



一类杆方程解的爆破准则

周长泰, 赖绍永*

西南财经大学数学学院, 成都 611130

E-mail: zct17553415209@gmail.com, laishaoy@swufe.edu.cn

收稿日期: 2024-10-20; 接受日期: 2025-03-25; 网络出版日期: 2025-04-11; * 通信作者
四川省科技支持计划 (批准号: 2024ZYD0062) 资助项目

摘要 本文研究一类包含 Camassa-Holm 方程的杆方程. 利用这类杆方程自身的动力学性质, 通过构建 Lyapunov 函数, 得到这类杆方程解的爆破准则, 这个准则只涉及初值和初值的导数在单个局部点的取值, 以及初值的 H^1 范数, 进一步完善了 Brandolese (2014) 的研究成果.

关键词 非线性杆方程 Camassa-Holm 方程 波的破裂现象 Lyapunov 函数

MSC (2020) 主题分类 35B44, 35Q35

1 引言

考虑如下杆方程:

$$W_t - W_{txx} + 3WW_x = \gamma(2W_x W_{xx} + WW_{xxx}), \quad (1.1)$$

其中 $\gamma \neq 0$ 是常数. 关于方程 (1.1) 的物理意义可参见文献 [1].

若 $\gamma = 1$, 则方程 (1.1) 变为 Camassa-Holm (CH) 方程

$$W_t - W_{txx} + 3WW_x = 2W_x W_{xx} + WW_{xxx}. \quad (1.2)$$

CH 方程的推导过程可参见文献 [4, 12]. 在特定的 Sobolev 空间和 Besov 空间中, 方程 (1.2) 的解是局部存在的 (参见文献 [18]). 在没有符号条件的假设下, Xin 和 Zhang^[24] 研究了方程 (1.2) 整体弱解的存在性. 在 Besov 空间中, Li 等^[17] 通过构造一个特殊的初值序列, 研究了方程 (1.2) 解的不适定性; Li 等^[16] 证明了方程 (1.2) 的解是非一致连续依赖于初值的 (也可参见文献 [15]). Camassa 和 Holm^[4] 发现方程 (1.2) 是完全可积的且具有双 Hamilton 结构 (参见文献 [5, 12, 22, 25]). Constantin 和 Strauss^[8] 证明了方程 (1.2) 的尖峰孤子解具有轨道稳定性. 在初值满足符号条件的假设下, 有关方程 (1.2) 整体强解的存在性参见文献 [6]. Lai 和 Wu^[14] 研究了弱耗散 CH 方程局部强解的适定性及弱解的存在性.

英文引用格式: Zhou C T, Lai S Y. The wave breaking criteria for a rod equation (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 939–948, doi: 10.1360/SSM-2024-0321

对初值进行适当限制, CH 方程的解会产生波的破裂 (wave breaking) 现象 (参见文献 [6, 7, 21, 23]). 与 CH 方程相关的一些研究工作, 可参见文献 [11, 13, 19, 20].

当 $\gamma < 1$ 时, Dai 和 Huo^[10] 发现方程 (1.1) 具有平滑孤波. 在 Sobolev 空间中, Zhou^[26] 使用 Kato 定理证明了方程 (1.1) 解的局部适定性. Zhou^[27] 得到了方程 (1.1) 周期解和非周期解的爆破条件, 并获得了方程 (1.1) 的爆破速率. 特别地, 在非周期情形下, Zhou^[27] 给出了爆破准则, 即假设初值 $W_0 \in H^2(\mathbb{R})$ 且满足 $m_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}} W_{0x}(x) < 0$ 和

$$m_0^2 > \begin{cases} \frac{3-\gamma}{-2\gamma} \|W_0\|_{H^1(\mathbb{R})}^2, & \gamma < 0, \\ \frac{6-\gamma-\sqrt{12\gamma-3\gamma^2}}{4\gamma} \|W_0\|_{H^1(\mathbb{R})}^2, & 0 < \gamma < 3, \\ \frac{\gamma-3}{2\gamma} \|W_0\|_{H^1(\mathbb{R})}^2, & \gamma > 3, \end{cases} \quad (1.3)$$

则方程 (1.1) 的解会在有限时间内发生波的破裂现象. Brandolese^[1] 为非周期杆方程 (1.1) 给出了一个更简单且只涉及局部点的爆破准则 (local-in-space 爆破准则)¹⁾, 即如下结论.

定理 1.1^[1] 设 $1 \leq \gamma \leq 4$, $W_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{3}{2}$. 若存在一点 x_0 满足

$$W'_0(x_0) < -\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{\gamma} - \sqrt{\frac{3}{\gamma} - \frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} |W_0(x_0)|, \quad (1.4)$$

则方程 (1.1) 的解会在有限时间内发生波的破裂现象.

在周期情形下, Brandolese 和 Cortez^[3] 获得了方程 (1.1) 的局部点的爆破准则. 需要指出的是, (1.4) 是方程 (1.1) 的局部点的爆破条件. 事实上, 条件 (1.4) 代表的是初值及初值的导数在某个点的关系. 然而, (1.3) 涉及 $m_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}} W_{0x}(x)$.

当 $1 \leq \gamma \leq 4$ 时, 定理 1.1 给出了杆方程 (1.1) 在线上的局部点的爆破准则, 即如果定理 1.1 的假设条件满足, 则方程 (1.1) 的解会发生波的破裂现象. 当 $0 < \gamma < 1$ 和 $\gamma > 4$ 时, 还需要学者进一步研究方程 (1.1) 在线上的爆破准则. 鉴于此, 受文献 [2, 3] 中研究方法的启发, 通过构建 Lyapunov 函数, 当 $0 < \gamma < 1$ 和 $\gamma > 4$ 时, 本文将给出方程 (1.1) 在线 $\mathbb{R}$ 上的爆破准则. 与文献 [1, 27] 中的结果比较, 本文的创新点如下.

(i) Brandolese^[1] 通过构建 Lyapunov 函数研究了方程 (1.1) 解的破裂现象, 而本文构造的 Lyapunov 函数与之相比是不同的 (见 (3.5) 和 (3.17)).

(ii) Brandolese^[1] 限制了 $1 \leq \gamma \leq 4$ (参见定理 1.1), 当 $0 < \gamma < 1$ 和 $\gamma > 4$ 时, 本文给出方程 (1.1) 的爆破条件, 即本文 γ 的取值范围不同.

(iii) 本文的爆破准则只涉及初值和初值的导数在单个局部点的取值, 以及初值的 H^1 范数 (形式上比较简单, 且较容易验证). Zhou^[27] 所给出方程 (1.1) 的爆破准则涉及 $m_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}} W_{0x}(x)$, 本文的爆破准则不涉及 $m_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}} W_{0x}(x)$.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节回顾方程 (1.1) 局部解的适定性、 H^1 守恒律和有界性. 第 3 节给出方程 (1.1) 的解在线 $\mathbb{R}$ 上的爆破准则.

1) 局部点的爆破准则只涉及初值及初值的导数在某个点的关系, 即爆破条件仅与初值和初值的导数相关.

2 预备知识

方程 (1.1) 的初值问题为

$$\begin{cases} W_t - W_{txx} + 3WW_x = \gamma(2W_x W_{xx} + WW_{xxx}), \\ W(0, x) = W_0(x). \end{cases} \quad (2.1)$$

记 Green 函数 $q(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, 则对于任意的函数 $f(x) \in L^p(\mathbb{R})$, 有 $q * f(x) = (1 - \partial_x^2)^{-1}f(x)$, 其中 $1 \leq p \leq \infty$, $*$ 表示卷积. 将逆算子 $(1 - \partial_x^2)^{-1}$ 作用于问题 (2.1), 有

$$\begin{cases} W_t + \gamma WW_x = -\partial_x q * \left(\frac{3-\gamma}{2}W^2 + \frac{\gamma}{2}W_x^2 \right), \\ W(0, x) = W_0(x). \end{cases} \quad (2.2)$$

引理 2.1 ^[9, 27] 设 $W_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{3}{2}$, 则存在时间 $T = T(\|W_0\|_{H^s}) > 0$ 使得问题 (2.2) 存在唯一解

$$W \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T]; H^{s-1}(\mathbb{R})),$$

且 W 连续地依赖于初值 $W_0(x)$.

引理 2.1 说明了问题 (2.2) 局部解的存在唯一性. 接下来给出如下 $H^1(\mathbb{R})$ 守恒律和有界性.

引理 2.2 ^[9, 27] 设 $W_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{3}{2}$. 假设 W 是系统 (2.2) 的解, 则

$$\|W\|_{H^1} = \|W_0\|_{H^1}, \quad \|W\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|W_0\|_{H^1}.$$

如果一个偏微分方程解的最大存在时间 T 是有限的, 且解本身保持有界并且解关于空间变量的二阶导数趋于无穷 ($t \rightarrow T$ 时), 即

$$\sup_{t \in [0, T)} \|W(t, \cdot)\|_{L^\infty} < \infty, \quad \limsup_{t \rightarrow T} \|\partial_x W(t, \cdot)\|_{L^\infty} = \infty,$$

则称这个偏微分方程的解 W 具有波的破裂现象 (参见文献 [6]).

引理 2.3 ^[9, 27] 设 $W_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{3}{2}$. 若 T 是系统 (2.2) 解的最大存在时间, 则

$$\lim_{t \rightarrow T} \|W(t, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{R})} = \infty,$$

当且仅当

$$\liminf_{t \rightarrow T} \inf_{x \in \mathbb{R}} \{|\gamma W_x(t, x)|\} = \infty.$$

接下来, 考虑如下方程:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi(t, x) = \gamma W(t, \varphi(t, x)), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad \gamma > 0, \\ \varphi(0, x) = x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.3)$$

引理 2.4 ^[1] 设 $W_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{3}{2}$, 则问题 (2.3) 具有唯一解 $\varphi \in C^1([0, T) \times \mathbb{R})$. 此外, 在 $[0, T) \times \mathbb{R}$ 中, $\varphi(t, \cdot)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是一个满足 $\varphi_x(t, x) > 0$ 的单增微分同胚.

3 线 $\mathbb{R}$ 上的爆破准则

本节研究方程 (1.1) 在线上的爆破准则.

定理 3.1 设 $W_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{3}{2}$, $0 < \gamma < 1$. 假设存在一点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 满足

$$W'_0(x_0) < -\sqrt{\frac{3-\gamma}{\gamma}}|W_0(x_0)| - \frac{2E}{\gamma}, \quad (3.1)$$

其中

$$E = \sqrt{\frac{\gamma(3-\gamma)}{8} \left(\sqrt{\frac{3-\gamma}{\gamma}} - 1 \right) \|W_0\|_{H^1}}, \quad (3.2)$$

则问题 (2.2) 的解 W 会在有限时间内产生波的破裂现象且 T 满足

$$T \leq \frac{1}{2E} \ln \frac{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} W'_0(x_0)^2 - \frac{\gamma(3-\gamma)}{4} W_0^2(x_0)} + E}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} W'_0(x_0)^2 - \frac{\gamma(3-\gamma)}{4} W_0^2(x_0)} - E}.$$

证明 在方程 (2.2) 两边, 对变量 x 求导数得到

$$W_{tx} + \gamma W W_{xx} = \frac{3-\gamma}{2} W^2 - \frac{\gamma}{2} W_x^2 - q * \left(\frac{3-\gamma}{2} W^2 + \frac{\gamma}{2} W_x^2 \right). \quad (3.3)$$

应用 (2.3), (3.3) 和引理 2.4, 得到

$$\begin{aligned} \frac{dW_x(t, \varphi(t, x))}{dt} &= [W_{tx} + \gamma W W_{xx}](t, \varphi(t, x)) \\ &= \left[\frac{3-\gamma}{2} W^2 - \frac{\gamma}{2} W_x^2 - q * \left(\frac{3-\gamma}{2} W^2 + \frac{\gamma}{2} W_x^2 \right) \right](t, \varphi(t, x)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

受文献 [2, 3] 的启发, 构造如下 Lyapunov 函数:

$$\begin{cases} U_1(t, x) = \left(-\frac{\gamma}{2} W_x + \sqrt{\frac{\gamma(3-\gamma)}{4}} W \right)(t, \varphi(t, x)), \\ V_1(t, x) = \left(-\frac{\gamma}{2} W_x - \sqrt{\frac{\gamma(3-\gamma)}{4}} W \right)(t, \varphi(t, x)). \end{cases} \quad (3.5)$$

对任意 $x \in \mathbb{R}$, q 满足

$$q = q_+ + q_-, \quad q_x = q_- - q_+,$$

其中

$$q_+ * f(x) = \frac{e^{-x}}{2} \int_{-\infty}^x e^y f(y) dy, \quad q_- * f(x) = \frac{e^x}{2} \int_x^{+\infty} e^{-y} f(y) dy.$$

因此, 对任意 $\beta \in \mathbb{R}$, 有

$$q + \beta \partial_x q = (1 + \beta) q_- + (1 - \beta) q_+, \quad q - \beta \partial_x q = (1 - \beta) q_- + (1 + \beta) q_+.$$

使用 (2.2), (3.4) 和 (3.5), 可推导出

$$\frac{d}{dt} U_1(t, x) = \sqrt{\frac{\gamma(3-\gamma)}{4}} (W_t + \gamma W W_x) - \frac{\gamma}{2} (W_{tx} + \gamma W W_{xx})$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{\gamma(3-\gamma)}{4}} \left[-\partial_x q * \left(\frac{3-\gamma}{2} W^2 + \frac{\gamma}{2} W_x^2 \right) \right] \\
&\quad - \frac{\gamma}{2} \left[\frac{3-\gamma}{2} W^2 - \frac{\gamma}{2} W_x^2 - q * \left(\frac{3-\gamma}{2} W^2 + \frac{\gamma}{2} W_x^2 \right) \right] \\
&= -\frac{\gamma(3-\gamma)}{4} W^2 + \frac{\gamma^2}{4} W_x^2 + \left(\frac{\gamma}{2} q - \sqrt{\frac{\gamma(3-\gamma)}{4}} q_x \right) * \left(\frac{3-\gamma}{2} W^2 + \frac{\gamma}{2} W_x^2 \right) \\
&= U_1 V_1 + \frac{\gamma}{2} \left[\left(1 + \sqrt{\frac{3-\gamma}{\gamma}} \right) q_+ + \left(1 - \sqrt{\frac{3-\gamma}{\gamma}} \right) q_- \right] * \left(\frac{3-\gamma}{2} W^2 + \frac{\gamma}{2} W_x^2 \right) \quad (3.6)
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V_1(t, x) &= -\sqrt{\frac{\gamma(3-\gamma)}{4}} (W_t + \gamma W W_x) - \frac{\gamma}{2} (W_{tx} + \gamma W W_{xx}) \\
&= \sqrt{\frac{\gamma(3-\gamma)}{4}} \left[\partial_x q * \left(\frac{3-\gamma}{2} W^2 + \frac{\gamma}{2} W_x^2 \right) \right] \\
&\quad - \frac{\gamma}{2} \left[\frac{3-\gamma}{2} W^2 - \frac{\gamma}{2} W_x^2 - q * \left(\frac{3-\gamma}{2} W^2 + \frac{\gamma}{2} W_x^2 \right) \right] \\
&= -\frac{\gamma(3-\gamma)}{4} W^2 + \frac{\gamma^2}{4} W_x^2 + \left(\frac{\gamma}{2} q + \sqrt{\frac{\gamma(3-\gamma)}{4}} q_x \right) * \left(\frac{3-\gamma}{2} W^2 + \frac{\gamma}{2} W_x^2 \right) \\
&= U_1 V_1 + \frac{\gamma}{2} \left[\left(1 - \sqrt{\frac{3-\gamma}{\gamma}} \right) q_+ + \left(1 + \sqrt{\frac{3-\gamma}{\gamma}} \right) q_- \right] * \left(\frac{3-\gamma}{2} W^2 + \frac{\gamma}{2} W_x^2 \right). \quad (3.7)
\end{aligned}$$

当 $0 < \gamma < 1$ 时, 有 $1 - \sqrt{\frac{3-\gamma}{\gamma}} < 0$, $1 + \sqrt{\frac{3-\gamma}{\gamma}} > 0$ 和 $\frac{3-\gamma}{2} > \frac{\gamma}{2} > 0$. 使用 Young 不等式和引理 2.2, 可得

$$\left| q_{\pm} * \left(\frac{3-\gamma}{2} W^2 + \frac{\gamma}{2} W_x^2 \right) \right| \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{3-\gamma}{2} W^2 + \frac{\gamma}{2} W_x^2 \right\|_{L^1} \leq \frac{3-\gamma}{4} \|W\|_{H^1}^2 = \frac{3-\gamma}{4} \|W_0\|_{H^1}^2. \quad (3.8)$$

使用 (3.6)–(3.8) 推导出

$$\begin{cases} \frac{dU_1(t, x)}{dt} \geq U_1 V_1(t, x) - \frac{\gamma(3-\gamma)}{8} \left(\sqrt{\frac{3-\gamma}{\gamma}} - 1 \right) \|W_0\|_{H^1}^2 = U_1 V_1(t, x) - E^2, \\ \frac{dV_1(t, x)}{dt} \geq U_1 V_1(t, x) - \frac{\gamma(3-\gamma)}{8} \left(\sqrt{\frac{3-\gamma}{\gamma}} - 1 \right) \|W_0\|_{H^1}^2 = U_1 V_1(t, x) - E^2, \end{cases} \quad (3.9)$$

其中 E 满足 (3.2).

定义 $U_1(t) = U_1(t, x_0)$ 和 $V_1(t) = V_1(t, x_0)$. 初值条件 (3.1) 等价于

$$U_1(0) > E > 0 \quad \text{和} \quad V_1(0) > E > 0. \quad (3.10)$$

使用 (3.9) 和 (3.10) 得到

$$\begin{aligned}
U_1(0) V_1(0) &> E^2, \\
U_1'(0) &\geq U_1(0) V_1(0) - E^2 > 0, \\
V_1'(0) &\geq U_1(0) V_1(0) - E^2 > 0.
\end{aligned}$$

接下来证明

$$U_1'(t) > 0, \quad V_1'(t) > 0, \quad t \in [0, T]. \quad (3.11)$$

若 (3.11) 不成立, 则存在时间 $t_1 \in [0, T)$ 使得

$$t_1 = \min\{t \in [0, T) \mid U_1'(t) = 0 \text{ 或 } V_1'(t) = 0\}. \quad (3.12)$$

显然, $t_1 \neq 0$. 使用 (3.9) 和 (3.12) 得到

$$0 = U_1'(t_1) \geq U_1(t_1)V_1(t_1) - E^2 \quad \text{或} \quad 0 = V_1'(t_1) \geq U_1(t_1)V_1(t_1) - E^2,$$

这意味着

$$U_1(t_1)V_1(t_1) \leq E^2. \quad (3.13)$$

因 $U_1(t)$ 和 $V_1(t)$ 在 $t \in [0, t_1]$ 上单调递增, 故有

$$U_1(t_1) \geq U_1(0) > E > 0 \quad \text{和} \quad V_1(t_1) \geq V_1(0) > E > 0,$$

由此得到 $U_1(t_1)V_1(t_1) > E^2$, 这与 (3.13) 矛盾. 因此, (3.11) 对于任意的 $t \in [0, T)$ 成立. 由 (3.9)–(3.11) 知 $U_1(t)$, $V_1(t)$ 和 $U_1V_1(t)$ 都是正的且关于时间 $t \in [0, T)$ 单调递增.

设 $f(t) = \sqrt{U_1V_1(t)}$. 应用 (3.9) 并计算 $f(t)$ 关于变量 t 的导数, 有

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{U_1'V_1 + U_1V_1'}{2\sqrt{U_1V_1}}(t) \geq \frac{(U_1V_1 - E^2)(U_1 + V_1)}{2\sqrt{U_1V_1}}(t) \geq U_1V_1(t) - E^2 = f^2(t) - E^2. \quad (3.14)$$

解不等式 (3.14) 得

$$f(t) \geq \frac{E[f(0) + E + (f(0) - E)e^{2Et}]}{f(0) + E - (f(0) - E)e^{2Et}},$$

这意味着当 $t \rightarrow \frac{1}{2E} \ln \frac{f(0)+E}{f(0)-E}$ 时, 有

$$-\frac{\gamma}{2}W_x(t, \varphi(t, x_0)) = \frac{U_1(t) + V_1(t)}{2} \geq f(t) \rightarrow +\infty,$$

即 $\gamma W_x(t, \varphi(t, x_0)) \rightarrow -\infty$. 由引理 2.2 和 2.3 知, 问题 (2.2) 的解 W 在有限时间内发生波的破裂现象, 且 T 满足

$$T \leq \frac{1}{2E} \ln \frac{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}W_0'(x_0)^2 - \frac{\gamma(3-\gamma)}{4}W_0^2(x_0) + E}}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}W_0'(x_0)^2 - \frac{\gamma(3-\gamma)}{4}W_0^2(x_0) - E}}.$$

至此完成了定理 3.1 的证明. □

定理 3.2 设 $W_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{3}{2}$, 常数 $\epsilon > 0$. 如果 $\gamma > 4$, 假设存在一点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 满足

$$W_0'(x_0) < -\epsilon|W_0(x_0)| - \frac{2G}{\gamma}, \quad (3.15)$$

其中

$$G = \sqrt{\frac{1+\epsilon}{2} \times \max\left(\left|\frac{\gamma(3-\gamma)}{4}\right|, \frac{\gamma^2}{4}\right) \|W_0\|_{H^1}}, \quad (3.16)$$

则问题 (2.2) 的解 W 会在有限时间内产生波的破裂现象且 T 满足

$$T \leq \frac{1}{2G} \ln \frac{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}W_0'(x_0)^2 - \frac{\gamma^2}{4}\epsilon^2W_0^2(x_0) + G}}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}W_0'(x_0)^2 - \frac{\gamma^2}{4}\epsilon^2W_0^2(x_0) - G}}.$$

证明 受文献 [2,3] 中方法的启发, 构造如下 Lyapunov 函数:

$$\begin{cases} U_2(t, x) = \gamma \left(-\frac{1}{2}W_x + \frac{1}{2}\epsilon W \right)(t, \varphi(t, x)), \\ V_2(t, x) = \gamma \left(-\frac{1}{2}W_x - \frac{1}{2}\epsilon W \right)(t, \varphi(t, x)). \end{cases} \quad (3.17)$$

当 $\gamma > 4$ 时, 有 $-\frac{\gamma(3-\gamma)}{4} > 0$, $-\frac{\gamma^2\epsilon^2}{4} < 0$, 则 $-\frac{\gamma(3-\gamma)}{4}W^2 \geq -\frac{\gamma^2\epsilon^2}{4}W^2$. 注意到 (2.2), (3.4) 和引理 2.4, 由 (3.17), 得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U_2(t, x) &= \frac{\gamma}{2}\epsilon(W_t + \gamma WW_x) - \frac{\gamma}{2}(W_{tx} + \gamma WW_{xx}) \\ &= \frac{\gamma}{2}\epsilon \left[-\partial_x q * \left(\frac{3-\gamma}{2}W^2 + \frac{\gamma}{2}W_x^2 \right) \right] \\ &\quad - \frac{\gamma}{2} \left[\frac{3-\gamma}{2}W^2 - \frac{\gamma}{2}W_x^2 - q * \left(\frac{3-\gamma}{2}W^2 + \frac{\gamma}{2}W_x^2 \right) \right] \\ &= -\frac{\gamma(3-\gamma)}{4}W^2 + \frac{\gamma^2}{4}W_x^2 + (q - \epsilon q_x) * \left(\frac{\gamma(3-\gamma)}{4}W^2 + \frac{\gamma^2}{4}W_x^2 \right) \\ &\geq -\frac{\gamma^2\epsilon^2}{4}W^2 + \frac{\gamma^2}{4}W_x^2 + (q - \epsilon q_x) * \left(\frac{\gamma(3-\gamma)}{4}W^2 + \frac{\gamma^2}{4}W_x^2 \right) \\ &= U_2V_2 + (q - \epsilon q_x) * \left(\frac{\gamma(3-\gamma)}{4}W^2 + \frac{\gamma^2}{4}W_x^2 \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

和

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_2(t, x) &= -\frac{\gamma}{2}\epsilon(W_t + \gamma WW_x) - \frac{\gamma}{2}(W_{tx} + \gamma WW_{xx}) \\ &= \frac{\gamma}{2}\epsilon \left[\partial_x q * \left(\frac{3-\gamma}{2}W^2 + \frac{\gamma}{2}W_x^2 \right) \right] \\ &\quad - \frac{\gamma}{2} \left[\frac{3-\gamma}{2}W^2 - \frac{\gamma}{2}W_x^2 - q * \left(\frac{3-\gamma}{2}W^2 + \frac{\gamma}{2}W_x^2 \right) \right] \\ &= -\frac{\gamma(3-\gamma)}{4}W^2 + \frac{\gamma^2}{4}W_x^2 + (q + \epsilon q_x) * \left(\frac{\gamma(3-\gamma)}{4}W^2 + \frac{\gamma^2}{4}W_x^2 \right) \\ &\geq -\frac{\gamma^2\epsilon^2}{4}W^2 + \frac{\gamma^2}{4}W_x^2 + (q + \epsilon q_x) * \left(\frac{\gamma(3-\gamma)}{4}W^2 + \frac{\gamma^2}{4}W_x^2 \right) \\ &= U_2V_2 + (q + \epsilon q_x) * \left(\frac{\gamma(3-\gamma)}{4}W^2 + \frac{\gamma^2}{4}W_x^2 \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

使用引理 2.2 和 Young 不等式, 得到

$$\begin{aligned} &\left| (q \pm \epsilon q_x) * \left(\frac{\gamma(3-\gamma)}{4}W^2 + \frac{\gamma^2}{4}W_x^2 \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{2}(1 + \epsilon) \left\| \frac{\gamma(3-\gamma)}{4}W^2 + \frac{\gamma^2}{4}W_x^2 \right\|_{L^1} \\ &\leq \frac{1}{2}(1 + \epsilon) \times \max \left(\left| \frac{\gamma(3-\gamma)}{4} \right|, \frac{\gamma^2}{4} \right) \|W\|_{H^1}^2 \\ &= \frac{1 + \epsilon}{2} \times \max \left(\left| \frac{\gamma(3-\gamma)}{4} \right|, \frac{\gamma^2}{4} \right) \|W_0\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

结合 (3.18) 和 (3.19) 得到

$$\begin{cases} \frac{dU_2(t, x)}{dt} \geq U_2 V_2(t, x) - \frac{1+\epsilon}{2} \times \max\left(\left|\frac{\gamma(3-\gamma)}{4}\right|, \frac{\gamma^2}{4}\right) \|W_0\|_{H^1}^2 = U_2 V_2(t, x) - G^2, \\ \frac{dV_2(t, x)}{dt} \geq U_2 V_2(t, x) - \frac{1+\epsilon}{2} \times \max\left(\left|\frac{\gamma(3-\gamma)}{4}\right|, \frac{\gamma^2}{4}\right) \|W_0\|_{H^1}^2 = U_2 V_2(t, x) - G^2, \end{cases} \quad (3.20)$$

其中 G 满足 (3.16).

由初值条件 (3.15) 得出

$$U_2(0) > G > 0 \quad \text{和} \quad V_2(0) > G > 0, \quad (3.21)$$

其中 $U_2(t) = U_2(t, x_0)$, $V_2(t) = V_2(t, x_0)$.

由 (3.20) 和 (3.21) 得

$$\begin{aligned} U_2(0)V_2(0) &> G^2, \\ U_2'(0) &\geq U_2(0)V_2(0) - G^2 > 0, \\ V_2'(0) &\geq U_2(0)V_2(0) - G^2 > 0. \end{aligned}$$

接下来用反证法证明

$$U_2'(t) > 0, \quad V_2'(t) > 0, \quad t \in [0, T]. \quad (3.22)$$

已知 $U_2'(0) > 0$ 和 $V_2'(0) > 0$. 若 (3.22) 不成立, 则存在时间 $t_2 \in (0, T)$ 使得

$$t_2 = \min\{t \in (0, T) \mid U_2'(t) = 0 \text{ 或 } V_2'(t) = 0\}. \quad (3.23)$$

使用 (3.20) 和 (3.23) 得

$$0 = U_2'(t_2) \geq U_2(t_2)V_2(t_2) - G^2 \quad \text{或} \quad 0 = V_2'(t_2) \geq U_2(t_2)V_2(t_2) - G^2,$$

这表明

$$U_2(t_2)V_2(t_2) \leq G^2. \quad (3.24)$$

由于 $U_2(t)$ 和 $V_2(t)$ 在 $t \in [0, t_2]$ 上单调递增, 所以有

$$U_2(t_2) \geq U_2(0) > G > 0 \quad \text{和} \quad V_2(t_2) \geq V_2(0) > G > 0,$$

这意味着 $U_2(t_2)V_2(t_2) > G^2$, 这与 (3.24) 矛盾. 因此, (3.22) 成立. 由 (3.20)–(3.22) 推导出 $U_2(t)$, $V_2(t)$ 和 $U_2 V_2(t)$ 都是正的且关于时间 $t \in [0, T)$ 单调递增.

设 $g(t) = \sqrt{U_2 V_2(t)}$. 使用 (3.20) 并计算 $g(t)$ 关于变量 t 的导数, 得到

$$\frac{d}{dt}g(t) = \frac{U_2' V_2 + U_2 V_2'}{2\sqrt{U_2 V_2}}(t) \geq \frac{(U_2 V_2 - G^2)(U_2 + V_2)}{2\sqrt{U_2 V_2}}(t) \geq U_2 V_2(t) - G^2 = g^2(t) - G^2. \quad (3.25)$$

解不等式 (3.25) 得

$$g(t) \geq \frac{G[g(0) + G + (g(0) - G)e^{2Gt}]}{g(0) + G - (g(0) - G)e^{2Gt}},$$

这意味着当 $t \rightarrow \frac{1}{2G} \ln \frac{g(0)+G}{g(0)-G}$ 时, 有

$$-\frac{\gamma}{2}W_x(t, \varphi(t, x_0)) = \frac{U_2(t) + V_2(t)}{2} \geq g(t) \rightarrow +\infty,$$

即 $\gamma W_x(t, \varphi(t, x_0)) \rightarrow -\infty$. 由引理 2.2 和 2.3 知, 问题 (2.2) 的解 W 会在有限时间内发生波的破裂现象, 且 T 满足

$$T \leq \frac{1}{2G} \ln \frac{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}W_0'(x_0)^2 - \frac{\gamma^2}{4}\epsilon^2 W_0^2(x_0) + G}}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}W_0'(x_0)^2 - \frac{\gamma^2}{4}\epsilon^2 W_0^2(x_0) - G}}.$$

至此完成了定理 3.2 的证明. $\square$

注 3.1 当 $1 \leq \gamma \leq 4$ 时, Brandolese^[1] 推导出了方程 (1.1) 的局部点的爆破条件 (见定理 1.1). 当 $0 < \gamma < 1$ 和 $\gamma > 4$ 时, 本文通过构造 Lyapunov 函数获得了方程 (1.1) 的爆破准则 (见定理 3.1 和 3.2). 当 $\gamma > 0$ 时, 由定理 1.1, 3.1 和 3.2, 我们总结方程 (1.1) 的爆破准则如下:

$$\begin{cases} W_0'(x_0) < -\sqrt{\frac{3-\gamma}{\gamma}}|W_0(x_0)| - \sqrt{\frac{3-\gamma}{2\gamma}}\left(\sqrt{\frac{3-\gamma}{\gamma}} - 1\right)\|W_0\|_{H^1}, & 0 < \gamma < 1, \\ W_0'(x_0) < -\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{\gamma} - \sqrt{\frac{3}{\gamma} - \frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}|W_0(x_0)|, & 1 \leq \gamma \leq 4, \\ W_0'(x_0) < -\epsilon|W_0(x_0)| - \sqrt{(1+\epsilon) \times \max\left(\left|\frac{3-\gamma}{2\gamma}\right|, \frac{1}{2}\right)}\|W_0\|_{H^1}, & \gamma > 4, \end{cases}$$

其中常数 $\epsilon > 0$. 此外, Zhou^[27] 的爆破条件 (1.3) 涉及 $m_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}} W_{0x}(x)$, 我们得到的爆破准则只涉及初值、初值的导数在单个局部点的取值, 以及范数 $\|W_0\|_{H^1}$. 当 $\gamma < 0$ 时, 研究方程 (1.1) 的爆破准则是值得进一步思考的问题.

致谢 感谢评审专家给本文提出的宝贵意见, 使本文得到了进一步完善.

参考文献

- Brandolese L. Local-in-space criteria for blowup in shallow water and dispersive rod equations. *Comm Math Phys*, 2014, 330: 401–414
- Brandolese L, Cortez M F. Blowup issues for a class of nonlinear dispersive wave equations. *J Differential Equations*, 2014, 256: 3981–3998
- Brandolese L, Cortez M F. On permanent and breaking waves in hyperelastic rods and rings. *J Funct Anal*, 2014, 266: 6954–6987
- Camassa R, Holm D. An integrable shallow water equation with peaked solitons. *Phys Rev Lett*, 1993, 71: 1661–1664
- Camassa R, Holm D, Hyman J. A new integrable shallow water equation. *Adv Appl Mech*, 1994, 31: 1–33
- Constantin A, Escher J. Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations. *Acta Math*, 1998, 181: 229–243
- Constantin A, Escher J. Well-posedness, global existence, and blowup phenomena for a periodic quasi-linear hyperbolic equation. *Comm Pure Appl Math*, 1998, 51: 475–504
- Constantin A, Strauss W A. Stability of peakons. *Comm Pure Appl Math*, 2000, 53: 603–610
- Constantin A, Strauss W A. Stability of a class of solitary waves in compressible elastic rods. *Phys Lett A*, 2000, 270: 140–148
- Dai H H, Huo Y. Solitary shock waves and other travelling waves in a general compressible hyperelastic rod. *Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Sci*, 2000, 456: 331–363
- Du Z J, Lin X J, Yu S S. Solitary wave and periodic wave for a generalized Nizhnik-Novikov-Veselov equation with diffusion term. *Sci Sin Math*, 2022, 52: 133–154
- Fuchssteiner B, Fokas A S. Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries. *Phys D*, 1981, 4: 47–66

- 13 Guo B L, Tang H Z, Zhao B. Global well-posedness and large-time behavior of the pressureless two-phase flow system in $\mathbb{R}^3$ (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2025, 55: 1549–1566 [郭柏灵, 汤厚志, 赵斌. 3 维空间中的无压两相流模型整体适定性及长时间行为. *中国科学: 数学*, 2025, 55: 1549–1566]
- 14 Lai S Y, Wu Y H. Local well-posedness and weak solutions for a weakly dissipative Camassa-Holm equation (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2010, 40: 901–920 [赖绍永, 吴永洪. 一类弱耗散 Camassa-Holm 方程局部强解的适定性及弱解的存在性. *中国科学: 数学*, 2010, 40: 901–920]
- 15 Li J L, Xu X, Yu Y H, et al. Non-uniform dependence on initial data for the Camassa-Holm equation in the critical Besov space. *J Math Fluid Mech*, 2021, 23: 36
- 16 Li J L, Yu Y H, Zhu W P. Non-uniform dependence on initial data for the Camassa-Holm equation in Besov spaces. *J Differential Equations*, 2020, 269: 8686–8700
- 17 Li J L, Yu Y H, Zhu W P. Ill-posedness for the Camassa-Holm and related equations in Besov spaces. *J Differential Equations*, 2022, 306: 403–417
- 18 Li Y, Olver P J. Well-posedness and blow-up solutions for an integrable nonlinearly dispersive model wave equation. *J Differential Equations*, 2000, 162: 27–63
- 19 Liu Y, Yin Z. Global existence and blow-up phenomena for the Degasperis-Procesi equation. *Comm Math Phys*, 2006, 267: 801–820
- 20 Ma F, Liu Y, Qu C. Wave-breaking phenomena for the nonlocal Whitham-type equations. *J Differential Equations*, 2016, 261: 6029–6054
- 21 McKean H P. Breakdown of the Camassa-Holm equation. *Comm Pure Appl Math*, 2004, 57: 416–418
- 22 Qu C, Fu Y. On the Cauchy problem and peakons of a two-component Novikov system. *Sci China Math*, 2020, 63: 1965–1996
- 23 Qu C, Fu Y, Liu Y. Blow-up solutions and peakons to a generalized μ -Camassa-Holm integrable equation. *Comm Math Phys*, 2014, 331: 375–416
- 24 Xin Z, Zhang P. On the weak solutions to a shallow water equation. *Comm Pure Appl Math*, 2000, 53: 1411–1433
- 25 Yin Z. Global existence for a new periodic integrable equation. *J Math Anal Appl*, 2003, 283: 129–139
- 26 Zhou Y. Blow-up of solutions to a nonlinear dispersive rod equation. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2005, 25: 63–77
- 27 Zhou Y. Local well-posedness and blow-up criteria of solutions for a rod equation. *Math Nachr*, 2005, 278: 1726–1739

The wave breaking criteria for a rod equation

Changtai Zhou & Shaoyong Lai

Abstract In this paper, we investigate a rod equation containing the Camassa-Holm equation. Using the method to construct the Lyapunov functions, we obtain the wave breaking criteria of the rod equation, which involve the initial value and its derivative at a single point, and the norm $H^1(\mathbb{R})$ of the initial data. The work of Brandolese (2014) is further developed.

Keywords nonlinear rod equation, Camassa-Holm equation, wave breaking phenomenon, Lyapunov function

MSC(2020) 35B44, 35Q35

doi: 10.1360/SSM-2024-0321