中国科学: 数学 2025 年 第 55 卷 第 3 期: 569 ∼ 604
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

Vlasov-Boltzmann 方程组的全局解和衰减估计

献给肖玲教授 85 寿辰

蔡剑斌, 刘正荣, 喻洪俊*

华南师范大学数学科学学院, 广州 510631
E-mail: 964688953@qq.com, 1427144531@qq.com, yuhj2002@sina.com

收稿日期: 2024-01-12; 接受日期: 2024-10-17; 网络出版日期: 2024-11-12; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12371218) 资助项目

摘要 耦合的 Vlasov-Boltzmann 方程组可用于描述通过强短程和弱长程对势相互作用的双组分流体系统的时间演化. 本文利用补偿函数方法和能量方法得到耦合的 Vlasov-Boltzmann 方程组靠近整体 Maxwell 分布时全局解的存在性和最优衰减速率. 此方法的优点在于通过构建系统的补偿函数, 可以避免分析相应的线性算子的谱结构以达到更为简便的目的.

关键词 Vlasov-Boltzmann 方程组 补偿函数 能量估计 全局解 衰减估计

MSC (2020) 主题分类 82D10, 35B40

1 引言

通过强短程和弱长程对势相互作用的 “红” 粒子和 “蓝” 粒子所构成的双组分流体的时间演化方程可由耦合的 Vlasov-Boltzmann 方程组描述 (参见文献 [1]):

$$\partial_t F^r + v\cdot\nabla_x F^r + K^r\cdot\nabla_v F^r = Q(F^r,F^r)+Q(F^r,F^b), \tag{1.1}$$

$$\partial_t F^b + v\cdot\nabla_x F^b + K^b\cdot\nabla_v F^b = Q(F^b,F^b)+Q(F^b,F^r), \tag{1.2}$$

其中 $F^\alpha(t,x,v)\geqslant 0$, $\alpha=r,b$ 分别为粒子 1 (红) 和粒子 2 (蓝) 在时间 $t\geqslant 0$、位置 $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ 及速度 $v=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3$ 的数量密度函数.

长程相互作用由不同类粒子之间的排斥 Vlasov 力 $K^\alpha(t,x)$ 所表示:

$$K^\alpha(t,x) = -\nabla_x U\star F^\beta = -\nabla_x U * \int_{\mathbb{R}^3} F^\beta dv = -\nabla_x \int_{\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^3_v} U(|x-x'|)F^\beta(t,x',v)dx'dv, \tag{1.3}$$

其中 $\alpha,\beta\in\{r,b\}$, $\alpha\neq\beta$, $U(\cdot)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 为非负函数满足 $\int_{\mathbb{R}^3}U(|x|)dx=1$.

英文引用格式: Cai J B, Liu Z R, Yu H J. Global existence and time decay estimates of the Vlasov-Boltzmann system (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 569–604, doi: 10.1360/SSM-2024-0012

© 2024《中国科学》杂志社 www.scichina.com mathcn.scichina.com

短程相互作用下硬球情形的 Boltzmann 碰撞算子表示为

$$Q(F,G)(v)=\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}|(u-v)\cdot\omega|\{F(v')G(u')-F(v)G(u)\}dud\omega,$$

其中 $\omega\in\mathbb{S}^2$,

$$v'=v-[(v-u)\cdot\omega]\omega,\quad u'=u+[(v-u)\cdot\omega]\omega$$

分别表示速度为 v 和 u 的粒子在经过碰撞后的速度.

为了方便研究, 像文献 [1,10,14] 一样, 令 $F=F^r+F^b$ 和 $\Phi=F^r-F^b$. 利用 (1.1) 和 (1.2), 可以得到

$$\partial_tF+v\cdot\nabla_xF-\frac{1}{2}\nabla_xU\star F\cdot\nabla_vF+\frac{1}{2}\nabla_xU\star\Phi\cdot\nabla_v\Phi=Q(F,F),\tag{1.4}$$

$$\partial_t\Phi+v\cdot\nabla_x\Phi-\frac{1}{2}\nabla_xU\star F\cdot\nabla_v\Phi+\frac{1}{2}\nabla_xU\star\Phi\cdot\nabla_vF=Q(\Phi,F).\tag{1.5}$$

为了符号的简便, 定义 $\mu(v)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{-|v|^2/2}$ 为单位化的全局 Maxwell 分布. 在本文中, 考虑方程组 (1.4) 和 (1.5) 在平衡态 $[\mu,0]$ 附近的解. 不失一般性, 设

$$F=\mu+\sqrt{\mu}f,\quad \Phi=\sqrt{\mu}\phi.$$

将上面的展开代入方程组 (1.4) 和 (1.5), 可以得到

$$\begin{aligned}&\partial_tf+v\cdot\nabla_xf+L_1f+\frac{1}{2}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\sqrt{\mu}v\\&\quad=\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v(\sqrt{\mu}f)-\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v(\sqrt{\mu}\phi)+\Gamma(f,f),\end{aligned}\tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}&\partial_t\phi+v\cdot\nabla_x\phi+L_2\phi-\frac{1}{2}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\sqrt{\mu}v\\&\quad=\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v(\sqrt{\mu}\phi)-\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v(\sqrt{\mu}f)+\Gamma(\phi,f).\end{aligned}\tag{1.7}$$

假设初始条件为 $[f_0(x,v),\phi_0(x,v)]=[f(0,x,v),\phi(0,x,v)]$, 其中线性碰撞算子 $L_1(\cdot)$, $L_2(\cdot)$ 和非线性碰撞算子 $\Gamma(\cdot,\cdot)$ 的定义如下:

$$\begin{aligned}&L_1f=-\mu^{-\frac{1}{2}}[Q(\mu,\sqrt{\mu}f)+Q(\sqrt{\mu}f,\mu)],\\&L_2\phi=-\mu^{-\frac{1}{2}}Q(\sqrt{\mu}\phi,\mu),\\&\Gamma(\phi,f)=\mu^{-\frac{1}{2}}Q(\sqrt{\mu}\phi,\sqrt{\mu}f).\end{aligned}$$

参考文献 [1,6], 线性算子 L_1 是在定义域 $D(L_1)=\{f\in L^2(\mathbb{R}^3)\mid L_1f\in L^2(\mathbb{R}^3)\}$ 上的非负自伴算子, 对任意固定的 (t,x), L_1 的核空间 $\mathcal{N}(L_1)$ 为 $\{\sqrt{\mu},v\sqrt{\mu},|v|^2\sqrt{\mu}\}$ 张成的 5 维子空间. 进一步地, 令 P_1 为 L^2_v 在核空间 $\mathcal{N}(L_1)$ 上的正交投影, 从而任意函数 $f(t,x,v)$ 可以唯一分解成

$$f=P_1f+(I-P_1)f,$$

称 P_1f 为 f 的宏观部分, $(I-P_1)f$ 为 f 的微观部分.

类似地, 参考文献 [6,10,14], L_2 是定义域为 $D(L_2)=\{\phi\in L^2(\mathbb{R}^3)\mid L_2\phi\in L^2(\mathbb{R}^3)\}$ 的非负自伴算子. 对于任意固定的 (t,x), L_2 的核空间 $\mathcal{N}(L_2)$ 是由 $\{\sqrt{\mu}\}$ 张成的一维子空间. 用 P_2 表示空间 L^2_v 到 $\mathcal{N}(L_2)$ 上的正交投影, 于是任意函数 $g(t,x,v)$ 可唯一分解成宏观部分和微观部分的和:

$$g=P_2g+(I-P_2)g.$$

对于线性算子和非线性算子的其他性质, 第 2 节给出详细证明.

下面对本文中出现的符号作一些说明. 令 $\alpha=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 和 $\beta=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$ 为 3 维向量. 记

$$\partial^\alpha_\beta\equiv\partial^{\alpha_1}_{x_1}\partial^{\alpha_2}_{x_2}\partial^{\alpha_3}_{x_3}\partial^{\beta_1}_{v_1}\partial^{\beta_2}_{v_2}\partial^{\beta_3}_{v_3}. \tag{1.8}$$

若 β 的每一个分量都不大于 $\overline{\beta}$ 对应的分量, 则称 $\beta\leqslant\overline{\beta}$. $\beta<\overline{\beta}$ 意味着 $\beta\leqslant\overline{\beta}$ 且 $|\beta|<|\overline{\beta}|$. 另外, $C^{\overline{\beta}}_\beta$ 是通常的二项式系数. 为了本文后面估计最优时间衰减, 定义空间 $Z_q=L^2(\mathbb{R}^3_v;L^q(\mathbb{R}^3_x))$ 以及相对应的范数

$$\|f\|_{Z_q}=\bigg(\int_{\mathbb{R}^3}\bigg[\int_{\mathbb{R}^3}|f(x,v)|^q\,dx\bigg]^{\frac{2}{q}}dv\bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

记 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 $\mathbb{R}^3_v$ 上的 L^2 内积, $|\cdot|_2$ 为 $\mathbb{R}^3_v$ 上的 L^2 范数. 相应地, $\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^3_v$ 或者 $\mathbb{R}^3_x$ 上的 L^2 内积和范数分别用符号 $(\cdot,\cdot)$ 和 $\|\cdot\|$ 表示. 此外, 用 $\|\cdot\|_{L^\infty_x}$ 来表示 L^∞_x 范数. 本文还用到了关于速度 v 的权函数, $w=w(v)=\sqrt{1+|v|^2}$. 在接下来的讨论过程中, C 代表某些正的常数且行与行之间可能不相同.

回到 Vlasov-Boltzmann 方程组, 定义碰撞频率为

$$\nu(v)=C\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\mu(u)\,du,$$

通过 $\mu(v)$ 的指数衰减性质, 容易得出 $\nu(v)\approx1+|v|$, 即存在常数 $c_1,c_2>0$, 使得 $c_1(1+|v|)\leqslant\nu(v)\leqslant c_2(1+|v|)$. 此外, 本文还运用到了以下的加权范数:

$$|g|^2_\nu=\int_{\mathbb{R}^3}g^2(v)\nu(v)\,dv,\quad \|g\|^2_\nu=\int_{\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^3_v}g^2(x,v)\nu(v)\,dx\,dv.$$

由 $\nu(v)\approx1+|v|$ 可知存在 $C>0$ 使得 $|g|_2\leqslant C|g|_\nu$.

为方便起见, 记

$$\|[f,\phi]\|=\|f\|+\|\phi\|,\quad \|[f,\phi]\|_\nu=\|f\|_\nu+\|\phi\|_\nu.$$

对任意的 $l\geqslant0$, 为了后面的能量估计, 定义 $\mathcal{E}_l(t)$ 为方程组 (1.6) 和 (1.7) 的解 $f(t,x,v)$ 和 $\phi(t,x,v)$ 的瞬时能量泛函, 与其等价的能量泛函记为 $\tilde{\mathcal{E}}_l(t)$:

$$\mathcal{E}_l(t)\approx\tilde{\mathcal{E}}_l(t)=\sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha_\beta f(t),w^l\partial^\alpha_\beta\phi(t)]\|^2. \tag{1.9}$$

另外, 方程组 (1.6) 和 (1.7) 的耗散泛函记为 $\mathcal{D}_l(t)$, 相应的等价泛函记为 $\tilde{\mathcal{D}}_l(t)$:

$$\mathcal{D}_l(t)\approx\tilde{\mathcal{D}}_l(t)=\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha P_1f,\partial^\alpha P_2\phi]\|^2+\sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha_\beta(I-P_1)f,w^l\partial^\alpha_\beta(I-P_2)\phi]\|^2_\nu. \tag{1.10}$$

值得注意的是, 在能量泛函和耗散泛函的定义中都没有包含时间导数, 并且 Poincaré 不等式不适用于全空间, 因此耗散泛函没有包括宏观部分的零阶导数. 在后面的讨论中, 我们选择 Sobolev 空间指标为 $N\geqslant8$.

有了上面符号的定义, 本文的主要结果如下:

定理 1.1 令 $[F_0(x,v),\Phi_0(x,v)]=[\mu+\sqrt{\mu}f_0(x,v),\sqrt{\mu}\phi_0(x,v)]\geqslant 0$. 对于任意的 $l\geqslant 0$ 和某个充分小的 $\varepsilon>0$, 假设 $\mathcal{E}_l(0)\leqslant\varepsilon$, 则 Cauchy 问题 (1.6) 和 (1.7) 存在唯一全局经典解 $[f(t,x,v),\phi(t,x,v)]$, 且满足不等式

$$\mathcal{E}_l(t)+\int_0^t\mathcal{D}_l(s)ds\leqslant C\varepsilon. \tag{1.11}$$

另外, 对于 Cauchy 问题 (1.6) 和 (1.7) 的解 $[f(t,x,v),\phi(t,x,v)]$, 如果进一步假设 $l\geqslant 1$ 和

$$\|[f_0(x,v),\phi_0(x,v)]\|_{Z_1}\leqslant\varepsilon,$$

还有如下的衰减性质:

$$\begin{aligned}&\|[f(t),\phi(t)]\|^2\leqslant\|[P_1f,P_2\phi]\|^2+\|[(I-P_1)f,(I-P_2)\phi]\|^2\leqslant C\varepsilon(1+t)^{-3/2},\\&\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha P_1f,\partial^\alpha P_2\phi]\|^2+\sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant N}\|[w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi]\|^2\leqslant C\varepsilon(1+t)^{-5/2}.\end{aligned} \tag{1.12}$$

在经典的统计力学中, Boltzmann 方程描述了理想气体的碰撞过程和输运行为. 然而, 在实际的物理系统中, 外力的存在会对气体动力学产生重要影响. 外力可以是引力、电磁力和表面力等, 它们会改变气体分子的运动轨迹, 从而影响气体的输运性质. 带外力的 Boltzmann 方程描述了稀薄气体在外加场中的时间演化, 研究带外力的 Boltzmann 方程的解旨在理解和描述在外力作用下气体分子的行为, 并推导出适用于不同外力情形的解析解或数值解. 这对于研究气体的输运性质、热力学性质以及物质的输运过程具有重要意义. 带有 Vlasov 力的 Boltzmann 方程可以帮助我们理解等离子体中粒子的分布函数随时间和空间的演化, 以及粒子的输运行为和等离子体的动力学性质, 然而对于 Vlasov-Boltzmann 方程组解的研究并不多, 因此我们的工作是有意义的.

对于 Boltzmann 方程解的研究, 许多学者通过不同的数学工具, 已经取得了一些重要的结果, 可参见文献 [1–16] 及其所引用的文献. 例如, 文献 [7] 研究了对于周期性的初始扰动下的 Vlasov-Poisson-Boltzmann 方程组, 只要保持相同的质量、动量和总能量 (包括动能和电能), 就能通过能量方法得到唯一的全局时态经典解. 文献 [2] 研究了软势情形下的线性化空间均匀 Boltzmann 方程的初值问题, 通过运用谱分析的方法得到解的衰减形式为 $\mathrm{e}^{-\lambda t^\beta}$, 其中 $\beta<1$, $\lambda>0$, 进一步地得到在平衡态附近的完全非线性初值问题的解. 谱分析方法基于数学分析和函数空间理论, 具有严密的数学基础, 可以提供对 Boltzmann 方程解的精确性质和行为的理论分析; 通过对算子谱的研究, 可以得到解的全局行为和长时间行为的结果. 但是, 谱分析方法通常需要涉及复杂的数学理论和技巧, 对于非线性和复杂碰撞核的 Boltzmann 方程, 研究可能更加困难和复杂. 因此寻求一些更加巧妙的研究方法是非常重要的. Kawashima[11] 引进了一种基于 Fourier 变换的补偿函数方法, 这一方法避免了使用谱分析; 运用能量方法研究非线性 Boltzmann 方程的初值问题; 通过利用 Fourier 变换得到的常微分方程的 Lyapunov 函数, 得到了在靠近 Maxwell 分布时的全局解存在性, 其中 Lyapunov 函数是利用 13 个矩方程的某些性质来构造的. 补偿函数的方法不仅能在不对时间求导的情形下得到解的全局存在性, 而且还能够提供方法研究在时间稳态附近的时间衰减. 本文也借鉴这种研究方法来研究 Vlasov-Boltzmann 方程组.

Vlasov-Boltzmann 方程组作为一种重要的数学模型, 被广泛应用于描述等离子体、星系和宇宙等自由粒子系统的动力学过程. 近年来, 对 Vlasov-Boltzmann 方程组的研究已经取得了显著的进展. 例如, 文献 [1] 考虑了一个由两种类型的粒子组成、相互作用既是短程的 (硬核) 又是长程的 (Kac 型) 流体. 研究在低温下的情形相分离的动力学行为, 通过适当的空间 - 时间重标定, Bastea 等[1] (形式上) 推

导出一个关于粒子位置和速度分布的 Vlasov-Boltzmann 方程组. 文献 [14] 证明了 Vlasov-Boltzmann 方程组在 Maxwell 分布附近的解的扩散展开的全局有效性, 并通过统一的非线性能量方法, 证明了剩余项的一致有界性和时间衰减估计. 文献 [4] 证明了 Vlasov-Boltzmann 方程组的不同粒子之间通过长程斥力相互作用的二元混合物是动态稳定的, 而空间均匀平衡态则变得动态不稳定. 文献 [5] 证明了双孤子在小扰动下的稳定性, 包括平移不变性. 同样的论证还表明了纯相的稳定性, 以及临界温度以上混合相的稳定性. 在临界温度以下, 混合相被证明是不稳定的. 本文将通过结合补偿函数, 利用能量方法研究全局 Maxwell 分布附近的全局解和衰减估计, 我们相信这种方法可以运用到更多复杂的动力学系统中.

本文余下内容的安排如下. 第 2 节引用和证明一些主要基本估计. 第 3 节建立该方程组的补偿函数, 并且结合标准的能量方法得到方程组 (1.6) 和 (1.7) 的能量估计. 第 4 节利用前面所得到的能量估计得到方程组 (1.6) 和 (1.7) 的全局解的存在性和时间衰减, 从而证明本文的主要定理.

2 基本估计

本节引用和证明一些关于线性算子 L_i $(i=1,2)$ 与非线性算子 Γ 的性质.

引理 2.1 [6,10] 线性碰撞算子具有以下的性质: 对任意的 $i=1,2$ 及函数 $h_1(v)$ 和 $h_2(v)$, 有

$$\langle L_i h_1, h_2\rangle = \langle h_1, L_i h_2\rangle, \tag{2.1}$$

$\langle L_i h, h\rangle \geqslant 0$, $L_i h = 0$ 当且仅当 $h = P_i h$. 另外, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$\langle L_i h, h\rangle \geqslant \delta |(I-P_i)h|_\nu. \tag{2.2}$$

引理 2.2 (参见文献 [9, 引理 3.3]) 对于任意的 $l \geqslant 0$, $i=1,2$, 存在常数 C_β 和 $C>0$ 使得

$$\langle w^{2l}\partial_\beta L_i h, \partial_\beta h\rangle \geqslant \frac{1}{2}|w^l \partial_\beta h|_\nu^2 - C_\beta |h|_\nu^2. \tag{2.3}$$

设 $|\alpha|+|\beta| \leqslant N$, 则有

$$\begin{aligned} &|(w^{2l}\partial_\beta^\alpha \Gamma(h_1,h_2), \partial_\beta^\alpha h_3)| \\ &\quad \leqslant C \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2\leqslant\alpha \\ \beta_1+\beta_2\leqslant\beta}} \{\|w^l\partial_{\beta_1}^{\alpha_1} h_1\| \|w^l \partial_{\beta_2}^{\alpha_2} h_2\|_\nu + \|w^l\partial_{\beta_1}^{\alpha_1} h_1\|_\nu \|w^l\partial_{\beta_2}^{\alpha_2} h_2\|\} \|w^l \partial_\beta^\alpha h_3\|_\nu. \end{aligned} \tag{2.4}$$

下面考虑非线性碰撞算子的一些性质, 为后面能量估计作准备.

引理 2.3 对于任意 $\eta \geqslant 0$, 都有

$$|(w^{2l}\partial_\beta^\alpha \Gamma(f,f), \partial_\beta^\alpha (I-P_1)f)| \leqslant C_\eta \widetilde{\mathcal{E}}_l(t)\widetilde{\mathcal{D}}_l(t) + \eta \|w^l \partial_\beta^\alpha (I-P_1)f\|_\nu^2, \tag{2.5}$$

$$|(w^{2l}\partial_\beta^\alpha \Gamma(\phi,f), \partial_\beta^\alpha (I-P_2)\phi)| \leqslant C_\eta \widetilde{\mathcal{E}}_l(t)\widetilde{\mathcal{D}}_l(t) + \eta \|w^l \partial_\beta^\alpha (I-P_2)\phi\|_\nu^2. \tag{2.6}$$

证明 可参见文献 [15, 引理 2.5]. □

下面对非线性算子 $\Gamma(\cdot,\cdot)$ 的 Z_1 范数和在 $\mathbb{R}^3_x \times \mathbb{R}^3_v$ 上的 L^2 范数进行估计, 为后面的时间衰减估计作准备.

引理 2.4 对于任意函数 $h_1 = h_1(x,v)$ 和 $h_2 = h_2(x,v)$, 都有

$$\|\Gamma(h_1,h_2)\|_{Z_1} \leqslant C\|wh_1\| \|wh_2\|.$$

证明 根据 $\Gamma(h_1,h_2)$ 的定义, 有

$$\Gamma(h_1,h_2)=\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}|(u-v)\cdot\omega|\mu^{\frac{1}{2}}(u)\{h_1(v')h_2(u')-h_1(v)h_2(u)\}du d\omega. \tag{2.7}$$

将两项分别记为 $\Gamma_{\rm gain}$ 与 $\Gamma_{\rm loss}$, 即 $\Gamma(h_1,h_2)=\Gamma_{\rm gain}-\Gamma_{\rm loss}$.

首先估计 $\|\Gamma_{\rm loss}\|_{Z_1}$. 运用 Hölder 不等式, 可以得到

$$\begin{aligned}\|\Gamma_{\rm loss}\|_{Z_1}^2&=\int_{\mathbb{R}^3_v}\left[\int_{\mathbb{R}^3_x}\left|\int_{\mathbb{R}^3_u\times\mathbb{S}^2}|(u-v)\cdot\omega|\mu^{\frac{1}{2}}(u)h_1(v)h_2(u)du d\omega\right|dx\right]^2dv\\&\leqslant C\int_{\mathbb{R}^3_v}\left[\int_{\mathbb{R}^3_u}|u-v|\mathrm{e}^{-\frac{|u|^2}{4}}\|h_1(v)\|_{L^2_x}\|h_2(u)\|_{L^2_x}du\right]^2dv\\&\leqslant C\int_{\mathbb{R}^3_v}\|h_1(v)\|_{L^2_x}^2\left[\int_{\mathbb{R}^3_u}|u-v|^2\mathrm{e}^{-\frac{|u|^2}{2}}du\int_{\mathbb{R}^3_u}\|h_2(u)\|_{L^2_x}^2du\right]dv.\end{aligned}$$

注意到

$$\int_{\mathbb{R}^3_u}|u-v|^2\mathrm{e}^{-\frac{|u|^2}{2}}du\leqslant C(1+|v|)^2\leqslant Cw^2(v),$$

所以

$$\begin{aligned}\|\Gamma_{\rm loss}\|_{Z_1}^2&\leqslant C\int_{\mathbb{R}^3_v}w^2(v)\|h_1(v)\|_{L^2_x}^2dv\cdot\int_{\mathbb{R}^3_u}\|h_2(u)\|_{L^2_x}^2du\\&\leqslant C\|wh_1\|^2\|h_2\|^2.\end{aligned}\tag{2.8}$$

对于 $\|\Gamma_{\rm gain}\|_{Z_1}$, 类似地,

$$\begin{aligned}\|\Gamma_{\rm gain}\|_{Z_1}^2&\leqslant C\int_{\mathbb{R}^3_v}\left[\int_{\mathbb{R}^3_u}|u-v|\mathrm{e}^{-\frac{|u|^2}{4}}\|h_1(v')\|_{L^2_x}\|h_2(u')\|_{L^2_x}du\right]^2dv\\&\leqslant\int_{\mathbb{R}^3_v}\left[\int_{\mathbb{R}^3_u}|u-v|^2\mathrm{e}^{-\frac{|u|^2}{2}}du\int_{\mathbb{R}^3_u}\|h_1(v')\|_{L^2_x}^2\|h_2(u')\|_{L^2_x}^2du\right]dv\\&\leqslant C\int_{\mathbb{R}^3_v}\int_{\mathbb{R}^3_u}(1+|v|)^2\|h_1(v')\|_{L^2_x}^2\|h_2(u')\|_{L^2_x}^2du dv.\end{aligned}$$

由动量守恒律和能量守恒律有 $(1+|v|)^2\leqslant C(1+|v'|)^2(1+|u'|)^2$, 而且 $du dv=du'dv'$, 于是

$$\begin{aligned}\|\Gamma_{\rm gain}\|_{Z_1}^2\|\Gamma_{\rm gain}\|_{Z_1}^2&\leqslant C\int_{\mathbb{R}^3_v\times\mathbb{R}^3_u}(1+|v'|)^2(1+|u'|)^2\|h_1(v')\|_{L^2_x}^2\|h_2(u')\|_{L^2_x}^2du'dv'\\&\leqslant\|wh_1\|^2\|wh_2\|^2.\end{aligned}\tag{2.9}$$

结合 (2.8) 与 (2.9) 便得到引理 2.4 中的估计. □

引理 2.5 对于任意 $l\geqslant1$, 都有

$$\sum_{|\alpha|\leqslant1}\|\partial^\alpha\Gamma(f,f)\|^2\leqslant C\tilde{\mathcal{E}}_l(t)\overline{\mathcal{E}}_l(t),\tag{2.10}$$

其中

$$\overline{\mathcal{E}}_l(t)=\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha P_1f,\partial^\alpha P_2\phi]\|^2+\sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha_\beta(I-P_1)f,w^l\partial^\alpha_\beta(I-P_2)\phi]\|^2.$$

证明 由定义 $\partial^\alpha\Gamma(f,f)=\partial^\alpha\Gamma_{\rm gain}-\partial^\alpha\Gamma_{\rm loss}$, 我们仅考虑 $|\alpha|=1$ 的情形. 对于 $|\alpha|=0$ 的情形, 方法类似. 根据 (2.7), 对于 $|\alpha|=1$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=1}\|\partial^\alpha\Gamma_{\rm loss}\|^2&\leqslant C\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha\\|\alpha|=1}}\int_{\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^3_v}\left[\int_{\mathbb{R}^3_u}|u-v|{\rm e}^{-\frac{|u|^2}{4}}\partial^{\alpha_1}f(v)\partial^{\alpha_2}f(u)\,du\right]^2dx\,dv\\&\leqslant C\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha\\|\alpha|=1}}\int_{\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^3_v}\left[\int_{\mathbb{R}^3_u}|u-v|^2{\rm e}^{-\frac{|u|^2}{2}}du\int_{\mathbb{R}^3_u}|\partial^{\alpha_1}f(v)|^2|\partial^{\alpha_2}f(u)|^2du\right]dx\,dv.\end{aligned}\tag{2.11}$$

由 $\int_{\mathbb{R}^3_u}|u-v|^2{\rm e}^{-\frac{|u|^2}{2}}du\leqslant C(1+|v|)^2\leqslant Cw^2(v)$ 和 Sobolev 嵌入不等式 $\|f\|_{L^\infty_x}\leqslant\sum_{|\alpha|\leqslant1}\|\nabla_x\partial^\alpha f\|_{L^2_x}$ 有

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=1}\|\partial^\alpha\Gamma_{\rm loss}\|^2&\leqslant C\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha\\|\alpha|=1}}\int_{\mathbb{R}^3_x}\left[\int_{\mathbb{R}^3_v}|w(v)\partial^{\alpha_1}f(v)|^2dv\int_{\mathbb{R}^3_u}|\partial^{\alpha_2}f(u)|^2du\right]dx\\&\leqslant C\||f|_2\|^2_{L^\infty_x}\sum_{|\alpha_1|=1}\|w\partial^{\alpha_1}f\|^2+C\||wf|_2\|^2_{L^\infty_x}\sum_{|\alpha_2|=1}\|\partial^{\alpha_2}f\|^2\\&\leqslant\sum_{|\alpha'|\leqslant1}\|\nabla_x\partial^{\alpha'}f\|^2\sum_{|\alpha_1|=1}\|w\partial^{\alpha_1}f\|^2+C\sum_{|\alpha'|\leqslant1}\|w\nabla_x\partial^{\alpha'}f\|^2\sum_{|\alpha_2|=1}\|\partial^{\alpha_2}f\|^2.\end{aligned}$$

对于 $\|\partial^\alpha\Gamma_{\rm gain}\|$ 的估计, 同样仅考虑 $|\alpha|=1$ 的情形. 由 (2.7) 得到

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=1}\|\partial^\alpha\Gamma_{\rm gain}\|^2&\leqslant C\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha\\|\alpha|=1}}\int_{\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^3_v}\left[\int_{\mathbb{R}^3_u}|u-v|{\rm e}^{-\frac{|u|^2}{4}}\partial^{\alpha_1}f(v')\partial^{\alpha_2}f(u')\,du\right]^2dx\,dv\\&\leqslant C\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha\\|\alpha|=1}}\int_{\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^3_v}\left[\int_{\mathbb{R}^3_u}|u-v|^2{\rm e}^{-\frac{|u|^2}{2}}du\int_{\mathbb{R}^3_u}|\partial^{\alpha_1}f(v')|^2|\partial^{\alpha_2}f(u')|^2du\right]dx\,dv.\end{aligned}\tag{2.12}$$

由于 $\int_{\mathbb{R}^3_u}|u-v|^2{\rm e}^{-\frac{|u|^2}{2}}du\leqslant C(1+|v|)^2\leqslant C(1+|v'|)^2(1+|u'|)^2$, $du\,dv=du'dv'$, 于是

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=1}\|\partial^\alpha\Gamma_{\rm gain}\|^2&\leqslant C\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha\\|\alpha|=1}}\int_{\mathbb{R}^3_x}|w\partial^{\alpha_1}f|_2^2|w\partial^{\alpha_2}f|_2^2dx\\&\leqslant C\||wf|_2\|^2_{L^\infty_x}\sum_{|\alpha_1|=1}\|w\partial^{\alpha_1}f\|^2+\||wf|_2\|^2_{L^\infty_x}\sum_{|\alpha_2|=1}\|w\partial^{\alpha_2}f\|^2\\&\leqslant C\sum_{|\alpha'|\leqslant1}\|w\nabla_x\partial^{\alpha'}f\|^2\sum_{|\alpha_1|=1}\|w\partial^{\alpha_1}f\|^2+\sum_{|\alpha'|\leqslant1}\|w\nabla_x\partial^{\alpha'}f\|^2\sum_{|\alpha_2|=1}\|w\partial^{\alpha_2}f\|^2.\end{aligned}$$

利用 $\mu(v)$ 的指数衰减性质, 容易得到: 对于任意的多重指标 β, 存在 $C>0$ 使得

$$|w^l\partial_\beta P_1f|_\nu\leqslant C|P_1f|_2,\quad|w^l\partial_\beta P_2\phi|_\nu\leqslant C|P_2\phi|_2.\tag{2.13}$$

于是

$$\sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|\leqslant N\\1\leqslant|\alpha|}}\|w^l\partial^\alpha_\beta f(t)\|^2\leqslant C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|\partial^\alpha P_1f\|^2+C\sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|\leqslant N\\1\leqslant|\alpha|}}\|w^l\partial^\alpha_\beta(I-P_1)f\|^2.$$

将上面的估计加起来便得到此引理的估计. □

本节最后一个引理是关于在 (1.3) 中定义的卷积算子:

$$U * h(x) = \int_{\mathbb{R}^3_{x'}} U(|x-x'|)h(x')dx',$$

其中 U 为第 1 节中定义的函数.

引理 2.6 当 $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $1/p + 1/q \geqslant 1$ 时, 对于任意函数 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$, 有

$$\partial_{x_i} U * h = U * \partial_{x_i} h = \partial_{x_i}(U * h), \tag{2.14}$$

$$(U * h_1, h_2) = (h_1, U * h_2), \tag{2.15}$$

$$\|U * h\|_{L^r} \leqslant \|U\|_{L^p} \|h\|_{L^q}, \quad 1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \tag{2.16}$$

对定义在 $\mathbb{R}^3_x \times \mathbb{R}^3_v$ 上的函数 $h(x,v)$, 对于任意 α, 都有

$$\|\partial^\alpha \nabla_x U \star (\sqrt{\mu} h)\|_{L^r_x} \leqslant C \|\nabla_x h\|, \quad 2 \leqslant r \leqslant \infty. \tag{2.17}$$

证明 (2.14)–(2.16) 可由卷积的性质得到, 这里省去证明过程 (参见文献 [14]). 我们仅证明 (2.17). 注意到 $U(\cdot)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上光滑有紧支集的函数, 按照定义 (1.3), 利用 (2.14) 和 (2.16) 可得, 对任意的 $r \leqslant \infty$ 和 $p = \frac{2r}{2+r}$, 都有

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha \nabla_x U \star (\sqrt{\mu} h)\|_{L^r_x} &= \left\| \partial^\alpha U * \int_{\mathbb{R}^3} \sqrt{\mu}\, \nabla_x h dv \right\|_{L^r_x} \\
&\leqslant \|\partial^\alpha U\|_{L^p_x} \left\| \int_{\mathbb{R}^3} \sqrt{\mu}\, \nabla_x h dv \right\|_{L^2_x} \\
&\leqslant C \left(\int_{\mathbb{R}^3_x} \left[\int_{\mathbb{R}^3_v} \sqrt{\mu}\, \nabla_x h dv \right]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C \left(\int_{\mathbb{R}^3_x} \left[\int_{\mathbb{R}^3_v} \mu dv \int_{\mathbb{R}^3_v} |\nabla_x h|^2 dv \right] dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C \|\nabla_x h\|.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

至此完成了引理的证明. □

3 能量估计与补偿函数

本节首先考虑方程组 (1.6) 和 (1.7) 微观项的能量估计. 为此, 将方程组 (1.6) 和 (1.7) 写成下面情形:

$$\begin{aligned}
&[\partial_t + v \cdot \nabla_x + L_1](I - P_1) f \\
&\quad = \Gamma(f,f) - \frac{1}{2} \nabla_x U \star (\sqrt{\mu} f) \cdot \sqrt{\mu} v - \frac{1}{4} \nabla_x U \star (\sqrt{\mu} f) \cdot v f + \frac{1}{2} \nabla_x U \star (\sqrt{\mu} f) \cdot \nabla_v f \\
&\qquad + \frac{1}{4} \nabla_x U \star (\sqrt{\mu} \phi) \cdot v \phi - \frac{1}{2} \nabla_x U \star (\sqrt{\mu} \phi) \cdot \nabla_v \phi - [\partial_t + v \cdot \nabla_x] P_1 f, \\
&[\partial_t + v \cdot \nabla_x + L_2](I - P_2) \phi
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$= \Gamma(\phi, f) + \frac{1}{2}\nabla_x U \star (\sqrt{\mu}\phi)\cdot\sqrt{\mu}v - \frac{1}{4}\nabla_x U \star (\sqrt{\mu}f)\cdot v\phi + \frac{1}{2}\nabla_x U \star (\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v\phi$$
$$+ \frac{1}{4}\nabla_x U \star (\sqrt{\mu}\phi)\cdot vf - \frac{1}{2}\nabla_x U \star (\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v f - [\partial_t + v\cdot\nabla_x]P_2\phi. \tag{3.2}$$

下面用标准的能量方法来得到加权的速度和空间的混合导数估计.

引理 3.1 对于任意 $l \geqslant 0$, 下面不等式成立:

$$\sum_{\substack{|\beta|\geqslant 1\\ |\alpha|+|\beta|\leqslant N}} \left[\frac{d}{dt}\|[w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f, w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi]\|^2 + \|[w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f, w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi]\|_\nu^2\right]$$
$$\leqslant C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha P_1 f, \partial^\alpha P_2\phi]\|^2 + C\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha(I-P_1)f, w^l\partial^\alpha(I-P_2)\phi]\|_\nu^2$$
$$+ C(\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)} + \widetilde{\mathcal{E}}_l(t))\widetilde{\mathcal{D}}_l(t). \tag{3.3}$$

证明 对 (3.1) 和 (3.2) 作用 ∂_β^α $(\beta\neq 0)$, 可得

$$[\partial_t + v\cdot\nabla_x]\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f + \sum_{|\beta_1|=1} C_\beta^{\beta_1}\partial_{\beta_1}v\cdot\nabla_x\partial_{\beta-\beta_1}^\alpha(I-P_1)f + \partial_\beta^\alpha L_1(I-P_1)f$$
$$= \partial_\beta^\alpha\Gamma(f,f) - \frac{1}{2}\partial^\alpha\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\partial_\beta(\sqrt{\mu}v) - \frac{1}{4}\sum_{\substack{\alpha_1\leqslant\alpha\\ \beta_1\leqslant\beta}} C_\alpha^{\alpha_1}C_\beta^{\beta_1}\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\partial_{\beta_1}v\partial_{\beta-\beta_1}^{\alpha-\alpha_1}f$$
$$+ \frac{1}{2}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\partial_\beta^\alpha\nabla_v f + \frac{1}{2}\sum_{\alpha_1<\alpha} C_\alpha^{\alpha_1}\partial^{\alpha-\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\partial_\beta^{\alpha_1}\nabla_v f$$
$$+ \frac{1}{4}\sum_{\substack{\alpha_1\leqslant\alpha\\ \beta_1\leqslant\beta}} C_\alpha^{\alpha_1}C_\beta^{\beta_1}\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\partial_{\beta_1}v\partial_{\beta-\beta_1}^{\alpha-\alpha_1}\phi - \frac{1}{2}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\partial_\beta^\alpha\nabla_v\phi$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{\alpha_1<\alpha} C_\alpha^{\alpha_1}\partial^{\alpha-\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\partial_\beta^{\alpha_1}\nabla_v\phi - \sum_{\beta_1<\beta} C_\beta^{\beta_1}\partial_{\beta-\beta_1}v\cdot\nabla_x\partial_{\beta_1}^\alpha Pf$$
$$- [\partial_t + v\cdot\nabla_x]\partial_\beta^\alpha P_1 f, \tag{3.4}$$
$$[\partial_t + v\cdot\nabla_x]\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi + \sum_{|\beta_1|=1} C_\beta^{\beta_1}\partial_{\beta_1}v\cdot\nabla_x\partial_{\beta-\beta_1}^\alpha(I-P_2)\phi + \partial_\beta^\alpha L_2(I-P_2)\phi$$
$$= \partial_\beta^\alpha\Gamma(\phi,f) + \frac{1}{2}\partial^\alpha\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\partial_\beta(\sqrt{\mu}v) - \frac{1}{4}\sum_{\substack{\alpha_1\leqslant\alpha\\ \beta_1\leqslant\beta}} C_\alpha^{\alpha_1}C_\beta^{\beta_1}\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\partial_{\beta_1}v\partial_{\beta-\beta_1}^{\alpha-\alpha_1}\phi$$
$$+ \frac{1}{2}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\partial_\beta^\alpha\nabla_v\phi + \frac{1}{2}\sum_{\alpha_1<\alpha} C_\alpha^{\alpha_1}\partial^{\alpha-\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\partial_\beta^{\alpha_1}\nabla_v\phi$$
$$+ \frac{1}{4}\sum_{\substack{\alpha_1\leqslant\alpha\\ \beta_1\leqslant\beta}} C_\alpha^{\alpha_1}C_\beta^{\beta_1}\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\partial_{\beta_1}v\partial_{\beta-\beta_1}^{\alpha-\alpha_1}f - \frac{1}{2}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\partial_\beta^\alpha\nabla_v f$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{\alpha_1<\alpha} C_\alpha^{\alpha_1}\partial^{\alpha-\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\partial_\beta^{\alpha_1}\nabla_v f - \sum_{\beta_1<\beta} C_\beta^{\beta_1}\partial_{\beta-\beta_1}v\cdot\nabla_x\partial_{\beta_1}^\alpha P_2\phi$$
$$- [\partial_t + v\cdot\nabla_x]\partial_\beta^\alpha P_2\phi, \tag{3.5}$$

将 (3.4) 乘以 $w^{2l}\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f$、(3.5) 乘以 $w^{2l}\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi$ 后分别在 $\mathbb{R}_x^3\times\mathbb{R}_v^3$ 上进行积分. 首先对 (3.4) 进行估计, 显然 (3.4) 左边第一项积分后等于 $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\|^2$. 由 Hölder 不等式可知, (3.4) 左端

第二项积分后可被下面式子控制:

$$\eta\|w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\|^2+C_\eta\sum_{|\beta_1|=1}\|w^l\nabla_x\partial_{\beta-\beta_1}^\alpha(I-P_1)f\|^2. \tag{3.6}$$

对于 (3.4) 左边第三项的估计, 在引理 2.2 中, 令 $h=\partial^\alpha(I-P_1)f$, 则有

$$(\partial_\beta^\alpha L_1(I-P_1)f,w^{2l}\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f)\geqslant\frac{1}{2}\|w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\|_\nu^2-C_\beta\|\partial^\alpha(I-P_1)f\|_\nu^2. \tag{3.7}$$

根据引理 2.3, 对于 (3.4) 右边第一项的估计, 有

$$|(w^{2l}\partial_\beta^\alpha\Gamma(f,f),\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f)|\leqslant\eta\|w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\|_\nu^2+C_\eta\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).$$

对于 (3.4) 右边第二项的估计, 利用引理 2.6 和 $\mu(v)$ 的指数衰减性质可以得到

$$\begin{aligned}&|(\partial^\alpha\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\partial_\beta(\sqrt{\mu}v),w^{2l}\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f)|\\&\quad\leqslant C_\eta\|\partial^\alpha\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\|^2+\eta\|w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\|^2\\&\quad\leqslant C_\eta\|\nabla_xf\|^2+\eta\|w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\|^2.\end{aligned}$$

注意到 $|\beta|\geqslant1$, $|\alpha|+|\beta|\leqslant N$, 于是 $|\alpha|\leqslant N-1$. 将 f 分解为 $P_1f+(I-P_1)f$, 则关于 (3.4) 右边第三项的宏观部分做积分后有

$$\begin{aligned}&|(w^{2l}\partial^{\alpha_1}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\partial_{\beta_1}v\partial_{\beta-\beta_1}^{\alpha-\alpha_1}P_1f,\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f)|\\&\quad\leqslant\left|\int_{\mathbb{R}_v^3}w^{2l}\partial_{\beta_1}v\left[\int_{\mathbb{R}_x^3}\partial^{\alpha_1}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\partial_{\beta-\beta_1}^{\alpha-\alpha_1}P_1f\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\,dx\right]dv\right|\\&\quad\leqslant C\int_{\mathbb{R}_v^3}w^{2l}\nu(v)\|\partial^{\alpha_1}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\|_{L_x^3}\cdot\|\partial_{\beta-\beta_1}^{\alpha-\alpha_1}P_1f\|_{L_x^6}\cdot\|\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\|_{L_x^2}\,dv,\end{aligned} \tag{3.8}$$

这里利用了 Hölder 不等式和估计 $|\partial_\beta v|\leqslant C(1+|v|)\approx C\nu(v)$. 因为 $U\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, 所以由引理 2.6 可得

$$\|\partial^{\alpha_1}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\|_{L_x^3}\leqslant C\|\nabla_xf\|\leqslant C\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}.$$

接下来, 运用 Hölder 不等式、(2.13) 以及 Sobolev 嵌入不等式 $\|f\|_{L_x^6}\leqslant\|\nabla_xf\|_{L_x^2}$, 有

$$\begin{aligned}(3.8)&\leqslant C\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}\int_{\mathbb{R}^3}w^{2l}\nu(v)\|\nabla_x\partial_{\beta-\beta_1}^{\alpha-\alpha_1}P_1f\|_{L_x^2}\|\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\|_{L_x^2}\,dv\\&\leqslant C\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}(\|\nabla_x\partial^{\alpha-\alpha_1}P_1f\|^2+\|w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\|_\nu^2)\\&\leqslant C\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}\widetilde{D}_l(t).\end{aligned}$$

另外, 根据引理 2.6, 对于 (3.4) 右边第三项的微观部分积分后, 有

$$\begin{aligned}&|(w^{2l}\partial^{\alpha_1}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\partial_{\beta_1}v\partial_{\beta-\beta_1}^{\alpha-\alpha_1}(I-P_1)f,\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f)|\\&\quad\leqslant\|\partial^{\alpha_1}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\|_{L_x^\infty}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}w^{2l}\nu(v)|\partial_{\beta-\beta_1}^{\alpha-\alpha_1}(I-P_1)f||\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f|dvdx\\&\quad\leqslant C\|\nabla_xf\|\|w^l\partial_{\beta-\beta_1}^{\alpha-\alpha_1}(I-P_1)f\|_\nu\|w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\|_\nu\\&\quad\leqslant C\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l}(t)\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).\end{aligned}$$

至此完成了 (3.4) 右边第三项的估计.

注意到 $|\alpha|\leqslant N-1$. 对于 (3.4) 右边第四项, 将 f 分解为 $P_1f+(I-P_1)f$, 根据引理 2.6 和 (2.13), 可得

$$\begin{aligned}&|(\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\partial_\beta^\alpha\nabla_vP_1f,w^{2l}\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f)|\\&\quad\leqslant\|\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\|_{L_x^\infty}\|w^l\partial_\beta^\alpha\nabla_vP_1f\|\|w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\|\\&\quad\leqslant\|\nabla_xf\|\|\partial^\alpha P_1f\|\|w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\|_\nu\\&\quad\leqslant C\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}\widetilde{\mathcal{D}}_l(t),\end{aligned}$$

这里到用了 $\|\nabla_xf\|\leqslant\|\nabla_xP_1f\|+\|\nabla_x(I-P_1)f\|\leqslant\sqrt{\widetilde{\mathcal{D}}_l(t)}$.

对于微观部分, 由于 $|\nabla_vw^{2l}|\leqslant Cw^{2l}$, 根据引理 2.6, 运用分部积分, 有

$$\begin{aligned}&|(\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\partial_\beta^\alpha\nabla_v(I-P_1)f,w^{2l}\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f)|\\&\quad=\left|\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}w^{2l}(v)\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\partial_\beta^\alpha\nabla_v(I-P_1)f\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\,dx\,dv\right|\\&\quad=\frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}w^{2l}(v)\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v\{\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\}^2\,dx\,dv\right|\\&\quad=\frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\nabla_vw^{2l}(v)\cdot\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)|\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f|^2\,dx\,dv\right|\\&\quad\leqslant C\|\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\|_{L_x^\infty}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}|w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f|^2\,dx\,dv\\&\quad\leqslant C\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).\end{aligned}$$

至此完成了 (3.4) 右边第四项的估计.

由于 $|\alpha_1|+|\beta|\leqslant N-1$, 对于 (3.4) 右边第五和八项, 利用引理 2.6 和 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}&|(\partial^{\alpha-\alpha_1}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\partial_\beta^{\alpha_1}\nabla_vf-\partial^{\alpha-\alpha_1}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\partial_\beta^{\alpha_1}\nabla_v\phi,w^{2l}\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f)|\\&\quad\leqslant\{\|\partial^{\alpha-\alpha_1}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\|_{L_x^\infty}\|w^l\partial_\beta^{\alpha_1}\nabla_vf\|\\&\qquad+\|\partial^{\alpha-\alpha_1}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}\phi)\|_{L_x^\infty}\|w^l\partial_\beta^{\alpha_1}\nabla_v\phi\|\}\|w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\|\\&\quad\leqslant C\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).\end{aligned}$$

由于 (3.4) 右边第六项与第三项有相同的结构, 所以根据第三项相似的估计方法, 有

$$|(w^{2l}\partial^{\alpha_1}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\partial_{\beta_1}v\partial_{\beta-\beta_1}^{\alpha-\alpha_1}\phi,\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f)|\leqslant C\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).$$

由于 $|\beta|\geqslant1$, 对于 (3.4) 右边第九项, 利用 (2.13) 和 Hölder 不等式可以得到

$$|(w^{2l}\partial_{\beta-\beta_1}v\cdot\nabla_x\partial_{\beta_1}^\alpha P_1f,\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f)|\leqslant C_\eta\|\nabla_x\partial^\alpha P_1f\|^2+\eta\|w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\|_\nu^2.$$

对于任意 $\eta\geqslant0$, 利用 Hölder 不等式, (3.4) 右边最后一项满足

$$|(w^{2l}[\partial_t+v\cdot\nabla_x]\partial_\beta^\alpha P_1f,\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f)|$$

$$\leqslant \eta\|w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\|_\nu^2 + C_\eta\|\partial_t\partial^\alpha P_1 f\|^2 + C_\eta\|\nabla_x\partial^\alpha P_1 f\|^2$$
$$\leqslant \eta\|w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\|_\nu^2 + C_\eta\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|\partial^\alpha P_1 f\|^2 + C_\eta\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|\partial^\alpha(I-P_1)f\|^2 + C\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).$$

这里用了下面断言:

$$\|\partial_t\partial^\alpha P_1 f\|^2 \leqslant C\sum_{1\leqslant|\alpha'|\leqslant N}\|\partial^{\alpha'}P_1 f\|^2 + C\sum_{1\leqslant|\alpha'|\leqslant N}\|\partial^{\alpha'}(I-P_1)f\|^2 + C\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)\widetilde{\mathcal{D}}_l(t). \tag{3.9}$$

下面证明断言估计 (3.9) 是成立的. 首先, 对 (3.1) 作用 $\partial^\alpha(|\alpha|\leqslant N-1)$, 可得

$$\begin{aligned}[\partial_t + v\cdot\nabla_x]\partial^\alpha P_1 f = {}& \partial^\alpha\Gamma(f,f) - \frac{1}{2}\partial^\alpha\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\sqrt{\mu}v - \frac{1}{4}\partial^\alpha\{\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot vf\}\\ &+\frac{1}{2}\partial^\alpha\{\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v f\} + \frac{1}{4}\partial^\alpha\{\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot v\phi\}\\ &-\frac{1}{2}\partial^\alpha\{\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v\phi\} - [\partial_t+v\cdot\nabla_x]\partial^\alpha(I-P_1)f - \partial^\alpha L_1(I-P_1)f. \end{aligned}\tag{3.10}$$

由于 $\langle P_1\partial_t\partial^\alpha f, \partial^\alpha\Gamma(f,f) - [\partial_t+L_1]\partial^\alpha(I-P_1)f\rangle = 0$, 将 (3.10) 与 $\partial_t\partial^\alpha P_1 f$ 在 $\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^3_v$ 上作内积:

$$\begin{aligned}&\|\partial_t\partial^\alpha P_1 f\|^2 + (v\cdot\nabla_x\partial^\alpha P_1 f, \partial_t\partial^\alpha P_1 f)\\ &= \Big(-\frac{1}{4}\partial^\alpha\{\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot vf\} + \frac{1}{2}\partial^\alpha\{\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v f\}, \partial_t\partial^\alpha P_1 f\Big)\\ &\quad + \Big(\frac{1}{4}\partial^\alpha\{\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot v\phi\} - \frac{1}{2}\partial^\alpha\{\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v\phi\}, \partial_t\partial^\alpha P_1 f\Big)\\ &\quad - \Big(\frac{1}{2}\partial^\alpha\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\sqrt{\mu}v, \partial_t\partial^\alpha P_1 f\Big) - (v\cdot\nabla_x\partial^\alpha(I-P_1)f, \partial_t\partial^\alpha P_1 f).\end{aligned}\tag{3.11}$$

注意到 $P_1 f$ 关于 v 具有指数衰减性质, 我们先对 (3.11) 右边第一行进行估计. 根据引理 2.6 和 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1}{4}\partial^\alpha(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot vf) - \frac{1}{2}\partial^\alpha(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v f), \partial_t\partial^\alpha P_1 f\Big)\\ &= \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} C_\alpha^{\alpha_1}\Big(\frac{1}{4}\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot v\partial^{\alpha_2}f - \frac{1}{2}\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v\partial^{\alpha_2}f, \partial_t\partial^\alpha P_1 f\Big)\\ &\leqslant C_\eta\sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha}(\|\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\partial^{\alpha_2}f\|^2 + \|\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v\partial^{\alpha_2}f\|^2) + C\eta\|\partial_t\partial^\alpha P_1 f\|^2\\ &\leqslant C_\eta\sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha}\|\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\|_{L^\infty_x}^2(\|\partial^{\alpha_2}f\|^2 + \|\nabla_v\partial^{\alpha_2}f\|^2) + C\eta\|\partial_t\partial^\alpha P_1 f\|^2\\ &\leqslant C_\eta\sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha}\|\nabla_x f\|^2(\|\partial^{\alpha_2}f\|^2 + \|\nabla_v\partial^{\alpha_2}f\|^2) + C\eta\|\partial_t\partial^\alpha P_1 f\|^2\\ &\leqslant C_\eta\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)\widetilde{\mathcal{D}}_l(t) + C\eta\|\partial_t\partial^\alpha P_1 f\|^2.\end{aligned}\tag{3.12}$$

同理, 对 (3.11) 右边第二行经过相同的步骤可以得到相同的结果. 下面来估计 (3.11) 最后一行和左边第二项. 利用 $P_1 f$ 关于 v 的指数衰减性质, 由引理 2.6 和 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}&|(\partial^\alpha\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\sqrt{\mu}v, \partial_t\partial^\alpha P_1 f)| + |(v\cdot\nabla_x\partial^\alpha(I-P_1)f, \partial_t\partial^\alpha P_1 f)| + |(v\cdot\nabla_x\partial^\alpha P_1 f, \partial_t\partial^\alpha P_1 f)|\\ &\leqslant C_\eta\|\partial^\alpha U\star(\sqrt{\mu}\nabla_x f)\|^2 + C_\eta\|\nabla_x\partial^\alpha(I-P_1)f\|^2 + C_\eta\|\nabla_x\partial^\alpha P_1 f\|^2 + \eta\|\partial_t\partial^\alpha P_1 f\|^2\end{aligned}$$

$$\leqslant C_\eta(\|\partial^\alpha U\|^2\ \|\nabla_x f\|^2+\|\nabla_x\partial^\alpha(I-P_1)f\|^2+\|\nabla_x\partial^\alpha P_1 f\|^2)+\eta\|\partial_t\partial^\alpha P_1 f\|^2$$
$$\leqslant C_\eta\sum_{1\leqslant|\alpha'|\leqslant N}\|\partial^{\alpha'}P_1 f\|^2+C_\eta\sum_{1\leqslant|\alpha'|\leqslant N}\|\partial^{\alpha'}(I-P_1)f\|^2+\eta\|\partial_t\partial^\alpha P_1 f\|^2. \tag{3.13}$$

因此, 当 η 足够小时, (3.9) 成立.

综合上面的估计, 只有 (3.4) 右边第七项还没有被估计. 因而, 对于任意 $l\geqslant 0$, 下面不等式成立:

$$\sum_{\substack{|\beta|\geqslant 1\\ |\alpha|+|\beta|\leqslant N}}\left[\frac{d}{dt}\|w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\|^2+\|w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\|_\nu^2+\frac{1}{2}(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\partial_\beta^\alpha\nabla_v\phi,w^{2l}\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f)\right]$$
$$\leqslant C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha P_1 f,\partial^\alpha P_2\phi]\|^2+C\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial^\alpha(I-P_2)\phi]\|_\nu^2$$
$$+C(\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}+\widetilde{\mathcal{E}}_l(t))\widetilde{\mathcal{D}}_l(t). \tag{3.14}$$

根据相似的证明, 对于方程 (3.5), 也能够得到

$$\sum_{\substack{|\beta|\geqslant 1\\ |\alpha|+|\beta|\leqslant N}}\left[\frac{d}{dt}\|w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi\|^2+\|w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi\|_\nu^2+\frac{1}{2}(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\partial_\beta^\alpha\nabla_v f,w^{2l}\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi)\right]$$
$$\leqslant C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha P_1 f,\partial^\alpha P_2\phi]\|^2+C\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial^\alpha(I-P_2)\phi]\|_\nu^2$$
$$+C(\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}+\widetilde{\mathcal{E}}_l(t))\widetilde{\mathcal{D}}_l(t). \tag{3.15}$$

将 (3.14) 和 (3.15) 中的内积放在一起进行估计. 利用引理 2.6、(2.13) 和估计 $|\nabla_v w^{2l}|\leqslant Cw^{2l}$, 有

$$\begin{aligned}
&|(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\partial_\beta^\alpha\nabla_v\phi,w^{2l}\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f)+(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\partial_\beta^\alpha\nabla_v f,w^{2l}\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi)|\\
&\quad\leqslant|(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\partial_\beta^\alpha\nabla_v P_2\phi,w^{2l}\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f)|+|(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\partial_\beta^\alpha\nabla_v P_1 f,w^{2l}\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi)|\\
&\qquad+\left|\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}w^{2l}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\{\nabla_v\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f+\nabla_v\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi\}dxdv\right|\\
&\quad\leqslant\|\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\|_{L_x^\infty}\|[w^l\partial_\beta^\alpha\nabla_v P_1 f,w^l\partial_\beta^\alpha\nabla_v P_2\phi]\|\|[w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi]\|\\
&\qquad+\left|\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\nabla_v w^{2l}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\{\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi\}dxdv\right|\\
&\quad\leqslant C\|\nabla_x\phi\|\|[\partial^\alpha P_1 f,\partial^\alpha P_2\phi]\|\|[w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi]\|\\
&\qquad+C\|\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\|_{L_x^\infty}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}w^{2l}|\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi|dxdv\\
&\quad\leqslant C\|\nabla_x\phi\|\|[\partial^\alpha P_1 f,\partial^\alpha P_2\phi]\|\|[w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi]\|\\
&\qquad+C\|\nabla_x\phi\|\|w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f\|\|w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi\|\\
&\quad\leqslant\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l}(t)\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).
\end{aligned}$$

利用这个估计、(3.14) 和 (3.15), 可得 (3.3). 至此完成了引理 3.1 的证明. □

下面利用标准的能量方法来得到加权的空间导数估计.

引理 3.2 设 $l\geqslant 0$, 则有

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha f,w^l\partial^\alpha\phi]\|^2+\|[w^l(I-P_1)f,w^l(I-P_2)\phi]\|^2\right]$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial^\alpha(I-P_1)\phi]\|_\nu^2\\
&\leqslant C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha P_1 f,\partial^\alpha P_2\phi]\|^2+C\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha(I-P_1)f,\partial^\alpha(I-P_2)\phi]\|_\nu^2\\
&\quad+C(\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l}(t)+\widetilde{\mathcal{E}}_l(t))\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).
\end{aligned}\tag{3.16}
$$

证明 对系统 (1.6) 和 (1.7) 求偏导 ∂^α $(1\leqslant|\alpha|\leqslant N)$, 可以得到

$$
\begin{aligned}
&[\partial_t+v\cdot\nabla_x]\partial^\alpha f+L_1\partial^\alpha f+\frac{1}{2}\partial^\alpha\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\sqrt{\mu}v\\
&=\partial^\alpha\Gamma(f,f)+\frac{1}{2}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v\partial^\alpha f+\frac{1}{2}\sum_{0<\alpha_1\leqslant\alpha}C_\alpha^{\alpha_1}\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\partial^{\alpha-\alpha_1}\nabla_v f\\
&\quad-\frac{1}{2}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v\partial^\alpha\phi-\frac{1}{2}\sum_{0<\alpha_1\leqslant\alpha}C_\alpha^{\alpha_1}\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\partial^{\alpha-\alpha_1}\nabla_v\phi\\
&\quad-\frac{1}{4}\sum_{\alpha_1\leqslant\alpha}C_\alpha^{\alpha_1}\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot v\partial^{\alpha-\alpha_1}f+\frac{1}{4}\sum_{\alpha_1\leqslant\alpha}C_\alpha^{\alpha_1}\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot v\partial^{\alpha-\alpha_1}\phi,
\end{aligned}\tag{3.17}
$$

$$
\begin{aligned}
&[\partial_t+v\cdot\nabla_x]\partial^\alpha\phi+L_2\partial^\alpha\phi-\frac{1}{2}\partial^\alpha\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\sqrt{\mu}v\\
&=\partial^\alpha\Gamma(\phi,f)+\frac{1}{2}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v\partial^\alpha\phi+\frac{1}{2}\sum_{0<\alpha_1\leqslant\alpha}C_\alpha^{\alpha_1}\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\partial^{\alpha-\alpha_1}\nabla_v\phi\\
&\quad-\frac{1}{2}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v\partial^\alpha f-\frac{1}{2}\sum_{0<\alpha_1\leqslant\alpha}C_\alpha^{\alpha_1}\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\partial^{\alpha-\alpha_1}\nabla_v f\\
&\quad-\frac{1}{4}\sum_{\alpha_1\leqslant\alpha}C_\alpha^{\alpha_1}\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot v\partial^{\alpha-\alpha_1}\phi+\frac{1}{4}\sum_{\alpha_1\leqslant\alpha}C_\alpha^{\alpha_1}\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot v\partial^{\alpha-\alpha_1}f.
\end{aligned}\tag{3.18}
$$

在 (3.17) 和 (3.18) 的两端分别乘以 $w^{2l}\partial^\alpha f$ 和 $w^{2l}\partial^\alpha\phi$ 并在 $\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^3_v$ 上积分. 这里以 (3.18) 为例, 运用分部积分, (3.18) 左边第一项积分后为 $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w^l\partial^\alpha\phi\|^2$, 接下来逐一地处理其他项.

首先, 引理 2.2 意味着 $(L_2\partial^\alpha\phi,w^{2l}\partial^\alpha\phi)\geqslant\frac{1}{2}\|w^l\partial^\alpha\phi\|_\nu^2-C\|\partial^\alpha\phi\|_\nu^2$. 注意到, $\int_{\mathbb{R}^3}|w^l\sqrt{\mu}v|^2dv<\infty$. 运用引理 2.6 和 Hölder 不等式, 对左边第三项积分, 有如下估计:

$$
\begin{aligned}
|(\partial^\alpha\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\sqrt{\mu}v,w^{2l}\partial^\alpha\phi)|&\leqslant C_\eta\|w^l\sqrt{\mu}v\cdot\partial^\alpha\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\|^2+\eta\|w^l\partial^\alpha\phi\|^2\\
&\leqslant C_\eta\|\partial^\alpha\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\|^2+\eta\|w^l\partial^\alpha\phi\|^2\\
&\leqslant C_\eta\|\nabla_x\phi\|^2+\eta\|w^l\partial^\alpha\phi\|^2.
\end{aligned}
$$

另外, 根据引理 2.3, 对 (3.18) 右边第一项积分后有如下估计:

$$
(\partial^\alpha\Gamma(\phi,f),w^{2l}\partial^\alpha\phi)\leqslant C_\eta\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)\widetilde{\mathcal{D}}_l(t)+\eta\|w^l\partial^\alpha\phi\|_\nu^2.
$$

由于 $1\leqslant|\alpha|\leqslant N$, 运用分部积分、引理 2.6 及估计 $|\nabla_v w^{2l}|\leqslant Cw^{2l}$, 对于 (3.18) 右边第二项, 有下面估计:

$$
\begin{aligned}
|(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v\partial^\alpha\phi,w^{2l}\partial^\alpha\phi)|&=\frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^3_v}w^{2l}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v|\partial^\alpha\phi|^2dxdv\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^3_v}\nabla_v w^{2l}\cdot\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)|\partial^\alpha\phi|^2dxdv\right|
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}&\leqslant C\|\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\|_{L^\infty_x}\|w^l\partial^\alpha\phi\|^2\\&\leqslant C\|\nabla_x f\|\{\|\partial^\alpha P_2\phi\|^2+\|w^l\partial^\alpha(I-P_2)\phi\|^2_\nu\}\\&\leqslant C\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l}(t)\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).\end{aligned}$$

上面不等式估计中用到了 $\|w^l\partial^\alpha P_2\phi\|\leqslant C\|\partial^\alpha P_2\phi\|$.

对于右边第三和五项, 由于 $0\leqslant|\alpha-\alpha_1|\leqslant N-1$, 利用引理 2.6 和 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}&|(\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\partial^{\alpha-\alpha_1}\nabla_v\phi-\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\partial^{\alpha-\alpha_1}\nabla_v f,w^{2l}\partial^\alpha\phi)|\\&\quad\leqslant C\|\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\|_{L^\infty_x}\|w^l\partial^{\alpha-\alpha_1}\nabla_v\phi\|\ \|w^l\partial^\alpha\phi\|\\&\qquad+C\|\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\|_{L^\infty_x}\|w^l\partial^{\alpha-\alpha_1}\nabla_v f\|\ \|w^l\partial^\alpha\phi\|\\&\quad\leqslant C\|\nabla_x f\|\ \|w^l\partial^{\alpha-\alpha_1}\nabla_v\phi\|\ \|w^l\partial^\alpha\phi\|+C\|\nabla_x\phi\|\ \|w^l\partial^{\alpha-\alpha_1}\nabla_v f\|\ \|w^l\partial^\alpha\phi\|\\&\quad\leqslant C\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l}(t)\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).\end{aligned}$$

对于右边最后两项, 当 $\alpha_1<\alpha$ 时, 利用引理 2.6, 可以得到

$$\begin{aligned}&|(\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot v\partial^{\alpha-\alpha_1}\phi-\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot v\partial^{\alpha-\alpha_1}f,w^{2l}\partial^\alpha\phi)|\\&\quad\leqslant\|\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\|_{L^\infty_x}\|w^l\partial^{\alpha-\alpha_1}\phi\|_\nu\|w^l\partial^\alpha\phi\|_\nu+\|\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\|_{L^\infty_x}\|w^l\partial^{\alpha-\alpha_1}f\|_\nu\|w^l\partial^\alpha\phi\|_\nu\\&\quad\leqslant\|\nabla_x f\|\|w^l\partial^{\alpha-\alpha_1}\phi\|_\nu\|w^l\partial^\alpha\phi\|_\nu+\|\nabla_x\phi\|\|w^l\partial^{\alpha-\alpha_1}f\|_\nu\|w^l\partial^\alpha\phi\|_\nu\\&\quad\leqslant C\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l}(t)\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).\end{aligned}$$

当 $\alpha_1=\alpha$ 时, 利用 Sobolev 嵌入定理, 可以得到

$$\begin{aligned}&|(\partial^\alpha\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot v\phi-\partial^\alpha\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot vf,w^{2l}\partial^\alpha\phi)|\\&\quad\leqslant\int_{\mathbb{R}^3}w^{2l}|v|\|\partial^\alpha\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\|_{L^3_x}\|\phi\|_{L^6_x}\|\partial^\alpha\phi\|_{L^2_x}dv\\&\quad\leqslant\|\nabla_x f\|\int_{\mathbb{R}^3}w^{2l}|v|\|\nabla_x\phi\|_{L^2_x}\|\partial^\alpha\phi\|_{L^2_x}dv\\&\quad\leqslant\|\nabla_x f\|\|w^l\nabla_x\phi\|_\nu\|w^l\partial^\alpha\phi\|_\nu\\&\quad\leqslant C\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l}(t)\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).\end{aligned}$$

注意到, 存在一个常数 $C>0$ 使得

$$\|w^l\partial^\alpha\phi\|^2_\nu\leqslant C(\|\partial^\alpha P_2\phi\|^2+\|w^l\partial^\alpha(I-P_2)\phi\|^2_\nu).\tag{3.19}$$

综合上面的估计, 只有 (3.18) 右边第四项还没有被估计. 因而, 对于任意 $l\geqslant0$, 下面不等式成立:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|w^l\partial^\alpha\phi\|^2+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|w^l\partial^\alpha(I-P_2)\phi\|^2_\nu+\frac{1}{2}(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v\partial^\alpha f,w^{2l}\partial^\alpha\phi)\\&\quad\leqslant C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|\partial^\alpha P_2\phi\|^2+C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|\partial^\alpha(I-P_2)\phi\|^2_\nu+C_\eta(\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l}(t)+\widetilde{\mathcal{E}}_l(t))\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).\end{aligned}\tag{3.20}$$

根据相似的证明, 对于方程 (3.17), 可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|w^l\partial^\alpha f\|^2+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|w^l\partial^\alpha(I-P_1)f\|_\nu^2+\frac{1}{2}(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v\partial^\alpha\phi,w^{2l}\partial^\alpha f)\\&\quad\leqslant C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|\partial^\alpha P_1 f\|^2+C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|\partial^\alpha(I-P_1)f\|_\nu^2+C_\eta(\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l}(t)+\widetilde{\mathcal{E}}_l(t))\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).\end{aligned}\tag{3.21}$$

将 (3.22) 和 (3.20) 中的内积放在一起进行估计. 利用引理 2.6 和估计 $|\nabla_v w^{2l}|\leqslant Cw^{2l}$, 有

$$\begin{aligned}&|(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v\partial^\alpha f,w^{2l}\partial^\alpha\phi)+(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v\partial^\alpha\phi,w^{2l}\partial^\alpha f)|\\&\quad=\left|\int_{\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^3_v}w^{2l}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v\{\partial^\alpha f\partial^\alpha\phi\}\,dx\,dv\right|\\&\quad\leqslant C\|\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\|_{L^\infty_x}\int_{\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^3_v}w^{2l}|\partial^\alpha f\partial^\alpha\phi|\,dx\,dv\\&\quad\leqslant C\|\nabla_x\phi\|\|w^l\partial^\alpha f\|\,\|w^l\partial^\alpha\phi\|\\&\quad\leqslant C\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l}(t)\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).\end{aligned}$$

利用这个估计以及 (3.20) 和 (3.21), 可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha f,w^l\partial^\alpha\phi]\|^2+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial^\alpha(I-P_2)\phi]\|_\nu^2\\&\quad\leqslant C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha P_1 f,\partial^\alpha P_2\phi]\|^2+C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha(I-P_1)f,\partial^\alpha(I-P_2)\phi]\|_\nu^2\\&\qquad+C(\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l}(t)+\widetilde{\mathcal{E}}_l(t))\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).\end{aligned}\tag{3.22}$$

若取 $w^{2l}(I-P_2)\phi$ 与 (3.2) 作内积, 取 $w^{2l}(I-P_1)f$ 与 (3.1) 作内积, 可以类似地推导出

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|[w^l(I-P_1)f,w^l(I-P_2)\phi]\|^2+\|[w^l(I-P_1)f,w^l(I-P_2)\phi]\|_\nu^2\\&\quad\leqslant C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha P_1 f,\partial^\alpha P_2\phi]\|^2+C\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[(I-P_1)f,(I-P_2)\phi]\|_\nu^2+C(\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l}(t)+\widetilde{\mathcal{E}}_l(t))\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).\end{aligned}\tag{3.23}$$

利用 (3.22) 和 (3.23), 可以得到 (3.16), 从而完成了该定理的证明. □

考虑以下的方程组:

$$[\partial_t+v\cdot\nabla_x+L_1]\partial^\alpha f+\frac{1}{2}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\partial^\alpha f)\cdot\sqrt{\mu}v=g_1,\tag{3.24}$$

$$[\partial_t+v\cdot\nabla_x+L_2]\partial^\alpha\phi-\frac{1}{2}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\partial^\alpha\phi)\cdot\sqrt{\mu}v=g_2,\tag{3.25}$$

此处 $|\alpha|\leqslant N$, g_1 和 g_2 为给定的函数. 我们用 Kawashima[11] 构建没有外力作用 Boltzmann 方程补偿函数的方法, 建立方程 (3.24) 和 (3.25) 的补偿函数来得到解的宏观部分估计.

令 $v\cdot\xi$ ($\xi\in\mathbb{R}^3$) 为平流算子 $v\cdot\nabla_x$ 的象征. $v\cdot\xi$ 是一个在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 中从核空间 $\mathcal{N}(L_1)$ 映射到 $\widetilde{W}_1$ 的线性算子, 其中 $\widetilde{W}_1$ 为 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 的一个子空间, 由 13 个矩 $\varphi_j\sqrt{\mu}$ ($j=1,2,\ldots,13$) 张成, 即 $\widetilde{W}_1=\mathrm{span}\{\varphi_j\sqrt{\mu}\mid j=1,2,\ldots,13\}$. 这里,

$$\varphi_1=1,\quad\varphi_{j+1}=v_j\quad(j=1,2,3),\quad\varphi_{j+4}=v_j^2\quad(j=1,2,3),$$

$$\varphi_8 = v_1v_2, \quad \varphi_9 = v_2v_3, \quad \varphi_{10} = v_3v_1, \quad \varphi_{j+10} = |v|^2v_j \quad (j = 1, 2, 3).$$

由于任意一个碰撞不变量都是 $\psi_k = \varphi_k$ $(k = 1, \ldots, 4)$ 和 $\psi_5 = \varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7$ 的一个线性组合, 因此可以将构成子空间 $\widetilde{W}$ 的 13 个矩重新记为

$$\psi_1 = 1, \quad \psi_{j+1} = v_j \quad (j = 1, 2, 3), \quad \psi_5 = |v|^2, \quad \psi_{j+4} = v_j^2 \quad (j = 2, 3),$$
$$\psi_8 = v_1v_2, \quad \psi_9 = v_2v_3, \quad \psi_{10} = v_3v_1, \quad \psi_{j+10} = |v|^2v_j \quad (j = 1, 2, 3).$$

记 $\widetilde{W}_1$ 的一个标准正交基为 e_j $(1 \leqslant j \leqslant 13)$, 参考文献 [6], 令

$$\{\psi_k\sqrt{\mu}\}_{k=1}^{13}A_{13\times 13} = [e_j]_{j=1}^{13},$$

其中 $\det A \neq 0$ 且 $[e_j]_{j=1}^{5}$ 为 L_1 的核空间的标准正交基.

值得注意的是, 核空间 $\mathcal{N}(L_2)$ 在映射 $v \cdot \xi$ 之下的像空间为

$$\widetilde{W}_2 = \operatorname{span}\{\varphi_j\sqrt{\mu} \mid j = 1, 2, 3, 4\} = \operatorname{span}\{e_j \mid j = 1, 2, 3, 4\}.$$

进一步地, 令

$$\overline{P_1}f = \sum_{k=1}^{13}\langle f, e_k\rangle e_k,$$
$$\overline{P_2}\phi = \sum_{k=1}^{4}\langle \phi, e_k\rangle e_k. \tag{3.26}$$

设 $H_k = \langle \partial^\alpha f, e_k\rangle$, $M_k = \langle \partial^\alpha \phi, e_k\rangle$, $\Upsilon_k = \langle \sqrt{\mu}v, \psi_k\sqrt{\mu}\rangle$ $(k = 1, \ldots, 13)$ 为一些正常数. 令 $H = [H_k]_{1\times 13}$, $M = [M_k]_{1\times 4}$, $\Upsilon = [\Upsilon_k]_{1\times 13}$, $\overline{\Upsilon} = [\Upsilon_k]_{1\times 4}$, 则 (3.24) 和 (3.25) 意味着

$$\partial_t H + \sum_j V_1^j\partial_{x_j}H + \overline{L}_1 H - \frac{1}{2}\nabla_x \cdot U \star (\sqrt{\mu}\partial^\alpha f)\Upsilon = \overline{g}_1 + R_1, \tag{3.27}$$

$$\partial_t M + \sum_j V_2^j\partial_{x_j}M + \overline{L}_2 M + \frac{1}{2}\nabla_x \cdot U \star (\sqrt{\mu}\partial^\alpha \phi)\overline{\Upsilon} = \overline{g}_2 + R_2, \tag{3.28}$$

其中 V_i^j 和 $\overline{L}_i$ $(i = 1, 2)$ 是对称矩阵,

$$\overline{L}_1 = \{\langle L_1[e_l], e_k\rangle\}_{k,l=1}^{13}, \quad V_1(\xi) = \sum_{j=1}^{3}V_1^j\xi_j = \{\langle (v\cdot\xi)e_k, e_l\rangle\}_{k,l=1}^{13}, \tag{3.29}$$

$$\overline{L}_2 = \{\langle L_2[e_l], e_k\rangle\}_{k,l=1}^{4}, \quad V_2(\xi) = \sum_{j=1}^{3}V_2^j\xi_j = \{\langle (v\cdot\xi)e_k, e_l\rangle\}_{k,l=1}^{4}, \tag{3.30}$$

这里 $\overline{g_i}$ 是第 j 个分量为 $\langle g_i, e_j\rangle$ 的向量, R_1 为包含了 $(I - \overline{P_1})f$ 的一些项, R_2 为包含了 $(I - \overline{P_2})\phi$ 的一些项. 记 $\operatorname{Re} z$ 为 $z \in \mathbb{C}$ 的实部, $H = [H_I, H_{II}]^{\mathrm{T}}$, $H_I = [H_1, \ldots, H_5]^{\mathrm{T}}$, $H_{II} = [H_6, \ldots, H_{13}]^{\mathrm{T}}$; $M = [M_I, M_{II}]^{\mathrm{T}}$, $M_I = [M_1]$, $M_{II} = [M_2, M_3, M_4]^{\mathrm{T}}$.

有了上面的准备, 参考文献 [11], 定义如下的补偿函数:

定义 3.1 对于 $i = 1, 2$, 如果下列条件同时满足:

(i) $S_i(\cdot)$ 为定义在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上有界线性算子空间的 C^∞ 函数, 并且满足对任意 $\omega \in \mathbb{S}^2, S_i(\omega) = S_i(-\omega)$.

(ii) 对所有 $\omega\in\mathbb{S}^2, \mathrm{i}S_i(\omega)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 中自伴.

(iii) 存在常数 $c_0>0$, 使得对任意的 $\partial^\alpha f\in D(L_1)$, $\partial^\alpha\phi\in D(L_2)$ 以及 $\omega\in\mathbb{S}^2$ 有

$$\mathrm{Re}\langle S_1(\omega)(v\cdot\omega)\partial^\alpha f,\partial^\alpha f\rangle+\langle L_1[\partial^\alpha f],\partial^\alpha f\rangle\geqslant c_0(|\partial^\alpha P_1 f|_2^2+|\partial^\alpha(I-P_1)f|_\nu^2),$$
$$\mathrm{Re}\langle S_2(\omega)(v\cdot\omega)\partial^\alpha\phi,\partial^\alpha\phi\rangle+\langle L_2[\partial^\alpha\phi],\partial^\alpha\phi\rangle\geqslant c_0(|\partial^\alpha P_2\phi|_2^2+|\partial^\alpha(I-P_2)\phi|_\nu^2).$$

则称 $S_1(\omega)$ 和 $S_2(\omega)$ $(\omega\in\mathbb{S}^2)$ 分别为方程 (3.24) 和 (3.25) 的补偿函数.

在构建补偿函数之前, 我们需要建立如下的引理.

引理 3.3 存在实反对称常矩阵 R_i^j $(i=1,2,\ j=1,2,3)$, 其中 R_1^j 为 13×13 矩阵, R_2^j 为 4×4 矩阵, 以及两个正常数 C_1 和 C_2, 使得 $R_i(\omega)\equiv\sum_{j=1}^3R_i^j\omega_j$ 满足对所有 $H\in\mathbb{C}^{13}$ 有

$$\mathrm{Re}\langle\langle R_1(\omega)V_1(\omega)H,H\rangle\rangle\geqslant C_1|H_I|^2-C_2|H_{II}|^2,\tag{3.31}$$
$$\mathrm{Re}\langle\langle R_2(\omega)V_2(\omega)M,M\rangle\rangle\geqslant C_1|M_I|^2-C_2|M_{II}|^2,\tag{3.32}$$

这里 $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ 为 $\mathbb{C}^{13}$ 上的内积.

证明 定理中的 (3.31) 的证明可参见文献 [11]. 下面将利用文献 [16] 的想法来证明 (3.32). 由于

$$V_2(\omega)=\sum_{j=1}^3V_2^j\omega_j=\{\langle(v\cdot\omega)e_k,e_l\rangle\}_{k,l=1}^4,$$

通过直接计算便有

$$V_2(\omega)=\sum_{j=1}^3V_2^j\omega_j=\begin{bmatrix}0&\omega_1&\omega_2&\omega_3\\ \omega_1&0&0&0\\ \omega_2&0&0&0\\ \omega_3&0&0&0\end{bmatrix}.$$

令

$$R_2(\omega)=\sum_{j=1}^3R_2^j\omega_j=\begin{bmatrix}0&\omega_1&\omega_2&\omega_3\\ -\omega_1&0&0&0\\ -\omega_2&0&0&0\\ -\omega_3&0&0&0\end{bmatrix}.$$

因为 $|\omega|=1$, 通过直接计算, 易得存在常数 $C_1,C_2>0$ 使得 (3.32) 成立. □

下面定义方程组 (3.24) 和 (3.25) 的补偿函数: 对于任意给定的 $\omega\in\mathbb{S}^2$, 设 $R_1(\omega)\equiv\{r_{i,j}^1(\omega)\}_{i,j=1}^{13}$, $R_2(\omega)\equiv\{r_{i,j}^2(\omega)\}_{i,j=1}^4$, 定义

$$S_1(\omega)\partial^\alpha f\equiv\sum_{k,l=1}^{13}\lambda_1r_{kl}^1(\omega)\langle\partial^\alpha f,e_l\rangle e_k,\tag{3.33}$$

$$S_2(\omega)\partial^\alpha\phi\equiv\sum_{k,l=1}^{4}\lambda_2r_{kl}^2(\omega)\langle\partial^\alpha\phi,e_l\rangle e_k,\tag{3.34}$$

其中 λ_1 和 λ_2 均为正常数, 而 $\partial^\alpha f, \partial^\alpha \phi \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

在接下来的引理中, 我们证明 $S_i(\omega)$ $(i=1,2)$ 为所需要的补偿函数, 其中 $S_1(\omega)$ 为方程 (3.24) 的补偿函数的证明可参见文献 [11]. 为了方便读者阅读, 我们将在接下来的引理中证明 $S_2(\omega)$ 为我们所要构造的补偿函数.

引理 3.4 对于 $i=1,2$, 若 $\lambda_i>0$ 足够小, 则由 (3.33) 和 (3.34) 定义的算子 $S_i(\omega)$ 分别为 (3.24) 和 (3.25) 的补偿函数, 并且 $S_i(\omega): L^2(\mathbb{R}^3)\to \widetilde{W_i}$.

证明 首先由于 $\{e_k\}_{k=1}^4$ 为 $\widetilde{W_2}$ 的标准正交基, 所以 $R_2(\omega)\equiv\sum_{j=1}^3 R_2^j\omega_j$ 并且 R_2^j 为实反对称常矩阵. 因此 $S_2(\omega)\in C^\infty(\cdot)$, $S_2(-\omega)=-S_2(\omega)$, 即得到了定义 3.1(i). 下面证明 $S_2(\omega)$ 满足定义 3.1(ii). 令 $h,u\in L^2(\mathbb{R}^3_v)$, 由定义 (3.34) 有

$$\langle S_2(\omega)h,u\rangle=\sum_{k,l=1}^4\lambda_2 r_{kl}^2(\omega)\langle h,e_l\rangle\overline{\langle u,e_k\rangle}. \tag{3.35}$$

记 $\tilde h=\{\tilde h_k\}_{k=1}^4=\{\langle h,e_k\rangle\}_{k=1}^4$, $\tilde u=\langle\tilde u_k\rangle_{k=1}^4=\{\langle u,e_k\rangle\}$. 则由上式得

$$\langle S_2(\omega)h,u\rangle=\lambda_2\langle\langle R_2(\omega)\tilde h,\tilde u\rangle\rangle.$$

又因为 $R_2(\omega)$ 是反对称的, 于是

$$\langle \mathrm{i}S_2(\omega)h,u\rangle=\lambda_2\langle\langle \mathrm{i}R_2(\omega)\tilde h,\tilde u\rangle\rangle=\lambda_2\langle\langle\tilde h,\mathrm{i}R_2(\omega)\tilde u\rangle\rangle=\langle h,\mathrm{i}S_2(\omega)u\rangle.$$

对于定义 3.1 的条件 (iii), 令 $\phi\in D(L_2)$, 由 (3.34) 的定义得

$$\langle S_2(\omega)(v\cdot\omega)\partial^\alpha\phi,\partial^\alpha\phi\rangle=\sum_{k,l=1}^4\lambda_2 r_{kl}^2(\omega)\langle(v\cdot\omega)\partial^\alpha\phi,e_l\rangle\overline{\langle\partial^\alpha\phi,e_k\rangle}.$$

将上式右端第一个 $\partial^\alpha\phi$ 分解为 $\overline{P}_2\partial^\alpha\phi+(I-\overline{P}_2)\partial^\alpha\phi$, 其中 $\overline{P}_2$ 由 (3.26) 定义. 从而有

$$\langle S_2(\omega)(v\cdot\omega)\partial^\alpha\phi,\partial^\alpha\phi\rangle=\lambda_2\langle\langle R_2(\omega)V_2(\omega)M,M\rangle\rangle+\sum_{k,l=1}^4\lambda_2 r_{kl}^2(\omega)\langle(v\cdot\omega)(I-\overline{P_2})\partial^\alpha\phi,e_l\rangle\overline{\langle\partial^\alpha\phi,e_k\rangle}.$$

根据引理 3.3 以及 e_k 关于 v 的指数衰减性质, 有

$$\mathrm{Re}\lambda_2\langle\langle R_2(\omega)V_2(\omega)M,M\rangle\rangle\geqslant C_1\lambda_2|M_I|^2-C_2\lambda_2|M_{II}|^2\geqslant C_1\lambda_2|P_2\partial^\alpha\phi|_2^2-C_2\lambda_2|(I-P_2)\partial^\alpha\phi|_\nu^2.$$

另外, 利用 P_2 和 $\overline{P}_2$ 的表达式, 对于任意的 $j=2,3,4$, 有 $\langle P_2\phi,e_j\rangle=0$, 从而

$$(\overline{P}_2-P_2)\phi=\sum_{j=2}^4\langle\phi,e_j\rangle e_j=\sum_{j=2}^4\langle(I-P_2)\phi,e_j\rangle e_j.$$

因而可以得到

$$|\langle(v\cdot\omega)(I-\overline{P}_2)\partial^\alpha\phi,e_l\rangle|=|\langle(v\cdot\omega)[(I-P_2)-(P_2-\overline{P}_2)]\partial^\alpha\phi,e_l\rangle|\leqslant C_3|(I-P_2)\partial^\alpha\phi|_\nu.$$

所以, 结合上面不等式, 对于 $\eta>0$ 足够小, 存在常数 $C_\eta>0$, 使得

$$\langle S_2(\omega)(v\cdot\omega)\partial^\alpha\phi,\partial^\alpha\phi\rangle\geqslant C_1\lambda_2|P_2\partial^\alpha\phi|_2^2-C_2\lambda_2|(I-P_2)\partial^\alpha\phi|_\nu^2-C_3\lambda_2|\partial^\alpha\phi|_\nu|(I-P_2)\partial^\alpha\phi|_\nu$$

$$\geqslant \lambda_2(C_1-\eta)|\partial^\alpha P_2\phi|_2^2-\lambda_2 C_\eta|(I-P_2)\partial^\alpha\phi|_\nu^2, \tag{3.36}$$

这里运用了 $|\partial^\alpha\phi|_\nu^2\leqslant C(|\partial^\alpha(I-P_2)\phi|_\nu^2+|\partial^\alpha P_2\phi|_2^2)$.

另外, 根据引理 2.1, 可知存在某个常数 $\delta>0$ 使得

$$\langle L_2[\partial^\alpha\phi],\partial^\alpha\phi\rangle\geqslant\delta|(I-P_2)\partial^\alpha\phi|_\nu^2. \tag{3.37}$$

利用 (3.36) 和 (3.37), 选取 λ_2 足够小, 易知存在常数 $c_0>0$ 使得

$$\mathrm{Re}\langle S_2(\omega)(v\cdot\omega)\partial^\alpha\phi,\partial^\alpha\phi\rangle+\langle L_2[\partial^\alpha\phi],\partial^\alpha\phi\rangle\geqslant c_0(|\partial^\alpha P_2\phi|_2^2+|\partial^\alpha(I-P_2)\phi|_\nu^2),$$

从而完成了此引理的证明. □

回到 Vlasov-Boltzmann 方程组, 根据 (1.6)、(1.7)、(3.24) 和 (3.25), 有

$$g_1=\partial^\alpha\Big\{\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v(\sqrt{\mu}f)-\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v(\sqrt{\mu}\phi)+\Gamma(f,f)\Big\},$$
$$g_2=\partial^\alpha\Big\{\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v(\sqrt{\mu}\phi)-\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v(\sqrt{\mu}f)+\Gamma(\phi,f)\Big\}.$$

通过直接计算, 可知 $\langle g_1,\sqrt{\mu}\rangle=0$ 和 $\langle g_2,\sqrt{\mu}\rangle=0$.

接下来的引理, 将用所构建的补偿函数来估计系统 (1.6) 和 (1.7) 的解的宏观部分. 令

$$\rho=\int_{\mathbb{R}^3}\sqrt{\mu}f\,dv,\quad \varphi=\int_{\mathbb{R}^3}\sqrt{\mu}\phi dv.$$

显然有

$$\|\rho\|\leqslant C\|P_1f\|\leqslant C\|f\|,\quad \|\varphi\|\leqslant C\|P_2\phi\|\leqslant C\|\phi\|. \tag{3.38}$$

引理 3.5 设 $l\geqslant 0$, 对于系统 (1.6) 和 (1.7), 存在常数 $\delta_1,\delta_2>0$, 使得下面估计成立:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big[\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha f,\partial^\alpha\phi]\|^2-\kappa\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|\{\langle \mathrm{i}S_1(\omega)(\widehat{\partial^\alpha f}),\widehat{\partial^\alpha f}\rangle+\langle \mathrm{i}S_2(\omega)(\widehat{\partial^\alpha\phi}),\widehat{\partial^\alpha\phi}\rangle\}d\xi\\&-\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)\{\mathrm{Re}(\widehat{U}|\widehat{\partial^\alpha\rho}|^2)-\mathrm{Re}(\widehat{U}|\widehat{\partial^\alpha\varphi}|^2)\}d\xi\Big]\\&+\delta_1\sum_{2\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha P_1f,\partial^\alpha P_2\phi]\|^2+\delta_2\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha(I-P_1)f,\partial^\alpha(I-P_2)\phi]\|_\nu^2\\&\leqslant C(\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l}(t)+\widetilde{\mathcal{E}}_l(t))\widetilde{\mathcal{D}}_l(t),\end{aligned} \tag{3.39}$$

并且还有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big[\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha f,\partial^\alpha\phi]\|-\kappa\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^{N-1}|\xi|\{\langle \mathrm{i}S_1(\omega)\widehat{f},\widehat{f}\rangle+\langle \mathrm{i}S_2(\omega)\widehat{\phi},\widehat{\phi}\rangle\}d\xi\\&-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^N\{\mathrm{Re}(\widehat{U}|\widehat{\rho}|^2)-\mathrm{Re}(\widehat{U}|\widehat{\varphi}|^2)\}d\xi\Big]+\delta_1\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha P_1f,\partial^\alpha P_2\phi]\|^2\\&+\delta_2\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha(I-P_1)f,\partial^\alpha(I-P_2)\phi]\|_\nu^2\\&\leqslant C(\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l}(t)+\widetilde{\mathcal{E}}_l(t))\widetilde{\mathcal{D}}_l(t),\end{aligned} \tag{3.40}$$

其中 $\kappa>0$ 是一个小的常数.

证明 令 $\omega=\frac{\xi}{|\xi|}$. 对 (3.24) 和 (3.25) 关于 x 作 Fourier 变换, 可以得到

$$\partial_t\widehat{\partial^\alpha f}+\mathrm{i}|\xi|(v\cdot\omega)\widehat{\partial^\alpha f}+L_1[\widehat{\partial^\alpha f}]+\frac{1}{2}\mathrm{i}\xi\widehat{U}\widehat{\partial^\alpha\rho}\cdot\sqrt{\mu}v=\widehat{g_1},\tag{3.41}$$

$$\partial_t\widehat{\partial^\alpha\phi}+\mathrm{i}|\xi|(v\cdot\omega)\widehat{\partial^\alpha\phi}+L_2[\widehat{\partial^\alpha\phi}]-\frac{1}{2}\mathrm{i}\xi\widehat{U}\widehat{\partial^\alpha\varphi}\cdot\sqrt{\mu}v=\widehat{g_2}.\tag{3.42}$$

首先, 令 (3.41) 与 $\widehat{\partial^\alpha f}$ 于 $\mathbb{R}^3_v$ 上作内积并取实部, 得到

$$\frac{1}{2}\partial_t|\widehat{\partial^\alpha f}|_2^2+\langle L_1[\widehat{\partial^\alpha f}],\widehat{\partial^\alpha f}\rangle+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\widehat{U}\widehat{\partial^\alpha\rho}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{i}\xi\cdot\widehat{\partial^\alpha f}\sqrt{\mu}v\,dv\right\}=\mathrm{Re}\langle\widehat{g_1},\widehat{\partial^\alpha f}\rangle.\tag{3.43}$$

令 (3.41) 与 $\sqrt{\mu}$ 作内积, 由 $\langle g_1,\sqrt{\mu}\rangle=0$, $L_1\sqrt{\mu}=0$ 和 $\langle\sqrt{\mu}v,\sqrt{\mu}\rangle=0$, 利用 L_1 的自伴性质, 可得

$$\begin{aligned}&\partial_t\langle\widehat{\partial^\alpha f},\sqrt{\mu}\rangle+\langle\mathrm{i}|\xi|(v\cdot\omega)\widehat{\partial^\alpha f},\sqrt{\mu}\rangle+\langle L_1[\widehat{\partial^\alpha f}],\sqrt{\mu}\rangle+\frac{1}{2}\widehat{U}\widehat{\partial^\alpha\rho}\langle\mathrm{i}\xi\cdot\sqrt{\mu}v,\sqrt{\mu}\rangle\\&\quad=\partial_t\widehat{\partial^\alpha\rho}+\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{i}\xi\cdot v\sqrt{\mu}\widehat{\partial^\alpha f}\,dv\\&\quad=0.\end{aligned}$$

于是 $\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{i}\xi\cdot v\sqrt{\mu}\widehat{\partial^\alpha f}\,dv=-\partial_t\widehat{\partial^\alpha\rho}$. 又因为

$$\mathrm{Re}\{\widehat{U}\widehat{\partial^\alpha\rho}\,\partial_t\widehat{\partial^\alpha\rho}\}=\frac{1}{2}\partial_t\mathrm{Re}(\widehat{U}|\widehat{\partial^\alpha\rho}|^2),$$

所以, (3.43) 可转化为

$$\frac{1}{2}\partial_t\left\{|\widehat{\partial^\alpha f}|_2^2-\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\widehat{U}|\widehat{\partial^\alpha\rho}|^2)\right\}+\langle L_1[\widehat{\partial^\alpha f}],\widehat{\partial^\alpha f}\rangle=\mathrm{Re}\langle\widehat{g_1},\widehat{\partial^\alpha f}\rangle.\tag{3.44}$$

另外, 用 $-\mathrm{i}|\xi|S_1(\omega)$ 作用于 (3.41), 可得

$$\begin{aligned}&-\mathrm{i}|\xi|S_1(\omega)\partial_t(\widehat{\partial^\alpha f})+|\xi|^2S_1(\omega)((v\cdot\omega)\widehat{\partial^\alpha f})-\mathrm{i}|\xi|S_1(\omega)L_1[\widehat{\partial^\alpha f}]\\&\quad=-\frac{1}{2}\xi|\xi|\widehat{U}\widehat{\partial^\alpha\rho}S_1(\omega)(\sqrt{\mu}v)-\mathrm{i}|\xi|S_1(\omega)\widehat{g_1}.\end{aligned}\tag{3.45}$$

将上述不等式与 $\widehat{\partial^\alpha f}$ 作内积, 可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\langle-\mathrm{i}|\xi|S_1(\omega)\partial_t\widehat{\partial^\alpha f},\widehat{\partial^\alpha f}\rangle+|\xi|^2\mathrm{Re}\langle S_1(\omega)((v\cdot\omega)\widehat{\partial^\alpha f}),\widehat{\partial^\alpha f}\rangle\\&\quad=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\langle\xi|\xi|\widehat{U}\widehat{\partial^\alpha\rho}S_1(\omega)(\sqrt{\mu}v),\widehat{\partial^\alpha f}\rangle+|\xi|\mathrm{Re}\{\langle\mathrm{i}S_1(\omega)L_1[\widehat{\partial^\alpha f}],\widehat{\partial^\alpha f}\rangle-\langle\mathrm{i}S_1(\omega)\widehat{g_1},\widehat{\partial^\alpha f}\rangle\}.\end{aligned}\tag{3.46}$$

因为 $\mathrm{i}S_1(\omega)$ 是自伴的, 所以上式第一项为 $-\frac{1}{2}\partial_t[|\xi|\langle\mathrm{i}S_1(\omega)(\widehat{\partial^\alpha f}),\widehat{\partial^\alpha f}\rangle]$. 则令 (3.44)$\times(1+|\xi|^2)+(3.46)\times\kappa$ ($\kappa>0$), 可以得到

$$\begin{aligned}&\partial_t\left[\frac{1+|\xi|^2}{2}|\widehat{\partial^\alpha f}|_2^2-\frac{1+|\xi|^2}{4}\mathrm{Re}(\widehat{U}|\partial^\alpha\rho|^2)-\frac{\kappa|\xi|}{2}\langle\mathrm{i}S_1(\omega)(\widehat{\partial^\alpha f}),\widehat{\partial^\alpha f}\rangle\right]\\&\quad+(1+|\xi|^2-\kappa|\xi|^2)\langle L_1[\widehat{\partial^\alpha f}],\widehat{\partial^\alpha f}\rangle+\kappa|\xi|^2\{\mathrm{Re}\langle\mathrm{i}S_1(\omega)((v\cdot\omega)\widehat{\partial^\alpha f}),\widehat{\partial^\alpha f}\rangle+\langle L_1[\widehat{\partial^\alpha f}],\widehat{\partial^\alpha f}\rangle\}\\&\quad=\kappa|\xi|\mathrm{Re}\{\langle\mathrm{i}S_1(\omega)L_1[\widehat{\partial^\alpha f}],\widehat{\partial^\alpha f}\rangle-\langle\mathrm{i}S_1(\omega)\widehat{g_1},\widehat{\partial^\alpha f}\rangle\}-\frac{1}{2}\kappa\mathrm{Re}\langle\xi|\xi|\widehat{U}\widehat{\partial^\alpha\rho}S_1(\omega)(\sqrt{\mu}v),\widehat{\partial^\alpha f}\rangle\\&\qquad+(1+|\xi|^2)\mathrm{Re}\langle\widehat{g_1},\widehat{\partial^\alpha f}\rangle.\end{aligned}\tag{3.47}$$

不失一般性, 令 $0<\kappa<1$, 对于 (3.47) 左边第二项, 可以得到

$$(1+|\xi|^2-\kappa|\xi|^2)\langle L_1[\widehat{\partial^\alpha f}],\widehat{\partial^\alpha f}\rangle\geqslant(1-\kappa)(1+|\xi|^2)\delta_0|(I-P_1)\widehat{\partial^\alpha f}|_\nu^2.$$

根据引理 3.4 的结论, 对于 (3.47) 左边第三项, 有下面估计:

$$\kappa|\xi|^2\{\mathrm{Re}\langle \mathrm{i}S_1(\omega)((v\cdot\omega)\widehat{\partial^\alpha f}),\widehat{\partial^\alpha f}\rangle+\langle L_1[\widehat{\partial^\alpha f}],\widehat{\partial^\alpha f}\rangle\}\geqslant\kappa c_0|\xi|^2(|P_1\widehat{\partial^\alpha f}|_2^2+|(I-P_1)\widehat{\partial^\alpha f}|_\nu^2).\tag{3.48}$$

另外, 由补偿函数 $S_1(\omega)$ 的定义 (3.33), 有

$$S_1(\omega)L_1[\widehat{\partial^\alpha f}]=\sum_{k,l=1}^{13}\lambda_1 r_{kl}^1(\omega)\langle L_1[\widehat{\partial^\alpha f}],e_l\rangle e_k=\sum_{k,l=1}^{13}\lambda_1 r_{kl}^1(\omega)\langle L_1[(I-P_1)\widehat{\partial^\alpha f}],e_l\rangle e_k.$$

由 $L_1g=\Gamma(\sqrt{\mu},g)+\Gamma(g,\sqrt{\mu})$, 利用引理 2.2, 可以得到

$$|\langle L_1[(I-P_1)\widehat{\partial^\alpha f}],e_l\rangle|\leqslant C|(I-P_1)\widehat{\partial^\alpha f}|_2+C|(I-P_1)\widehat{\partial^\alpha f}|_\nu\leqslant C|(I-P_1)\widehat{\partial^\alpha f}|_\nu.$$

因此, (3.47) 右边第一项取绝对值后满足

$$\begin{aligned}&\kappa|\xi||\{\langle \mathrm{i}S_1(\omega)L_1[\widehat{\partial^\alpha f}],\widehat{\partial^\alpha f}\rangle+\langle \mathrm{i}S_1(\omega)\widehat{g_1},\widehat{\partial^\alpha f}\rangle\}|\\&\quad\leqslant c\kappa|\xi|\Big\{|(I-P_1)\widehat{\partial^\alpha f}|_\nu|\widehat{\partial^\alpha f}|_2+\sum_{k,l=1}^{13}|\langle\widehat{g_1},e_l\rangle||\langle\widehat{\partial^\alpha f},e_k\rangle|\Big\}\\&\quad\leqslant\kappa\eta|\xi|^2|\widehat{\partial^\alpha f}|_2^2+\kappa C_\eta|(I-P_1)\widehat{\partial^\alpha f}|_\nu^2+C_\eta\sum_{l=1}^{13}|\langle\widehat{g_1},e_l\rangle|^2.\end{aligned}\tag{3.49}$$

利用 μ 的指数衰减性质, 有

$$|\langle S_1(\omega)(\sqrt{\mu}v),\widehat{\partial^\alpha f}\rangle|=\sum_{k,l=1}^{13}|\lambda r_{kl}^1(\omega)\langle\sqrt{\mu}v,e_l\rangle\overline{\langle\widehat{\partial^\alpha f},e_k\rangle}|\leqslant C|\widehat{\partial^\alpha f}|_2.$$

根据 $U(x)$ 的假设, 易知 $|\widehat{U}(\xi)|\leqslant1$, 可以得到

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{2}\kappa\mathrm{Re}\langle\xi|\xi|\widehat{U}\widehat{\partial^\alpha\rho}S_1(\omega)(\sqrt{\mu}v),\widehat{\partial^\alpha f}\rangle\Big|&\leqslant C\kappa|\xi|^2|\widehat{U}\widehat{\partial^\alpha\rho}||\widehat{\partial^\alpha f}|_2\leqslant C\kappa|\xi|^2|\widehat{\partial^\alpha\rho}|^2+C\kappa|\xi|^2|\widehat{\partial^\alpha f}|_2^2\\&\leqslant C\kappa|\xi|^2|P_1\widehat{\partial^\alpha f}|_2^2+C\kappa|\xi|^2|(I-P_1)\widehat{\partial^\alpha f}|_2^2.\end{aligned}\tag{3.50}$$

令 $\kappa,\eta>0$ 足够小, 综合上面所有估计, 可以从 (3.47) 得到

$$\begin{aligned}&\partial_t\Big[(1+|\xi|^2)|\widehat{\partial^\alpha f}|_2^2-\frac{1+|\xi|^2}{2}\mathrm{Re}(\widehat{U}|\widehat{\partial^\alpha\rho}|^2)-\kappa|\xi|\langle \mathrm{i}S_1(\omega)(\widehat{\partial^\alpha f}),\widehat{\partial^\alpha f}\rangle\Big]\\&\quad+\delta_1|\xi|^2|P_1\widehat{\partial^\alpha f}|_2^2+\delta_2(1+|\xi|)^2|(I-P_1)\widehat{\partial^\alpha f}|_\nu^2\\&\qquad\leqslant(1+|\xi|^2)\mathrm{Re}\langle\widehat{g_1},\widehat{\partial^\alpha f}\rangle+C\sum_{l=1}^{13}|\langle\widehat{g_1},e_l\rangle|^2.\end{aligned}\tag{3.51}$$

根据 (1.6) 和 (3.24), 可得

$$g_1=\partial^\alpha\Gamma(f,f)-\frac{1}{4}\partial^\alpha(\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\cdot vf)+\frac{1}{4}\partial^\alpha(\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot v\phi)$$

$$+\frac{1}{2}\partial^\alpha(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v f)-\frac{1}{2}\partial^\alpha(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v\phi). \tag{3.52}$$

对 (3.51) 关于 ξ 积分同时对 $1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1$ 求和, 可以得到

$$\begin{aligned}&\partial_t\Big[\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|\partial^\alpha f\|^2-\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)\mathrm{Re}(\widehat{U}|\widehat{\partial^\alpha\rho}|^2)d\xi\\&\quad-\kappa\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|\langle\mathrm{i}S_1(\omega)(\widehat{\partial^\alpha f}),\widehat{\partial^\alpha f}\rangle d\xi\Big]\\&\quad+\delta_1\sum_{2\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|P_1\partial^\alpha f\|_2^2+\delta_2\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|(I-P_1)\partial^\alpha f\|_\nu^2\\&\qquad\leqslant\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)\mathrm{Re}\langle\widehat{g_1},\widehat{\partial^\alpha f}\rangle d\xi+C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\sum_{l=1}^{13}\int_{\mathbb{R}^3}|\langle\widehat{g_1},e_l\rangle|^2d\xi.\end{aligned} \tag{3.53}$$

首先估计 (3.53) 右端的第一项. 对于某个多重指标 δ_i 且 $|\delta_i|=1$, 可以得到

$$\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)\mathrm{Re}\langle\widehat{g_1},\widehat{\partial^\alpha f}\rangle d\xi=\mathrm{Re}(g_1,\partial^\alpha f)+\mathrm{Re}(\partial^{\delta_i}g_1,\partial^{\delta_i}\partial^\alpha f). \tag{3.54}$$

注意到 $1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1$, 根据引理 2.3, 有

$$|(\partial^\alpha\Gamma(f,f),\partial^\alpha f)|=|(\partial^\alpha\Gamma(f,f),(I-P_1)\partial^\alpha f)|\leqslant\eta\|\partial^\alpha(I-P_1)f\|_\nu^2+C_\eta\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).$$

类似地, 有

$$|(\partial^{\delta_i}\partial^\alpha\Gamma(f,f),\partial^{\delta_i}\partial^\alpha f)|\leqslant\eta\|\partial^{\delta_i}\partial^\alpha(I-P_1)f\|_\nu^2+C_\eta\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).$$

对于 (3.54) 中 g_1 的第二和三项, 当 $|\alpha-\alpha'|\geqslant1$ 时, 由引理 2.6 有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}|(\partial^{\alpha'}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot v\partial^{\alpha-\alpha'}f+\partial^{\alpha'}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot v\partial^{\alpha-\alpha'}\phi,\partial^\alpha f)|\\&\quad\leqslant C\|\partial^{\alpha'}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\|_{L_x^\infty}\|\partial^{\alpha-\alpha'}f\|_\nu\|\partial^\alpha f\|_\nu+C\|\partial^{\alpha'}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\|_{L_x^\infty}\|\partial^{\alpha-\alpha'}\phi\|_\nu\|\partial^\alpha f\|_\nu\\&\quad\leqslant C\|\nabla_x f\|\|\partial^{\alpha-\alpha'}f\|_\nu\|\partial^\alpha f\|_\nu+C\|\nabla_x\phi\|\|\partial^{\alpha-\alpha'}\phi\|_\nu\|\partial^\alpha f\|_\nu\\&\quad\leqslant C\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).\end{aligned}$$

另外, 当 $|\alpha-\alpha'|=0$ 时, 可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}|(\partial^\alpha\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot vf+\partial^\alpha\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot v\phi,\partial^\alpha f)|\\&\quad\leqslant C\int_{\mathbb{R}^3}|v|\|\partial^\alpha\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\|_{L_x^3}\|f\|_{L_x^6}\|\partial^\alpha f\|_{L_x^2}dv+C\int_{\mathbb{R}^3}|v|\|\partial^\alpha\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\|_{L_x^3}\|\phi\|_{L_x^6}\|\partial^\alpha f\|_{L_x^2}dv\\&\quad\leqslant C\|\nabla_x f\|\|\nabla_x f\|_\nu\|\partial^\alpha f\|_\nu+C\|\nabla_x\phi\|\|\nabla_x\phi\|_\nu\|\partial^\alpha f\|_\nu\\&\quad\leqslant C\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}\widetilde{\mathcal{D}}_l(t),\end{aligned}$$

这里用了 Hölder 不等式和 Sobolev 嵌入不等式 $\|f\|_{L_x^6}\leqslant\|\nabla_x f\|_{L_x^2}$.

因而, 对 (3.54) 中 g_1 的第二和三项, 有下面估计:

$$\frac{1}{4}|(\partial^\alpha(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot vf)+\partial^\alpha(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot v\phi),\partial^\alpha f)|\leqslant C\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).$$

同理, 下面的不等式也是成立的:

$$\frac{1}{4}|(\partial^{\delta_i}\partial^{\alpha}(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot vf)+\partial^{\delta_i}\partial^{\alpha}(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot v\phi),\partial^{\delta_i}\partial^{\alpha}f)|\leqslant C\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).$$

下面估计 (3.54) 中 g_1 的第四和五项. 当 $|\alpha'|\geqslant 1$ 时, 根据 Hölder 不等式和引理 2.6, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|(\partial^{\alpha'}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\partial^{\alpha-\alpha'}\nabla_v f-\partial^{\alpha'}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\partial^{\alpha-\alpha'}\nabla_v\phi,\partial^{\alpha}f)|\\
&\quad\leqslant C\|\partial^{\alpha'}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\|_{L^\infty_x}\|\partial^{\alpha-\alpha'}\nabla_v f\|\|\partial^{\alpha}f\|+C\|\partial^{\alpha'}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\|_{L^\infty_x}\|\partial^{\alpha-\alpha'}\nabla_v\phi\|\|\partial^{\alpha}f\|\\
&\quad\leqslant C\|\nabla_x f\|\|\partial^{\alpha-\alpha'}\nabla_v f\|\|\partial^{\alpha}f\|+C\|\nabla_x\phi\|\|\partial^{\alpha-\alpha'}\nabla_v\phi\|\|\partial^{\alpha}f\|\\
&\quad\leqslant C\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).
\end{aligned}$$

对 (3.54) 中 g_1 的第四项, 当 $|\alpha'|=0$ 时, 通过分部积分可以得到

$$\frac{1}{2}(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\partial^{\alpha}\nabla_v f,\partial^{\alpha}f)=\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v|\partial^{\alpha}f|^2\,dx\,dv=0.$$

因而, 对 (3.54) 中 g_1 的第四和五项, 有下面估计:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\partial^{\alpha}\{\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v f\}-\partial^{\alpha}\{\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v\phi\},\partial^{\alpha}f)\\
&\quad\leqslant C\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}\widetilde{\mathcal{D}}_l(t)-\frac{1}{2}(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v\partial^{\alpha}\phi,\partial^{\alpha}f).
\end{aligned}$$

类似地, 也可以得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\partial^{\delta_i}\partial^{\alpha}\{\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v f\}-\partial^{\delta_i}\partial^{\alpha}\{\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v\phi\},\partial^{\delta_i}\partial^{\alpha}f)\\
&\quad\leqslant C\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}\widetilde{\mathcal{D}}_l(t)-\frac{1}{2}(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v\partial^{\delta_i}\partial^{\alpha}\phi,\partial^{\delta_i}\partial^{\alpha}f).
\end{aligned}$$

我们仍需要估计 (3.53) 右端的最后一项. 注意到 (3.52), 易知

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\langle\widehat{g_1},e_l\rangle|^2d\xi=(g_1,e_l)^2. \tag{3.55}$$

对于 (3.55) 中 g_1 的第一项, 由于 e_l 对 v 具有指数衰减的性质, 根据引理 2.2, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}(\partial^{\alpha}\Gamma(f,f),e_l)^2&\leqslant C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\sum_{\alpha_1+\alpha_2\leqslant\alpha}\int_{\mathbb{R}^3}\{|\partial^{\alpha_1}f|_2^2|\partial^{\alpha_2}f|_\nu^2+|\partial^{\alpha_1}f|_\nu^2|\partial^{\alpha_2}f|_2^2\}dx\\
&\leqslant C\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).
\end{aligned}$$

对于 (3.55) 中 g_1 的第二项, 由 e_l 的指数衰减性质, 通过引理 2.6, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}(\partial^{\alpha}(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot vf),e_l)^2\\
&\quad\leqslant C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\sum_{\alpha_1\leqslant\alpha}\|\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\|_{L^\infty_x}^2\|\partial^{\alpha-\alpha_1}f\|^2\\
&\quad\leqslant C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\sum_{\alpha_1\leqslant\alpha}\|\nabla_x f\|^2\|\partial^{\alpha-\alpha_1}f\|^2
\end{aligned}$$

$$\leqslant C\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).$$

对于 (3.55) 中 g_1 中剩余的其他项, 它们有相同的下界, 这里省去证明. 这样, 至此完成了 (3.53) 右端项的估计.

收集上面所有估计结果, 选取足够小的 $\eta>0$, 由 (3.53), 可以得到

$$\begin{aligned}
&\partial_t\Big[\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|\partial^\alpha f\|^2-\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)\mathrm{Re}(\widehat{U}|\widehat{\partial^\alpha\rho}|^2)d\xi\\
&-\kappa\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|\langle \mathrm{i}S_1(\omega)(\widehat{\partial^\alpha f}),\widehat{\partial^\alpha f}\rangle d\xi\Big]\\
&+\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\{(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v\partial^\alpha\phi,\partial^\alpha f)+(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v\partial^{\delta_i}\partial^\alpha\phi,\partial^{\delta_i}\partial^\alpha f)\}\\
&+\delta_1'\sum_{2\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|\partial^\alpha P_1 f\|_2^2+\delta_2'\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|\partial^\alpha(I-P_1)f\|_\nu^2\\
&\leqslant C(\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)+\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)})\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).
\end{aligned}\tag{3.56}$$

类似于 (3.51) 的证明, 利用 (3.42) 和相应的补偿函数, 我们也有

$$\begin{aligned}
&\partial_t\Big[(1+|\xi|^2)|\widehat{\partial^\alpha\phi}|_2^2-\frac{1+|\xi|^2}{2}\mathrm{Re}(\widehat{U}|\widehat{\partial^\alpha\varphi}|^2)-\kappa|\xi|\langle \mathrm{i}S_2(\omega)(\widehat{\partial^\alpha\phi}),\widehat{\partial^\alpha\phi}\rangle\Big]\\
&+\delta_1|\xi|^2|P_2\widehat{\partial^\alpha\phi}|_2^2+\delta_2(1+|\xi|)^2|(I-P_2)\widehat{\partial^\alpha\phi}|_\nu^2\\
&\leqslant(1+|\xi|^2)\mathrm{Re}\langle\widehat{g_2},\widehat{\partial^\alpha f}\rangle+C\sum_{l=1}^4|\langle\widehat{g_2},e_l\rangle|^2.
\end{aligned}\tag{3.57}$$

若对方程 (3.57) 重复以上步骤, 则可以得到

$$\begin{aligned}
&\partial_t\Big[\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|\partial^\alpha\phi\|^2+\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)\mathrm{Re}(\widehat{U}|\widehat{\partial^\alpha\varphi}|^2)d\xi\\
&-\kappa\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|\langle \mathrm{i}S_2(\omega)(\widehat{\partial^\alpha\phi}),\widehat{\partial^\alpha\phi}\rangle d\xi\Big]\\
&+\delta_1\sum_{2\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|P_2\partial^\alpha\phi\|_2^2+\delta_2\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|(I-P_2)\partial^\alpha\phi\|_\nu^2\\
&\leqslant\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)\mathrm{Re}\langle\widehat{g_2},\widehat{\partial^\alpha\phi}\rangle d\xi+C_\eta\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\sum_{l=1}^4\int_{\mathbb{R}^3}\langle\widehat{g_2},e_l\rangle d\xi.
\end{aligned}\tag{3.58}$$

根据 (1.7) 和 (3.25), 有

$$\begin{aligned}
g_2=&\partial^\alpha\Gamma(\phi,f)-\frac{1}{4}\partial^\alpha(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot v\phi)+\frac{1}{4}\partial^\alpha(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot vf)\\
&+\frac{1}{2}\partial^\alpha(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v\phi)-\frac{1}{2}\partial^\alpha(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v f).
\end{aligned}\tag{3.59}$$

类似得到 (3.56) 的过程, 我们能够得到

$$\partial_t\Big[\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|\partial^\alpha\phi\|^2+\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)\mathrm{Re}(\widehat{U}|\widehat{\partial^\alpha\varphi}|^2)d\xi$$

$$
\begin{aligned}
&-\kappa\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|\langle \mathrm{i}S_2(\omega)(\widehat{\partial^\alpha\phi}),\widehat{\partial^\alpha\phi}\rangle d\xi\Big]\\
&+\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\{(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v\partial^\alpha f,\partial^\alpha\phi)+(\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v\partial^{\delta_i}\partial^\alpha f,\partial^{\delta_i}\partial^\alpha\phi)\}\\
&+\delta_1'\sum_{2\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|\partial^\alpha P_2\phi\|_2^2+\delta_2'\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|\partial^\alpha(I-P_2)\phi\|_\nu^2\\
&\quad\leqslant C(\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)+\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)})\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).
\end{aligned}\tag{3.60}
$$

应用 (3.56) 和 (3.60) 以及分部积分, 易得 (3.39).

为了证明 (3.40), 令 (3.51) 中 $\alpha=0$, 对所得到的不等式与 $(1+|\xi|^2)^{N-1}$ 相乘后, 在 $\mathbb{R}^3_\xi$ 上积分, 可以得到

$$
\begin{aligned}
&\partial_t\Big[\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^N|\widehat{f}|^2d\xi-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^N\mathrm{Re}(\widehat{U}|\widehat{\rho}|^2)d\xi-\kappa\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^{N-1}|\xi|\langle \mathrm{i}S_1(\omega)(\widehat{f}),\widehat{f}\rangle d\xi\Big]\\
&\quad+\delta_1\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^{N-1}|\xi|^2|P_1f|_2^2d\xi+\delta_2\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^N(I-P_1)|\widehat{f}|_\nu^2d\xi\\
&\quad\leqslant\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^N\mathrm{Re}\langle\widehat{g_1},\widehat{f}\rangle d\xi+C_\eta\sum_{l=1}^{13}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^{N-1}|\langle\widehat{g_1},e_l\rangle|^2d\xi,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
g_1=\Gamma(f,f)&-\frac{1}{4}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\cdot vf+\frac{1}{4}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot v\phi\\
&+\frac{1}{2}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_vf-\frac{1}{2}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v\phi.
\end{aligned}
$$

若对方程 (3.57) 重复以上步骤, 则可以得到

$$
\begin{aligned}
&\partial_t\Big[\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^N|\widehat{\phi}|^2d\xi+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^N\mathrm{Re}(\widehat{U}|\widehat{\varphi}|^2)d\xi-\kappa\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^{N-1}|\xi|\langle \mathrm{i}S_2(\omega)(\widehat{\phi}),\widehat{\phi}\rangle d\xi\Big]\\
&\quad+\delta_1\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^{N-1}|\xi|^2|P_2\phi|_2^2d\xi+\delta_2\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^N(I-P_2)|\widehat{\phi}|_\nu^2d\xi\\
&\quad\leqslant\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^N\mathrm{Re}\langle\widehat{g_2},\widehat{\phi}\rangle d\xi+C_\eta\sum_{l=1}^{4}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^{N-1}|\langle\widehat{g_2},e_l\rangle|^2d\xi,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
g_2=\Gamma(\phi,f)&-\frac{1}{4}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\cdot v\phi+\frac{1}{4}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot vf\\
&+\frac{1}{2}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v\phi-\frac{1}{2}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_vf.
\end{aligned}
$$

类似于上面的证明, 可以得到 (3.40). 至此完成了引理 3.5 的证明. □

为了研究解的最优衰减速率, 考虑以下线性方程组:

$$
\partial_tf+v\cdot\nabla_xf+L_1f+\frac{1}{2}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\sqrt{\mu}v=0,\tag{3.61}
$$

$$
\partial_t\phi+v\cdot\nabla_x\phi+L_2\phi-\frac{1}{2}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\sqrt{\mu}v=0.\tag{3.62}
$$

该系统的初值条件为 $f(0,x,v)=f_0(x,v)$, $\phi(0,x,v)=\phi_0(x,v)$, 并记其解为

$$f(t,x,v)=U_1(t,0)f_0(x,v), \tag{3.63}$$

$$\phi(t,x,v)=U_2(t,0)\phi_0(x,v), \tag{3.64}$$

其中 $U_i(t,s)$ $(i=1,2)$ 为相应的解算子.

引理 3.6 令 $k\geqslant k_1\geqslant 0$, $f_0,\phi_0\in H^N\cap Z_q$, 若 $f(t,x,v)$, $\phi(t,x,v)\in C^0([0,\infty);H^N)\cap C^1([0,\infty);H^{N-1})$ 是 (3.61) 和 (3.62) 的解, 则对于任意整数 $m=k-k_1$, $q\in[1,2]$ 和 $\sigma_{q,m}=\frac{3}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})+\frac{m}{2}$, 下列不等式成立:

$$\|\nabla_x^k U_1(t,0)f_0\|\leqslant C(1+t)^{-\sigma_{q,m}}(\|\nabla_x^{k_1}f_0\|_{Z_q}+\|\nabla_x^k f_0\|), \tag{3.65}$$

$$\|\nabla_x^k U_2(t,0)\phi_0\|\leqslant C(1+t)^{-\sigma_{q,m}}(\|\nabla_x^{k_1}\phi_0\|_{Z_q}+\|\nabla_x^k \phi_0\|). \tag{3.66}$$

证明 令 (3.51) 中的 $g_1=0$, $|\alpha|=0$, 则有

$$\begin{aligned}&\partial_t\left[(1+|\xi|^2)|\widehat{f}|_2^2-\frac{1+|\xi|^2}{2}\mathrm{Re}(\widehat{U}|\widehat{\rho}|^2)-\kappa|\xi|\langle \mathrm{i}S_1(\omega)\widehat{f}(t,\xi,\cdot),\widehat{f}(t,\xi,\cdot)\rangle\right]\\&\quad+\delta_1|\xi|^2|P_1\widehat{f}|_2^2+\delta_2(1+|\xi|^2)|(I-P_1)\widehat{f}|_\nu^2\\&\quad\leqslant 0.\end{aligned} \tag{3.67}$$

设

$$E(f)=|\widehat{f}(t,\xi,\cdot)|_2^2-\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\widehat{U}|\widehat{\rho}|^2)-\frac{\kappa|\xi|}{1+|\xi|^2}\langle \mathrm{i}S_1(\omega)\widehat{f}(t,\xi,\cdot),\widehat{f}(t,\xi,\cdot)\rangle.$$

由于 $\kappa>0$ 为足够小的数, $S_1(\omega)$ 为有界算子, 因此有

$$E(f)\leqslant|\widehat{f}(t,\xi,\cdot)|_2^2+\frac{1}{2}|P_1\widehat{f}(t,\xi,\cdot)|_2^2+\frac{C\kappa}{2}|\widehat{f}(t,\xi,\cdot)|_2^2\leqslant C_1|\widehat{f}(t,\xi,\cdot)|_2^2,$$

$$E(f)\geqslant|\widehat{f}(t,\xi,\cdot)|_2^2-\frac{1}{2}|P_1\widehat{f}(t,\xi,\cdot)|_2^2-\frac{C\kappa}{2}|\widehat{f}(t,\xi,\cdot)|_2^2\geqslant\frac{1}{4}|\widehat{f}(t,\xi,\cdot)|_2^2,$$

所以 $E(f)\approx|\widehat{f}(t,\xi,\cdot)|_2^2$.

令 $0<\delta\leqslant\min\{\frac{\delta_1}{2},\frac{\delta_2}{2}\}$, 根据 (3.67), 可以得到

$$\partial_t E(f)+\delta\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}E(f)\leqslant 0. \tag{3.68}$$

因而可以得到

$$|\widehat{f}(t,\xi,\cdot)|_2^2\leqslant C\mathrm{e}^{-\delta t\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}}|\widehat{f}_0(\xi,\cdot)|_2^2.$$

将上式与 $|\xi|^{2k}$ 相乘并于 $\mathbb{R}^3_\xi$ 上积分, 可得

$$\|\nabla_x^k f\|^2=\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{2k}|\widehat{f}(t,\xi,\cdot)|_2^2d\xi\leqslant C\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{2k}\mathrm{e}^{-\delta t\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}}|\widehat{f}_0(\xi,\cdot)|_2^2d\xi. \tag{3.69}$$

记最后一个积分为 I_0. 于是有

$$I_0=\int_{|\xi|\leqslant 1}|\xi|^{2k}\mathrm{e}^{-\delta t\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}}|\widehat{f}_0(\xi,\cdot)|_2^2d\xi+\int_{|\xi|\geqslant 1}|\xi|^{2k}\mathrm{e}^{-\delta t\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}}|\widehat{f}_0(\xi,\cdot)|_2^2d\xi.$$

首先估计 I_0 的第一项. 记 $|\alpha|=k$, $|\alpha'|=k_1$, $m=|\alpha-\alpha'|$ 以及 $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=1$, $p'\in[1,\infty)$, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_{|\xi|\leqslant 1}|\xi|^{2k}\mathrm{e}^{-\delta t\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}}|\widehat{f_0}(\xi,\cdot)|_2^2d\xi\right| &\leqslant \int_{|\xi|\leqslant 1}|\xi^{\alpha-\alpha'}|^2\mathrm{e}^{-\delta t\frac{|\xi|^2}{2}}|\xi^{\alpha'}\widehat{f_0}(\xi,\cdot)|_2^2d\xi\\ &\leqslant \left(\int_{|\xi|\leqslant 1}|\xi|^{2p'm}\mathrm{e}^{-\delta p't\frac{|\xi|^2}{2}}d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{|\xi|\leqslant 1}|\xi^{\alpha'}\widehat{f_0}(\xi,\cdot)|_2^{2q'}d\xi\right)^{\frac{1}{q'}}. \quad (3.70)\end{aligned}$$

注意到

$$\int_{|\xi|\leqslant 1}|\xi|^{2p'm}\mathrm{e}^{-\delta p't\frac{|\xi|^2}{2}}d\xi\leqslant C(1+t)^{-\frac{3}{2}-p'm},$$

并且

$$\left(\int_{|\xi|\leqslant 1}|\xi^{\alpha'}\widehat{f_0}(\xi,\cdot)|_2^{2q'}d\xi\right)^{\frac{1}{q'}}\leqslant\|\partial^{\alpha'}f_0\|_{Z_q}^2,\quad \frac{1}{q}+\frac{1}{2q'}=1,$$

从而有

$$\int_{|\xi|\leqslant 1}|\xi|^{2k}\mathrm{e}^{-\delta t\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}}|\widehat{f_0}(\xi)|_2^2d\xi\leqslant C(1+t)^{-\frac{3}{2}-p'm}\|\partial^{\alpha'}f_0\|_{Z_q}^2. \quad (3.71)$$

对于 I_0 的第二项, 有

$$\int_{|\xi|\geqslant 1}|\xi|^{2k}\mathrm{e}^{-\delta t\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}}|\widehat{f_0}(\xi,\cdot)|_2^2d\xi\leqslant C\mathrm{e}^{-\frac{\delta t}{2}}\|\partial^{\alpha}f_0\|^2.$$

因此,

$$\begin{aligned}I_0&\leqslant C(1+t)^{-\frac{3}{2p'}-m}\|\partial^{\alpha'}f_0\|_{Z_q}^2+C\mathrm{e}^{-\frac{\delta t}{2}}\|\partial^{\alpha}f_0\|^2\\ &\leqslant C(1+t)^{-2\sigma_{q\cdot m}}(\|\nabla_x^{k_1}f_0\|_{Z_q}+\|\nabla_x^{k}f_0\|)^2. \quad (3.72)\end{aligned}$$

根据 (3.69) 以及上面的估计, 可知 (3.65) 是成立的. 此外, 由于 (3.61) 与 (3.62) 的形式类似, (3.66) 根据上面的过程可得, 从而证明了该引理成立. □

4 主要定理的证明

本节建立一些能量不等式, 以用于构建全局解和证明最优时间衰减. 首先说明方程组 (1.6) 和 (1.7) 局部解的存在性, 其构造的方法是基于迭代序列逼近解的一致能量估计, 鉴于论文篇幅, 这里省略其证明过程 (参见文献 [3,7,8]).

引理 4.1 对于任意 $l\geqslant 0$, 存在常数 $M_0>0$, $T^*>0$, 使得如果 $T^*\leqslant M_0/2$, $\tilde{\mathcal{E}}_l(0)\leqslant M_0/2$, 则方程组 (1.6) 和 (1.7) 在 $[0,T^*)\times\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^3_v$ 上有唯一解 $[f(t,x,v),\phi(t,x,v)]$, 满足 $\sup_{0\leqslant t\leqslant T^*}\tilde{\mathcal{E}}_l(t)\leqslant M_0$.

4.1 证明全局解的存在性

由引理 3.5 可得

$$\frac{d}{dt}\Big[\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha f,\partial^\alpha\phi]\|^2-\kappa\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^{N-1}|\xi|\{\langle \mathrm{i}S_1(\omega)\widehat{f},\widehat{f}\rangle+\langle \mathrm{i}S_2(\omega)\widehat{\phi},\widehat{\phi}\rangle\}d\xi$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^N\{\mathrm{Re}(\widehat{U}|\widehat{\rho}|^2)-\mathrm{Re}(\widehat{U}|\widehat{\varphi}|^2)\}d\xi\Big]+\delta_1\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha P_1 f,\partial^\alpha P_2\phi]\|^2\\
&+\delta_2\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha(I-P_1)f,\partial^\alpha(I-P_2)\phi]\|_\nu^2\\
&\quad\leqslant C(\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}+\widetilde{\mathcal{E}}_l(t))\widetilde{\mathcal{D}}_l(t),
\end{aligned}\tag{4.1}
$$

这里 $\kappa>0$ 为足够小的常数. 另外, 根据引理 3.2, 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big[\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha f,w^l\partial^\alpha\phi]\|^2+\|[w^l(I-P_1)f,w^l(I-P_2)\phi]\|^2\Big]\\
&\quad+\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial^\alpha(I-P_1)\phi]\|_\nu^2\\
&\qquad\leqslant C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha P_1 f,\partial^\alpha P_2\phi]\|^2+C\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha(I-P_1)f,\partial^\alpha(I-P_2)\phi]\|_\nu^2\\
&\qquad\quad+C(\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}+\widetilde{\mathcal{E}}_l(t))\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).
\end{aligned}\tag{4.2}
$$

根据引理 3.1, 有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{1\leqslant|\beta|\\|\alpha|+|\beta|\leqslant N}}\Big[\frac{d}{dt}\|[w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi]\|^2+\|[w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi]\|_\nu^2\Big]\\
&\quad\leqslant C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha P_1 f,\partial^\alpha P_2\phi]\|^2+C\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial^\alpha(I-P_2)\phi]\|_\nu^2\\
&\qquad+C(\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}+\widetilde{\mathcal{E}}_l(t))\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).
\end{aligned}\tag{4.3}
$$

设 $\widetilde{C}_1$ 和 $\widetilde{C}_2$ 是两个充分大正常数, 并且 $\widetilde{C}_2\ll\widetilde{C}_1$. 利用 (4.1)–(4.3), 可以得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big[\widetilde{C}_1\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha f,\partial^\alpha\phi]\|^2-\kappa\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^{N-1}|\xi|\{\langle\mathrm{i}S_1(\omega)\widehat{f},\widehat{f}\rangle+\langle\mathrm{i}S_2(\omega)\widehat{\phi},\widehat{\phi}\rangle\}d\xi\\
&\quad-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^N\mathrm{Re}(\widehat{U}(|\widehat{\rho}|^2-|\widehat{\varphi}|^2))d\xi\Big)\\
&\quad+\widetilde{C}_2\Big(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha f,w^l\partial^\alpha\phi]\|^2+\|[w^l(I-P_1)f,w^l(I-P_2)\phi]\|^2\Big)\\
&\quad+\sum_{\substack{1\leqslant|\beta|\\|\alpha|+|\beta|\leqslant N}}\|[w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi]\|^2\Big]+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[P_1\partial^\alpha f,P_2\partial^\alpha\phi]\|^2\\
&\quad+\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[(I-P_1)\partial^\alpha f,(I-P_2)\partial^\alpha\phi]\|_\nu^2+\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial^\alpha(I-P_1)\phi]\|_\nu^2\\
&\quad+\sum_{\substack{1\leqslant|\beta|\\|\alpha|+|\beta|\leqslant N}}\|[w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi]\|_\nu^2\\
&\quad\leqslant C(\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}+\widetilde{\mathcal{E}}_l(t))\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).
\end{aligned}\tag{4.4}
$$

根据 $U(x)$ 的假设, 易知 $|\widehat{U}(\xi)|\leqslant 1$. 由于

$$
\frac{1}{2}|\mathrm{Re}(\widehat{U}(|\widehat{\rho}|^2-|\widehat{\varphi}|^2))|\leqslant\frac{1}{2}(|P_1\widehat{f}|_2^2+|P_2\widehat{\phi}|_2^2)\leqslant\frac{1}{2}(|\widehat{f}|_2^2+|\widehat{\phi}|_2^2),
$$

因而有

$$\frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^N\mathrm{Re}(\widehat{U}(|\widehat{\rho}|^2-|\widehat{\varphi}|^2))d\xi\right|\leqslant\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha f,\partial^\alpha\phi]\|^2.$$

由于算子 $S_i(\omega)$ $(i=1,2)$ 为有界算子, 使得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^{N-1}|\xi|\{\langle \mathrm{i}S_1(\omega)\widehat{f},\widehat{f}\rangle+\langle \mathrm{i}S_2(\omega)\widehat{\phi},\widehat{\phi}\rangle\}d\xi\\&\quad\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha f,\partial^\alpha\phi]\|^2+C\sum_{|\alpha|\leqslant N-1}\|[\partial^\alpha f,\partial^\alpha\phi]\|^2,\end{aligned}$$

因此, 定义 (1.9) 的泛函为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_l(t)=\widetilde{C}_1\bigg(&\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha f,\partial^\alpha\phi]\|^2-\kappa\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^{N-1}|\xi|\{\langle \mathrm{i}S_1(\omega)\widehat{f},\widehat{f}\rangle+\langle \mathrm{i}S_2(\omega)\widehat{\phi},\widehat{\phi}\rangle\}d\xi\\&-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^N\mathrm{Re}(\widehat{U}(|\widehat{\rho}|^2-|\widehat{\varphi}|^2))d\xi\bigg)+\widetilde{C}_2\bigg(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha f,w^l\partial^\alpha\phi]\|^2\\&+\|[w^l(I-P_1)f,w^l(I-P_2)\phi]\|^2\bigg)+\sum_{\substack{1\leqslant|\beta|\\|\alpha|+|\beta|\leqslant N}}\|[w^l\partial^\alpha_\beta(I-P_1)f,w^l\partial^\alpha_\beta(I-P_2)\phi]\|^2.\end{aligned}\tag{4.5}$$

根据上面的证明, 易知 $\mathcal{E}_l(t)\approx\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)$. 定义 (1.10) 的泛函为

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_l(t)=&\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha P_1f,\partial^\alpha P_2\phi]\|^2+\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial^\alpha(I-P_1)\phi]\|_\nu^2\\&+\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha(I-P_1)f,\partial^\alpha(I-P_2)\phi]\|_\nu^2+\sum_{\substack{1\leqslant|\beta|\\|\alpha|+|\beta|\leqslant N}}\|[w^l\partial^\alpha_\beta(I-P_1)f,w^l\partial^\alpha_\beta(I-P_2)\phi]\|_\nu^2,\end{aligned}\tag{4.6}$$

我们易知 $\mathcal{D}_l(t)\approx\widetilde{\mathcal{D}}_l(t)$.

从而, 根据 (4.4)、(1.9) 和 (1.10) 直接得到下面不等式:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_l(t)+\mathcal{D}_l(t)\leqslant C(\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}+\widetilde{\mathcal{E}}_l(t))\widetilde{\mathcal{D}}_l(t)\leqslant C(\sqrt{\mathcal{E}_l}(t)+\mathcal{E}_l(t))\mathcal{D}_l(t).\tag{4.7}$$

如果假设 $\mathcal{E}_l(0)\leqslant\varepsilon$, 其中 ε 为一个任意小的常数, 则根据已知的局部解存在性, 通过标准的连续性方法, 可以得到解的全局存在性.

4.2 证明最优时间衰减估计

定理 1.1 的证明 由引理 3.5, 当 $\kappa>0$ 足够小时, 有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\bigg[\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha f,\partial^\alpha\phi]\|^2-\kappa\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|\{\langle \mathrm{i}S_1(\omega)(\widehat{\partial^\alpha f}),\widehat{\partial^\alpha f}\rangle+\langle \mathrm{i}S_2(\omega)(\widehat{\partial^\alpha\phi}),\widehat{\partial^\alpha\phi}\rangle\}d\xi\\&\quad-\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)\{\mathrm{Re}(\widehat{U}|\widehat{\partial^\alpha\rho}|^2)-\mathrm{Re}(\widehat{U}|\widehat{\partial^\alpha\varphi}|^2)\}d\xi\bigg]+\delta_1\sum_{2\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha P_1f,\partial^\alpha P_2\phi]\|^2\\&\quad+\delta_2\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha(I-P_1)f,\partial^\alpha(I-P_2)\phi]\|_\nu^2\leqslant C(\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l}(t)+\widetilde{\mathcal{E}}_l(t))\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).\end{aligned}\tag{4.8}$$

根据引理 3.2, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big[\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha f,w^l\partial^\alpha\phi]\|^2+\|[w^l(I-P_1)f,w^l(I-P_2)\phi]\|^2\Big]\\&\quad+\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial^\alpha(I-P_1)\phi]\|_\nu^2\\&\qquad\leqslant C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha P_1f,\partial^\alpha P_2\phi]\|^2+C\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha(I-P_1)f,\partial^\alpha(I-P_2)\phi]\|_\nu^2\\&\qquad\quad+C(\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}+\widetilde{\mathcal{E}}_l(t))\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).\end{aligned}\tag{4.9}$$

根据引理 3.1, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{1\leqslant|\beta|\\|\alpha|+|\beta|\leqslant N}}\Big[\frac{d}{dt}\|[w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi]\|^2+\|[w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi]\|_\nu^2\Big]\\&\quad\leqslant C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha P_1f,\partial^\alpha P_2\phi]\|^2+C\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial^\alpha(I-P_2)\phi]\|_\nu^2\\&\qquad+C(\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}+\widetilde{\mathcal{E}}_l(t))\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).\end{aligned}\tag{4.10}$$

此外, 令方程组 (3.1) 和 (3.2) 分别乘以 $(I-P_1)f$ 和 $(I-P_2)\phi$ 并于 $\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^3_v$ 上积分. 通过标准的能量估计, 可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|[(I-P_1)f,(I-P_2)\phi]\|^2+\|[(I-P_1)f,(I-P_2)\phi]\|_\nu^2\\&\quad\leqslant C\|[\nabla_xP_1f,\nabla_xP_2\phi]\|^2+C\|[\nabla_x(I-P_1)f,\nabla_x(I-P_2)\phi]\|_\nu^2+C(\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}+\widetilde{\mathcal{E}}_l(t))\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).\end{aligned}\tag{4.11}$$

设 $\widetilde{C}_3$ 和 $\widetilde{C}_4$ 是两个充分大正常数, 并且 $\widetilde{C}_4\ll\widetilde{C}_3$. 利用 (4.8)–(4.11), 可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big[\widetilde{C}_3\Big(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha f,\partial^\alpha\phi]\|^2-\kappa\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|\{\langle\mathrm{i}S_1(\omega)(\widehat{\partial^\alpha f}),\widehat{\partial^\alpha f}\rangle+\langle\mathrm{i}S_2(\omega)(\widehat{\partial^\alpha\phi}),\widehat{\partial^\alpha\phi}\rangle\}d\xi\\&\quad-\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)\{\mathrm{Re}(\widehat{U}|\widehat{\partial^\alpha\rho}|^2)-\mathrm{Re}(\widehat{U}|\widehat{\partial^\alpha\varphi}|^2)\}d\xi\Big)+\widetilde{C}_4\Big(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha f,w^l\partial^\alpha\phi]\|^2\\&\quad+\|[w^l(I-P_1)f,w^l(I-P_2)\phi]\|^2\Big)+\sum_{\substack{1\leqslant|\beta|\\|\alpha|+t|\beta|\leqslant N}}\|[w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi]\|^2\\&\quad+\|[(I-P_1)f,(I-P_2)\phi]\|^2\Big]+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha P_1f,\partial^\alpha P_2\phi]\|^2+\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha(I-P_1)f,\partial^\alpha(I-P_2)\phi]\|_\nu^2\\&\quad+\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial^\alpha(I-P_1)\phi]\|_\nu^2+\sum_{\substack{1\leqslant|\beta|\\|\alpha|+|\beta|\leqslant N}}\|[w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_1)f,w^l\partial_\beta^\alpha(I-P_2)\phi]\|_\nu^2\\&\quad+\|[(I-P_1)f,(I-P_2)\phi]\|_\nu^2\leqslant C\|[\nabla_xP_1f,\nabla_xP_2\phi]\|^2+C(\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}+\widetilde{\mathcal{E}}_l(t))\widetilde{\mathcal{D}}_l(t).\end{aligned}\tag{4.12}$$

此外, 下面两个不等式显然成立:

$$\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|\{\langle\mathrm{i}S_1(\omega)(\widehat{\partial^\alpha f}),\widehat{\partial^\alpha f}\rangle+\langle\mathrm{i}S_2(\omega)(\widehat{\partial^\alpha\phi}),\widehat{\partial^\alpha\phi}\rangle\}d\xi$$

$$\leqslant C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha f,\partial^\alpha\phi]\|^2+C\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\|[\partial^\alpha f,\partial^\alpha\phi]\|^2,$$

$$\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)\mathrm{Re}\{\widehat{U}(|\widehat{\partial^\alpha\rho}|^2-|\widehat{\partial^\alpha\varphi}|^2)\}d\xi\leqslant\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha f,\partial^\alpha\phi]\|^2.$$

当 $\kappa>0$ 足够小时, 可以定义泛函 $H_l(t)$:

$$\begin{aligned}H_l(t)=\widetilde{C}_3\Big(&\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha f,\partial^\alpha\phi]\|^2-\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)\mathrm{Re}\{\widehat{U}(|\widehat{\partial^\alpha\rho}|^2-|\widehat{\partial^\alpha\varphi}|^2)\}d\xi\\&-\kappa\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|\{\langle\mathrm{i}S_1(\omega)(\widehat{\partial^\alpha f}),\widehat{\partial^\alpha f}\rangle+\langle\mathrm{i}S_2(\omega)(\widehat{\partial^\alpha\phi}),\widehat{\partial^\alpha\phi}\rangle\}d\xi\Big)\\&+\widetilde{C}_4\Big(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha f,w^l\partial^\alpha\phi]\|^2+\|[w^l(I-P_1)f,w^l(I-P_2)\phi]\|^2\Big)\\&+\sum_{\substack{1\leqslant|\beta|\\|\alpha|+|\beta|\leqslant N}}\|[w^l\partial^\alpha_\beta(I-P_1)f,w^l\partial^\alpha_\beta(I-P_2)\phi]\|^2+\|[(I-P_1)f,(I-P_2)\phi]\|^2.\end{aligned}\tag{4.13}$$

根据上面的证明, 易知 $\overline{\mathcal{E}}_l(t)\approx H_l(t)$, 其中 $\overline{\mathcal{E}}_l(t)$ 为引理 2.5 中定义的泛函.

从而, 由 (4.12) 可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H_l(t)+\mathcal{D}_l(t)&\leqslant C\|[\nabla_xP_1f,\nabla_xP_2\phi]\|^2+C(\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)}+\widetilde{\mathcal{E}}_l(t))\widetilde{\mathcal{D}}_l(t)\\&\leqslant C\|[\nabla_xP_1f,\nabla_xP_2\phi]\|^2+C(\sqrt{\mathcal{E}_l(t)}+\mathcal{E}_l(t))\mathcal{D}_l(t).\end{aligned}$$

根据 (4.6) 和 (1.9), 易知 $H_l(t)\leqslant C\mathcal{D}_l(t)$. 当 ε 充分小且 $\mathcal{E}_l(t)\leqslant\varepsilon$ 时, 有

$$\frac{d}{dt}H_l(t)+cH_l(t)\leqslant C\|[\nabla_xP_1f,\nabla_xP_2\phi]\|^2.\tag{4.14}$$

如果设

$$\begin{aligned}G_1=&\Gamma(f,f)-\frac{1}{4}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\cdot vf+\frac{1}{4}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot v\phi\\&+\frac{1}{2}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_vf-\frac{1}{2}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v\phi,\\G_2=&\Gamma(f,\phi)-\frac{1}{4}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\cdot v\phi+\frac{1}{4}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot vf\\&+\frac{1}{2}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v\phi-\frac{1}{2}\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_vf,\end{aligned}$$

则方程组 (1.6) 和 (1.7) 可改写为

$$\partial_tf+v\cdot\nabla_xf+L_1f+\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\sqrt{\mu}v=G_1,\tag{4.15}$$

$$\partial_t\phi+v\cdot\nabla_x\phi+L_2\phi-\nabla_xU\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\sqrt{\mu}v=G_2.\tag{4.16}$$

由 (3.63) 和 (3.64), 利用 Duhamel 原理, 可将以上方程组的解写成以下形式:

$$f(t)=U_1(t,0)f_0+\int_0^tU_1(t,s)G_1(s)ds,$$

$$\phi(t)=U_2(t,0)\phi_0+\int_0^tU_2(t,s)G_2(s)ds.$$

根据引理 3.6, 可以得到

$$\begin{aligned}\|\nabla_x P_1 f(t)\| &\leqslant \|\nabla_x f(t)\|\\ &\leqslant C\lambda_0(1+t)^{-5/4}+C\int_0^t(1+t-s)^{-5/4}(\|G_1(s)\|_{Z_1}+\|\nabla_x G_1(s)\|)ds,\end{aligned}\tag{4.17}$$

其中 $\lambda_0=\|[f_0,\phi_0]\|_{Z_1}+\|[\nabla_x f_0,\nabla_x\phi_0]\|$.

注意到 $\mathcal{E}_l(t)\approx\widetilde{\mathcal{E}}_l(t)$ 和 $\overline{\mathcal{E}}_l(t)\approx H_l(t)$. 若 $l\geqslant 1$, 运用引理 2.4 和 2.5, 可以得到

$$\begin{aligned}&\|\nabla_x\Gamma(f,f)\|^2\leqslant C\mathcal{E}_l(t)H_l(t),\\ &\|\Gamma(f,f)\|_{Z_1}^2\leqslant C\|wf\|^4\leqslant C\|w(I-P_1)f\|^4+C\|P_1f\|^4\leqslant C\mathcal{E}_l(t)H_l(t)+C\|P_1f\|^4.\end{aligned}\tag{4.18}$$

下面估计 $\|G_1(s)\|_{Z_1}$ 和 $\|\nabla_x G_1(s)\|$. 当 $\mathcal{E}_l(t)\leqslant\varepsilon$ 时, 根据引理 2.6, 运用 Hölder 不等式, 可以得到

$$\begin{aligned}\|G_1(s)\|_{Z_1}&\leqslant\|\Gamma(f,f)\|_{Z_1}+\frac{1}{4}\|\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot vf\|_{Z_1}+\frac{1}{4}\|\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot v\phi\|_{Z_1}\\ &\quad+\frac{1}{2}\|\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v f\|_{Z_1}+\frac{1}{2}\|\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v\phi\|_{Z_1}\\ &\leqslant C\sqrt{\varepsilon}\sqrt{H_l(s)}+C\|P_1f\|^2+C\|\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\|\|wf\|+C\|\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\|\|w\phi\|\\ &\quad+C\|\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\|\|\nabla_v f\|+C\|\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\|\|\nabla_v\phi\|\\ &\leqslant C\sqrt{\varepsilon}\sqrt{H_l(s)}+C\|P_1f\|^2+C\|\nabla_x f\|\{\|wf\|+\|\nabla_v f\|\}+C\|\nabla_x\phi\|\{\|w\phi\|+\|\nabla_v\phi\|\}\\ &\leqslant C\sqrt{\varepsilon}\sqrt{H_l(s)}+C\|P_1f\|^2,\end{aligned}\tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}\|\nabla_x G_1(s)\|&\leqslant\|\nabla_x\Gamma(f,f)\|+\frac{1}{4}\|\nabla_x\{\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot vf\}\|+\frac{1}{4}\|\nabla_x\{\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot v\phi\}\|\\ &\quad+\frac{1}{2}\|\nabla_x\{\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\cdot\nabla_v f\}\|+\frac{1}{2}\|\nabla_x\{\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\cdot\nabla_v\phi\}\|\\ &\leqslant C\sqrt{\varepsilon}\sqrt{H_l(t)}+C\sum_{|\alpha_1|\leqslant 1}\|\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}f)\|_{L_x^\infty}\sum_{|\alpha_2|\leqslant 1}(\|w\partial^{\alpha_2}f\|+\|\nabla_v\partial^{\alpha_2}f\|)\\ &\quad+C\sum_{|\alpha_1|\leqslant 1}\|\partial^{\alpha_1}\nabla_x U\star(\sqrt{\mu}\phi)\|_{L_x^\infty}\sum_{|\alpha_2|\leqslant 1}(\|w\partial^{\alpha_2}\phi\|+\|\nabla_v\partial^{\alpha_2}\phi\|)\\ &\leqslant C\sqrt{\varepsilon}\sqrt{H_l(t)}+C\|\nabla_x f\|\sum_{|\alpha_2|\leqslant 1}(\|w\partial^{\alpha_2}f\|+\|\nabla_v\partial^{\alpha_2}f\|)\\ &\quad+C\|\nabla_x\phi\|\sum_{|\alpha_2|\leqslant 1}(\|w\partial^{\alpha_2}\phi\|+\|\nabla_v\partial^{\alpha_2}\phi\|)\\ &\leqslant C\sqrt{\varepsilon}\sqrt{H_l(t)}.\end{aligned}\tag{4.20}$$

定义

$$M(t)=\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\{(1+s)^{5/2}H_l(s)\},\quad M_0(t)=\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\{(1+s)^{3/2}\|[f(s),\phi(s)]\|^2\}.\tag{4.21}$$

由定义可知 $M(t)$ 和 $M_0(t)$ 为非递增的函数. 于是, 当 $l\geqslant 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}\|G_1(s)\|_{Z_1}+\|\nabla_x G_1(s)\|&\leqslant C\sqrt{\varepsilon}\sqrt{H_l(s)}+C\|P_1f(s)\|^2\\ &\leqslant C\sqrt{\varepsilon}(1+s)^{-5/4}\sqrt{M(s)}+C(1+s)^{-3/2}M_0(s).\end{aligned}$$

对任意的 $0 \leqslant s \leqslant t$, 由 (4.17), 可以得到

$$\begin{aligned}\|\nabla_x P_1 f(t)\| &\leqslant C\lambda_0(1+t)^{-5/4} + C(\sqrt{\varepsilon}\sqrt{M(t)} + M_0(t))\int_0^t (1+t-s)^{-5/4}(1+s)^{-5/4}ds \\ &\leqslant C(1+t)^{-5/4}(\lambda_0 + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{M(t)} + M_0(t)).\end{aligned}$$

利用 (4.16), 可以类似地得到

$$\|\nabla_x P_2\phi(t)\| \leqslant C(1+t)^{-5/4}(\lambda_0 + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{M(t)} + M_0(t)).$$

另外, 利用 (4.14) 和上面两个估计, 可以得到

$$\begin{aligned}H_l(t) &\leqslant \mathrm{e}^{-ct}H_l(0) + C\int_0^t \mathrm{e}^{-c(t-s)}\|[\nabla_x P_1 f(s), \nabla_x P_2\phi(s)]\|^2 ds \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-ct}H_l(0) + C(\lambda_0^2 + \varepsilon M(t) + M_0^2(t))\int_0^t \mathrm{e}^{-c(t-s)}(1+s)^{-5/2}ds \\ &\leqslant C(1+t)^{-5/2}(H_l(0) + \lambda_0^2 + \varepsilon M(t) + M_0^2(t)).\end{aligned}$$

由 $M(t)$ 的定义可知 $M(t) \leqslant C(H_l(0) + \lambda_0^2 + \varepsilon M(t) + M_0^2(t))$. 当 $\varepsilon > 0$ 足够小时, 可以得到

$$M(t) \leqslant C(H_l(0) + \lambda_0^2 + M_0^2(t)), \tag{4.22}$$

进一步地便有

$$H_l(t) \leqslant C(1+s)^{-5/2}(H_l(0) + \lambda_0^2 + M_0^2(t)). \tag{4.23}$$

根据引理 3.6, 可得

$$\|f(t)\| \leqslant C\lambda_0(1+t)^{-3/4} + C\int_0^t (1+t-s)^{-3/4}(\|G_1(s)\|_{Z_1} + \|G_1(s)\|)ds. \tag{4.24}$$

注意到, 类似于 (4.20), 有

$$\begin{aligned}\|G_1(s)\| &\leqslant \|\Gamma(f,f)\| + \frac{1}{4}\|\nabla_x U \star (\sqrt{\mu}f)\cdot vf\| + \frac{1}{4}\|\nabla_x U \star (\sqrt{\mu}\phi)\cdot v\phi\| \\ &\quad + \|\nabla_x U \star (\sqrt{\mu}\phi)\cdot \nabla_v f\| + \|\nabla_x U \star (\sqrt{\mu}\phi)\cdot \nabla_v \phi\| \\ &\leqslant C\sqrt{\varepsilon}\sqrt{H_l(t)}.\end{aligned} \tag{4.25}$$

于是, 可以得到

$$\begin{aligned}\|G_1(s)\|_{Z_1} + \|G_1(s)\| &\leqslant C\sqrt{\varepsilon}\sqrt{H_l(s)} + C\|P_1 f\|^2 \\ &\leqslant C(\lambda_0 + \sqrt{H_l(0)} + M_0(s))(1+s)^{-5/4} + C(1+s)^{-3/2}M_0(s).\end{aligned}$$

最后, 取 ε 足够小且 $\lambda_0 + \sqrt{H_l(0)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}$, 可以得到

$$\begin{aligned}\|f(t)\| &\leqslant C\lambda_0(1+t)^{-3/4} + C\int_0^t (1+t-s)^{-3/4}(1+s)^{-5/4}ds(\lambda_0 + \sqrt{H_l(0)} + M_0(t)) \\ &\leqslant C(1+t)^{-3/4}(\lambda_0 + \sqrt{H_l(0)} + M_0(t))\end{aligned}$$

$$\leqslant C\sqrt{\varepsilon}(1+t)^{-3/4}+C(1+t)^{-3/4}M_0(t). \tag{4.26}$$

利用 (4.16), 可以类似地得到

$$\|\phi(t)\|\leqslant C\sqrt{\varepsilon}(1+t)^{-3/4}+C(1+t)^{-3/4}M_0(t). \tag{4.27}$$

显然, 通过 $M_0(t)$ 的定义和上面的不等式, 可知 $\sqrt{M_0(t)}\leqslant C\sqrt{\varepsilon}+CM_0(t)$. 因此, 当 $M_0(0)\leqslant C\varepsilon$ 时, 有 $M_0(t)\leqslant C\varepsilon$, 这意味着

$$\|[f(t),\phi(t)]\|^2\leqslant C\varepsilon(1+t)^{-3/2}. \tag{4.28}$$

由于

$$H_l(t)\approx\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\|[\partial^\alpha P_1f,\partial^\alpha P_2\phi]\|^2+\sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant N}\|[w^l\partial^\alpha_\beta(I-P_1)f,w^l\partial^\alpha_\beta(I-P_2)\phi]\|^2,$$

所以通过 (4.23) 和 (4.28), 有

$$H_l(t)\leqslant C\varepsilon(1+s)^{-5/2}.$$

至此完成了定理 1.1 的证明. □

致谢 作者非常感谢审稿人提出的宝贵建议. 谨以此文献给肖玲老师八十五岁寿辰, 恭祝肖老师生日快乐, 健康长寿! 非常感谢肖老师多年来在工作和生活上给予许多无私的支持和帮助.

参考文献

1 Bastea S, Esposito R, Lebowitz J L, et al. Binary fluids with long range segregating interaction. I. Derivation of kinetic and hydrodynamic equations. J Stat Phys, 2000, 101: 1087–1136
2 Caflisch R E. The Boltzmann equation with a soft potential. Comm Math Phys, 1980, 74: 97–109
3 Duan R J, Strain R M. Optimal large-time behavior of the Vlasov-Maxwell-Boltzmann system in the whole space. Comm Pure Appl Math, 2011, 64: 1497–1546
4 Esposito R, Guo Y, Marra R. Phase transition in a Vlasov-Boltzmann binary mixture. Comm Math Phys, 2010, 296: 1–33
5 Esposito R, Guo Y, Marra R. Stability of a Vlasov-Boltzmann binary mixture at the phase transition on an interval. Kinet Relat Models, 2013, 6: 761–787
6 Glassey R T. The Cauchy Problem in Kinetic Theory. Philadelphia: SIAM, 1996
7 Guo Y. The Vlasov-Poisson-Boltzmann system near Maxwellians. Comm Pure Appl Math, 2002, 55: 1104–1135
8 Guo Y. The Vlasov-Maxwell-Boltzmann system near Maxwellians. Invent Math, 2003, 153: 593–630
9 Guo Y. Boltzmann diffusive limit beyond the Navier-Stokes approximation. Comm Pure Appl Math, 2006, 59: 626–687
10 Jang J. Vlasov-Maxwell-Boltzmann diffusive limit. Arch Ration Mech Anal, 2009, 94: 531–584
11 Kawashima S. The Boltzmann equation and thirteen moments. Jpn J Appl Math, 1990, 7: 301–320
12 Li F C, Yu H J. Global existence of classical solutions to the Boltzmann equation with external force for hard potentials. Int Math Res Not IMRN, 2008, 2008: rnn112
13 Li H L, Yang T, Zhong M Y. Spectrum structure and behaviors of the Vlasov-Maxwell-Boltzmann systems. SIAM J Math Anal, 2016, 48: 595–669
14 Wang Y J. The diffusive limit of the Vlasov-Boltzmann system for binary fluids. SIAM J Math Anal, 2011, 43: 253–301
15 Yang T,Yu H J. Optimal convergence rates of Landau equation with external forcing in the whole space. Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 2009, 29: 1035–1062
16 Yang T, Yu H J. Global classical solutions for the Vlasov-Maxwell-Fokker-Planck system. SIAM J Math Anal, 2010, 42: 459–488

Global existence and time decay estimates of the Vlasov-Boltzmann system

Jianbin Cai, Zhengrong Liu & Hongjun Yu

Abstract In this paper, we combine the method of constructing the compensating function and the energy method for the study on the Vlasov-Boltzmann system, which describes the evolution of the fluid of two species of particles interacting through the strong short range and weak long range pair potentials. Both the global existence and the optimal convergence rates of the solution around the global Maxwellians are obtained. The method used here has its own advantage, i.e., it does not involve the spectrum analysis of the corresponding linearized operator.

Keywords Vlasov-Boltzmann system, compensating function, energy method, global solutions, decay estimates

MSC(2020) 82D10, 35B40

doi: 10.1360/SSM-2024-0012