中国科学: 数学 2026 年 第 56 卷 第 ? 期: 1 ∼ 20
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

加权乘积 Hardy 空间及其对偶的小波刻画

郑涛涛, 李雯静, 张春梅*, 吴迪

浙江科技大学理学院数学与统计系, 杭州 310023
E-mail: zhengtao@zust.edu.cn, liwenjing@zust.edu.cn, cmzhang@zust.edu.cn, wudi08@mails.ucas.ac.cn

收稿日期: 2025-10-04; 接受日期: 2026-04-03; 网络出版日期: 2026-05-06; * 通信作者
浙江科技大学基本科研业务费专项资金 (批准号: 2025QN071)、浙江省研究生教学改革常规项目 (批准号: JGCG2024340)、国家自然科学基金 (批准号: 12326308) 和浙江科技大学研究生科研创新基金 (批准号: 2025yjskc21) 资助项目

摘要 本文首先建立几乎对角算子在离散型加权乘积 Triebel-Lizorkin 空间 $\dot{f}^{0,2}_{p,w}(\mathcal{R})$ 上的有界性, 其中 $\mathcal{R}$ 表示 $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ 上所有二进矩形构成的集合, 并结合乘积小波再生公式来建立 Euclid 空间上加权乘积 Hardy 空间 $H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 的小波刻画; 其次, 基于此小波刻画, 利用序列空间的提升和投影方法证明加权乘积 Carleson 测度空间 $\mathrm{CMO}^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 是加权乘积 Hardy 空间 $H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 的对偶空间.

关键词 加权乘积 Hardy 空间 加权乘积 Carleson 测度空间 小波 序列空间 几乎对角算子

MSC (2020) 主题分类 42B30, 42B25, 42B35, 42C40

1 引言

随着函数空间理论的发展, Hardy 空间在调和分析及偏微分方程等领域起着非常重要的作用. 1992 年, Meyer [30] 给出了 Hardy 空间 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的小波刻画, 同时, 基于小波基的分解以及小波系数的 Carleson 条件刻画了有界平均振荡函数空间 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. Liu [27] 进一步研究了弱 Hardy 空间 $WH^1(\mathbb{R}^n)$ 的小波刻画. Wu [34] 利用具有紧支集的小波给出了加权 Hardy 空间 $H^p_w(\mathbb{R}^n)$ (其中 $0<p<\infty$, $w\in A_\infty(\mathbb{R}^n)$) 的小波面积积分刻画. 2001 年, García-Cuerva 和 Martell [12] 基于向量值的分析给出了加权原子 Hardy 空间 $H^p_w(\mathbb{R})$ 的小波刻画, 其中 $0<p\leqslant 1$, $w\in A_\infty(\mathbb{R})$, 部分改进了文献 [34] 的结果, 该小波不受紧支集条件限制, 这也拓展了可刻画的小波类别. 2009 年, Lee 等 [24] 基于加权 Hardy 空间 $H^p_w(\mathbb{R})$ 的小波刻画得到了 $H^p_w(\mathbb{R})$ 的对偶空间为加权 Carleson 测度空间 $\mathrm{CMO}^p_w(\mathbb{R})$. 2017 年, 在 Coifman 和 Weiss 意义下的齐型空间 (X,d,μ) 上, Fu 等 [11] 借助 Auscher-Hytönen 几乎正交小波基证明了当 $f\in H^1_{\mathrm{at}}(X)$ 和 $g\in\mathrm{BMO}(X)$ 时, 将它们的乘积 $f\times g$ 视为一个分布且 $f\times g$ 可表示为两个有界双线性算子之和, 这两个算子分别是从 $H^1_{\mathrm{at}}(X)\times\mathrm{BMO}(X)$ 到 $L^1(X)$ 以及从 $H^1_{\mathrm{at}}(X)\times\mathrm{BMO}(X)$ 到 $H^{\log}(X)$ 的映射. 2018 年, Han 等 [19] 基于 Auscher-Hytönen 几乎正交小波基构建了相应的试验函数

英文引用格式: Zheng T T, Li W J, Zhang C M, et al. Wavelet characterizations of weighted product Hardy spaces and their duals (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 1–20, doi: 10.1360/SSM-2025-0247

© 2026《中国科学》杂志社

空间及分布空间并建立相应的小波再生公式, 进而发展了齐型空间上 Hardy 空间的 Littlewood-Paley 理论. 2021 年, He 等 [20] 在齐型空间 (X,d,μ) 上, 建立了 Besov 和 Triebel-Lizorkin 空间的小波刻画. 2023 年, Wang 等 [32] 利用小波刻画以及几乎对角算子的有界性建立了 Triebel-Lizorkin 空间 $F^s_{\infty,q}(X)$ 的分子刻画. 最近, Liu 等 [28,29] 利用小波刻画了加权各向异性 Hardy 空间, 同时也获得了它的对偶结论. 关于函数空间中小波的相关进展, 可参见文献 [18,21–23].

关于多参数乘积函数理论方面, Gundy 和 Stein [15] 首先引入了乘积 Hardy 空间, 并通过非切向极大函数、鞅极大函数以及相应的平方函数来刻画此乘积 Hardy 空间. Chang 和 Fefferman [3,4] 建立了乘积 Hardy 空间的原子分解等实变理论. 1988 年, Fefferman [9] 证明了, 若 $w\in A_p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, $1<p<\infty$, 则 Journé 类乘积奇异积分算子在 $L^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 上有界. 1995 年, Wang [33] 通过离散变换和 Journé 引理给出了双圆盘上的乘积 Triebel-Lizorkin 空间的原子分解并证明了几乎对角算子在其上的有界性. 2012 年, Ding 等 [6] 证明了当 $w\in A_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 时, 一类卷积型奇异积分算子在 $H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 上的有界性. Bownik 等 [2] 和 Li 等 [25] 建立了加权各向异性乘积 Hardy 空间的 Littlewood-Paley 刻画和对偶结论. 2018 年, Han 等 [19] 基于 Auscher-Hytönen 几乎正交小波基在齐型空间上获得了乘积 Hardy 空间 $H^p(X_1\times X_2)$ 的对偶空间为乘积 Carleson 测度空间 $\mathrm{CMO}^p(X_1\times X_2)$, 其中 $\max\{\frac{\omega_1}{\omega_1+\eta_1},\frac{\omega_2}{\omega_2+\eta_2}\}<p\leqslant 1$, $\eta_i\in(0,1]$, ω_i 是 X_i 的上维数, $i=1,2$. 最近, Georgiadis 等 [13] 在 Euclid 空间上基于小波的相关实变理论建立了乘积 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ $(0<p\leqslant 1)$ 框架并得到了几乎对角算子在离散型乘积 Triebel-Lizorkin 空间 $\dot f^{\boldsymbol{s},q}_p(\mathcal{R})$ $(0<p,q<\infty,\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^2)$ 上的有界性. 关于乘积 Hardy 空间及其对偶理论, 可参见文献 [5,7,8,16,17,26,35–37].

受文献 [12,24,34] 中加权 Hardy 空间的小波刻画及文献 [13,19,25,33,37] 中乘积 Hardy 空间的相关对偶结论的启发, 很自然地提出以下两个相关问题, 即能否利用小波刻画加权乘积 Hardy 空间, 同时建立加权乘积 Hardy 空间的对偶空间. 本文的主要目的是解决上述两个问题.

为陈述本文主要结论, 首先引入相关定义. 设 f 是 $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ 上的可测函数, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$. 定义强极大函数 M_sf 为

$$M_sf(x_1,x_2)=\sup_{I_1\times I_2\ni(x_1,x_2)}\frac{1}{|I_1\times I_2|}\int_{I_1\times I_2}|f(y_1,y_2)|dy_1dy_2,$$

其中上确界取遍所有边与坐标轴平行的矩形 $I_1\times I_2\subset\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$. 由强极大函数可引入乘积空间上的权类.

定义 1.1 (乘积空间上的 Muckenhoupt 权类 [6,10]) 权函数 $w(x_1,x_2)$ 被称为 $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ 上的 A_r 权 (记为 $w\in A_r(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$), 若有

$$\left(\frac{1}{|I_1\times I_2|}\int_{I_1\times I_2}w(x_1,x_2)dx_1dx_2\right)\left(\frac{1}{|I_1\times I_2|}\int_{I_1\times I_2}w(x_1,x_2)^{-\frac{1}{r-1}}dx_1dx_2\right)^{r-1}\leqslant C,\quad 1<r<\infty$$

对任意的 $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ 上的矩形 $I_1\times I_2$ 成立; 若有 $M_sw(x_1,x_2)\leqslant Cw(x_1,x_2)$, a.e. $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$, 则称 $w\in A_1(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$. 记 $A_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})=\bigcup_{1\leqslant r<\infty}A_r(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$. 对于任意的 $w\in A_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 定义 w 的临界指标为 $r_w=\inf\{r>1:w\in A_r(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\}$. 关于 $A_r(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 权有以下性质.

(i) 若 $w(x_1,x_2)\in A_r(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 则对几乎处处的 $x_1\in\mathbb{R}^{n_1}$, $w(x_1,\cdot)$ 一致满足 $A_r(\mathbb{R}^{n_2})$ 条件; 类似地, 对几乎处处的 $x_2\in\mathbb{R}^{n_2}$, $w(\cdot,x_2)$ 一致满足 $A_r(\mathbb{R}^{n_1})$ 条件.

(ii) 若 $w\in A_r(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, $1<r,q<\infty$, 则有如下加权 Fefferman-Stein 向量值不等式成立:

$$\left\|\left(\sum_j M_s^q(f_j)\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^r_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})}\leqslant C\left\|\left(\sum_j|f_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^r_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})}.\tag{1.1}$$

类似于加权 Hardy-Littlewood 极大函数, 可以定义加权强极大函数 $M_w f$,

$$M_w f(x_1,x_2)=\sup_{I_1\times I_2\ni(x_1,x_2)} w(I_1\times I_2)^{-1}\int_{I_1\times I_2}|f(y_1,y_2)|w(y_1,y_2)dy_1dy_2,$$

当 $w\equiv 1$ 时, M_w 即为强极大算子 M_s. 对于 M_w, 上述不等式 (1.1) 仍然成立.

为引入本文主要研究的加权乘积 Hardy 空间, 首先回顾与 Schwartz 函数相关的定义. 设 $\varphi^i\in S(\mathbb{R}^{n_i})$, $i=1,2$, 且满足

$$\begin{aligned}&\text{(i) } \operatorname{supp}\widehat{\varphi^i}\subset\{\xi_i\in\mathbb{R}^{n_i}:2^{-1}\leqslant|\xi_i|\leqslant 2\},\\&\text{(ii) } |\widehat{\varphi^i}(\xi_i)|\geqslant c>0,\ \text{若 } 2^{-\frac{3}{4}}\leqslant|\xi_i|\leqslant 2^{\frac{3}{4}}\end{aligned}\tag{1.2}$$

以及

$$\text{(iii)}\sum_{v_i\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi^i}(2^{-v_i}\xi_i)=1,\quad \xi_i\in\mathbb{R}^{n_i}\setminus\{0\}.\tag{1.3}$$

令 $S(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 为 $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ 上的 Schwartz 函数空间, 其对偶空间是缓增广义函数空间 $S'(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$. 记

$$S_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}):=\left\{\phi\in S(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}):\int_{\mathbb{R}^{n_i}}x_i^{k_i}\phi(x_1,x_2)dx_i=0,\forall\, k_i\in\mathbb{N}_0^{n_i},i=1,2\right\}.$$

空间 $S'_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 记为 $S_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 的对偶空间.

定义 1.2 (加权乘积 Hardy 空间) 若 $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$, $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)\in\mathbb{Z}^2$, 设 $\varphi^i\in S(\mathbb{R}^{n_i})$ 满足 (1.2) 和 (1.3), $\varphi(x_1,x_2):=\varphi^1(x_1)\varphi^2(x_2)$, $\varphi_{\boldsymbol{v}}(x_1,x_2):=2^{v_1n_1+v_2n_2}\varphi(2^{v_1}x_1,2^{v_2}x_2)$, 加权乘积 Hardy 空间可定义为

$$H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})=\left\{f\in S'_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}):\|f\|_{H^p_w}=\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}^2}|\varphi_{\boldsymbol{v}}*f|^2\right)^{\frac12}\right\|_{L^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})}<\infty\right\},$$

其中 $0<p\leqslant 1$, $w\in A_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$.

为给出上述加权乘积 Hardy 空间的小波刻画, 引入小波的相关概念 (参见文献 [30]). 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上所有二进方体构成的集合, 对于 $\mathbb{R}^n$ 上任意的函数 ψ, 定义 $\psi_I(x)=|I|^{-1/2}\psi(\frac{x-x_I}{\ell(I)})$, $I\in\mathcal{D}$, x_I 表示其左下角的坐标. 设 $m\in\mathbb{Z}$ 是一个整数. 如果一个实变量的函数 $\psi(x)$ 满足以下四个性质, 则称它是一个 m 类的小波 (基). 这些性质如下.

(a) 若 $m=0$, 则 $\psi(x)\in L^\infty(\mathbb{R})$; 若 $m\geqslant 1$, 则 $\psi(x)$ 及它的直到 m 阶的导数都属于 $L^\infty(\mathbb{R})$.

(b) $\psi(x)$ 及其直到 m 阶的导数在无穷远处都是速降的.

(c) 对 $0\leqslant k\leqslant m$, 有 $\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\psi(x)\,dx=0$.

(d) 函数 $2^{\frac{v}{2}}\psi(2^vx-k)$ $(v\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z})$ 的集合构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组正交基.

函数 $2^{\frac{v}{2}}\psi(2^vx-k)$ $(v\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z})$ 称为由 "母亲" ψ 生成的小波, 而条件 (a)–(c) 分别表示加到 "小波的母亲" 上的正则性、局部性及振动性. 一般地, 如果引入第二个函数 $\varphi(x)$, 称它为 "小波的父亲" (函数 $\psi(x)$ 是 "小波的母亲"). $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 一样, 具有性质 (a) 和 (b), 但用条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx=1$$

代替了条件 (c), 又用条件 "$\varphi(x-k)$ $(k\in\mathbb{Z})$ 与 ψ_I $(I\in\mathcal{D},|I|\leqslant 1)$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组正交基" 来代替 (d).

令 E 表示 2^n-1 个序列 $(e^1,\dots,e^n)$ 的集合, 其中每个 e^j 取 0 或 1, 但序列 $(0,0,\dots,0)\notin E$. 设

$$\psi^e(x):=\prod_{j=1}^n\psi^{e^j}(x^j),\quad e=(e^1,\dots,e^n)\in E,$$

其中 $\psi^0=\varphi$, $\psi^1=\psi$, 则集合

$$\{\psi_I^e: I\in\mathcal{D}, e\in E\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 上的正则张量积小波基, 且 $\{\psi_I^e\}$ 满足如下重要的性质:

(i) $\psi_I^e\in S(\mathbb{R}^n)$;

(ii) 存在某个常数 $b>0$, 使得 $\operatorname{supp}\widehat{\psi_I^e}\subset[-b2^v,b2^v]^n$, $I\in\mathcal{D}_v$;

(iii) 对于任意常数 $M,K>0$, 有 $|\partial^\alpha\psi_I^e(x)|\leqslant C2^{v(\frac{n}{2}+|\alpha|)}(1+2^v|x-x_I|)^{-M}$ 和 $\int_{\mathbb{R}^n}x^\alpha\psi_I^e(x)dx=0$, $I\in\mathcal{D}_v$, $|\alpha|\leqslant K$;

其中 $\mathcal{D}_v$ 表示所有边长为 $\ell(I)=2^{-v}$ 的二进方体构成的集合.

利用上述正则张量积小波可定义 $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ 上的乘积小波. 记 $\mathcal{D}^i$ 是 $\mathbb{R}^{n_i}$ 中所有二进方体构成的集合, 对于任意 $I_i\in\mathcal{D}^i$, 用 x_{I_i} 表示其左下角顶点, 其中 $i=1,2$. 令 $\mathcal{R}$ 表示在 $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ 中所有形如 $I_1\times I_2$ 的二进矩形构成的集合, 其中 $I_i\in\mathcal{D}^i$, 并设 $x_{\boldsymbol{I}}:=(x_{I_1},x_{I_2})$. 记 $x_i:=(x_i^1,\dots,x_i^{n_i})\in\mathbb{R}^{n_i}$, $\boldsymbol{x}:=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$. 考虑在 $\mathbb{R}^{n_i}$ 上的正则张量积小波基: $\psi_{I_i}^{e_i}(x_i)$, $I_i\in\mathcal{D}^i$, $e_i\in E^i$, 其中

$$\psi_{I_i}(x_i):=|I_i|^{-\frac12}\psi\left(\frac{x_i-x_{I_i}}{\ell(I_i)}\right),$$

$$\psi^{e_i}(x_i):=\prod_{j=1}^{n_i}\psi^{e_i^j}(x_i^j),\quad e_i=(e_i^1,\dots,e_i^{n_i}),\quad i=1,2,$$

E^i 为 $2^{n_i}-1$ 个序列 $(e_i^1,\dots,e_i^{n_i})$ 的集合, 这里每个 e_i^j 取 0 或 1, $j=1,\dots,n_i$, 但序列 $(0,0,\dots,0)\notin E^i$. 设 $\boldsymbol{E}:=E^1\times E^2$, 定义乘积小波基为

$$\psi_{I_1\times I_2}^{\boldsymbol{e}}(x_1,x_2):=\psi_{I_1}^{e_1}(x_1)\psi_{I_2}^{e_2}(x_2),\quad I_1\times I_2\in\mathcal{R},\quad \boldsymbol{e}=(e_1,e_2)\in\boldsymbol{E}.$$

注意到, 对于任意的 $f\in S_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ (或 $f\in S'_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$),

$$f=\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R},\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}}\langle f,\psi_{I_1\times I_2}^{\boldsymbol{e}}\rangle\psi_{I_1\times I_2}^{\boldsymbol{e}}$$

在 $S(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ (或 $S'_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$) 中收敛 (参见文献 [13, 命题 6.2]).

利用乘积小波基可定义如下平方算子及加权乘积 Carleson 测度空间:

$$G_\psi f=\left(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R},\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}}|\langle f,\psi_{I_1\times I_2}^{\boldsymbol{e}}\rangle|^2|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}\right)^{\frac12},\quad f\in L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}).$$

定义 1.3 (加权乘积 Carleson 测度空间) 设 $0<p\leqslant1$, $w\in A_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 加权乘积 Carleson 测度空间 $\mathrm{CMO}_w^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 是所有 $g\in L^1_{\mathrm{loc}}$ 构成的集合且满足

$$\|g\|_{\mathrm{CMO}_w^p}=\sup_\Omega\left(\frac{1}{w(\Omega)^{\frac2p-1}}\sum_{I_1\times I_2\subseteq\Omega,\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}}|\langle g,\psi_{I_1\times I_2}^{\boldsymbol{e}}\rangle|^2\frac{|I_1\times I_2|}{w(I_1\times I_2)}\right)^{\frac12}<\infty,$$

其中上确界取遍 $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ 中所有的开集 Ω, 且 Ω 满足 $w(\Omega)<\infty$.

本文的主要结论是利用乘积小波基给出加权乘积 Hardy 空间的等价刻画并建立加权乘积 Hardy 空间的对偶刻画.

定理 1.1 设 $0<p\leqslant 1$, $w\in A_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 对所有的 $f\in H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 存在常数 $c,C\in(0,\infty)$, 使得

$$c\|f\|_{H^p_w}\leqslant\|G_\psi f\|_{L^p_w}\leqslant C\|f\|_{H^p_w}.$$

定理 1.2 设 $0<p\leqslant 1$ 且 $w\in A_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$. 在如下意义下, $H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 的对偶空间是 $\mathrm{CMO}^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$.

(1) 对每个 $g\in\mathrm{CMO}^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 存在一个线性泛函 l_g, l_g 最初可定义在 $L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\cap H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 上, 随后可以连续延拓到 $H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 上且 $\|l_g\|\leqslant C\|g\|_{\mathrm{CMO}^p_w}$.

(2) 反之, $H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 上的每个连续线性泛函 l 都可以表示为 $l=l_g$, 其中 g 是 $\mathrm{CMO}^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 空间中的某个函数且 $\|g\|_{\mathrm{CMO}^p_w}\leqslant C\|l\|$.

本文余下内容的结构安排如下. 第 2 节利用乘积小波基来刻画加权乘积 Hardy 空间. 为此, 需要引入几乎对角算子并通过对偶的方法证明该算子在离散型加权乘积 Triebel-Lizorkin 空间 $\dot f^{0,2}_{p,w}(\mathcal{R})$ 上是有界的 (见引理 2.2). 第 3 节引入两个加权乘积序列空间 $s^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 和 $c^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 并证明 $s^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 的对偶空间是 $c^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ (见定理 3.1). 第 4 节利用序列空间的提升和投影的方法证明加权乘积 Hardy 空间的对偶空间是加权乘积 Carleson 测度空间.

注 1.1 在本文中, $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2$, 用 $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ 来表示乘积空间. 记 $\alpha_i:=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n_i})\in\mathbb{N}_0^{n_i}(\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\})$, $x_i^{\alpha_i}:=(x_i^1)^{\alpha_1}\cdots(x_i^{n_i})^{\alpha_{n_i}}$, $|\alpha_i|:=\alpha_1+\cdots+\alpha_{n_i}$, $\partial^{\alpha_i}:=(\frac{\partial}{\partial x_i^1})^{\alpha_1}\cdots(\frac{\partial}{\partial x_i^{n_i}})^{\alpha_{n_i}}$. 在 $\mathbb{R}^n$ 上, 函数 f 的 Fourier 变换 $\widehat f$ 被定义为 $\widehat f(\xi):=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}dx$. 对于 $p\geqslant 1$, 利用 p' 表示其共轭指标, 即 $\frac1p+\frac{1}{p'}=1$. 对于集合 $I_1\times I_2\subset\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$, $|I_i|$ 表示 I_i 的 Lebesgue 测度, $i=1,2$, $|I_1\times I_2|^{-\frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{n}}}:=|I_1|^{-\frac{s_1}{n_1}}\times|I_2|^{-\frac{s_2}{n_2}}$, 其中 $\boldsymbol{s}=(s_1,s_2)\in\mathbb{R}^2$, $\chi_{I_1\times I_2}$ 表示其特征函数. 用 $f\sim g$ 表示存在正常数 c 和 C 使得 $cf\leqslant g\leqslant Cf$.

2 几乎对角算子和加权乘积 Hardy 空间

为了证明定理 1.1, 先引入离散型加权乘积 Triebel-Lizorkin 空间 $\dot f^{\boldsymbol{s},q}_{p,w}(\mathcal{R})$ 的定义以及两个重要的引理.

定义 2.1 设 $0<p<\infty$, $0<q\leqslant\infty$, $w\in A_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 离散型加权乘积 Triebel-Lizorkin 空间 $\dot f^{\boldsymbol{s},q}_{p,w}(\mathcal{R})$ 定义为所有满足以下条件的复值序列 $g=\{g_{I_1\times I_2}\}_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}$ 的集合:

$$\|g\|_{\dot f^{\boldsymbol{s},q}_{p,w}(\mathcal{R})}=\left\|\left(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}(|I_1\times I_2|^{-\frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{n}}}|g_{I_1\times I_2}|\tilde\chi_{I_1\times I_2})^q\right)^{\frac1q}\right\|_{L^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})}<\infty,$$

其中 $\tilde\chi_{I_1\times I_2}=|I_1\times I_2|^{-\frac12}\chi_{I_1\times I_2}$.

若对于所有序列 $g=\{g_{I_1\times I_2}\}_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}$, $\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}$, 有

$$A^{\boldsymbol{e}}g=\{(A^{\boldsymbol{e}}g)_{I_1\times I_2}\}_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}=\left\{\sum_{J_1\times J_2\in\mathcal{R}}a^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2}g_{J_1\times J_2}\right\}_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}},$$

则称线性算子 $A^{\boldsymbol{e}}$ 与矩阵 $\{a^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2}\}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2\in\mathcal{R}}$ 是相关联的.

对于 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)\in\mathbb{Z}^2$, 设 $\mathcal{D}^i_{v_i}$ 为 $\mathcal{D}^i$ 中所有边长为 $\ell(I_i)=2^{-v_i}$ 的二进方体的集合, $\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}}$ 是所有形如 $I_1\times I_2$ 的二进矩形构成的集合且 $I_i\in\mathcal{D}^i_{v_i}$. 同样地, 对于 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{Z}^2$, $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\mu}}$ 是所有形如 $J_1\times J_2$ 的二进矩形构成的集合且 $J_i\in\mathcal{D}^i_{\mu_i}$, $i=1,2$.

定义 2.2 (几乎对角算子, 参见文献 [25, 第 2653 页]) 设 $\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^2$, $0<p<\infty$, $0<q\leqslant\infty$ 且 $\varepsilon\in(0,\infty)$, 若矩阵 $\{a^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2}\}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2\in\mathcal{R}}$ 满足

$$\sup_{I_1\times I_2,J_1\times J_2}\frac{|a^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2}|}{\omega_{I_1\times I_2,J_1\times J_2}(\varepsilon)}<\infty,$$

其中

$$\begin{aligned}\omega_{I_1\times I_2,J_1\times J_2}(\varepsilon):=&\prod_{i=1}^2\left(\frac{\ell(I_i)}{\ell(J_i)}\right)^{s_i}\left(1+\frac{|x_{I_i}-x_{J_i}|}{\max\{\ell(I_i),\ell(J_i)\}}\right)^{-Q_i-\varepsilon}\\&\times\min\left\{\left(\frac{\ell(I_i)}{\ell(J_i)}\right)^{\frac{n_i+\varepsilon}{2}},\left(\frac{\ell(J_i)}{\ell(I_i)}\right)^{\frac{n_i+\varepsilon}{2}+Q_i-n_i}\right\},\\Q_i=&\frac{n_i}{\min(1,p/r_w,q)},\end{aligned}$$

则称与矩阵 $\{a^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2}\}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2\in\mathcal{R}}$ 相关联的线性算子 $A^{\boldsymbol{e}}$ 为 $\dot f^{s,q}_{p,w}(\mathcal{R})$ 上的几乎对角算子.

引理 2.1 设 $\lambda_i>n_i$, $i=1,2$, 给定 $\mu_i,v_i\in\mathbb{Z}$, 对于 $\ell(I_i)=2^{-v_i}$, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{\ell(J_1)=2^{-\mu_1}\\ \ell(J_2)=2^{-\mu_2}}}|g_{J_1\times J_2}|\prod_{i=1}^2(1+2^{\min\{\mu_i,v_i\}}|x_{i_{J_1\times J_2}}-x_{i_{I_1\times I_2}}|)^{\lambda_i}\\&\leqslant C\prod_{i=1}^2\max\{1,2^{(\mu_i-v_i)n_i}\}M_s\Bigg(\sum_{\substack{\ell(J_1)=2^{-\mu_1}\\ \ell(J_2)=2^{-\mu_2}}}|g_{J_1\times J_2}|\chi_{J_1\times J_2}\Bigg)(x_1,x_2),\quad(x_1,x_2)\in I_1\times I_2.\end{aligned}\tag{2.1}$$

证明 结合文献 [10, 第 147 页, 注 A.3] 和 [1, 第 1501 页] 的证明方法, 可得 (2.1). □

引理 2.2 几乎对角算子 $A^{\boldsymbol{e}}$ 在 $\dot f^{0,2}_{p,w}(\mathcal{R})$ 上是有界的, 其中 $0<p<\infty$, $w\in A_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$.

证明 不妨先考虑 $p/r_w>1$ 的情形, 对于序列 $g=\{g_{I_1\times I_2}\}_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}$, 记

$$A^{\boldsymbol{e}}=A^{\boldsymbol{e}}_1+A^{\boldsymbol{e}}_2+A^{\boldsymbol{e}}_3+A^{\boldsymbol{e}}_4,$$

则有

$$\begin{aligned}(A^{\boldsymbol{e}}g)_{I_1\times I_2}&=(A^{\boldsymbol{e}}_1g)_{I_1\times I_2}+(A^{\boldsymbol{e}}_2g)_{I_1\times I_2}+(A^{\boldsymbol{e}}_3g)_{I_1\times I_2}+(A^{\boldsymbol{e}}_4g)_{I_1\times I_2}\\&=\Bigg(\sum_{\substack{\ell(I_1)<\ell(J_1)\\ \ell(I_2)<\ell(J_2)}}+\sum_{\substack{\ell(I_1)\geqslant\ell(J_1)\\ \ell(I_2)<\ell(J_2)}}+\sum_{\substack{\ell(I_1)\geqslant\ell(J_1)\\ \ell(I_2)\geqslant\ell(J_2)}}+\sum_{\substack{\ell(I_1)<\ell(J_1)\\ \ell(I_2)\geqslant\ell(J_2)}}\Bigg)a^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2}g_{J_1\times J_2}.\end{aligned}$$

注意到当 $p/r_w>1$ 时, 有 $Q_i=n_i$, $i=1,2$. 本文只给出 $A^{\boldsymbol{e}}_4$ 在 $\dot f^{0,2}_{p,w}(\mathcal{R})$ 上的有界性, 其余三项 $A^{\boldsymbol{e}}_i$, $i=1,2,3$ 的估计可类似得到. 利用引理 2.1, 有

$$|(A^{\boldsymbol{e}}_4g)_{I_1\times I_2}|\leqslant C\sum_{\substack{\ell(I_1)<\ell(J_1)\\ \ell(I_2)\geqslant\ell(J_2)}}\omega_{I_1\times I_2,J_1\times J_2}(\varepsilon)|g_{J_1\times J_2}|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\sum_{\substack{v_1>\mu_1\\ v_2\leqslant\mu_2}}\sum_{\substack{\ell(J_1)=2^{-\mu_1}\\ \ell(J_2)=2^{-\mu_2}}} 2^{(-v_1+\mu_1)\frac{n_1+\varepsilon}{2}+(-\mu_2+v_2)\frac{n_2+\varepsilon}{2}}\\
&\quad\times\frac{|g_{J_1\times J_2}|}{(1+\ell^{-1}(J_1)|x_{J_1}-x_{I_1}|)^{n_1+\varepsilon}}\frac{1}{(1+\ell^{-1}(I_2)|x_{J_2}-x_{I_2}|)^{n_2+\varepsilon}}\\
&\leqslant C\sum_{\substack{v_1>\mu_1\\ v_2\leqslant\mu_2}} 2^{(-v_1+\mu_1)\frac{n_1+\varepsilon}{2}+(-\mu_2+v_2)\frac{n_2+\varepsilon}{2}+(\mu_2-v_2)(n_2+\frac{\varepsilon}{4})}M_s\Big(\sum_{\substack{\ell(J_1)=2^{-\mu_1}\\ \ell(J_2)=2^{-\mu_2}}}|g_{J_1\times J_2}|\chi_{J_1\times J_2}\Big)(x_1,x_2)\\
&\leqslant C\sum_{\substack{v_1>\mu_1\\ v_2\leqslant\mu_2}} 2^{(-v_1+\mu_1)\frac{n_1+\varepsilon}{2}+(\mu_2-v_2)(\frac{n_2}{2}-\frac{\varepsilon}{4})}M_s\Big(\sum_{\substack{\ell(J_1)=2^{-\mu_1}\\ \ell(J_2)=2^{-\mu_2}}}|g_{J_1\times J_2}|\chi_{J_1\times J_2}\Big)(x_1,x_2).
\end{aligned}
$$

利用 Hölder 不等式和加权 Fefferman-Stein 向量值不等式, 可得

$$
\begin{aligned}
&\|A_4^{\boldsymbol{e}}g\|_{\dot f^{0,2}_{p,w}}\\
&\quad=\Big\|\Big(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}(|(A_4^{\boldsymbol{e}}g)_{I_1\times I_2}|\tilde\chi_{I_1\times I_2})^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^p_w}\\
&\quad\leqslant C\Big\|\Big(\sum_{v_1,v_2\in\mathbb{Z}}\Big(\Big|\sum_{\substack{v_1>\mu_1\\ v_2\leqslant\mu_2}}2^{(-v_1+\mu_1)\frac{n_1+\varepsilon}{2}+(\mu_2-v_2)(\frac{n_2}{2}-\frac{\varepsilon}{4})}M_s\Big(\sum_{\substack{\ell(J_1)=2^{-\mu_1}\\ \ell(J_2)=2^{-\mu_2}}}|g_{J_1\times J_2}|\chi_{J_1\times J_2}\Big)\Big|\tilde\chi_{I_1\times I_2}\Big)^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^p_w}\\
&\quad\leqslant C\Big\|\Big(\sum_{v_1,v_2\in\mathbb{Z}}\Big(\Big|\sum_{\substack{v_1>\mu_1\\ v_2\leqslant\mu_2}}2^{(-v_1+\mu_1)\frac{\varepsilon}{2}-(\mu_2-v_2)\frac{\varepsilon}{4}}M_s\Big(\sum_{\substack{\ell(J_1)=2^{-\mu_1}\\ \ell(J_2)=2^{-\mu_2}}}|g_{J_1\times J_2}|\tilde\chi_{J_1\times J_2}\Big)\Big|\Big)^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^p_w}\\
&\quad\leqslant C\Big\|\Big(\sum_{v_1,v_2\in\mathbb{Z}}\Big(\Big|\sum_{\substack{v_1>\mu_1\\ v_2\leqslant\mu_2}}M_s\Big(\sum_{\substack{\ell(J_1)=2^{-\mu_1}\\ \ell(J_2)=2^{-\mu_2}}}|g_{J_1\times J_2}|\tilde\chi_{J_1\times J_2}\Big)\Big|\Big)^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^p_w}\\
&\quad\leqslant C\Big\|\Big(\sum_{\mu_1,\mu_2\in\mathbb{Z}}\Big(\Big|M_s\Big(\sum_{\substack{\ell(J_1)=2^{-\mu_1}\\ \ell(J_2)=2^{-\mu_2}}}|g_{J_1\times J_2}|\tilde\chi_{J_1\times J_2}\Big)\Big|\Big)^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^p_w}\\
&\quad\leqslant C\Big\|\Big(\sum_{J_1\times J_2\in\mathcal{R}}(|g_{J_1\times J_2}|\tilde\chi_{J_1\times J_2})^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^p_w},
\end{aligned}
$$

即证得 $A_4^{\boldsymbol{e}}$ 在 $\dot f^{0,2}_{p,w}(\mathcal{R})$ 上是有界的.

对于 $p/r_w\leqslant 1$ 的情形, 取充分接近的 $\tilde p<p/r_w$, 定义 $\tilde A^{\boldsymbol{e}}$ 和序列 $\tilde h$ 如下:

$$
\begin{aligned}
&\tilde A^{\boldsymbol{e}}=(\tilde a^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2})_{I_1\times I_2,J_1\times J_2\in\mathcal{R}},\quad \tilde a^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2}=|a^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2}|^{\tilde p}\Big(\frac{|I_1\times I_2|}{|J_1\times J_2|}\Big)^{\frac12-\frac{\tilde p}{2}},\\
&\tilde h=\{\tilde h_{I_1\times I_2}\}_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}},\quad \tilde h_{I_1\times I_2}=|I_1\times I_2|^{\frac12-\frac{\tilde p}{2}}|g_{I_1\times I_2}|^{\tilde p}.
\end{aligned}
$$

由 $\|f^{\tilde{p}}\|_{L_w^{p/\tilde{p}}}=\|f\|_{L_w^p}^{\tilde{p}}$, 有

$$\begin{aligned}\|\tilde{h}\|_{f_{p/\tilde{p},w}^{0,2/\tilde{p}}}^{1/\tilde{p}}&=\left\|\left(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}|g_{I_1\times I_2}|^{\tilde{p}\cdot\frac{2}{\tilde{p}}}|I_1\times I_2|^{(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\tilde{p}}{2})\frac{2}{\tilde{p}}}\chi_{I_1\times I_2}\right)^{\frac{\tilde{p}}{2}}\right\|_{L_w^{p/\tilde{p}}}^{1/\tilde{p}}\\&=\left\|\left(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}|g_{I_1\times I_2}|^2|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_w^p}\\&=\|g\|_{\dot{f}_{p,w}^{0,2}}.\end{aligned}$$

进而可得

$$\begin{aligned}\|A^{\boldsymbol{e}}g\|_{\dot{f}_{p,w}^{0,2}}&=\left\|\left(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}|(A^{\boldsymbol{e}}g)_{I_1\times I_2}|^2|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_w^p}\\&\leqslant\left\|\left(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}\left(\sum_{J_1\times J_2}|a^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2}|^{\tilde{p}}|g_{J_1\times J_2}|^{\tilde{p}}\right)^{\frac{2}{\tilde{p}}}|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_w^p}\\&=\left\|\left(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}|(\tilde{A}^{\boldsymbol{e}}\tilde{h})_{I_1\times I_2}|^{\frac{2}{\tilde{p}}}|I_1\times I_2|^{(\frac{\tilde{p}}{2}-\frac{1}{2})\frac{2}{\tilde{p}}}|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_w^p}\\&=\left\|\left(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}|(\tilde{A}^{\boldsymbol{e}}\tilde{h})_{I_1\times I_2}|^{\frac{2}{\tilde{p}}}|I_1\times I_2|^{-\frac{2/\tilde{p}}{2}}\chi_{I_1\times I_2}\right)^{\frac{1/\tilde{p}}{2/\tilde{p}}}\right\|_{L_w^p}\\&=\|\tilde{A}^{\boldsymbol{e}}\tilde{h}\|_{\dot{f}_{p/\tilde{p},w}^{0,2/\tilde{p}}}^{1/\tilde{p}}.\end{aligned}$$

借鉴文献 [1, 定理 4.1] 中单参数情形的几乎对角算子的验证过程, 可知对于任意的 $\varepsilon>0$, $\tilde{A}^{\boldsymbol{e}}$ 是 $\dot{f}_{p/\tilde{p},w}^{0,2/\tilde{p}}(\mathcal{R})$ 上的几乎对角算子. 利用 $\tilde{A}^{\boldsymbol{e}}$ 的有界性可推导出 $A^{\boldsymbol{e}}$ 的有界性,

$$\|A^{\boldsymbol{e}}g\|_{\dot{f}_{p,w}^{0,2}}\leqslant\|\tilde{A}^{\boldsymbol{e}}\tilde{h}\|_{\dot{f}_{p/\tilde{p},w}^{0,2/\tilde{p}}}^{1/\tilde{p}}\leqslant\|\tilde{h}\|_{\dot{f}_{p/\tilde{p},w}^{0,2/\tilde{p}}}^{1/\tilde{p}}=\|g\|_{\dot{f}_{p,w}^{0,2}}.$$

证毕. □

为了给出加权乘积 Hardy 空间的小波刻画, 需要引入 $S_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ (或 $S'_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$) 上的再生公式. 设 $\varphi^i\in S(\mathbb{R}^{n_i})$ 满足 (1.2) 和 (1.3), $\varphi(x_1,x_2):=\varphi^1(x_1)\varphi^2(x_2)$, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$, $I_1\times I_2\in\mathcal{R}$, 记

$$\varphi_{I_1\times I_2}(x_1,x_2):=|I_1\times I_2|^{-\frac{1}{2}}\varphi\left(\frac{x_1-x_{I_1}}{\ell(I_1)},\frac{x_2-x_{I_2}}{\ell(I_2)}\right).\tag{2.2}$$

可知 $\{\varphi_{I_1\times I_2}\}_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}$ 满足下面的一些性质:

(i) 对于任意 $N_1,N_2>0$, $\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}^2$, 存在一个常数 $C>0$, 使得对 $I_1\times I_2\in\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}}$, 有

$$|\varphi_{I_1\times I_2}(x_1,x_2)|\leqslant C2^{\frac{v_1n_1+v_2n_2}{2}}\prod_{i=1}^2(1+2^{v_i}|x_i-x_{I_i}|)^{-N_i};\tag{2.3}$$

(ii) 对于 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}^2$ 且 $I_1\times I_2\in\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}}$, 有

$$\operatorname{supp}\widehat{\varphi_{I_1\times I_2}}\subset\{(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}:2^{v_i-1}\leqslant|\xi_i|\leqslant2^{v_i+1},i=1,2\}.\tag{2.4}$$

命题 2.1 (再生公式, 参见文献 [25, 引理 2.3] 和 [13, 命题 2.3]) 对于任意 $f \in S_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ (或 $f \in S'_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$), $\varphi_{I_1\times I_2}$ 如 (2.2) 所定义, 则

$$f = \sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}} \langle f, \varphi_{I_1\times I_2}\rangle \varphi_{I_1\times I_2} \tag{2.5}$$

在 $S_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ (或 $S'_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$) 中成立. 此外, (2.5) 中的级数在 $L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 意义下也收敛.

引理 2.3 (参见文献 [13, 引理 2.4]) 设 $t, b_1, b_2 > 0$, 则存在一个常数 $C = C(t, b_1, b_2) > 0$ 使得对任意满足 $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset [-b_1, b_1]^{n_1}\times[-b_2, b_2]^{n_2}$ 的 $f \in S'(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 有

$$\sup_{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}} \frac{|f(y_1,y_2)|}{\prod_{i=1}^2(1+b_i|x_i-y_i|)^{\frac{n_i}{t}}} \leqslant C(M_s(|f|^t)(x_1,x_2))^{\frac{1}{t}}, \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}.$$

基于上面的定义和引理, 我们给出定理 1.1 的证明.

定理 1.1 的证明 第 1 步 证明 $\|f\|_{H^p_w} \leqslant C\|G_\psi f\|_{L^p_w}$. 可借鉴文献 [13, 定理 4.2] 中的方法, 首先考虑有限支撑序列的情况. 设 $f \in L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}) \cap H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 且 $\|G_\psi f\|_{L^p_w} < \infty$. 取 $\{\langle f, \varphi_{I_1\times I_2}\rangle\} \in \dot{f}^{0,2}_{p,w}(\mathcal{R})$ 是有限支撑序列, 其中 $0 < p \leqslant 1$. 令 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{Z}^2$, 由 (2.4) 和 (2.5) 可得

$$\varphi_{\boldsymbol{v}} * f(x_1,x_2) = \sum_{\mu_1=v_1-1}^{v_1+1}\sum_{\mu_2=v_2-1}^{v_2+1}\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}_{\boldsymbol{\mu}}} \langle f, \varphi_{I_1\times I_2}\rangle \varphi_{\boldsymbol{v}} * \varphi_{I_1\times I_2}(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}.$$

令 $\tau_i > \frac{n_i}{t}$, $0 < t < \frac{p}{r_w}$, $i = 1, 2$. 由于 $|\mu_i - v_i| \leqslant 1$, 所以 (2.3) 蕴涵着

$$\begin{aligned}
|\varphi_{\boldsymbol{v}} * \varphi_{I_1\times I_2}(x_1,x_2)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}} |\varphi_{\boldsymbol{v}}(x_1-y_1, x_2-y_2)||\varphi_{I_1\times I_2}(y_1,y_2)|dy_1dy_2\\
&= \int_{\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}} |2^{v_1n_1+v_2n_2}\varphi(2^{v_1}(x_1-y_1), 2^{v_2}(x_2-y_2))||\varphi_{I_1\times I_2}(y_1,y_2)|dy_1dy_2\\
&\leqslant C\prod_{i=1}^2 2^{3v_in_i/2}\int_{\mathbb{R}^{n_i}} (1+2^{v_i}|x_i-y_i|)^{-\tau_i}(1+2^{v_i}|y_i-x_{I_i}|)^{-\tau_i}dy_i\\
&\leqslant C\prod_{i=1}^2 2^{3\mu_in_i/2}\int_{\mathbb{R}^{n_i}} (1+2^{\mu_i}|x_i-y_i|)^{-\tau_i}(1+2^{\mu_i}|y_i-x_{I_i}|)^{-\tau_i}dy_i.
\end{aligned}$$

根据文献 [14, 第 44 页], 有

$$\int_{\mathbb{R}^{n_i}} 2^{\mu_in_i}(1+2^{\mu_i}|x_i-y_i|)^{-\tau_i}(1+2^{\mu_i}|y_i-x_{I_i}|)^{-\tau_i}dy_i \leqslant C(1+2^{\mu_i}|x_i-x_{I_i}|)^{-\tau_i}.$$

因此,

$$|\varphi_v * \varphi_{I_1\times I_2}(x_1,x_2)| \leqslant C\prod_{i=1}^2 2^{\frac{\mu_in_i}{2}}(1+2^{\mu_i}|x_i-x_{I_i}|)^{-\tau_i}.$$

由此可得

$$|\varphi_v * f(x_1,x_2)| \leqslant C\sum_{\mu_1=v_1-1}^{v_1+1}\sum_{\mu_2=v_2-1}^{v_2+1}\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}_{\boldsymbol{\mu}}} |\langle f, \varphi_{I_1\times I_2}\rangle||I_1\times I_2|^{-\frac{1}{2}}\prod_{i=1}^2(1+2^{\mu_i}|x_i-x_{I_i}|)^{-\tau_i}.$$

对于 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ 且 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{Z}^2$, 存在唯一包含 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$ 的二进矩形 $\boldsymbol{J}:=J_1\times J_2\in\mathcal{R}_{\boldsymbol{\mu}}$ 使得

$$1+2^{\mu_i}|x_i-x_{I_i}|\leqslant 1+2^{\mu_i}(|x_i-x_{J_i}|+|x_{J_i}-x_{I_i}|)\leqslant 2(1+2^{\mu_i}|x_{J_i}-x_{I_i}|).$$

利用文献 [13, 引理 4.3], 进而有

$$\begin{aligned}|\varphi_{\boldsymbol{v}}*f(x_1,x_2)|&\leqslant C\sum_{\mu_1=v_1-1}^{v_1+1}\sum_{\mu_2=v_2-1}^{v_2+1}\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}_{\boldsymbol{\mu}}}|\langle f,\varphi_{I_1\times I_2}\rangle||I_1\times I_2|^{-\frac12}\prod_{i=1}^{2}(1+2^{\mu_i}|x_{J_i}-x_{I_i}|)^{-\tau_i}\\&\leqslant C\sum_{\mu_1=v_1-1}^{v_1+1}\sum_{\mu_2=v_2-1}^{v_2+1}\left(M_s\Big(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}_{\boldsymbol{\mu}}}|\langle f,\varphi_{I_1\times I_2}\rangle||I_1\times I_2|^{-\frac12}\chi_{I_1\times I_2}\Big)^t(x_1,x_2)\right)^{\frac1t}.\end{aligned}$$

结合强极大函数 M_s 的 $L^{p/t}_w(\ell^{2/t})$ 的有界性, 其中 $0<t<\frac{p}{r_w}$, $w\in A_{p/t}(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 可得以下估计:

$$\begin{aligned}\|f\|_{H^p_w}&=\left\|\Big(\sum_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}^2}|f*\varphi_{\boldsymbol{v}}|^2\Big)^{\frac12}\right\|_{L^p_w}\\&\leqslant C\left\|\Bigg(\sum_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}^2}\Bigg(\sum_{\mu_1=v_1-1}^{v_1+1}\sum_{\mu_2=v_2-1}^{v_2+1}\left(M_s\Big(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}_{\boldsymbol{\mu}}}|\langle f,\varphi_{I_1\times I_2}\rangle||I_1\times I_2|^{-\frac12}\chi_{I_1\times I_2}\Big)^t\right)^{\frac1t}\Bigg)^2\Bigg)^{\frac12}\right\|_{L^p_w}\\&=C\left\|\Bigg(\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{Z}^2}\left(M_s\Big(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}_{\boldsymbol{\mu}}}|\langle f,\varphi_{I_1\times I_2}\rangle||I_1\times I_2|^{-\frac12}\chi_{I_1\times I_2}\Big)^t\right)^{\frac2t}\Bigg)^{\frac12}\right\|_{L^p_w}\\&=C\left\|\Bigg(\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{Z}^2}\left(M_s\Big(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}_{\boldsymbol{\mu}}}|\langle f,\varphi_{I_1\times I_2}\rangle||I_1\times I_2|^{-\frac12}\chi_{I_1\times I_2}\Big)^t\right)^{\frac2t}\Bigg)^{\frac t2}\right\|^{1/t}_{L^{p/t}_w}\\&\leqslant C\left\|\Bigg(\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{Z}^2}\Bigg(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}_{\boldsymbol{\mu}}}|\langle f,\varphi_{I_1\times I_2}\rangle||I_1\times I_2|^{-\frac12}\chi_{I_1\times I_2}\Big)^2\Bigg)^{\frac t2}\right\|^{1/t}_{L^{p/t}_w}\\&=C\left\|\Bigg(\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{Z}^2}\Bigg(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}_{\boldsymbol{\mu}}}|\langle f,\varphi_{I_1\times I_2}\rangle||I_1\times I_2|^{-\frac12}\chi_{I_1\times I_2}\Big)^2\Bigg)^{\frac12}\right\|_{L^p_w}\\&\leqslant C\left\|\Big(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}|\langle f,\varphi_{I_1\times I_2}\rangle|^2|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}\Big)^{\frac12}\right\|_{L^p_w}.\end{aligned}$$

因此, 对所有有限支撑序列 $\{\langle f,\varphi_{I_1\times I_2}\rangle\}\in\dot f^{0,2}_{p,w}(\mathcal{R})$, 有

$$\|f\|_{H^p_w}\leqslant C\|\{\langle f,\varphi_{I_1\times I_2}\rangle\}\|_{\dot f^{0,2}_{p,w}}<\infty. \tag{2.6}$$

接下来利用上述有限支撑序列的结论, 结合稠密性来证明对任意的序列 $\{\langle f,\varphi_{I_1\times I_2}\rangle\}\in\dot f^{0,2}_{p,w}(\mathcal{R})$, (2.6) 也成立. 为便于理解, 不妨记

$$\boldsymbol{a}:=\{a_{I_1\times I_2}\}:=\{\langle f,\varphi_{I_1\times I_2}\rangle\}\in\dot f^{0,2}_{p,w}(\mathcal{R}),$$

并记

$$f:=T_\psi\boldsymbol{a}:=\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}a_{I_1\times I_2}\varphi_{I_1\times I_2}.$$

注意到 $I_1\times I_2\in R_{\boldsymbol{v}}$, $\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}^2$, 对于任意正整数 N, 可以构造一个有限支撑序列. 设

$$a_{I_1\times I_2,N}=\begin{cases}a_{I_1\times I_2}, & |v_1|\leqslant N,\quad |v_2|\leqslant N,\quad I_1\times I_2\subset[2^{N-1},2^{N+1}]^{n_1+n_2},\\ 0, & \text{其他情形},\end{cases}$$

并记 $\boldsymbol{a}_N=\{a_{I_1\times I_2,N}\}$, 则 $\boldsymbol{a}_N$ 是有限支撑序列. 由于

$$\Big(\sum_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}^2}\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}_v\ \text{且}\ I_1\times I_2\in\{|v_1|\leqslant N,|v_2|\leqslant N,I_1\times I_2\subset[2^{N-1},2^{N+1}]^{n_1+n_2}\}^{\complement}}|a_{I_1\times I_2}|^2|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}\Big)^{\frac12}$$
$$\leqslant C\Big(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}|a_{I_1\times I_2}|^2|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}\Big)^{\frac12}\quad\text{且}\quad\|\boldsymbol{a}\|_{\dot f^{0,2}_{p,w}}<\infty,$$

结合 $\lim_{N\to\infty}|a_{I_1\times I_2}-a_{I_1\times I_2,N}|=0$, 可得

$$\lim_{N\to\infty}\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}_N\|_{\dot f^{0,2}_{p,w}}=\|\lim_{N\to\infty}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}_N)\|_{\dot f^{0,2}_{p,w}}=0.$$

对每个 N, $\boldsymbol{a}_N$ 是有限支撑序列, 故有 $\|T_\psi\boldsymbol{a}_N\|_{H^p_w}\leqslant\|\boldsymbol{a}_N\|_{\dot f^{0,2}_{p,w}}$, 进而可以得到

$$\|T_\psi\boldsymbol{a}\|_{H^p_w}\leqslant\liminf_{N\to\infty}\|T_\psi\boldsymbol{a}_N\|_{H^p_w}\leqslant C\liminf_{N\to\infty}\|\boldsymbol{a}_N\|_{\dot f^{0,2}_{p,w}}\leqslant C\|\boldsymbol{a}\|_{\dot f^{0,2}_{p,w}},$$

这表明 (2.6) 对任意的序列 $\boldsymbol{a}$ 也是成立的.

由于 $f\in L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\cap H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 则 $f=\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R},\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}}\langle f,\psi^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2}\rangle\psi^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2}$ 在 $S'_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 中收敛, 由此可得

$$\langle f,\varphi_{I_1\times I_2}\rangle=\sum_{J_1\times J_2\in\mathcal{R},\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}}\langle f,\psi^{\boldsymbol{e}}_{J_1\times J_2}\rangle\langle\psi^{\boldsymbol{e}}_{J_1\times J_2},\varphi_{I_1\times I_2}\rangle=\sum_{J_1\times J_2\in\mathcal{R},\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}}b^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2}\langle f,\psi^{\boldsymbol{e}}_{J_1\times J_2}\rangle,$$

其中 $b^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2}:=\langle\psi^{\boldsymbol{e}}_{J_1\times J_2},\varphi_{I_1\times I_2}\rangle$. 由文献 [13, 第 59 页] 可以得到以下几乎正交估计, 即对于任意 $M,K>0$, 存在一个正常数 C 使得

$$|\langle\varphi_{I_i},\psi^{\boldsymbol{e}}_{J_i}\rangle|\leqslant C\min\left\{\frac{\ell(I_i)}{\ell(J_i)},\frac{\ell(J_i)}{\ell(I_i)}\right\}^K\left(1+\frac{|x_{I_i}-x_{J_i}|}{\max\{\ell(I_i),\ell(J_i)\}}\right)^{-M},\quad i=1,2,$$

进而有

$$|\langle\varphi_{I_1\times I_2},\psi^{\boldsymbol{e}}_{J_1\times J_2}\rangle|\leqslant C\prod_{i=1}^2\min\left\{\frac{\ell(I_i)}{\ell(J_i)},\frac{\ell(J_i)}{\ell(I_i)}\right\}^K\left(1+\frac{|x_{I_i}-x_{J_i}|}{\max\{\ell(I_i),\ell(J_i)\}}\right)^{-M}.\tag{2.7}$$

结合 (2.7) 和引理 2.2, 可知具有矩阵 $\{b^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2}\}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2\in\mathcal{R}}$ 的算子 $B^{\boldsymbol{e}}$ 是几乎对角算子且有界. 因此,

$$\begin{aligned}\|f\|_{H^p_w}&\leqslant C\Big\|\Big(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}|\langle f,\varphi_{I_1\times I_2}\rangle|^2|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^p_w}\\&=C\Big\|\Big(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}\Big|\sum_{J_1\times J_2\in\mathcal{R},\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}}b^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2}\langle f,\psi^{\boldsymbol{e}}_{J_1\times J_2}\rangle\Big|^2|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^p_w}\\&\leqslant C\Big\|\Big(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R},\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}}|\langle f,\psi^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2}\rangle|^2|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^p_w}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C\|G_\psi f\|_{L^p_w}\\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

第 2 步 对于 $f \in L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}) \cap H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 下面证明 $\|G_\psi f\|_{L^p_w} \leqslant C\|f\|_{H^p_w}$. 由于 $f = \sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R},\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}}\langle f,\psi^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2}\rangle\psi^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2}$ 在 $S'_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 中收敛, 因此, 对于任意 $I_1\times I_2\in\mathcal{R}$, $\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}$, 有

$$
\langle f,\psi^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2}\rangle = \sum_{J_1\times J_2\in\mathcal{R}}\langle f,\varphi_{J_1\times J_2}\rangle\langle\psi^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2},\varphi_{J_1\times J_2}\rangle = \sum_{J_1\times J_2\in\mathcal{R}} a^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2}\langle f,\varphi_{J_1\times J_2}\rangle,
$$

其中

$$
a^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2} := \langle\psi^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2},\varphi_{J_1\times J_2}\rangle.
$$

利用 (2.7) 和引理 2.2, 可知与矩阵 $\{a^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2}\}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2\in\mathcal{R}}$ 相关联的算子 $A^{\boldsymbol{e}}$ 是几乎对角算子且在 $\dot{f}^{0,2}_{p,w}(\mathcal{R})$ 上是有界的. 因此,

$$
\begin{aligned}
\|G_\psi f\|_{L^p_w} &= \left\|\left\{\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R},\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}}|\langle f,\psi^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2}\rangle|^2|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}\right\}^{\frac12}\right\|_{L^p_w}\\
&= \left\|\left\{\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R},\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}}\left|\sum_{J_1\times J_2\in\mathcal{R}} a^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2,J_1\times J_2}\langle f,\varphi_{J_1\times J_2}\rangle\right|^2|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}\right\}^{\frac12}\right\|_{L^p_w}\\
&\leqslant \left\|\left\{\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}|\langle f,\varphi_{I_1\times I_2}\rangle|^2|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}\right\}^{\frac12}\right\|_{L^p_w}.
\end{aligned}
$$

定义 $\widetilde{\varphi}(x_1,x_2) := \overline{\varphi(-x_1,-x_2)}$, 其中 $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$. 对于任意 $I_1\times I_2\in\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}}$, $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)\in\mathbb{Z}^2$, 利用 (2.2) 可得

$$
\begin{aligned}
|\langle f,\varphi_{I_1\times I_2}\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}} f(x_1,x_2)\overline{\varphi_{I_1\times I_2}(x_1,x_2)}dx_1dx_2\right|\\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}} f(x_1,x_2)2^{\frac{v_1n_1+v_2n_2}{2}}\overline{\varphi(2^{v_1}(x_1-x_{I_1}),2^{v_2}(x_2-x_{I_2}))}dx_1dx_2\right|\\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}} f(x_1,x_2)2^{-\frac{v_1n_1+v_2n_2}{2}}\overline{\varphi_{\boldsymbol{v}}(x_1-x_{I_1},x_2-x_{I_2})}dx_1dx_2\right|\\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}} f(x_1,x_2)2^{-\frac{v_1n_1+v_2n_2}{2}}\widetilde{\varphi}_{\boldsymbol{v}}(x_{I_1}-x_1,x_{I_2}-x_2)dx_1dx_2\right|\\
&= 2^{-\frac{v_1n_1+v_2n_2}{2}}|f*\widetilde{\varphi}_{\boldsymbol{v}}(x_{I_1},x_{I_2})|.
\end{aligned}
$$

注意到 $1+2^{v_i+1}|x_{I_i}-x_i|\leqslant 3$, $x_i\in I_i$, 有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}|\langle f,\varphi_{I_1\times I_2}\rangle|^2|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}\\
&= \sum_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}^2}\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}}}|\langle f,\varphi_{I_1\times I_2}\rangle|^2|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}\\
&\leqslant C\sum_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}^2}\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}}}|f*\widetilde{\varphi}_{\boldsymbol{v}}(x_{I_1},x_{I_2})|^2\chi_{I_1\times I_2}\\
&\leqslant C\sum_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}^2}\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}}}|f*\widetilde{\varphi}_{\boldsymbol{v}}(x_{I_1},x_{I_2})|^2\prod_{i=1}^2(1+2^{v_i+1}|x_{I_i}-x_i|)^{-\frac{2n_i}{t}}\chi_{I_1\times I_2}
\end{aligned}
$$

$$\leqslant C\sum_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}^2}\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}}}\left(\sup_{(y_1,y_2)\in I_1\times I_2}|f*\widetilde{\varphi}_{\boldsymbol{v}}(y_1,y_2)|\prod_{i=1}^{2}(1+2^{v_i+1}|y_i-x_i|)^{-\frac{n_i}{t}}\right)^2\chi_{I_1\times I_2},$$

其中 $0<t<\frac{p}{r_w}$. 由 (1.2) 可知

$$\operatorname{supp}\widehat{f*\widetilde{\varphi}_{\boldsymbol{v}}}=\operatorname{supp}(\widehat{f}\cdot\widehat{\widetilde{\varphi}_{\boldsymbol{v}}})\subset[-2^{v_1+1},2^{v_1+1}]^{n_1}\times[-2^{v_2+1},2^{v_2+1}]^{n_2}.$$

利用引理 2.3, 可得

$$\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}}}|\langle f,\varphi_{I_1\times I_2}\rangle|^2|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}\leqslant C[M_s(|f*\widetilde{\varphi}_{\boldsymbol{v}}|^t)]^{\frac{2}{t}}.$$

再结合强极大函数 M_s 的 $L_w^{p/t}(\ell^{2/t})$ 的有界性, 可得如下估计:

$$\begin{aligned}
\|G_\psi f\|_{L_w^p}&=\left\|\left\{\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R},\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}}|\langle f,\psi^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2}\rangle|^2|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}\right\}^{\frac12}\right\|_{L_w^p}\\
&\leqslant C\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}^2}[M_s|f*\widetilde{\varphi}_{\boldsymbol{v}}|^t]^{\frac{2}{t}}\right)^{\frac12}\right\|_{L_w^p}\\
&=C\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}^2}[M_s|f*\widetilde{\varphi}_{\boldsymbol{v}}|^t]^{\frac{2}{t}}\right)^{\frac{t}{2}}\right\|_{L_w^{p/t}}^{1/t}\\
&\leqslant C\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}^2}|f*\widetilde{\varphi}_{\boldsymbol{v}}|^2\right)^{\frac{t}{2}}\right\|_{L_w^{p/t}}^{1/t}\\
&=C\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}^2}|f*\widetilde{\varphi}_{\boldsymbol{v}}|^2\right)^{\frac12}\right\|_{L_w^p}\\
&=C\|f\|_{H_w^p}.
\end{aligned}$$

综合第 1 和 2 步, 对于 $f\in L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\cap H_w^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 存在常数 $c,C\in(0,\infty)$, 使得

$$c\|f\|_{H_w^p}\leqslant\|G_\psi f\|_{L_w^p}\leqslant C\|f\|_{H_w^p}.$$

利用 $L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\cap H_w^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 在 $H_w^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 中的稠密性 (参见文献 [31, 引理 3.1]), 可得定理 1.1 的主要结论. □

3 序列空间及其对偶

为了证明定理 1.2, 引入下面两个加权乘积序列空间及其对偶结论.

定义 3.1 设 $0<p\leqslant1$, $w\in A_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$. 加权乘积序列空间 $s_w^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 定义为所有的复值序列的集合

$$\begin{aligned}
&s_w^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\\
&=\left\{\{s_{I_1\times I_2}\}:\|\{s_{I_1\times I_2}\}\|_{s_w^p}=\left\|\left(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}|s_{I_1\times I_2}|^2|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}\right)^{\frac12}\right\|_{L_w^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})}<\infty\right\}.
\end{aligned}$$

类似地, $c_w^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 定义为所有的复值序列的集合

$$c_w^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})=\left\{\{t_{I_1\times I_2}\}:\|\{t_{I_1\times I_2}\}\|_{c_w^p}=\sup_{\Omega}\left(\frac{1}{w(\Omega)^{\frac{2}{p}-1}}\sum_{I_1\times I_2\subseteq\Omega}|t_{I_1\times I_2}|^2\frac{|I_1\times I_2|}{w(I_1\times I_2)}\right)^{\frac{1}{2}}<\infty\right\},$$

其中上确界取遍 $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ 中所有的开集 Ω, 且 Ω 满足 $w(\Omega)<\infty$.

定理 3.1 令 $0<p\leqslant 1$, $w\in A_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 则 $(s_w^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}))'=c_w^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$.

证明 首先, 证明 $c_w^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\subseteq(s_w^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}))'$, 即证明对所有的 $\{t_{I_1\times I_2}\}\in c_w^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 令

$$l(\{s_{I_1\times I_2}\})=\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}s_{I_1\times I_2}\bar{t}_{I_1\times I_2},\quad\forall\{s_{I_1\times I_2}\}\in s_w^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}),$$

则有

$$|l(\{s_{I_1\times I_2}\})|\leqslant C\|\{s_{I_1\times I_2}\}\|_{s_w^p}\|\{t_{I_1\times I_2}\}\|_{c_w^p}.$$

为此, 令

$$h(x_1,x_2)=\left(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}|s_{I_1\times I_2}|^2|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}(x_1,x_2)\right)^{\frac{1}{2}},$$

这意味着 $\|\{s_{I_1\times I_2}\}\|_{s_w^p}=\|h\|_{L_w^p}$. 设

$$\Omega_k=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}:h(x_1,x_2)>2^k\}$$

以及

$$B_k=\left\{I_1\times I_2\in\mathcal{R}:w((I_1\times I_2)\cap\Omega_k)>\frac{1}{2}w(I_1\times I_2)\text{ 和 }w((I_1\times I_2)\cap\Omega_{k+1})\leqslant\frac{1}{2}w(I_1\times I_2)\right\}.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}s_{I_1\times I_2}\bar{t}_{I_1\times I_2}\right|\\
&\quad\leqslant\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{I_1\times I_2\in B_k}s_{I_1\times I_2}\bar{t}_{I_1\times I_2}\right|\\
&\quad\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{I_1\times I_2\in B_k}|s_{I_1\times I_2}|^2\frac{w(I_1\times I_2)}{|I_1\times I_2|}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{I_1\times I_2\in B_k}|\bar{t}_{I_1\times I_2}|^2\frac{|I_1\times I_2|}{w(I_1\times I_2)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad\leqslant\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{I_1\times I_2\in B_k}|s_{I_1\times I_2}|^2\frac{w(I_1\times I_2)}{|I_1\times I_2|}\right)^{\frac{p}{2}}\left(\sum_{I_1\times I_2\in B_k}|\bar{t}_{I_1\times I_2}|^2\frac{|I_1\times I_2|}{w(I_1\times I_2)}\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\leqslant C\|\{t_{I_1\times I_2}\}\|_{c_w^p}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}w(\Omega_k)^{1-\frac{p}{2}}\left(\sum_{I_1\times I_2\in B_k}|s_{I_1\times I_2}|^2\frac{w(I_1\times I_2)}{|I_1\times I_2|}\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

其中最后一个不等式源于以下事实: 若 $I_1\times I_2\in B_k$, 记

$$\widetilde{\Omega}_k:=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}:M_w(\chi_{\Omega_k})(x_1,x_2)>\frac{1}{2}\right\},$$

则 $I_1\times I_2\subseteq\widetilde{\Omega}_k$. 利用加权强极大函数 M_w 的加权 (r,r) (其中 $r>r_w$) 有界性, 可得

$$\begin{aligned}w(\widetilde{\Omega}_k)^{\frac{1}{r}}&=\bigg(\int_{\widetilde{\Omega}_k}w(x_1,x_2)\,dx_1dx_2\bigg)^{\frac{1}{r}}\\&\leqslant 2\bigg(\int_{\widetilde{\Omega}_k}(M_w(\chi_{\Omega_k})(x_1,x_2))^rw(x_1,x_2)\,dx_1dx_2\bigg)^{\frac{1}{r}}\\&\leqslant 2\bigg(\int_{\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}}|M_w(\chi_{\Omega_k})(x_1,x_2)|^rw(x_1,x_2)\,dx_1dx_2\bigg)^{\frac{1}{r}}\\&\leqslant 2\bigg(\int_{\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}}|\chi_{\Omega_k}(x_1,x_2)|^rw(x_1,x_2)\,dx_1dx_2\bigg)^{\frac{1}{r}}\\&=2w(\Omega_k)^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

故 $w(\widetilde{\Omega}_k)\leqslant 2^rw(\Omega_k)$, 这意味着

$$\bigg(\sum_{I_1\times I_2\in B_k}|\bar{t}_{I_1\times I_2}|^2\frac{|I_1\times I_2|}{w(I_1\times I_2)}\bigg)^{\frac{1}{2}}\leqslant C\|\{t_{I_1\times I_2}\}\|_{c_w^p}w(\Omega_k)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

我们断言

$$\sum_{I_1\times I_2\in B_k}|s_{I_1\times I_2}|^2\frac{w(I_1\times I_2)}{|I_1\times I_2|}\leqslant C2^{2k}w(\Omega_k),\tag{3.1}$$

不妨先假设该断言成立, 则有

$$\begin{aligned}\bigg|\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}s_{I_1\times I_2}\bar{t}_{I_1\times I_2}\bigg|&\leqslant C\|\{t_{I_1\times I_2}\}\|_{c_w^p}\bigg(\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{kp}w(\Omega_k)\bigg)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant C\|\{t_{I_1\times I_2}\}\|_{c_w^p}\|h\|_{L_w^p}\\&\leqslant C\|\{t_{I_1\times I_2}\}\|_{c_w^p}\|\{s_{I_1\times I_2}\}\|_{s_w^p}.\end{aligned}$$

上述第二个不等式成立是因为, 对每个 $k\in\mathbb{Z}$, 有

$$\|h\|_{L_w^p}^p=p\int_0^\infty\lambda^{p-1}w(\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}:h(x_1,x_2)>\lambda\})d\lambda,$$

被积函数是关于 λ 的非增函数, 考虑以下 Riemann 和

$$\begin{aligned}\|h\|_{L_w^p}^p&=p\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2^k}^{2^{k+1}}\lambda^{p-1}w(\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}:h(x_1,x_2)>\lambda\})d\lambda\\&\geqslant p\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2^k}^{2^{k+1}}(2^{k+1})^{p-1}w(\Omega_{k+1})d\lambda\\&=p\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{kp+p-1}w(\Omega_{k+1})\\&=2^{-1}p\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{kp}w(\Omega_k).\end{aligned}$$

为证明上述断言 (3.1), 只需要证明

$$\sum_{I_1\times I_2\in B_k}|s_{I_1\times I_2}|^2\frac{w(I_1\times I_2)}{|I_1\times I_2|}\leqslant C\int_{\widetilde{\Omega}_k\setminus\Omega_{k+1}}h(x_1,x_2)^2w(x_1,x_2)dx_1dx_2,$$

因为

$$\int_{\widetilde{\Omega}_k\setminus\Omega_{k+1}}h(x_1,x_2)^2w(x_1,x_2)dx_1dx_2\leqslant 2^{2(k+1)}w(\widetilde{\Omega}_k)\leqslant C2^{2k}w(\Omega_k).$$

对于 $I_1\times I_2\in B_k$, 有 $I_1\times I_2\subseteq\widetilde{\Omega}_k$ 且 $w((I_1\times I_2)\cap\Omega_{k+1})\leqslant\frac{1}{2}w(I_1\times I_2)$, 故而

$$w((\widetilde{\Omega}_k\setminus\Omega_{k+1})\cap(I_1\times I_2))>\frac{1}{2}w(I_1\times I_2).$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\int_{\widetilde{\Omega}_k\setminus\Omega_{k+1}}h(x_1,x_2)^2w(x_1,x_2)dx_1dx_2\\
&\quad=\int_{\widetilde{\Omega}_k\setminus\Omega_{k+1}}\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}|s_{I_1\times I_2}|^2|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}(x_1,x_2)w(x_1,x_2)dx_1dx_2\\
&\quad\geqslant\sum_{I_1\times I_2\in B_k}|s_{I_1\times I_2}|^2\frac{w((\widetilde{\Omega}_k\setminus\Omega_{k+1})\cap(I_1\times I_2))}{w(I_1\times I_2)}\frac{w(I_1\times I_2)}{|I_1\times I_2|}\\
&\quad\geqslant\frac{1}{2}\sum_{I_1\times I_2\in B_k}|s_{I_1\times I_2}|^2\frac{w(I_1\times I_2)}{|I_1\times I_2|}.
\end{aligned}$$

断言 (3.1) 得证.

其次, 证明 $(s_w^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}))'\subseteq c_w^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$. 对于 $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ 中满足 $w(\Omega)<\infty$ 的开集 Ω, 定义

$$\|\{s_{I_1\times I_2}\}\|_{l^2_\Omega(w)}=\left(\sum_{I_1\times I_2\subseteq\Omega}|s_{I_1\times I_2}|^2\frac{w(I_1\times I_2)}{|I_1\times I_2|}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

利用 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
&\|\{s_{I_1\times I_2}\chi_{\{I_1\times I_2\subseteq\Omega\}}\}\|_{s_w^p}\\
&\quad=\left(\int_\Omega\left(\sum_{I_1\times I_2\subseteq\Omega}|s_{I_1\times I_2}|^2|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}\right)^{\frac{p}{2}}w(x_1,x_2)dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\leqslant w(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega\sum_{I_1\times I_2\subseteq\Omega}|s_{I_1\times I_2}|^2|I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2}(x_1,x_2)w(x_1,x_2)dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad=w(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\left(\sum_{I_1\times I_2\subseteq\Omega}|s_{I_1\times I_2}|^2\frac{w(I_1\times I_2)}{|I_1\times I_2|}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad=w(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|\{s_{I_1\times I_2}\}\|_{l^2_\Omega(w)}.
\end{aligned}$$

因此, 有

$$\left(\frac{1}{w(\Omega)^{\frac{2}{p}-1}}\sum_{I_1\times I_2\subseteq\Omega}|t_{I_1\times I_2}|^2\frac{|I_1\times I_2|}{w(I_1\times I_2)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{w(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}} \sup_{\|\{s_{I_1\times I_2}\}\|_{l^2_\Omega(w)}\leqslant 1} \sum_{I_1\times I_2\subseteq\Omega} |s_{I_1\times I_2}\bar{t}_{I_1\times I_2}| \\
&\leqslant \frac{1}{w(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}} \sup_{\|\{s_{I_1\times I_2}\}\|_{l^2_\Omega(w)}\leqslant 1} \|\{t_{I_1\times I_2}\}\|_{(s^p_w)'} \|\{s_{I_1\times I_2}\chi_{\{I_1\times I_2\subseteq\Omega\}}\}\|_{s^p_w} \\
&= \|\{t_{I_1\times I_2}\}\|_{(s^p_w)'} \sup_{\|\{s_{I_1\times I_2}\}\|_{l^2_\Omega(w)}\leqslant 1} \frac{1}{w(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}} \|\{s_{I_1\times I_2}\chi_{\{I_1\times I_2\subseteq\Omega\}}\}\|_{s^p_w} \\
&\leqslant \|\{t_{I_1\times I_2}\}\|_{(s^p_w)'} \sup_{\|\{s_{I_1\times I_2}\}\|_{l^2_\Omega(w)}\leqslant 1} \|\{s_{I_1\times I_2}\}\|_{l^2_\Omega(w)} \leqslant \|\{t_{I_1\times I_2}\}\|_{(s^p_w)'}.
\end{aligned}
$$

对上式中 Ω 取上确界, 可得 $\|\{t_{I_1\times I_2}\}\|_{c^p_w} \leqslant \|\{t_{I_1\times I_2}\}\|_{(s^p_w)'}$, 这意味着 $(s^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}))' \subseteq c^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$. □

4 加权乘积 Hardy 空间的对偶

本节利用定理 3.1 和 1.1 给出定理 1.2 的证明. 首先, 定义一个从复值序列族到 $S'_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 的映射 P,

$$
P(\{s_{I_1\times I_2}\}) = \sum_{\tilde{I}_1\times\tilde{I}_2\in\mathcal{R},\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}} s_{\tilde{I}_1\times\tilde{I}_2}\psi^{\boldsymbol{e}}_{\tilde{I}_1\times\tilde{I}_2}.
$$

同时, 对于 $f\in L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\cap H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 定义另一个从 $S'_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 到复值序列族的映射

$$
L(f) = \left\{ \sum_{\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}} \langle f, \psi^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2}\rangle \right\}
$$

使得所有的内积 $\langle f, \psi^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2}\rangle$ 都是良定义的. 接下来, 说明 $s^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 与 $H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 以及 $c^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 与 $\mathrm{CMO}^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 之间的关系. 对于 $0<p\leqslant 1$, $w\in A_\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 定理 1.1 给出了对于 $f\in L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\cap H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 有

$$
\begin{aligned}
\|\{L(f)\}\|_{s^p_w} &= \left\| \left\{ \sum_{\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}} \langle f, \psi^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2}\rangle \right\} \right\|_{s^p_w} \\
&= \left\| \left(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R},\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}} |\langle f, \psi^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2}\rangle|^2 |I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p_w} \\
&= \|G_\psi f\|_{L^p_w} \leqslant C\|f\|_{H^p_w}, \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

且对于 $\{s_{I_1\times I_2}\}\in s^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 有

$$
\begin{aligned}
\|P(\{s_{I_1\times I_2}\})\|_{H^p_w} &\leqslant C\|G_\psi P(\{s_{I_1\times I_2}\})\|_{L^p_w} \\
&= C\left\| \left(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R},\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}} \left| \left\langle \sum_{\tilde{I}_1\times\tilde{I}_2\in\mathcal{R},\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}} s_{\tilde{I}_1\times\tilde{I}_2}\psi^{\boldsymbol{e}}_{\tilde{I}_1\times\tilde{I}_2}, \psi^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2} \right\rangle \right|^2 |I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p_w} \\
&= C\left\| \left(\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}} |s_{I_1\times I_2}|^2 |I_1\times I_2|^{-1}\chi_{I_1\times I_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p_w} \\
&= C\|\{s_{I_1\times I_2}\}\|_{s^p_w}. \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

结合 (4.1) 与 (4.2), 可得 $P\circ L$ 在 $L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\cap H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 上是恒等映射.

根据 $s^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 和 $\mathrm{CMO}^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 的定义, 对于 $g\in\mathrm{CMO}^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 有

$$\begin{aligned}\|\{L(g)\}\|_{c^p_w}&=\sup_{\Omega}\left(\frac{1}{w(\Omega)^{\frac{2}{p}-1}}\sum_{I_1\times I_2\subseteq\Omega,\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}}|\langle g,\psi^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2}\rangle|^2\frac{|I_1\times I_2|}{w(I_1\times I_2)}\right)^{\frac12}\\&=\|g\|_{\mathrm{CMO}^p_w},\end{aligned}\tag{4.3}$$

且对于 $\{t_{I_1\times I_2}\}\in c^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 有

$$\begin{aligned}&\|P(\{t_{I_1\times I_2}\})\|_{\mathrm{CMO}^p_w}\\&=\sup_{\Omega}\left(\frac{1}{w(\Omega)^{\frac{2}{p}-1}}\sum_{I_1\times I_2\subseteq\Omega,\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}}\left|\left\langle\sum_{\tilde I_1\times\tilde I_2\in\mathcal{R},\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}}t_{\tilde I_1\times\tilde I_2}\psi^{\boldsymbol{e}}_{\tilde I_1\times\tilde I_2},\psi^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2}\right\rangle\right|^2\frac{|I_1\times I_2|}{w(I_1\times I_2)}\right)^{\frac12}\\&=\sup_{\Omega}\left(\frac{1}{w(\Omega)^{\frac{2}{p}-1}}\sum_{I_1\times I_2\subseteq\Omega}|t_{I_1\times I_2}|^2\frac{|I_1\times I_2|}{w(I_1\times I_2)}\right)^{\frac12}\\&=\|\{t_{I_1\times I_2}\}\|_{c^p_w}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

结合 (4.3) 与 (4.4), 可得 $P\circ L$ 在 $L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\cap\mathrm{CMO}^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 上是恒等映射.

基于上述讨论, 下面给出定理 1.2 的详细证明.

定理 1.2 的证明 对于 $g\in\mathrm{CMO}^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 定义线性泛函 $\widetilde{l}_g$ 如下:

$$\widetilde{l}_g=\langle L(f),L(g)\rangle,\quad f\in L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\cap H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}).$$

由 (4.1), (4.3) 及定理 3.1 知, 当 $f\in L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\cap H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 时, 有

$$|\widetilde{l}_g|\leqslant C\|L(f)\|_{s^p_w}\|L(g)\|_{c^p_w}\leqslant C\|f\|_{H^p_w}\|g\|_{\mathrm{CMO}^p_w}.$$

由于 $L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\cap H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 在 $H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 中稠密, 借用文献 [25, 定理 2.16] 中的方法, 映射 $\widetilde{l}_g$ 可延拓为 $H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 上的连续线性泛函 l_g 且满足 $\|l_g\|\leqslant C\|g\|_{\mathrm{CMO}^p_w}$.

反之, 设 $l\in\big(H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\big)'$, 在 $s^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 上定义 $l_1=l\circ P$. 由 (4.2) 可知 $l_1\in\big(s^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\big)'$. 根据定理 3.1, 存在

$$\{t_{I_1\times I_2}\}\in c^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$$

使得对于 $\{s_{I_1\times I_2}\}\in s^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 有

$$l_1(\{s_{I_1\times I_2}\})=\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R}}s_{I_1\times I_2}\bar t_{I_1\times I_2},$$

且 $\|\{t_{I_1\times I_2}\}\|_{c^p_w}\approx\|l_1\|\leqslant C\|l\|$. 对于 $f\in H^p_w(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$, 有

$$l(f)=l_1\circ L(f)=\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R},\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}}\langle f,\psi^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2}\rangle\bar t_{I_1\times I_2}=\langle L(f),L(g)\rangle,$$

其中 $g=\sum_{I_1\times I_2\in\mathcal{R},\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{E}}t_{I_1\times I_2}\psi^{\boldsymbol{e}}_{I_1\times I_2}$. 这表明 $l=l_g$, 由 (4.4) 可得

$$\|g\|_{\mathrm{CMO}^p_w}=\|\{t_{I_1\times I_2}\}\|_{c^p_w}\leqslant C\|l\|.$$

证毕. □

致谢 感谢审稿人的仔细审阅以及提出的宝贵修改意见.

参考文献

1 Bownik M, Ho K P. Atomic and molecular decompositions of anisotropic Triebel-Lizorkin spaces. Trans Amer Math Soc, 2006, 358: 1469–1510
2 Bownik M, Li B, Yang D, et al. Weighted anisotropic product Hardy spaces and boundedness of sublinear operators. Math Nachr, 2010, 283: 392–442
3 Chang S Y A, Fefferman R. A continuous version of duality of H^1 with BMO on the bidisc. Ann of Math (2), 1980, 112: 179–201
4 Chang S Y A, Fefferman R. The Calderón-Zygmund decomposition on product domains. Amer J Math, 1982, 104: 455–468
5 Chang S Y A, Fefferman R. Some recent developments in Fourier analysis and H^p-theory on product domains. Bull Amer Math Soc (NS), 1985, 12: 1–43
6 Ding Y, Han Y S, Lu G Z, et al. Boundedness of singular integrals on multiparameter weighted Hardy spaces $H^p_w(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$. Potential Anal, 2012, 37: 31–56
7 Fefferman C. Singular integrals on product H^p spaces. Rev Mat Iberoam, 1985, 1: 25–31
8 Fefferman R. Harmonic analysis on product spaces. Ann of Math (2), 1987, 126: 109–130
9 Fefferman R. A^p weights and singular integrals. Amer J Math, 1988, 110: 975–987
10 Frazier M, Jawerth B. A discrete transform and decompositions of distribution spaces. J Funct Anal, 1990, 93: 34–170
11 Fu X, Yang D C, Liang Y Y. Products of functions in BMO($\mathcal{X}$) and $H^1_{\rm at}(\mathcal{X})$ via wavelets over spaces of homogeneous type. J Fourier Anal Appl, 2017, 23: 919–990
12 García-Cuerva J, Martell J M. Wavelet characterization of weighted spaces. J Geom Anal, 2001, 11: 241–264
13 Georgiadis A G, Kyriazis G, Petrushev P. Product Besov and Triebel-Lizorkin spaces with application to nonlinear approximation. Constr Approx, 2021, 53: 39–83
14 Grafakos L. Fundamentals of Fourier analysis. Graduate Texts in Mathematics, vol. 302. Cham: Springer, 2024
15 Gundy R F, Stein E M. H^p theory for the poly-disc. Proc Natl Acad Sci USA, 1979, 76: 1026–1029
16 Han Y S, Lee M Y, Lin C C, et al. Calderón-Zygmund operators on product Hardy spaces. J Funct Anal, 2010, 258: 2834–2861
17 Han Y S, Li J, Lin C C. Criterion of the L^2 boundedness and sharp endpoint estimates for singular integral operators on product spaces of homogeneous type. Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci (5), 2016, 16: 845–907
18 Han Y S, Li J, Pereyra M C, et al. Atomic decomposition of product Hardy spaces via wavelet bases on spaces of homogeneous type. New York J Math, 2021, 27: 1173–1239
19 Han Y S, Li J, Ward L A. Hardy space theory on spaces of homogeneous type via orthonormal wavelet bases. Appl Comput Harmon Anal, 2018, 45: 120–169
20 He Z Y, Wang F, Yang D C, et al. Wavelet characterization of Besov and Triebel-Lizorkin spaces on spaces of homogeneous type and its applications. Appl Comput Harmon Anal, 2021, 54: 176–226
21 Hong G X, Wang W H, Wu X F. Wavelet characterizations of operator-valued Hardy spaces. Int Math Res Not IMRN, 2023, 2023: 13978–14005
22 Izuki M, Nakai E, Sawano Y. Atomic and wavelet characterization of Musielak-Orlicz Hardy spaces for generalized Orlicz functions. Integral Equations Operator Theory, 2022, 94: 1–33
23 Izuki M, Nogayama T, Noi T, et al. Wavelet characterization of local Muckenhoupt weighted Sobolev spaces with variable exponents. Constr Approx, 2023, 57: 161–234
24 Lee M Y, Lin C C, Lin Y C. A wavelet characterization for the dual of weighted Hardy spaces. Proc Amer Math Soc, 2009, 137: 4219–4225
25 Li B D, Bownik M, Yang D C. Littlewood-Paley characterization and duality of weighted anisotropic product Hardy spaces. J Funct Anal, 2014, 266: 2611–2661
26 Li B D, Bownik M, Yang D C, et al. Anisotropic singular integrals in product spaces. Sci China Math, 2010, 53: 3163–3178
27 Liu H P. The wavelet characterization of the space weak H^1. Studia Math, 1992, 103: 109–117
28 Liu J, Lu Y Q, Ruan J S. A wavelet characterization for the dual of weighted anisotropic Hardy spaces. J Korean Math Soc, 2025, 62: 679–697
29 Liu J, Yang D C, Zhang M D. Sharp bilinear decomposition for products of both anisotropic Hardy spaces and their dual spaces with its applications to endpoint boundedness of commutators. Sci China Math, 2024, 67: 2091–2152
30 Meyer Y. Wavelets and Operators. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1992
31 Ruan Z P. Weighted Hardy spaces in the three-parameter case. J Math Anal Appl, 2010, 367: 625–639

32 Wang F, Yang D C, Yuan W. Wavelet characterization of Triebel-Lizorkin spaces for $p = \infty$ on spaces of homogeneous type and its applications. J Approx Theory, 2023, 285: 1–50
33 Wang W. A discrete transform and Triebel-Lizorkin spaces on the bidisc. Trans Amer Math Soc, 1995, 347: 1351–1364
34 Wu S J. A wavelet characterization for weighted Hardy spaces. Rev Mat Iberoam, 1992, 8: 329–349
35 Zheng T T, Chen J C, Dai J W, et al. Calderón-Zygmund operators on homogeneous product Lipschitz spaces. J Geom Anal, 2021, 31: 2033–2057
36 Zheng T T, Xiao Y M, Tao X X. The $T1$ theorem for the generalized product Calderón-Zygmund operator on product endpoint function spaces over RD spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 441–472 [郑涛涛, 肖燕梅, 陶祥兴. RD 空间上广义乘积 Calderón-Zygmund 算子在端点函数空间上的 $T1$ 定理. 中国科学: 数学, 2023, 53: 441–472]
37 Zheng T T, Xiao Y M, Tao X X. Weighted estimates for product singular integral operators in Journé's class on RD-spaces. Forum Math, 2025, 37: 593–627

Wavelet characterizations of weighted product Hardy spaces and their duals

Taotao Zheng, Wenjing Li, Chunmei Zhang & Di Wu

Abstract In this paper, we first establish the boundedness of the almost diagonal operator on the discrete weighted product Triebel-Lizorkin spaces $f^{0,2}_{p,w}(\mathcal{R})$, where $\mathcal{R}$ denotes the set of all dyadic rectangles on $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, and then we construct the wavelet characterization of the weighted product Hardy spaces $H^p_w(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ on Euclidean spaces by combining the product wavelet reproduction formula. Furthermore, based on this wavelet characterization, we prove that the weighted product Carleson measure spaces $\mathrm{CMO}^p_w(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ are the dual spaces of the weighted product Hardy spaces $H^p_w(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ by using the lifting and projection methods of sequence spaces.

Keywords **weighted product Hardy spaces, weighted product Carleson measure spaces, wavelet, sequence spaces, almost diagonal operator**

MSC(2020) **42B30, 42B25, 42B35, 42C40**

doi: 10.1360/SSM-2025-0247