



集值动力系统的熊混沌

钟兴富¹, 陈志景^{2*}

1. 广东外语外贸大学数学与统计学院, 广州 510006;

2. 广东技术师范大学数学与系统科学学院, 广州 510665

E-mail: xfzhong@gdufs.edu.cn, chzhjing@alumni.sysu.edu.cn

收稿日期: 2025-04-05; 接受日期: 2026-01-07; 网络出版日期: 2026-01-29; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12201135) 资助项目

摘要 设 (X, F) 是一个集值动力系统, 其中 X 是紧致度量空间, F 是 X 到 $2^X \setminus \{\emptyset\}$ 的一个映射. 本文对 (X, F) 引入 (强) 熊混沌、弱混合和分布混沌, 证明熊混沌与弱混合是等价的以及强熊混沌集是按序列分布混沌的.

关键词 熊混沌 弱混合 分布混沌

MSC (2020) 主题分类 37B05, 37B55

1 引言

混沌是 20 世纪最重要的理论之一, 它是动力系统研究的热点. 1975 年, Li 和 Yorke [19] 首次提出了“混沌”的概念, 深刻地揭示了系统的复杂性. 随着人们不断深入地研究混沌, 不同领域的科学家提出了各种各样的混沌: Li-Yorke 混沌 [19]、Devaney 混沌 [9]、熊混沌 [28] 和分布混沌 [22] 等. 此外, 随着人们对系统复杂性的认识, 也有学者将正拓扑熵理解为混沌的. 2002 年, Huang 和 Ye [13] 证明了非周期但有周期点的传递系统是 Li-Yorke 混沌的, 他们的结果表明 Devaney 混沌蕴涵 Li-Yorke 混沌. 同年, Blanchard 等 [4] 证明了正拓扑熵系统是 Li-Yorke 混沌的. Li 和 Ye [18] 系统地阐述了经典动力系统混沌的发展.

1967 年, Furstenberg [11] 提出了弱混合的概念. 1991 年, Xiong 和 Yang [28] 证明了弱混合系统具有非常复杂的动力学性状, 现在通常将这种动力学行为称为熊混沌. 2013 年, Oprocha [21] 给出了该结果的另外一种证明方法. 2008 年, Blanchard 和 Huang [5] 提出了弱混合集的概念, 证明了正拓扑熵系统具有弱混合集. 2017 年, Huang 等 [12] 将 Blanchard 和 Huang 的结果推广到对角线弱混合集, 给出了对角线弱混合系统与多重熊混沌的等价刻画. 2019 年, Huang 和 Zhong [14] 研究了切换系统的弱混合与熊混沌的关系. 2020 年, Li 等 [17] 研究了一些特殊系统的具有满 Hausdorff 维数的多重熊混沌集. 2021 年, Xiao [27] 进一步研究了具有满拓扑熵的多重熊混沌集的系统.

英文引用格式: Zhong X F, Chen Z J. Xiong chaos for set-valued dynamical systems (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 1–8, doi: 10.1360/SSM-2025-0094

近年来, 人们开始研究状态空间上多值映射系统的熵与混沌 (参见文献 [2, 3, 6–8, 10, 15, 16, 23, 26, 32]). 2016 年, Xu [29] 研究了集值动力系统的熵和其他动力学性质. 该文献对集值动力系统引入了强混合的概念, 并研究了集值动力系统强混合与逐点碎轨性质的关系. 这些研究表明集值动力系统和经典拓扑动力系统具有一些相似的动力学性质, 同时也有不同之处. 自然要问, 对于集值动力系统而言, 弱混合和熊混沌之间存在什么样的关系呢?

分布混沌是 Schweizer 和 Smítal [22] 于 1994 年引入的, 且他们证明了对区间上的连续自映射系统, 系统有正拓扑熵等价于系统是分布混沌的. 1999 年, Wang [24] 引入了按序列分布混沌的概念, 证明了区间映射是 Li-Yorke 混沌的当且仅当它是按某序列分布混沌的. 2002 年, Yang [30] 证明了熊混沌集是按序列分布混沌的. 2017 年, Wang 等 [25] 对有限生成半群系统从集值的观点引入了分布混沌. 2020 年, Zeng 等 [31] 证明了有限生成集值系统的弱混合蕴涵按序列分布混沌. 自然地, 要问对于集值动力系统, 熊混沌集是否是按序列分布混沌的呢?

为了回答上述两个问题, 本文对集值动力系统引入 (强) 熊混沌、弱混合和分布混沌的概念, 证明熊混沌和弱混合是等价的以及强熊混沌集是按序列分布混沌的.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节首先给出一些基本符号和概念, 然后介绍集值动力系统的熊混沌和弱混合, 最后证明熊混沌与弱混合的等价性. 第 3 节引入分布混沌的概念, 并证明强熊混沌集是按序列分布混沌的.

2 熊混沌和弱混合

设 (X, d) 是一个紧致度量空间, 记 $B(x, \varepsilon) = \{y \in X, d(x, y) < \varepsilon\}$, $d(A, x) = \inf\{d(a, x), a \in A\}$, $B(A, \varepsilon) = \{x \in X : d(A, x) < \varepsilon\}$. $B(A, \varepsilon)$ 的闭包记为 $\overline{B(A, \varepsilon)}$.

设 (X, F) 是一个集值动力系统, 其中 X 是一个紧致度量空间, F 是 X 到 $\mathcal{P}_0^X = 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 的映射.

定义 2.1 设 (X, F) 是一个集值动力系统. 称 $S \subset X$ 是一个熊混沌集, 如果对任意的子集 $E \subset S$ 和任意的单值连续映射 $f : E \rightarrow X$, 存在 $\mathbb{N}$ 中的无限递增序列 $\{p_i\}$, 使得对任意的 $x \in E$, 都有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(F^{p_i}(x), f(x)) = 0.$$

称系统 (X, F) 是熊混沌的, 如果在 X 中存在一个稠密的 Mycielski 熊混沌集, 其中 $M \subset X$ 被称为 Mycielski 集, 如果 M 可表示成可数个 Cantor 集的并.

下面给出弱混合的概念. 设 $U, V \subset X$ 是两个非空子集, 定义 U 和 V 的碰撞时间集为集合 $\{n \in \mathbb{N} : U \cap F^{-n}(V) \neq \emptyset\}$, 其中 $F^{-n}(V) = \{x \in X : F^n(x) \cap V \neq \emptyset\}$.

定义 2.2 设 (X, F) 是一个集值动力系统, 如果对任意的 $n \geq 2$ 和非空开集 $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n$, 存在无限子集 $S \subset \mathbb{N}$, 使得 $S \subset \bigcap_{i=1}^n N(U_i, V_i)$, 则称 (X, F) 是弱混合的.

定理 2.1 设 (X, F) 是一个集值动力系统. 如果 X 是熊混沌的, 则 (X, F) 是弱混合的.

证明 设在 X 中存在一个稠密的 Mycielski 熊混沌集, 记为 M . 对任意的 $n \geq 2$ 和非空开集 $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n$, 分别取 $x_j \in U_j \cap M$ 和 $y_j \in V_j$, $j = 1, \dots, n$. 记 $E = \{x_1, \dots, x_n\}$. 定义映射 $f : E \subset M \rightarrow X$ 为 $f(x_j) = y_j$, 则 f 是连续的单值映射. 因此, 存在 $\mathbb{N}$ 中的无限递增序列 $\{p_i\}$, 使得对任意的 $x \in E$, 都有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(F^{p_i}(x), f(x)) = 0.$$

从而对任意的 $j \in \{1, \dots, n\}$, 都有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(F^{p_i}(x_j), y_j) = 0.$$

取 $\delta > 0$, 使得 $B(y_j, \delta) \subset V_j, j = 1, \dots, n$. 对于 $\frac{\delta}{4}$, 存在 $N > 0$, 使得当 $i \geq N$ 时, 有 $d(F^{p_i}(x_j), y_j) < \frac{\delta}{4}$. 因此 $F^{p_i}(x_j) \cap V_j \neq \emptyset, i \geq N$. 令 $S = \{p_i : i \geq N\}$, 则 $S \subset \bigcap_{j=1}^n N(U_j, V_j)$. 故 (X, F) 是弱混合的. $\square$

回顾下半连续的概念, 称集值映射 $F : X \rightarrow \mathcal{P}_0^X$ 为下半连续的, 如果对任意的开集 $U \in X$, $F^{-1}(U) := \{x \in X : F(x) \cap U \neq \emptyset\}$ 是开集. 对于下半连续的系统, 有如下定理.

定理 2.2 设 (X, F) 是一个集值动力系统, X 没有孤立点, 且 F 是下半连续的, 则 (X, F) 是弱混合的当且仅当 X 是熊混沌的.

由定理 2.1 知熊混沌蕴涵弱混合. 为了证明弱混合蕴涵熊混沌, 我们需要介绍一些有关超空间的概念. 设 $\mathcal{P}_C^X$ 表示 X 的所有非空闭子集构成的集合. 给 $\mathcal{P}_C^X$ 赋予如下的 Hausdorff 度量 d_H :

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : \bar{B}(A, \varepsilon) \supseteq B, \bar{B}(B, \varepsilon) \supseteq A\}.$$

称空间 $(\mathcal{P}_C^X, d_H)$ 为 X 的超空间. 对 X 中任意的非空开集 $U_1, \dots, U_n$, 令

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle := \left\{ A \in \mathcal{P}_C^X : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i, \text{ 且 } U_i \cap A \neq \emptyset, i = 1, \dots, n \right\}.$$

令

$$\mathcal{T} := \{\langle U_1, \dots, U_n \rangle : U_1, \dots, U_n \text{ 是 } X \text{ 的非空开子集}, n \in \mathbb{N}\},$$

则 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{P}_C^X$ 的 Vietoris 拓扑的一个基. 由文献 [20] 知 Hausdorff 度量 d_H 和 Vietoris 拓扑兼容.

称 $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}_C^X$ 是可遗传的, 如果对任意的 $A \in \mathcal{Q}$ 都有 $\mathcal{P}_C^A \subset \mathcal{Q}$.

下面这个结果是著名的 Kuratowski-Mycielski 定理的一个形式 (参见文献 [1, 定理 5.10]).

引理 2.1 设 X 是一个没有孤立点的紧致度量空间. 如果 $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}_C^X$ 是可遗传的且稠密的 G_δ 集, 则存在一列递增的 Cantor 集 $C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset X$, 使得对任意的 $i \geq 1$, 有 $C_i \in \mathcal{Q}$ 且 $C = \bigcup_{i=1}^\infty C_i$ 在 X 中稠密.

设 (X, F) 是一个集值动力系统. 给定 $\varepsilon > 0$, 称 $A \subset X$ 是 ε -分离的, 如果存在 $\delta \in (0, \varepsilon), n \in \mathbb{N}$, $z_1, z_2, \dots, z_n \in X$, 使得

- (i) $A \subset \bigcup_{i=1}^n B(z_i, \delta)$;
- (ii) 对任意的映射 $h : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow X$, 存在 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $\frac{1}{k} < \varepsilon$ 使得对任意的 $x \in B(z_i, \delta)$, 都有 $F^k(x) \cap B(h(i), \varepsilon) \neq \emptyset$.

将 X 中所有 ε -分离的紧致子集构成的集合记为 $\mathfrak{X}(\varepsilon, F)$. 不难看出 $\mathfrak{X}(\varepsilon, F)$ 是可遗传的. 令

$$\mathfrak{X}(X, F) = \bigcap_{m=1}^\infty \mathfrak{X}\left(\frac{1}{m}, F\right).$$

引理 2.2 设 (X, F) 是一个弱混合系统, 则 $\mathfrak{X}(X, F) \subset \mathcal{P}_C^X$ 是稠密的 G_δ 集.

证明 首先证明 $\mathfrak{X}(\frac{1}{m}, F)$ 是 $\mathcal{P}_C^X$ 中的开集. 设 $A \in \mathfrak{X}(\frac{1}{m}, F)$, 则存在 $\delta > 0, n \in \mathbb{N}, z_1, z_2, \dots, z_n \in X$ 使得

- (i) $A \subset \bigcup_{i=1}^n B(z_i, \delta)$;
- (ii) 对任意的映射 $h : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow X$, 存在 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $\frac{1}{k} < \varepsilon$ 使得对任意的 $x \in B(z_i, \delta)$, 都有 $F^k(x) \cap B(h(i), \varepsilon) \neq \emptyset$.

令 $V_i = B(z_i, \delta)$, $i = 1, \dots, n$, 则 $A \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$. 显然, 任意的 $B \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$ 都是 $\frac{1}{m}$ -分离的. 特别地, 如果 $B \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle$, 则 $B \in \mathfrak{X}(\frac{1}{m}, F)$. 因此 $\mathfrak{X}(\frac{1}{m}, F)$ 是 $\mathcal{P}_C^X$ 中的开集.

其次, 证明 $\mathfrak{X}(\frac{1}{m}, F)$ 在 $\mathcal{P}_C^X$ 中稠密. 为此, 只需要证明对 X 中的任意非空开集 $U_1, U_2, \dots, U_n$, 有 $\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \cap \mathfrak{X}(\frac{1}{m}, F) \neq \emptyset$.

由 X 的紧性可以找到 p 个点 $y_1, y_2, \dots, y_p$ 使得 $X = \bigcup_{i=1}^p B(y_i, \frac{1}{2m})$. 记 $V_i = B(y_i, \frac{1}{2m})$, $i = 1, \dots, p$. 令 $\mathcal{S} = \{\alpha_j = (a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in \{1, 2, \dots, p\}, j = 1, \dots, p^n\}$. 用 $\alpha_j(i)$ 表示 α_j 的第 i 个分量. 由于 (X, F) 是弱混合系统, 所以存在 $k_1 > m$ 使得

$$U_i \cap F^{-k_1}(V_{\alpha_1(i)}) \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, n.$$

因为 F 是下半连续的, 所以 F^{k_1} 也是下半连续的. 因此, $F^{-k_1}V_{\alpha_1(i)}$ 是开集. 从而可以找到非空开集 $W_i^1 \subset U_i$, $i = 1, \dots, n$, 使得对任意的 $x \in W_i^1$ 都有 $F^{k_1}(x) \cap V_{\alpha_1(i)} \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, n$.

再利用 (X, F) 的弱混合性, 可知存在 $k_2 > k_1$, 使得

$$W_i^1 \cap F^{-k_2}(V_{\alpha_2(i)}) \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, n.$$

利用下半连续性, 可以找到非空开集 $W_i^2 \subset W_i^1$, $i = 1, \dots, n$, 使得对任意的 $x \in W_i^2$ 都有 $F^{k_2}(x) \cap V_{\alpha_2(i)} \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, n$.

对 $\mathcal{S}$ 中余下的序列重复上述过程, 可以找到 $k_1, k_2, \dots, k_{p^n}$, 使得

$$W_i^{p^n} \subset W_i^{p^n-1} \subset \dots \subset W_i^1 \subset U_i, \quad i = 1, \dots, n$$

且对任意的 $x \in W_i^{p^n}$, $i = 1, \dots, n$, 都有

$$F^{k_j}(x) \cap V_{\alpha_j(i)} \neq \emptyset, \quad j = 1, 2, \dots, p^n.$$

取 $z_i \in W_i^{p^n}$, 则 $\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$. 取 $\delta \in (0, \frac{1}{m})$, 使得 $B(z_i, \delta) \subset W_i^{p^n}$, $i = 1, \dots, n$. 对任意的映射 $h : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow X$, 存在 α_j , 使得 $V_{\alpha_j(i)} \subset B(h(i), \frac{1}{m})$, $i = 1, 2, \dots, n$. 故对任意的 $x \in B(z_i, \delta)$, $i = 1, \dots, n$, 都有

$$F^{k_j}(x) \cap B\left(h(i), \frac{1}{m}\right) \supseteq F^{k_j}(x) \cap V_{\alpha_j(i)} \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, n.$$

由此可得 $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ 是 $\frac{1}{m}$ -分离的, 且 $\mathfrak{X}(\frac{1}{m}, F)$ 在 $\mathcal{P}_C^X$ 中稠密.

从上述已证明的结果可得, $\mathfrak{X}(X, F)$ 是 $\mathcal{P}_C^X$ 中稠密的 G_δ 集. □

引理 2.3 设 (X, F) 是一个集值动力系统. 给定 $\mathfrak{X}(X, F)$ 中的无限递增集列 $C_1 \subset C_2 \subset \dots$, 则对任意的子集 $A \subset C := \bigcup_{i=1}^\infty C_i$ 和连续映射 $f : A \rightarrow X$, 存在一列无限递增序列 $\{q_i\}_{i=1}^\infty$, 使得对任意的 $x \in A$, 都有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(F^{q_i}(x), f(x)) = 0.$$

证明 对任意的 $i \in \mathbb{N}$, 令 $A_i = A \cap C_i$. 因为 $\mathfrak{X}(X, F)$ 是可遗传的, 所以 A_i 的闭包 $\bar{A}_i \in \mathfrak{X}(X, F)$, $i \in \mathbb{N}$.

对任意的 $i \in \mathbb{N}$, 由于 $\bar{A}_i$ 是 $\frac{1}{i}$ -分离的, 所以存在 $\delta_i < \frac{1}{i}$ 和 $z_{i,1}, z_{i,2}, \dots, z_{i,n_i}$, 使得 $\bar{A}_i \subset \bigcup_{j=1}^{n_i} B(z_{i,j}, \delta_i)$. 不妨假设 $A \cap B(z_{i,j}, \delta_i) \neq \emptyset$, $j = 1, \dots, n_i$, 否则去掉那些与 A 不交的球. 取 $y_{i,j} \in A \cap B(z_{i,j}, \delta_i)$. 定义映射 $h : \{1, 2, \dots, n_i\} \rightarrow X$ 为 $h(j) = f(y_{i,j})$. 则存在 $q_i > i$, 使得对任

意的 $x \in B(z_{i,j}, \delta_i)$, 都有 $F^{q_i}(x) \cap B(f(y_{i,j}), \frac{1}{i}) \neq \emptyset$, $j = 1, \dots, n_i$. 不妨假设 $\{q_i\}_{i=1}^\infty$ 是递增的. 我们将证明 $\{q_i\}_{i=1}^\infty$ 为所求序列.

对任意的 $x \in A$, 存在 $K_1 \in \mathbb{N}$, 使得对所有的 $i \geq K_1$, 都有 $x \in A_i$. 由 f 的连续性可知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $K_2 \in \mathbb{N}$ 且 $K_2 > \frac{4}{\varepsilon}$, 使得当 $d(x, y) < \frac{2}{K_2}$ 时, 有 $d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{4}$. 对任意的 $i > \max\{K_1, K_2\}$, 存在 z_{i,n_i^x} , 使得 $d(x, z_{i,n_i^x}) < \delta_i < \frac{1}{i} < \frac{1}{K_2}$. 从而, 对于上述对应的 $y_{i,n_i^x} \in A \cap B(z_{i,n_i^x}, \delta_i)$, 有 $d(x, y_{i,n_i^x}) < \frac{2}{K_2}$. 设 $w \in F^{q_i}(x) \cap B(f(y_{i,n_i^x}), \frac{1}{i})$, 则

$$d(w, f(x)) \leq d(w, f(y_{i,n_i^x})) + d(f(y_{i,n_i^x}), f(x)) \leq \frac{1}{i} + \frac{\varepsilon}{4} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此, $d(F^{q_i}(x), f(x)) < \varepsilon$. 这蕴涵 $\lim_{i \rightarrow \infty} d(F^{q_i}(x), f(x)) = 0$. $\square$

定理 2.2 的证明 假设系统 (X, F) 是弱混合的. 首先, 由引理 2.2 知, $\mathfrak{X}(X, F) \subset \mathcal{P}_C^X$ 是稠密的 G_δ 集. 再利用引理 2.1 可找到一列递增的 Cantor 集 $C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset X$, 使得对任意 $i \geq 1$, 都有 $C_i \in \mathfrak{X}(X, F)$ 且 $C = \bigcup_{i=1}^\infty C_i$ 在 X 中稠密. 最后, 由引理 2.3 可得 C 是熊混沌的.

下面给出一类具有熊混沌集的系统.

设 A 是有限集, F 是 A 到 $\mathcal{P}_0^A$ 的一个映射. 定义 F 关于 A 的映射矩阵 $M_{A,F} = (M_{ab})_{a,b \in A}$ 如下:

$$M_{ab} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } b \in F(a), \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

如果对所有的 $a, b \in A$, 都有 $M_{ab} > 0$, 则称矩阵 M 是正的, 记为 $M > 0$. 如果存在 $n > 0$, 使得 $M^n > 0$, 则称 M 是本原的. $\square$

定理 2.3 设 A 是有限集, F 是 A 到 $\mathcal{P}_0^A$ 的一个映射. 如果 $M_{A,F}$ 是本原的, 则 A 是熊混沌集.

证明 给定 $E \subset A$ 和 $f: E \rightarrow A$. 由于 $M_{A,F}$ 是本原的, 所以存在 $N > 0$, 使得 $M_{A,F}^N > 0$. 从而当 $n \geq N$ 时, 有 $M_{A,F}^n > 0$. 故对任意的 $a, b \in A$, 都有 $M_{ab}^n > 0$. 这蕴涵 $b \in F^n(a)$. 因此, 当 $n \geq N$ 时, 对任意的 $x \in E \subset A$ 和 $f(x) \in A$, 都有 $f(x) \in F^n(x)$. 故对任意的 $x \in E$, 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(F^n(x), f(x)) = 0.$$

这意味着 A 是熊混沌集. $\square$

注 2.1 设 A 是有限的非单点集, $F: A \rightarrow A$ 是单值映射, 则 A 不是熊混沌集.

3 强熊混沌集与分布混沌

定义 3.1 设 (X, F) 是一个集值动力系统. 称 $S \subset X$ 是一个强熊混沌集, 如果对任意的子集 $E \subset S$ 和任意的单值连续映射 $f: E \rightarrow X$, 存在 $\mathbb{N}$ 中的无限递增序列 $\{p_i\}$, 使得对任意的 $x \in E$, 都有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d^*(F^{p_i}(x), f(x)) = 0,$$

其中 $d^*(A, x) := \sup_{y \in A} d(y, x)$.

设 (X, F) 是一个集值动力系统, $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in X$, $\varepsilon > 0$. 令

$$\chi(n, \varepsilon, x, y, F) = \begin{cases} 1, & d_H(F^n(x), F^n(y)) < \varepsilon, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

设 $\{p_i\} \subset \mathbb{N}$ 是严格递增的子序列. 令

$$\Phi(\varepsilon, x, y, \{p_i\}, F) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi(p_n, \varepsilon, x, y, F),$$

$$\Phi^*(\varepsilon, x, y, \{p_i\}, F) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi(p_n, \varepsilon, x, y, F).$$

定义 3.2 设 $D \subset X$, $x, y \in D$. 如果

- (i) 存在 $\delta > 0$, 使得 $\Phi(\delta, x, y, \{p_i\}, F) = 0$;
- (ii) 对任意的 $t > 0$, 都有 $\Phi^*(t, x, y, \{p_i\}, F) = 1$,

则称 (x, y) 是按序列 $\{p_i\}$ 的分布混沌点对. 如果对任意不同的 $x, y \in D$, (x, y) 都是分布混沌点对, 则称 D 是按序列 $\{p_i\}$ 的分布混沌集.

令

$$AR(\{p_i\}, F) = \left\{ (x, y) \in X \times X : \lim_{i \rightarrow \infty} d_H(F^{p_i}(x), F^{p_i}(y)) = 0 \right\},$$

$$DR(\{p_i\}, F) = \left\{ (x, y) \in X \times X : \liminf_{i \rightarrow \infty} d_H(F^{p_i}(x), F^{p_i}(y)) > 0 \right\},$$

$$DCR(\{p_i\}, F) = \{(x, y) \in X \times X : (x, y) \text{ 是按序列 } \{p_i\} \text{ 的分布混沌点对}\}.$$

命题 3.1 设 $\{p_i\}$ 和 $\{q_i\}$ 是两个无限递增正整数序列, 则存在递增正整数序列 $\{t_i\}$, 使得

$$AR(\{p_i\}, F) \cap DR(\{q_i\}, F) \subset DCR(\{t_i\}, F).$$

证明 (1) 若 $\{p_i\} \cap \{q_i\}$ 为无限集, 则 $AR(\{p_i\}, F) \cap DR(\{q_i\}, F)$ 为空集. 令 $\{p_i\} \cap \{q_i\} = \{t_i\}$, 则

$$AR(\{p_i\}, F) \cap DR(\{q_i\}, F) \subset DCR(\{t_i\}, F).$$

(2) 若 $\{p_i\} \cap \{q_i\}$ 为有限集, 不妨设 $\{p_i\} \cap \{q_i\} = \emptyset$. 设 $(x, y) \in AR(\{p_i\}, F) \cap DR(\{q_i\}, F)$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $i > N$ 时, 有 $d_H(F^{p_i}(x), F^{p_i}(y)) < \varepsilon$, 且存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $i > N$, 都有 $d_H(F^{q_i}(x), F^{q_i}(y)) > \delta$.

定义序列 $\{n_k\}$ 为 $n_1 = 1, n_{k+1} = 2kn_k, k \geq 1$. 取递增正整数序列 $\{t_i\}$, 使得

$$\begin{cases} t_i = p_1, & i = 1, \\ t_i \in \{p_i\}, & n_{2k-1} < i \leq n_{2k}, \\ t_i \in \{q_i\}, & n_{2k} < i \leq n_{2k+1}, \quad k \geq 1. \end{cases}$$

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $M_1 > 0$, 使得当 $k > M_1$ 时, 对任意的 $n_{2k-1} < i \leq n_{2k}$, 都有 $d_H(F^{t_i}(x), F^{t_i}(y)) < \varepsilon$. 因此,

$$1 \geq \frac{1}{n_{2k}} \sum_{i=1}^{n_{2k}} \chi(t_i, \varepsilon, x, y, F) \geq \frac{n_{2k} - n_{2k-1}}{n_{2k}} = 1 - \frac{1}{2(2k-1)}.$$

这蕴涵

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi(t_i, \varepsilon, x, y, F) = 1.$$

又存在 M_2 , 使得当 $k > M_2$ 时, 对任意的 $n_{2k} < i \leq n_{2k+1}$, 都有 $d_H(F^{t_i}(x), F^{t_i}(y)) > \delta$. 从而,

$$0 \leq \frac{1}{n_{2k+1}} \sum_{i=1}^{n_{2k+1}} \chi(t_i, \delta, x, y, F) \leq \frac{n_{2k}}{n_{2k+1}} = \frac{1}{4k}.$$

这蕴涵

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi(t_i, \varepsilon, x, y, F) = 0.$$

故 $(x, y) \in DCR(\{t_i\}, F)$. □

定理 3.1 设 (X, F) 是一个集值动力系统. 如果 $S \subset X$ 是一个强熊混沌集, 则 S 是按某序列分布混沌的.

证明 令 $f_1 : S \rightarrow X$ 是常值映射. 不妨记 $f_1(x) \equiv z$. 则存在序列 $\{p_i\}$, 使得对任意的 $x \in S$, 都有 $\lim_{i \rightarrow \infty} d^*(F^{p_i}(x), z) = 0$. 对任意不同的 $x, y \in S$ 和任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $i > N$ 时, 有

$$\sup_{w \in F^{p_i}(x)} d(w, z) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \sup_{w \in F^{p_i}(y)} d(w, z) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

因此,

$$d_H(F^{p_i}(x), F^{p_i}(y)) < \varepsilon,$$

即 $(x, y) \in AR(\{p_i\}, F)$.

令 $f_2 : S \rightarrow X$ 为恒同映射, 则存在递增正整数序列 $\{q_i\}$, 使得对任意的 $x \in S$, 都有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d^*(F^{q_i}(x), f_2(x)) = 0.$$

对任意不同的 $x, y \in S$, 令 $\delta = d(f_2(x), f_2(y)) = d(x, y)$, 则存在 $N > 0$, 使得当 $i > N$ 时, 有

$$\sup_{w \in F^{q_i}(x)} d(w, x) < \frac{\delta}{8}, \quad \sup_{w \in F^{q_i}(y)} d(w, y) < \frac{\delta}{8}.$$

故对任意的 $i > N$, 都有 $d_H(F^{q_i}(x), F^{q_i}(y)) > \frac{\delta}{8}$. 从而有

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} d_H(F^{q_i}(x), F^{q_i}(y)) > 0,$$

即 $(x, y) \in DR(\{q_i\}, F)$.

由命题 3.1 知结论成立. □

致谢 作者感谢审稿人提出的宝贵建议.

参考文献

- 1 Akin E. Lectures on Cantor and Mycielski sets for dynamical systems. *Contemp Math*, 2004, 356: 21–79
- 2 Alvin L, Kelly J P. Topological entropy of Markov set-valued functions. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2021, 41: 321–337
- 3 Andres J. Chaos for multivalued maps and induced hyperspace maps. *Chaos Solitons Fractals*, 2020, 138: 109898
- 4 Blanchard F, Glasner E, Kolyada S, et al. On Li-Yorke pairs. *J Reine Angew Math*, 2002, 547: 51–68
- 5 Blanchard F, Huang W. Entropy sets, weakly mixing sets and entropy capacity. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2008, 20: 275–311
- 6 Camargo J, Macías S. Dynamics with set-valued functions and coselections. *Qual Theory Dyn Syst*, 2022, 21: 25
- 7 Camargo J, Macías S, Maya D. Dynamics with Jones' set function T . *Topology Appl*, 2021, 292: 107635

- 8 Carrasco-Olivera D, Alvan R M, Rojas C A M. Topological entropy for set-valued maps. *Discrete Contin Dyn Syst Ser B*, 2015, 20: 3461–3474
- 9 Devaney R. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 3rd ed. Boca Raton: CRC Press, 2022
- 10 Erceg G, Kennedy J. Topological entropy on closed sets in $[0, 1]^2$. *Topology Appl*, 2018, 246: 106–136
- 11 Furstenberg H. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation. *Math Syst Theory*, 1967, 1: 1–49
- 12 Huang W, Li J, Ye X, et al. Positive topological entropy and Δ -weakly mixing sets. *Adv Math*, 2017, 306: 653–683
- 13 Huang W, Ye X. Devaney’s chaos or 2-scattering implies Li-Yorke’s chaos. *Topology Appl*, 2002, 117: 259–272
- 14 Huang Y, Zhong X F. Weak mixing in switched systems. *Sci China Math*, 2019, 62: 2527–2534
- 15 Kelly J P, McGoff K. Topological dynamics of Markov multi-maps of the interval. *Topology Appl*, 2023, 327: 108444
- 16 Kelly J P, Tennant T. Topological entropy of set-valued functions. *Houston J Math*, 2017, 43: 263–282
- 17 Li J, Lü J, Xiao Y. The Hausdorff dimension of multiply Xiong chaotic sets. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2020, 40: 3056–3077
- 18 Li J, Ye X D. Recent development of chaos theory in topological dynamics. *Acta Math Sin (Engl Ser)*, 2016, 32: 83–114
- 19 Li T Y, Yorke J A. Period three implies chaos. *Amer Math Monthly*, 1975, 82: 985–992
- 20 Nadler S B. *Hyperspaces of Sets. A Text with Research Questions*, vol. 49. New York-Basel: Marcel Dekker, 1978
- 21 Oprocha P. Coherent lists and chaotic sets. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2013, 31: 797–825
- 22 Schweizer B, Smítal J. Measures of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems on the interval. *Trans Amer Math Soc*, 1994, 344: 737–754
- 23 Vivas K J, Sirvent V F. Metric entropy for set-valued maps. *Discrete Contin Dyn Syst Ser B*, 2022, 27: 6589–6604
- 24 Wang L D. The probability properties in compact systems—ergode and distribution chaos (in Chinese). PhD Thesis. Changchun: Jilin University, 1999 [王立东. 紧致系统中的概率性质—遍历与分布混沌. 博士学位论文. 长春: 吉林大学, 1999]
- 25 Wang L D, Zhao Y C, Gao Y L, et al. Chaos to multiple mappings. *Internat J Bifur Chaos*, 2017, 27: 1750119
- 26 Wang X, Zhang Y, Zhu Y. On various entropies of set-valued maps. *J Math Anal Appl*, 2023, 524: 127097
- 27 Xiao Y. A construction of multiply Xiong chaotic set with full topological entropy for β -transformation. *J Math Anal Appl*, 2021, 503: 125314
- 28 Xiong J, Yang Z. Chaos caused by a topological mixing map. In: *Dynamical Systems and Related Topics. Advanced Series in Dynamical Systems*, vol. 9. River Edge: World Sci Publ, 1991, 550–572
- 29 Xu D. The entropy of set-valued dynamical systems and its applications (in Chinese). Master Thesis. Hefei: University of Science and Technology of China, 2016 [许娣. 集值动力系统的熵及其应用. 硕士学位论文. 合肥: 中国科学技术大学, 2016]
- 30 Yang R S. Distribution chaos in a sequence and topologically mixing (in Chinese). *Acta Math Sinica (Chin Ser)*, 2002, 45: 753–758 [杨润生. 按序列分布混沌与拓扑混合. 数学学报, 2002, 45: 753–758]
- 31 Zeng H, Wang L, Sun T. Chaos to multiple mappings from a set-valued view. *Mod Phys Lett B*, 2020, 34: 2050108
- 32 Zhang Y, Zhu Y J. Topological stability and entropy for certain set-valued maps. *Acta Math Sin (Engl Ser)*, 2024, 40: 962–984

Xiong chaos for set-valued dynamical systems

Xingfu Zhong & Zhijing Chen

Abstract Let (X, F) be a set-valued dynamical system, where X is a compact metric space and $F : X \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ is a set-valued map. We introduce the notions of Xiong chaos, strong Xiong chaos, weak mixing, and distributional chaos for set-valued dynamical systems. We show that Xiong chaos and weak mixing are equivalent, and that strong Xiong chaos sets are distributional chaos in a sequence.

Keywords Xiong chaos, weak mixing, distributional chaos

MSC(2020) 37B05, 37B55

doi: 10.1360/SSM-2025-0094