$$

其中, 为方便书写, 记

$$\begin{aligned} A(s) &= \frac{1}{D(k+\ell+1,k+n+1)-(D(k+\ell+1,k+n+1)-1)s}, \\ B(s) &= \frac{D(k+\ell+2,k+n+1)-(D(k+\ell+2,k+n+1)-1)s}{D(k+\ell+1,k+n+1)-(D(k+\ell+1,k+n+1)-1)s}, \\ g(s) &= B(s)^{a_\ell}. \end{aligned}$$

根据 (3.2), 有

$$\begin{aligned} P(Z_{k+n+1}=a_1\,|\,Z_{k+\ell}=a_\ell) &= \frac{G^{(a_1)}_{(n+1-\ell),(k+\ell)}(0\,|\,a_\ell)}{a_1!} \\ &= \frac{1}{a_1!}\sum_{j=0}^{a_1}\binom{a_1}{j}A^{(a_1-j)}(0)g^{(j)}(0) \\ &= \frac{(D(k+\ell+1,k+n+1)-1)^{a_1}}{D(k+\ell+1,k+n+1)^{a_1+1}}\left(\frac{D(k+\ell+2,k+n+1)}{D(k+\ell+1,k+n+1)}\right)^{a_\ell} \\ &\quad+\sum_{j=1}^{a_1}\frac{1}{j!}\frac{(D(k+\ell+1,k+n+1)-1)^{a_1-j}}{D(k+\ell+1,k+n+1)^{a_1-j+1}}g^{(j)}(0) \\ &= \frac{(D(k+\ell+1,k+n+1)-1)^{a_1}}{D(k+\ell+1,k+n+1)^{a_1+1}} \\ &\quad\times\left(\left(\frac{D(k+\ell+2,k+n+1)}{D(k+\ell+1,k+n+1)}\right)^{a_\ell}\right. \\ &\quad\left.+\sum_{j=1}^{a_1}\frac{1}{j!}\frac{D(k+\ell+1,k+n+1)^j}{(D(k+\ell+1,k+n+1)-1)^j}g^{(j)}(0)\right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

我们断言, 对 $1\leqslant j\leqslant a_1$, 当 $n\to\infty$ 时,

$$g^{(j)}(0) \text{ 关于 } k \text{ 一致地收敛到 } 0. \quad (3.9)$$

事实上, 对 $1\leqslant j\leqslant a_1$, 借助 (2.5) 可知

$$B^{(j)}(0) = j!(D(k+\ell+1,k+n+1)-D(k+\ell+2,k+n+1))\frac{(D(k+\ell+1,k+n+1)-1)^{j-1}}{(D(k+\ell+1,k+n+1))^{j+1}}$$

$$\leqslant j!\frac{m_{k+\ell+1}\cdots m_{k+n+1}}{(D(k+\ell+1,k+n+1))^2}\leqslant j!\frac{1}{D(k+\ell+1,k+n+1)}<\frac{j!}{n-\ell+2}.$$

故当 $n\to\infty$ 时, $B^{(j)}(0)$ 关于 k 一致地收敛到 0. 因为 $g^{(j)}(0)$ 是形如

$$i\binom{i}{l}B^{a_1-l}(0)\prod_{h=1}^{j}\left(B^{(h)}(0)\right)^{b_h}$$

的乘积的和, 其中 $1\leqslant i,l,h\leqslant j$, $1\leqslant b_h\leqslant j$, 所以当 $n\to\infty$ 时, $g^{(j)}(0)$ 关于 k 一致收敛到 0, 即 (3.9) 成立.

固定 $1>\sigma>0$. 由 (2.5), (2.11) 和 (3.9) 可知, 存在与 k 无关的 $N_4>0$, 使得当 $n>N_4$, $k>N_4$ 时, 有

$$1-\sigma<\left(\frac{D(k+\ell+2,k+n+1)}{D(k+\ell+1,k+n+1)}\right)^{a_\ell}+\sum_{j=1}^{a_1}\frac{1}{j!}\frac{D(k+\ell+1,k+n+1)^j}{(D(k+\ell+1,k+n+1)-1)^j}g^{(j)}(0)<1+\sigma. \tag{3.10}$$

注意到由 (3.2), (3.3) 和 (3.8) 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{D(k,k+n)}{D(k+n)}\frac{P(k\in T(\vec{a}),k+n\in T(\vec{a}))}{P(k\in T(\vec{a}))P(k+n\in T(\vec{a}))}\\
&=\frac{D(k,k+n)}{D(k+n)}\frac{P(k+n\in T(\vec{a})\mid k\in T(\vec{a}))}{P(k+n\in T(\vec{a}))}\\
&=\frac{D(k,k+n)}{D(k+n)}\frac{P(Z_{k+n+1}=a_1\mid Z_{k+\ell}=a_\ell)\prod_{i=1}^{\ell-1}P(Z_{k+n+i+1}=a_{i+1}\mid Z_{k+n+i}=a_i)}{P(Z_{k+n+1}=a_1)\prod_{i=1}^{\ell-1}P(Z_{k+n+i+1}=a_{i+1}|Z_{k+n+i}=a_i)}\\
&=\frac{D(k,k+n)}{D(k+n)}\frac{P(Z_{k+n+1}=a_1\mid Z_{k+\ell}=a_\ell)}{P(Z_{k+n+1}=a_1)}\\
&=\frac{D(k,k+n)}{D(k+n)}\frac{(D(k+\ell+1,k+n+1)-1)^{a_1}}{(D(k+\ell+1,k+n+1))^{a_1+1}}\frac{(D(k+n+1))^{a_1+1}}{(D(k+n+1)-1)^{a_1}}\\
&\quad\times\left(\left(\frac{D(k+\ell+2,k+n+1)}{D(k+\ell+1,k+n+1)}\right)^{a_\ell}+\sum_{j=1}^{a_1}\frac{1}{j!}\frac{D(k+\ell+1,k+n+1)^j}{(D(k+\ell+1,k+n+1)-1)^j}g^{(j)}(0)\right).
\end{aligned}\tag{3.11}$$

由 (2.6), (2.7) 和 (2.10) 可知, 存在 $N_5>0$ 使得

$$1-\sigma<\left(\frac{(D(k+\ell+1,k+n+1)-1)}{(D(k+\ell+1,k+n+1))}\right)^{a_1}<1,\quad n\geqslant N_5, \tag{3.12}$$

$$1<\frac{D(k+n+1)}{D(k+n)}<1+\sigma,\quad 1<\left(\frac{(D(k+n+1))}{(D(k+n+1)-1)}\right)^{a_1}<1+\sigma,\quad k\geqslant N_5. \tag{3.13}$$

此外, 由引理 2.1 可知, 存在 $N_1>0$ 使得

$$1-\sigma<\frac{D(k,k+n)}{D(k+\ell+1,k+n+1)}<1+\sigma,\quad k>N_1,\quad n>N_1. \tag{3.14}$$

令 $N_6=N_1\vee N_4\vee N_5$, 将 (3.10) 和 (3.12)–(3.14) 代入 (3.11), 可得

$$(1-\sigma)^3<\frac{D(k,k+n)}{D(k+n)}\frac{P(k\in T(\vec{a}),k+n\in T(\vec{a}))}{P(k\in T(\vec{a}))P(k+n\in T(\vec{a}))}<(1+\sigma)^4,\quad n>N_6,\quad k>N_6. \tag{3.15}$$

注意到 $\lim_{i\to\infty}m_i=1$, 故由引理 3.1 可知, 存在 $N_7>0$ 使得

$$1-\sigma<\frac{P(k+n\in T(\vec{a}))D(k+n)}{C(\vec{a})}<1+\sigma,\quad k\geqslant N_7. \tag{3.16}$$

令 $N = N_6 \vee N_7$, 结合 (3.15) 和 (3.16) 可得

$$(1-\sigma)^4 < \frac{D(k,k+n)P(k+n \in T(\vec{a}) \,|\, k \in T(\vec{a}))}{C(\vec{a})} < (1+\sigma)^5, \quad n > N, \quad k > N. \tag{3.17}$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 选取 $\sigma > 0$ 充分小, 使得 $1-\varepsilon < (1-\sigma)^4 < (1+\sigma)^5 < 1+\varepsilon$. 由 (3.15) 和 (3.17) 可知, 当 $k > N$, $n > N$ 时, (3.4) 和 (3.5) 成立. 命题证毕. □

4 定理 1.1 的证明

本节为书写方便, 对 $j \geqslant 0$, 令 $\eta_j = 1_{\{j \in T(\vec{a})\}}$. 本节分为三小节. 首先, 第 4.1 小节证明 $\{\eta_j\}_{j \geqslant 0}$ 在一定意义下满足 Markov 性. 然后, 第 4.2 和 4.3 小节分别证明定理 1.1(i) 和 1.1(ii).

4.1 一个辅助引理

若 $\ell = 1$, 则对 $j \geqslant 0$, η_j 的值完全由 Z_{j+1} 决定. 若 $\ell > 1$, 则对 $j \geqslant 0$, η_j 的值依赖于 $Z_{j+1}, \ldots, Z_{j+\ell}$. 但以下引理表明, $\{\eta_j\}_{j \geqslant 1}$ 具有 Markov 性.

引理 4.1 设 $n, k > 0$, $0 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant \cdots \leqslant j_k < j_{k+1} < \cdots < j_{n+k} < \infty$ 都是非负整数, 且 $(i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^n$. 假定 $P(\eta_{j_s} = 1,\ s = 1, \ldots, k) > 0$, 则

$$P\left(\eta_{j_{k+1}} = i_1, \ldots, \eta_{j_{k+n}} = i_n \mid \eta_{j_s} = 1, s = 1, \ldots, k\right) = P\left(\eta_{j_{k+1}} = i_1, \ldots, \eta_{j_{k+n}} = i_n \mid \eta_{j_k} = 1\right). \tag{4.1}$$

证明 如果 $j_{k+1} \geqslant j_k + \ell$, 则事件 $\{\eta_{j_{k+1}} = i_1, \ldots, \eta_{j_{k+n}} = i_n\} \in \sigma(Z_i,\ i \geqslant j_k + \ell + 1)$. 于是, 根据 Markov 性, 有

$$\begin{aligned}
&P\left(\eta_{j_{k+1}} = i_1, \ldots, \eta_{j_{k+n}} = i_n \mid \eta_{j_s} = 1, s = 1, \ldots, k\right) \\
&\quad = P\left(\eta_{j_{k+1}} = i_1, \ldots, \eta_{j_{k+n}} = i_n \mid Z_{j_s+t} = a_t, s = 1, \ldots, k, t = 1, \ldots, \ell\right) \\
&\quad = P\left(\eta_{j_{k+1}} = i_1, \ldots, \eta_{j_{k+n}} = i_n \mid Z_{j_k+\ell} = a_\ell\right) \\
&\quad = P\left(\eta_{j_{k+1}} = i_1, \ldots, \eta_{j_{k+n}} = i_n \mid Z_{j_k+t} = a_t, t = 1, \ldots, \ell\right) \\
&\quad = P\left(\eta_{j_{k+1}} = i_1, \ldots, \eta_{j_{k+n}} = i_n \mid \eta_{j_k} = 1\right).
\end{aligned}$$

下面讨论 $j_{k+1}, \ldots, j_{k+n}$ 中有一个或多个小于或等于 $j_k + \ell - 1$ 的情形. 我们仅证明 $j_{k+1} \leqslant j_k + \ell - 1$, $j_{k+2} \geqslant j_k + \ell$ 的情形. 其他情形可类似证明. 以下假定 $j_{k+1} \leqslant j_k + \ell - 1$, $j_{k+2} \geqslant j_k + \ell$. 固定 $1 < s \leqslant \ell - 1$. 若 $\{\eta_{j_k} = 1,\ \eta_{j_k+s} = 1\}$ 发生, 则

$$Z_{j_k+s+t} = a_{s+t} = a_s, \quad \forall\, 1 \leqslant t \leqslant \ell - s.$$

令

$$H = \{1 \leqslant s \leqslant \ell - 1 : a_t = a_{t+s}, \forall\, 1 \leqslant t \leqslant \ell - s\}. \tag{4.2}$$

假设 $H = \phi$, 则 $\{\eta_{j_k} = 1\} \subset \{\eta_{j_k+s} = 0, s = 1, \ldots, \ell - 1\}$. 因为 $j_k < j_{k+1} \leqslant j_k + \ell - 1$, $j_{k+2} \geqslant j_k + \ell$, 故当 $i_1 = 1$ 时,

$$P\left(\eta_{j_{k+1}} = i_1, \ldots, \eta_{j_{k+n}} = i_n \mid \eta_{j_s} = 1, s = 1, \ldots, k\right)$$

$$= P\left(\eta_{j_{k+1}} = i_1, \ldots, \eta_{j_{k+n}} = i_n \mid \eta_{j_k} = 1\right) = 0; \tag{4.3}$$

当 $i_1 = 0$ 时,

$$\begin{aligned}
&P\left(\eta_{j_{k+1}} = i_1, \ldots, \eta_{j_{k+n}} = i_n \mid \eta_{j_s} = 1, s = 1, \ldots, k\right)\\
&= P\left(\eta_{j_{k+2}} = i_1, \ldots, \eta_{j_{k+n}} = i_n \mid Z_{j_s+t} = a_t, s = 1, \ldots, k, t = 1, \ldots, \ell\right)\\
&= P\left(\eta_{j_{k+2}} = i_1, \ldots, \eta_{j_{k+n}} = i_n \mid Z_{j_k+\ell} = a_\ell\right)\\
&= P\left(\eta_{j_{k+2}} = i_1, \ldots, \eta_{j_{k+n}} = i_n \mid Z_{j_k+t} = a_t, t = 1, \ldots, \ell\right)\\
&= P\left(\eta_{j_{k+2}} = i_1, \ldots, \eta_{j_{k+n}} = i_n \mid \eta_{j_k} = 1\right)\\
&= P\left(\eta_{j_{k+1}} = i_1, \ldots, \eta_{j_{k+n}} = i_n \mid \eta_{j_k} = 1\right).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

所以当 $H = \phi$ 时, (4.1) 成立.

下面假设 $H \neq \phi$. 注意到对 $s \in \{1, 2, \ldots, \ell - 1\}/H$, 有 $\{\eta_{j_k} = 1\} \subset \{\eta_{j_k+s} = 0\}$. 事实上, 如果 $\{j_k \in T(\vec{a}),\ j_k + s \in T(\vec{a})\}$ 发生, 则必然有 $\{Z_{j_k+s+t} = a_t = a_{s+t}, t = 1, \ldots, \ell - s\}$, 即 $s \in H$, 矛盾.

于是, 如果 $j_{k+1} - j_k \in \{1, 2, \ldots, \ell - 1\}/H$, 则当 $i_1 = 1$ 时, (4.3) 成立; 当 $i_1 = 0$ 时, (4.4) 成立. 从而 (4.1) 成立.

如果 $j_{k+1} - j_k \in H$, 则由 H 的定义知 $a_{j_{k+1}-j_k+t} = a_t,\ t = 1, \ldots, \ell - (j_{k+1} - j_k)$. 于是, 若 $i_1 = 1$, 则有

$$\begin{aligned}
&\{\eta_{j_s} = 1, s = 1, \ldots, k, \eta_{j_{k+1}} = i_1, \ldots, \eta_{j_{k+n}} = i_n\}\\
&\quad = \{\eta_{j_s} = 1, s = 1, \ldots, k-1\} \cap \{\eta_{j_{k+s}} = i_s, s = 2, \ldots, n\}\\
&\qquad \cap \{Z_{j_k+t} = a_t, 1 \leqslant t \leqslant j_{k+1} - j_k\}\\
&\qquad \cap \{Z_{j_{k+1}+t} = a_{j_{k+1}-j_k+t} = a_t, t = 1, \ldots, \ell - (j_{k+1} - j_k)\}\\
&\qquad \cap \{Z_{j_{k+1}+t} = a_t, \ell - (j_{k+1} - j_k) + 1 \leqslant t \leqslant \ell\};
\end{aligned}$$

若 $i_1 = 0$, 则有

$$\begin{aligned}
&\{\eta_{j_s} = 1, s = 1, \ldots, k, \eta_{j_{k+1}} = i_1, \ldots, \eta_{j_{k+n}} = i_n\}\\
&\quad = \{\eta_{j_s} = 1, s = 1, \ldots, k-1\} \cap \{\eta_{j_{k+s}} = i_s, s = 2, \ldots, n\}\\
&\qquad \cap \{Z_{j_k+t} = a_t, 1 \leqslant t \leqslant j_{k+1} - j_k\}\\
&\qquad \cap \{Z_{j_{k+1}+t} = a_{j_{k+1}-j_k+t} = a_t, t = 1, \ldots, \ell - (j_{k+1} - j_k)\}\\
&\qquad \cap \{\exists\, \ell - (j_{k+1} - j_k) + 1 \leqslant t \leqslant \ell \text{ 使得 } Z_{j_{k+1}+t} \neq a_t\}.
\end{aligned}$$

注意到事件

$$\begin{aligned}
&\{\eta_{j_{k+s}} = i_s, s = 2, \ldots, n\},\\
&\{Z_{j_{k+1}+t} = a_t, \ell - (j_{k+1} - j_k) + 1 \leqslant t \leqslant \ell\},\\
&\{\exists\, \ell - (j_{k+1} - j_k) + 1 \leqslant t \leqslant \ell \text{ 使得 } Z_{j_{k+1}+t} \neq a_t\}
\end{aligned}$$

都关于 $\sigma(Z_s,\ s \geqslant j_k + \ell + 1)$ 可测. 故由 Markov 性可知, 当 $i_1 = 1$ 时有

$$P(\eta_{j_{k+1}} = i_1, \ldots, \eta_{j_{k+n}} = i_n \mid \eta_{j_s} = 1, s = 1, \ldots, k)$$

$$
\begin{aligned}
&= P\left(\begin{array}{c}\eta_{j_{k+s}}=i_s, s=2,\ldots,n,\\ Z_{j_{k+1}+t}=a_t, \ell-(j_{k+1}-j_k)+1\leqslant t\leqslant \ell\end{array}\,\middle|\, Z_{j_s+t}=a_t, s=1,\ldots,k, t=1,\ldots,\ell\right)\\
&= P\left(\begin{array}{c}\eta_{j_{k+s}}=i_s, s=2,\ldots,n,\\ Z_{j_{k+1}+t}=a_t, \ell-(j_{k+1}-j_k)+1\leqslant t\leqslant \ell\end{array}\,\middle|\, Z_{j_k+\ell}=a_\ell\right)\\
&= P\left(\begin{array}{c}\eta_{j_{k+s}}=i_s, s=2,\ldots,n,\\ Z_{j_{k+1}+t}=a_t, \ell-(j_{k+1}-j_k)+1\leqslant t\leqslant \ell\end{array}\,\middle|\, Z_{j_k+t}=a_t, t=1,\ldots,\ell\right)\\
&= P\left(\begin{array}{c}\eta_{j_{k+s}}=i_s, s=2,\ldots,n,\\ Z_{j_{k+1}+t}=a_t, \ell-(j_{k+1}-j_k)+1\leqslant t\leqslant \ell\end{array}\,\middle|\, \eta_{j_k}=1\right).
\end{aligned}
$$

同理, 当 $i_1=0$ 时有

$$
\begin{aligned}
&P\left(\eta_{j_{k+1}}=i_1,\ldots,\eta_{j_{k+n}}=i_n \mid \eta_{j_s}=1, s=1,\ldots,k\right)\\
&\quad= P\left(\begin{array}{c}\eta_{j_{k+s}}=i_s, s=2,\ldots,n,\\ \exists\, \ell-(j_{k+1}-j_k)+1\leqslant t\leqslant \ell \text{ 使得 } Z_{j_{k+1}+t}\neq a_t\end{array}\,\middle|\, \eta_{j_k}=1\right).
\end{aligned}
$$

类似方法可证当 $i_1=1$ 时有

$$
\begin{aligned}
&P\left(\eta_{j_{k+1}}=i_1,\ldots,\eta_{j_{k+n}}=i_n \mid \eta_{j_k}=1\right)\\
&\quad= P\left(\begin{array}{c}\eta_{j_{k+s}}=i_s, s=2,\ldots,n,\\ Z_{j_{k+1}+t}=a_t, \ell-(j_{k+1}-j_k)+1\leqslant t\leqslant \ell\end{array}\,\middle|\, \eta_{j_k}=1\right);
\end{aligned}
$$

当 $i_1=0$ 时有

$$
\begin{aligned}
&P\left(\eta_{j_{k+1}}=i_1,\ldots,\eta_{j_{k+n}}=i_n \mid \eta_{j_k}=1\right)\\
&\quad= P\left(\begin{array}{c}\eta_{j_{k+s}}=i_s, s=2,\ldots,n,\\ \exists\, \ell-(j_{k+1}-j_k)+1\leqslant t\leqslant \ell \text{ 使得 } Z_{j_{k+1}+t}\neq a_t\end{array}\,\middle|\, \eta_{j_k}=1\right).
\end{aligned}
$$

所以, 当 $j_{k+1}-j_k\in H\neq\phi$ 时, (4.1) 也成立. 引理证毕. □

4.2 定理 1.1(i) 的证明

为证明定理 1.1(i), 假设当 $n\to\infty$ 时 $p_n\to 1/2$ 且 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{D(n)\log n}<\infty$. 对 $j<i$, 记 $A_{j,i}=(2^j,2^i]\cap T(\vec{a})$. 当集合 $A_{m,m+1}$ 非空时, 记 $l_m=\max\{n:\ n\in A_{m,m+1}\}$. 则对 $m\geqslant 1$, 有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=2^{m-1}+1}^{2^{m+1}} P(j\in T(\vec{a}))=E(|A_{m-1,m+1}|)\\
&\geqslant \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} E(|A_{m-1,m+1}|, A_{m,m+1}\neq\phi, l_m=n)\\
&= \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} P(A_{m,m+1}\neq\phi, l_m=n)E\left(|A_{m-1,m+1}|\mid A_{m,m+1}\neq\phi, l_m=n\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} P(A_{m,m+1} \neq \phi, l_m = n) \sum_{i=2^{m-1}+1}^{n} P(i \in T(\vec{a}) \mid A_{m,m+1} \neq \phi, l_m = n) \\
&\geqslant P(A_{m,m+1} \neq \phi) \min_{2^m < n \leqslant 2^{m+1}} \sum_{i=2^{m-1}+1}^{n} P(i \in T(\vec{a}) \mid A_{m,m+1} \neq \phi, l_m = n) \\
&=: b_m P(A_{m,m+1} \neq \phi), \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

其中, 记

$$
b_m = \min_{2^m < n \leqslant 2^{m+1}} \sum_{i=2^{m-1}+1}^{n} P(i \in T(\vec{a}) \mid A_{m,m+1} \neq \phi, l_m = n).
$$

下面估计 b_m. 为此, 固定 $2^{m-1}+1 \leqslant i < i+\ell \leqslant n \leqslant 2^{m+1}$. 由 Markov 性可得

$$
\begin{aligned}
&P(i \in T(\vec{a}) \mid A_{m,m+1} \neq \phi, l_m = n) \\
&\quad = \frac{P(i \in T(\vec{a}), n \in T(\vec{a}), t \notin T(\vec{a}), n+1 \leqslant t \leqslant 2^{m+1})}{P(n \in T(\vec{a}), t \notin T(\vec{a}), n+1 \leqslant t \leqslant 2^{m+1})} \\
&\quad = \frac{P(i \in T(\vec{a}), n \in T(\vec{a}))}{P(n \in T(\vec{a}))} \frac{P(t \notin T(\vec{a}), n+1 \leqslant t \leqslant 2^{m+1} \mid i \in T(\vec{a}), n \in T(\vec{a}))}{P(t \notin T(\vec{a}), n+1 \leqslant t \leqslant 2^{m+1} \mid n \in T(\vec{a}))}. \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

由引理 (4.1) 可得, 对任意 $i \leqslant n-\ell$, 有

$$
\frac{P(t \notin T(\vec{a}), n+1 \leqslant t \leqslant 2^{m+1} \mid i \in T(\vec{a}), n \in T(\vec{a}))}{P(t \notin T(\vec{a}), n+1 \leqslant t \leqslant 2^{m+1} \mid n \in T(\vec{a}))} = 1. \qquad (4.7)
$$

将 (4.7) 代入 (4.6), 得到

$$
\begin{aligned}
P(i \in T(\vec{a}) \mid A_{m,m+1} \neq \phi, l_m = n) &= \frac{P(i \in T(\vec{a}), n \in T(\vec{a}))}{P(n \in T(\vec{a}))} \\
&= \frac{P(i \in T(\vec{a}))P(n \in T(\vec{a}) \mid i \in T(\vec{a}))}{P(n \in T(\vec{a}))}.
\end{aligned}
$$

多次利用 Markov 性及概率乘法公式, 可知

$$
\begin{aligned}
&P(i \in T(\vec{a})) = P(Z_{i+1} = a_1) \prod_{j=1}^{\ell-1} P(Z_{i+j+1} = a_{j+1} \mid Z_{i+j} = a_j), \\
&P(n \in T(\vec{a}) \mid i \in T(\vec{a})) = P(Z_{n+k} = a_k, k = 1, \ldots, \ell \mid Z_{i+\ell} = a_\ell) \\
&\qquad\qquad = P(Z_{n+1} = a_1 \mid Z_{i+\ell} = a_\ell) \prod_{j=1}^{\ell-1} P(Z_{n+j+1} = a_{j+1} \mid Z_{n+j} = a_j), \\
&P(n \in T(\vec{a})) = P(Z_{n+1} = a_1) \prod_{j=1}^{\ell-1} P(Z_{n+j+1} = a_{j+1} \mid Z_{n+j} = a_j).
\end{aligned}
$$

于是结合 (3.2), (3.3) 和 (3.8) 可知

$$
\begin{aligned}
&P(i \in T(\vec{a}) \mid A_{m,m+1} \neq \phi, l_m = n) \\
&\quad = \frac{P(Z_{i+1} = a_1) \prod_{j=1}^{\ell-1} P(Z_{i+j+1} = a_{j+1} \mid Z_{i+j} = a_j) P(Z_{n+1} = a_1 \mid Z_{i+\ell} = a_\ell)}{P(Z_{n+1} = a_1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{j=1}^{\ell-1} \binom{a_j + a_{j+1}}{a_j} \frac{m_{i+j+1}^{a_{j+1}}}{(1+m_{i+j+1})^{a_j+a_{j+1}+1}} \frac{(1-\frac{1}{D(i+1)})^{a_1}\frac{1}{D(i+1)}}{(1-\frac{1}{D(n+1)})^{a_1}\frac{1}{D(n+1)}} \\
&\quad \times \frac{(D(i+\ell+1,n+1)-1)^{a_1}}{(D(i+\ell+1,n+1))^{a_1+1}} \\
&\quad \times \left(\left(\frac{D(i+\ell+2,n+1)}{D(i+\ell+1,n+1)} \right)^{a_\ell} + \sum_{j=1}^{a_1} \frac{1}{j!} \frac{D(i+\ell+1,n+1)^j}{(D(i+\ell+1,n+1)-1)^j} g^{(j)}(0) \right).
\end{aligned}
$$

因为 $m \geqslant 1$, $\lim_{k\to\infty} m_k = 1$, 故存在常数 $M > 0$ 使得

$$
\sup_{k\geqslant 1} m_k < M \tag{4.8}
$$

且有

$$
\begin{aligned}
&\frac{D(k,n)-1}{D(k,n)} = \frac{1}{1+(\sum_{j=k}^{n} m_j \cdots m_n)^{-1}} > \frac{1}{1+m_n^{-1}} > \frac{1}{2}, \quad n \geqslant k \geqslant 1, \\
&\frac{D(k+1,n)}{D(k,n)} = \frac{D(k+1,n)}{D(k+1,n)+m_k\cdots m_n} > \frac{1}{1+m_k} \geqslant \frac{1}{1+M}, \quad n \geqslant k \geqslant 1, \\
&1 > 1 - \frac{1}{D(k)} > 1 - \frac{1}{1+m_k} \geqslant \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
P(i \in T(\vec{a}) \,|\, A_{m,m+1} \neq \phi, l_m = n) &\geqslant \prod_{j=1}^{\ell-1} \binom{a_j + a_{j+1}}{a_j} \frac{1}{(1+M)^{a_j+a_{j+1}+1}} \frac{1}{4^{a_1}} \frac{1}{(1+M)^{a_\ell}} \\
&\quad \times \frac{D(n+1)}{D(i+1)D(i+\ell+1,n+1)} \\
&:= Q(\vec{a})C(\vec{a},M) \frac{D(n+1)}{D(i+1)D(i+\ell+1,n+1)}, \quad i+\ell \leqslant n,
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

其中 $Q(\vec{a}) := \prod_{j=1}^{\ell-1} \binom{a_j+a_{j+1}}{a_j}$, $C(\vec{a},M) := \prod_{j=1}^{\ell-1} \frac{1}{(1+M)^{a_j+a_{j+1}+1}} \frac{1}{4^{a_1}} \frac{1}{(1+M)^{a_\ell}}$. 注意到 $m_j \geqslant 1, \forall\, j \geqslant 1$, 故

$$
\begin{aligned}
\frac{D(n+1)}{D(i+1)D(i+\ell+1,n+1)} &= \frac{\sum_{j=1}^{n+2} m_j \cdots m_{n+1}}{\sum_{j=1}^{i+2} m_j \cdots m_{i+1} \sum_{j=i+\ell+1}^{n+2} m_j \cdots m_{n+1}} \\
&= \frac{m_{i+2}m_{i+3}\cdots m_{i+\ell} \sum_{j=1}^{n+2} m_1^{-1} \cdots m_{j-1}^{-1}}{\sum_{j=1}^{i+2} m_1^{-1} \cdots m_{j-1}^{-1} \sum_{j=i+\ell+1}^{n+2} m_{i+\ell+1}^{-1} \cdots m_{j-1}^{-1}} \\
&\geqslant \frac{1}{\sum_{j=i+\ell+1}^{n+2} m_{i+\ell+1}^{-1} \cdots m_{j-1}^{-1}} \\
&\geqslant \frac{1}{n-i-\ell+2}.
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

结合 (4.10) 和 (4.11) 可得

$$
\begin{aligned}
b_m &= \min_{2^m < n \leqslant 2^{m+1}} \sum_{i=2^{m-1}+1}^{n} P(i \in T(\vec{a}) \,|\, A_{m,m+1} \neq \phi, l_m = n) \\
&\geqslant Q(\vec{a})C(\vec{a},M) \min_{2^m < n \leqslant 2^{m+1}} \sum_{i=2^{m-1}+1}^{n-\ell} \frac{1}{n-i-\ell+2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant Q(\vec{a})C(\vec{a},M)\min_{2^m<n\leqslant 2^{m+1}}\sum_{j=\ell}^{n-2^{m-1}-1}\frac{1}{j-\ell+2}\\
&=Q(\vec{a})C(\vec{a},M)\sum_{j=\ell}^{2^{m-1}}\frac{1}{j-\ell+2}\geqslant Q(\vec{a})C(\vec{a},M)\int_{\ell}^{2^{m-1}+1}\frac{1}{x-\ell+2}dx\\
&=Q(\vec{a})C(\vec{a},M)\log\left(2^{m-2}-\ell/2+3/2\right)\geqslant Q(\vec{a})C(\vec{a},M)(m-3)\log 2\\
&\geqslant\frac{1}{2}Q(\vec{a})C(\vec{a},M)(m+2)\log 2,\quad m>\frac{\log\ell}{\log 2}+4.
\end{aligned}\tag{4.12}
$$

记 $\theta=\lfloor\frac{\log\ell}{\log 2}+4\rfloor$ 并将 (4.12) 代入 (4.5), 结合引理 3.1 和 (4.8) 可知

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=\theta}^{\infty}P(|A_{m,m+1}|>0)&\leqslant\sum_{m=\theta}^{\infty}\frac{1}{b_m}\sum_{j=2^{m-1}+1}^{2^{m+1}}P(j\in T(\vec{a}))\\
&\leqslant\frac{2}{Q(\vec{a})C(\vec{a},M)\log 2}\sum_{m=\theta}^{\infty}\frac{1}{m+2}\sum_{j=2^{m-1}+1}^{2^{m+1}}\left(1-\frac{1}{D(j+1)}\right)^{a_1}\frac{1}{D(j+1)}\\
&\quad\times\prod_{i=1}^{\ell-1}\binom{a_i+a_{i+1}}{a_i}\frac{m_{j+i+1}^{a_{i+1}}}{(1+m_{j+i+1})^{a_i+a_{i+1}}}\\
&\leqslant\frac{2\prod_{i=1}^{\ell}M^{a_i}}{C(\vec{a},M)}\sum_{m=\theta}^{\infty}\sum_{j=2^{m-1}+1}^{2^{m+1}}\frac{1}{D(j+1)\log(j+1)}\\
&\leqslant\frac{2\prod_{i=1}^{\ell}M^{a_i}}{C(\vec{a},M)}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{D(n)\log n}.
\end{aligned}
$$

在条件 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{D(n)\log n}<\infty$ 下, 由 Borel-Cantelli 引理可知, 事件 $\{A_{m,m+1}\neq\phi\}$, $m\geqslant\theta$ 几乎必然地发生至多有限次. 因此, 几乎必然地有 $|T(\vec{a})|<\infty$. 定理 1.1(i) 证毕.

4.3 定理 1.1(ii) 的证明

假设存在 $\delta>0$ 使得当 n 充分大时, $D(n)\leqslant\delta n\log n$ 且 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{D(n)\log n}=\infty$. 对 $j\geqslant 1$, 用 $n_j:=\lfloor j\log j\rfloor$ 表示 $j\log j$ 的整数部分并令 $A_j=\{n_j\in T(\vec{a})\}$. 设 M 由 (4.8) 给出, 则由 (3.2), (3.3), (3.6) 和 (4.9) 可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{\infty}P(A_j)&=\sum_{j=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{D(n_j+1)}\right)^{a_1}\frac{1}{D(n_j+1)}\prod_{k=1}^{\ell-1}\binom{a_k+a_{k+1}}{a_k}\frac{m_{n_j+k+1}^{a_{k+1}}}{(1+m_{n_j+k+1})^{a_k+a_{k+1}}}\\
&\geqslant\frac{1}{2^{a_1}}\prod_{k=1}^{\ell-1}\binom{a_k+a_{k+1}}{a_k}\frac{1}{(1+M)^{a_k+a_{k+1}}}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{D(\lfloor j\log j\rfloor+1)}.
\end{aligned}\tag{4.13}
$$

因为对任意 $j\geqslant 1$ 都有 $m_j\geqslant 1$, 故通过 (2.8) 可知

$$
D(n)\text{ 关于 }n\text{ 单调递增.}\tag{4.14}
$$

从而由文献 [4, 引理 2.2] 可知级数 $\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{D(\lfloor j\log j\rfloor)}$ 与 $\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{D(j)\log j}$ 同敛同散. 因此, 由 (4.13) 可得

$$
\sum_{j=2}^{\infty}P(A_j)=\infty.\tag{4.15}
$$

固定 $\varepsilon>0$. 对 $l\geqslant h+\ell>h$, 有 $n_l-n_h\geqslant l\log l-h\log h\geqslant\log h$. 假设 N 由命题 3.1 给出, 则存在整数 $N_8>0$, 使得当 $h>N_8$ 时, 有 $n_h>N$, $n_l-n_h>N$. 因此对 $l>h>N_8$, 结合 (2.9) 和 (3.4), 有

$$\begin{aligned}P(A_hA_l)&\leqslant(1+\varepsilon)P(A_h)P(A_l)\left(\frac{D(n_h,n_l)}{D(n_h)}\right)^{-1}\\&=(1+\varepsilon)\left(1-\prod_{i=n_h-1}^{n_l}\left(1-\frac{1}{D(i)}\right)\right)^{-1}P(A_h)P(A_l)\\&\leqslant(1+\varepsilon)\left(1-\exp\left\{-\sum_{i=n_h-1}^{n_l}\frac{1}{D(i)}\right\}\right)^{-1}P(A_h)P(A_l).\end{aligned}\tag{4.16}$$

定义

$$\ell_1=\min\left\{l\geqslant h+\ell:\sum_{i=n_h-1}^{n_l}\frac{1}{D(i)}\geqslant\log\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right\}.$$

显然, 对于 $l\geqslant\ell_1$, $(1-\exp\{-\sum_{i=n_h-1}^{n_l}\frac{1}{D(i)}\})^{-1}\leqslant1+\varepsilon$. 所以, 从 (4.16) 可知

$$P(A_hA_l)\leqslant(1+\varepsilon)^2P(A_h)(A_l),\quad\forall\,l\geqslant\ell_1.\tag{4.17}$$

接下来, 考虑 $h<h+\ell\leqslant l<\ell_1$ 的情况. 注意到对 $0<u<\log\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$, 有 $1-\mathrm{e}^{-u}\geqslant\beta^{-1}u$, 其中 $0<\beta<\infty$ 为某个合适的常数. 另外, 由 (4.14) 知 $D(n)$ 关于 n 单调递增. 基于这些事实和 (4.16), 有

$$\begin{aligned}P(A_hA_l)&\leqslant(1+\varepsilon)\left(1-\exp\left\{-\sum_{i=n_h-1}^{n_l}\frac{1}{D(i)}\right\}\right)^{-1}P(A_h)P(A_l)\\&\leqslant\frac{\beta(1+\varepsilon)P(A_h)P(A_l)}{\sum_{i=n_h-1}^{n_l}\frac{1}{D(i)}}\leqslant\frac{\beta(1+\varepsilon)P(A_h)P(A_l)D(n_l)}{n_l-n_h+2}.\end{aligned}\tag{4.18}$$

由引理 3.1 可得 $\lim_{n\to\infty}P(n\in T(\vec{a}))D(n)=C(\vec{a})$. 故存在常数 $\kappa>0$ 使得

$$\sup_{n\geqslant1}P(n\in T(\vec{a}))D(n)<\kappa.$$

于是由 (4.18) 可得

$$P(A_hA_l)\leqslant\frac{\kappa\beta(1+\varepsilon)P(A_h)}{n_l-n_h+2}\leqslant\frac{\kappa\beta(1+\varepsilon)P(A_h)}{l\log l-h\log h}.$$

进而有

$$\begin{aligned}\sum_{l=h+\ell}^{\ell_1-1}P(A_hA_l)&\leqslant\kappa\beta(1+\varepsilon)P(A_h)\sum_{l=h+\ell}^{\ell_1-1}\frac{1}{l\log l-h\log h}\\&\leqslant\kappa\beta(1+\varepsilon)P(A_h)\frac{1}{\log h}\sum_{l=h+\ell}^{\ell_1-1}\frac{1}{l-h}\\&\leqslant\kappa\beta(1+\varepsilon)P(A_h)\frac{\log\ell_1}{\log h}.\end{aligned}$$

可以证明 (参见文献 [4, 第 635 页, (4.2)]), 存在仅依赖于 ε 的常数 γ 使得 $\frac{\log\ell_1}{\log k}\leqslant\gamma$, 所以有

$$\sum_{l=h+\ell}^{\ell_1-1}P(A_hA_l)\leqslant\kappa\gamma\beta(1+\varepsilon)P(A_h).\tag{4.19}$$

结合 (4.17) 和 (4.19) 可得

$$\sum_{h=N_8}^{n}\sum_{l=h+\ell}^{n}P(A_hA_l)\leqslant\sum_{h=N_8}^{n}\sum_{l=h+\ell}^{n}(1+\varepsilon)^2P(A_h)P(A_l)+\kappa\gamma\beta(1+\varepsilon)\sum_{h=N_8}^{n}P(A_h).$$

借助 (4.15) 可知

$$\begin{aligned}\alpha(\varepsilon):=&\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{h=N_8}^{n}\sum_{l=h+\ell}^{n}P(A_hA_l)-\sum_{h=N_8}^{n}\sum_{l=h+\ell}^{n}(1+\varepsilon)^2P(A_h)P(A_l)}{\left(\sum_{h=N_8}^{n}P(A_h)\right)^2}\\ \leqslant&\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\kappa\gamma\beta(1+\varepsilon)}{\sum_{h=N_8}^{n}P(A_h)}=0.\end{aligned}$$

于是, 运用 Borel-Cantelli 引理 (参见文献 [16, 第 235 页]), 可得

$$P(A_h,h\geqslant N_8\text{ 发生无限次})\geqslant\frac{1}{(1+\varepsilon)^2+2\alpha(\varepsilon)}=\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}.$$

因此

$$P(A_h,h\geqslant 1\text{ 发生无限次})\geqslant P(A_h,h\geqslant N_8\text{ 发生无限次})\geqslant\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}.$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的, 令 $\varepsilon\to 0$, 可得

$$P(A_h,h\geqslant 1\text{ 发生无限次})=1.$$

也就是说, 几乎必然地有 $|T(\vec{a})|=\infty$. 定理 1.1(ii) 证毕.

5 定理 1.2 的证明

固定 $0\leqslant B<1$, 假设 $p_n=\frac{1}{2}-\frac{B}{4n}$, $n\geqslant 1$, 则

$$\lim_{n\to\infty}p_n=1/2,\quad\lim_{n\to\infty}m_n=1.$$

对 $n\geqslant 1$, 令 $\eta_n=1_{\{n\in T(\vec{a})\}}$, 则 $|T(\vec{a})\cap[1,n]|=\sum_{j=1}^{n}\eta_j$. 对 $j\geqslant i\geqslant 1$, 记

$$P(\eta_i=1)=\frac{1}{\rho(0,i)},\quad P(\eta_j=1\,|\,\eta_i=1)=\frac{1}{\rho(i,j)}.\tag{5.1}$$

为证定理 1.2, 只需要验证第 2.2 小节定理 A 的所有条件即可. 首先证明

$$\rho(j,j)=1,\quad\rho(i,j)>1,\quad j>i\geqslant 0.\tag{5.2}$$

由引理 3.1 可得

$$P\left(\eta_i=1\right)=\left(1-\frac{1}{D(i+1)}\right)^{a_1}\frac{1}{D(i+1)}\prod_{j=1}^{\ell-1}\binom{a_j+a_{j+1}}{a_j}\frac{m_{i+j+1}^{a_{j+1}}}{(1+m_{i+j+1})^{a_j+a_{j+1}}}.\tag{5.3}$$

于是有

$$\rho(0,i)=\frac{1}{P\left(\eta_i=1\right)}\geqslant D(i+1)>1.$$

显然, 对 $j \geqslant 1$, 有 $\rho(j,j) = \frac{1}{P(\eta_j=1 \mid \eta_j=1)} = 1$. 下面固定 $j > i \geqslant 1$. 此时有

$$P(\eta_j = 1 \mid \eta_i = 1) = P(Z_{j+s} = a_s, s = 1, \ldots, \ell \mid Z_{i+s} = a_s, s = 1, \ldots, \ell).$$

若 $j \geqslant i + \ell$, 则由 (3.2) 和 (3.7) 知

$$\begin{aligned} P(\eta_j = 1 \mid \eta_i = 1) &= P(Z_{j+1} = a_1 \mid Z_{i+\ell} = a_\ell) \prod_{s=1}^{\ell-1} P(Z_{j+s+1} = a_{s+1} \mid Z_{j+s} = a_s) \\ &\leqslant P(Z_{j+2} = a_2 \mid Z_{j+1} = a_1) = \binom{a_1 + a_2}{a_1} \frac{m_{j+2}^{a_2}}{(1 + m_{j+2})^{a_1+a_2+1}} < 1, \end{aligned}$$

从而有 $\rho(i,j) = \frac{1}{P(\eta_j=1 \mid \eta_i=1)} > 1$.

下面考虑 $i < j \leqslant i + \ell - 1$ 的情形. 假设 H 由 (4.2) 给出. 若 $H = \phi$ 或 $H \neq \phi$ 但 $j - i \notin H$, 则有 $P(\eta_j = 1 \mid \eta_i = 1) = 0$. 此时, 显然有 $\rho(i,j) = \frac{1}{P(\eta_j=1 \mid \eta_i=1)} > 1$. 若 $H \neq \phi$ 且 $j - i \in H$, 则 $a_{j-i+t} = a_t$, $t = 1, \ldots, \ell - (j - i)$, 从而根据 Markov 性和 (3.2), 有

$$\begin{aligned} P(\eta_j = 1 \mid \eta_i = 1) &= P\left(\begin{matrix} Z_{j+t} = a_t = a_{j-i+t}, t = 1, \ldots, \ell - (j-i), \\ Z_{j+s} = a_s, s = \ell - (j-i) + 1, \ldots, \ell \end{matrix} \,\middle|\, Z_{i+s} = a_s, s = 1, \ldots, l \right) \\ &= P(Z_{j+s} = a_s, s = \ell - (j-i) + 1, \ldots, \ell \mid Z_{i+\ell} = a_\ell) \\ &\leqslant P(Z_{i+\ell+1} = a_1 \mid Z_{i+\ell} = a_\ell) = \binom{a_1 + a_\ell}{a_\ell} \frac{m_{i+\ell+1}^{a_1}}{(1 + m_{i+\ell+1})^{a_1+a_\ell+1}} < 1. \end{aligned}$$

所以, 当 $i < j \leqslant i + \ell - 1$ 时, 也有 $\rho(i,j) = \frac{1}{P(\eta_j=1 \mid \eta_i=1)} > 1$. 综合以上讨论可知, (5.2) 为真.

结合 (2.10) 和 (5.3), 有

$$\lim_{i \to \infty} P(\eta_i = 1) D(i) = \prod_{j=1}^{\ell-1} \binom{a_j + a_{j+1}}{a_j} \frac{1}{2^{a_j + a_{j+1}}} = C(\vec{a}). \tag{5.4}$$

下面固定 $\sigma > 0$. 首先, 由 (5.4) 可知, 存在 n_1 使得

$$\frac{C(\vec{a})(1-\sigma)}{D(i)} \leqslant P(\eta_i = 1) \leqslant \frac{C(\vec{a})(1+\sigma)}{D(i)}, \quad i > n_1. \tag{5.5}$$

其次, 由命题 3.1 可知, 存在 $n_2 > 0$ 使得

$$\frac{C(\vec{a})(1-\sigma)}{D(i,j)} \leqslant P(\eta_j = 1 \mid \eta_i = 1) \leqslant \frac{C(\vec{a})(1+\sigma)}{D(i,j)}, \quad i > n_2, \quad j - i > n_2. \tag{5.6}$$

再次, 由第 2.2 小节引理 A, 必存在 $n_3 \geqslant 1$ 使得当 $i \geqslant n_3$, $j - i \geqslant n_3$ 时, 有

$$1 - \sigma \leqslant \frac{i}{(1-B)D(i)} \leqslant 1 + \sigma, \quad 1 - \sigma \leqslant \frac{j^B \left(j^{1-B} - i^{1-B}\right)}{(1-B)D(i,j)} \leqslant 1 + \sigma. \tag{5.7}$$

令 $N_3 = n_1 \vee n_2 \vee n_3 \vee \ell$. 结合 (5.1) 和 (5.5)–(5.7) 可得, 对 $i > N_3$, $j - i > N_3$, 有

$$(1-\sigma)^2 \leqslant \frac{i}{C(\vec{a})(1-B)\rho(0,i)} \leqslant (1+\sigma)^2, \quad (1-\sigma)^2 \leqslant \frac{j^B \left(j^{1-B} - i^{1-B}\right)}{C(\vec{a})(1-B)\rho(i,j)} \leqslant (1+\sigma)^2. \tag{5.8}$$

考虑 $k \geqslant 1$, $1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_k \leqslant j_{k+1}$. 若 $j_{k+1} = j_k$, 则显然有

$$P\left(\eta_{j_{k+1}} = 1 \mid \eta_{j_s} = 1, s = 1, \ldots, k\right) = 1 = P\left(\eta_{j_{k+1}} = 1 \mid \eta_{j_k} = 1\right);$$

若 $j_{k+1} > j_k$, 则由引理 4.1 可知

$$P\left(\eta_{j_{k+1}} = 1 \mid \eta_{j_s} = 1, s = 1, \ldots, k\right) = P\left(\eta_{j_{k+1}} = 1 \mid \eta_{j_k} = 1\right).$$

故对 $k \geqslant 1$, $1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_k \leqslant j_{k+1}$, 总有

$$P\left(\eta_{j_{k+1}} = 1 \mid \eta_{j_s} = 1, s = 1, \ldots, k\right) = P\left(\eta_{j_{k+1}} = 1 \mid \eta_{j_k} = 1\right) = \frac{1}{\rho(j_k, j_{k+1})}. \tag{5.9}$$

综合 (5.1), (5.2), (5.8) 和 (5.9) 可知, 第 2.2 小节定理 A 的所有条件都成立, 于是令 $\alpha = 1 - B$, $\beta = (C(\vec{a})(1-B))^{-1}$ 并利用该定理可知, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \eta_j}{C(\vec{a}) \log n} \xrightarrow{d} \xi,$$

其中, 随机变量 $\xi \sim \Gamma(1-B, 1)$. 定理 1.2 证毕.

6 $T(\vec{a})$ 有限时 $|T(\vec{a})|$ 分布的一些讨论

假设 p_n, $n \geqslant 1$ 由 (1.5) 给出, 则由推论 1.1 知, 当 $B \geqslant 1$ 时, $T(\vec{a})$ 是有限集, 故 $|T(\vec{a})|$ 为一个非负整值随机变量. 我们希望知道 $|T(\vec{a})|$ 具体服从什么分布. 对一个非负整值随机变量, 若能计算其母函数, 则可了解其分布. 目前我们还无法解决这个问题, 以下就 $\ell = 1$ 且 $a_1 = 0$ 这种特殊情形提供一些初步想法. 这种情况下, $T(\vec{a}) = \{n \geqslant 1 : Z_n = 0\}$. 令

$$G(s) = E(s^{|T(\vec{a})|}), \quad s \in [0, 1].$$

对 $n \geqslant 1$, 令 $\eta_n = 1_{\{Z_n = 0\}}$, 则 $|T(\vec{a}) \cap [1, n]| = \sum_{j=1}^{n} \eta_j$. 借助控制收敛定理, 有

$$G(s) = E(s^{|T(\vec{a})|}) = \lim_{n\to\infty} E(s^{|T(\vec{a})\cap[1,n]|}) = \lim_{n\to\infty} E(s^{\sum_{j=1}^{n}\eta_j}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \theta(k, n) s^k, \quad s \in [0, 1],$$

其中 $\theta(k, n) = P(\sum_{j=1}^{n} \eta_j = k)$, $k \geqslant 0$, $n \geqslant 0$. 为求 $G(s)$, 只需要计算出极限 $\lim_{n\to\infty} \theta(k, n)$ 即可.

令 $\tau_0 = 0$, 且令 $\tau_k = \inf\{n > \tau_{k-1} : Z_n = 0\}$, $k \geqslant 1$. 则 τ_k, $k \geqslant 0$ 全都是停时且 $\tau_0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \cdots$, 其中, 对 $j \geqslant 1$, 若 $\tau_j < \infty$, 则一定有 $\tau_j < \tau_{j+1}$.

以下约定 $j_0 = 0$. 借助 Markov 性可得

$$\begin{aligned}
\theta(k, n) &= \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n} P\left(\eta_{j_s} = 1,\, s = 1, \ldots, k, \eta_i = 0, i \in [1, n]/\{j_1, \ldots, j_k\}\right) \\
&= \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n} P(\tau_1 = j_1, \ldots, \tau_k = j_k, \tau_{k+1} > n) \\
&= \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n} \left(\prod_{i=1}^{k} P(\tau_i = j_i \mid \tau_{i-1} = j_{i-1})\right) P(\tau_{k+1} > n \mid \tau_k = j_k).
\end{aligned}$$

于是, 问题归结为计算并估计条件概率

$$b(s,t) := P(\tau_i = s+t \mid \tau_{i-1} = s), \quad s \geqslant 0, \quad t \geqslant 1.$$

注意到

$$b(s,t) = P(Z_{s+1} > 0, \ldots, Z_{s+t-1} > 0, Z_{s+t} = 0 \mid Z_s = 0), \quad s \geqslant 0, \quad t \geqslant 1. \tag{6.1}$$

为给出 $b(s,t)$ 的表达式, 对 $1 \leqslant k \leqslant n$, 记

$$\Pi(k,n) = f_{k,n}(0) f_{k+1,n}(0) \cdots f_{n,n}(0),$$

其中 $f_{j,n}(0)$, $k \leqslant j \leqslant n$ 由 (2.3) 给出. 基于 (2.3), 简单计算可知

$$\Pi(k,n) = \left(1 + \sum_{j=k}^{n} m_j \cdots m_n\right)^{-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

利用 (6.1), 经过一些复杂的计算过程可以证明

$$b(s,t) = \Pi(s+1, s+t) - \sum_{j=1}^{t-1} \Pi(s+j+1, s+t) b(s,j), \quad s \geqslant 0, \quad t \geqslant 1. \tag{6.2}$$

理论上, 对 $s \geqslant 0$, $t \geqslant 1$, 通过不断迭代, 可从 (6.2) 求解出 $b(s,t)$, 但要给出其准确估计是一项很困难的工作.

致谢 作者感谢审稿人仔细阅读了本文并给出了宝贵的评论和意见, 这些评论和意见对本文的修改和完善有重要作用. 同时, 感谢北京师范大学洪文明教授向作者介绍了文献 [4], 该文献是本文想法的重要来源.

参考文献

1 Athreya K B, Ney P E. Branching Processes. New York-Heidelberg: Springer-Verlag, 1972
2 Biggins J D, Cohn H, Nerman O. Multi-type branching in varying environment. Stochastic Process Appl, 1999, 83: 357–400
3 Cohn H, Wang Q. Multitype branching limit behavior. Ann Appl Probab, 2003, 13: 490–500
4 Csáki E, Földes A, Révész P. On the number of cutpoints of the transient nearest neighbor random walk on the line. J Theoret Probab, 2010, 23: 624–638
5 Dolgopyat D, Hebbar P, Koralov L, et al. Multi-type branching processes with time-dependent branching rates. J Appl Probab, 2018, 55: 701–727
6 Fujimagari T. On the extinction time distribution of a branching process in varying environments. Adv in Appl Probab, 1980, 12: 350–366
7 Haccou P, Jagers P, Vatutin V A. Branching Processes: Variation, Growth, and Extinction of Populations. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2005
8 Harris T E. The Theory of Branching Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1963
9 Jagers P. Branching Processes with Biological Applications. London-New York-Sydney: John Wiley & Sons, 1975
10 Jones O D. On the convergence of multitype branching processes with varying environments. Ann Appl Probab, 1997, 7: 772–801
11 Kersting G. A unifying approach to branching processes in a varying environment. J Appl Probab, 2020, 57: 196–220
12 Kersting G, Vatutin V. Discrete Time Branching Processes in Random Environment. New York: John Wiley & Sons, 2017
13 Kimmel M, Axelrod D E. Branching Processes in Biology, 2nd ed. Interdisciplinary Applied Mathematics, vol. 19. New York: Springer, 2015
14 Lindvall T. Almost sure convergence of branching processes in varying and random environments. Ann Probab, 1974, 2: 344–346

15 MaCphee I M, Schuh H J. A Galton-Watson branching process in varying environments with essentially constant offspring means and two rates of growth. Aust N Z J Stat, 1983, 25: 329–338
16 Petrov V V. A generalization of the Borel-Cantelli lemma. Statist Probab Lett, 2004, 67: 233–239
17 Sun H Y, Wang H M, Li B Z, et al. Regeneration of branching processes with immigration in varying environments. J Appl Probab, 2025, 62: 422–444
18 Taïb Z. Branching Processes and Neutral Evolution. Lecture Notes in Biomathematics, vol. 93. Berlin: Springer-Verlag, 1992
19 Wang H M. Times of a branching process with immigration in varying environments attaining a fixed level. Acta Math Sin (Engl Ser), 2025, 41: 1789–1806
20 Wang H M, Yao H. Two-type linear-fractional branching processes in varying environments with asymptotically constant mean matrices. J Appl Probab, 2022, 59: 224–255
21 Wang H M, Zhang S. Limit distribution for sums of inhomogeneous Markovian Bernoulli variables. arXiv:2504.19404, 2025
22 Watson H W, Galton F. On the probability of extinction of families. J Anthropol Inst Great B Ireland, 1874, 4: 138–144

Times of a branching process with immigration in varying environments consecutively hitting given levels

Huaming Wang & Yue Wang

Abstract Consider a branching process with immigration in varying environments, denoted by $\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$. For a fixed $\ell \in \mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ and a vector $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_\ell) \in \{\mathbb{N} \cup \{0\}\}^\ell$, define $T(\vec{a}) = \{n \geqslant 0 : Z_{n+1} = a_1, Z_{n+2} = a_2, \ldots, Z_{n+\ell} = a_\ell\}$, which represents the set of times when the population size of the branching process consecutively hits the given levels. For the case where the offspring distribution follows a geometric distribution, we first establish a criterion to determine whether the set $T(\vec{a})$ is finite or infinite. Second, under the condition that the expected number m_n of offspring born to an individual in the $(n-1)$-th generation satisfies $m_n \sim \frac{B}{n}$, $n \to \infty$, for a given $0 \leqslant B < 1$, we prove that $\frac{|T(\vec{a})\cap[1,n]|}{C(\vec{a})\log n} \xrightarrow{d} \xi$, as $n \to \infty$, where $C(\vec{a}) = \prod_{j=1}^{\ell-1} \binom{a_j+a_{j+1}}{a_j} \frac{1}{2^{a_j+a_{j+1}+1}}$, and the random variable $\xi \sim \Gamma(1-B, 1)$.

Keywords **branching processes with immigration, population size, varying environment, limit distribution**

MSC(2020) **60J80, 60J10**

doi: 10.1360/SSM-2025-0113