



一类保体积逐点部分双曲系统的遍历性

献给文兰教授 80 寿辰

周云华

重庆大学数学与统计学院, 重庆 401331

E-mail: zhoyuh@cqu.edu.cn

收稿日期: 2024-11-17; 接受日期: 2025-02-19; 网络出版日期: 2025-06-24

摘要 本文证明, 若开集上的 C^2 保体积逐点部分双曲系统满足动态相关性、逐点中心约束及本性可达条件, 则该系统是遍历的.

关键词 逐点部分双曲 可达 逐点中心约束 遍历性

MSC (2020) 主题分类 37D30, 37A25, 37C40

1 引言及主要结果

遍历性是测度意义下的某种混乱性质. 一个自然的问题是, 保守系统中有多少遍历系统?

20 世纪 60 年代, Anosov 和 Sinai^[1] 证明了所有 C^2 保体积双曲系统是遍历的. 注意到双曲系统是 C^1 结构稳定的, 所以实际上 C^2 保体积双曲系统是稳定遍历的, 即系统本身遍历, 且它的一个 C^1 邻域中的 C^2 系统也是遍历的. 1994 年, Grayson 等^[5] 给出了第一个非双曲稳定遍历的例子. 这个例子是部分双曲的. 沿着这些思路, Pugh 和 Shub^[9] 猜测: 在保体积的 C^r ($r > 1$) 部分双曲系统中, 稳定遍历系统是稠密的. 这是著名的稳定遍历猜想. 同时, 他们也将这个猜想拆分为两个子猜想: (i) 保体积的 C^r ($r > 1$) 部分双曲系统中稳定可达系统是稠密的; (ii) 可达蕴涵遍历性. 围绕着这几个猜想, 数十年来产生了许多重要的结论 (参见文献 [2, 4, 8, 12, 13, 16]).

另外, KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) 理论的研究表明, 存在稳定的非遍历保守系统. KAM 系统没有双曲性, 这意味着一定的双曲性可能是导致遍历的重要因素.

逐点双曲系统是一致双曲之外的又一类弱双曲动力系统, 包含了 Katok 映射及几乎 Anosov 系统等若干经典的动力系统例子 (参见文献 [3, 6, 7]). 近年来, 逐点双曲系统的诸如稳定流形定理、SRB (Sinai-Ruelle-Bowen) 测度、Markov 分解与符号表示等动力学性质得到了较多研究 (参见文献 [3, 14, 15]). 本文考虑开集上保体积逐点部分双曲系统的遍历性问题.

英文引用格式: Zhou Y H. The ergodicity of a class of volume-preserving pointwise partially hyperbolic systems (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 609–630, doi: 10.1360/SSM-2024-0342

定义 1.1 设 M 是一个维数 ≥ 3 的紧致无边光滑 Riemann 流形, f 是 M 上的 C^1 微分同胚, $N \subset M$ 是 f 的不变开子集. 称 f 在 N 上是逐点部分双曲的, 如果存在正的连续函数 $\lambda^s, \lambda^{cs}, \lambda^{cu}, \lambda^u : N \rightarrow \mathbb{R}^+$ 及 Df - 不变分解 $T_N M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$, 满足对任意 $x \in N$ 有

$$\lambda^s(x) < \lambda^{cs}(x) < \lambda^{cu}(x) < \lambda^u(x) \quad (1.1)$$

及

$$\begin{aligned} \|D_x f|_{E^s(x)}\| &< \lambda^s(x), \\ \lambda^{cs}(x) &< m(D_x f|_{E^c(x)}) \leq \|D_x f|_{E^c(x)}\| < \lambda^{cu}(x), \\ \lambda^u(x) &< m(D_x f|_{E^u(x)}), \end{aligned} \quad (1.2)$$

这里 E_x^s, E_x^c 及 E_x^u 分别称为稳定、中心和不稳定子空间.

我们给出如下假设.

(H1) (逐点控制分解) 存在连续函数 $\xi : N \rightarrow (1, \infty)$ 满足对任意 $x \in N$, 有

$$\min \left\{ \frac{\lambda^u(x)}{\max\{1, \lambda^{cu}(x)\}}, \frac{\lambda^s(x)^{-1}}{\max\{1, \lambda^{cs}(x)^{-1}\}} \right\} > \xi(x) \quad (1.3)$$

和

$$\prod_{i=0}^{\infty} \xi(f^i(x)) = \prod_{i=-\infty}^0 \xi(f^i(x)) = \infty. \quad (1.4)$$

(H2) (边界控制) 存在 $r_0, \kappa, \beta > 0$, $\gamma > \max\{1, \beta\}$ 及 $C, L > 1$ 使得对任意满足 $d(x, \partial N) < r_0$ 的 $x \in N$, 有 $\xi(x)^\kappa - 1 > Cd(x, \partial N)^\beta$, $\max\{\|D_x f\|, \|D_x f^{-1}\|\} \leq 1 + Ld(x, \partial N)^\beta$ 且

$$\begin{aligned} \lambda^u(x) &> 1 + C \max \left\{ d(x, \partial N)^\beta, \left(\frac{d(f(x), \partial N)}{d(x, \partial N)} \right)^\gamma - 1 \right\}, \\ \lambda^s(x)^{-1} &> 1 + C \max \left\{ d(x, \partial N)^\beta, \left(\frac{d(f^{-1}(x), \partial N)}{d(x, \partial N)} \right)^\gamma - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

(H3) (逐点中心约束) 存在 $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ 及两个大于 $\frac{2}{C}$ 的 a_1 和 a_2 使得对任意 $x \in N$, 有

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^{cu}(x)}{\lambda^{cs}(x)\lambda^u(x)} &< \max\{\varepsilon_0, 1 - a_1(\lambda^u(x) - 1)\}, \\ \frac{\lambda^{cu}(x)\lambda^s(x)}{\lambda^{cs}(x)} &< \max\{\varepsilon_0, 1 - a_2(\lambda^s(x)^{-1} - 1)\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

(H4) (逐点约束) 存在 $\varepsilon_0 \in (0, 1)$, $A > 0$, $\theta' \in (\frac{\beta}{\gamma}, 1)$ 满足

$$\max \left\{ \frac{\lambda^s(x)\|D_x f\|^{\theta'}}{\lambda^{cs}(x)}, \frac{\lambda^{cu}(x)}{\lambda^u(x)m(D_x f)^{\theta'}} \right\} < \max\{\varepsilon_0, 1 - Ad(x, \partial N)^\beta\}, \quad \forall x \in N. \quad (1.7)$$

这里对假设作简单说明. 尽管假设 (H1) 和 (H2) 看起来比较复杂, 但有不少典型的例子都是满足它们的, 如几乎 Anosov 系统、Katok 映射及它的轻微扰动系统等 (参见文献 [3]). (H3) 是经典中心约束 (center bunching) 条件的一个逐点版本. 一般而言, 不等式 (1.6) 的右边随着 x 靠近边界而趋于 1, 即中心约束在点靠近边界时变得越来越弱. 中心一维的逐点部分双曲系统如果满足 (H1) 和 (H2) 且

$C > 2$, 则显然是满足 (H3) 的. (H4) 是为了保证叶层的局部 Hölder 连续. 对于 (一致) 部分双曲情形, 由于流形的紧性, 叶层自然具有一致 Hölder 连续性 (参见文献 [10, 11]).

满足 (H1) 和 (H2) 的逐点双曲系统的稳定子丛和不稳定子丛是可积的, 即 N 中的任意点处都存在稳定流形和不稳定流形. 进一步地, 稳定叶层和不稳定叶层还是绝对连续的 (参见文献 [3]).

对 $x, y \in N$, 称 $\{z_0, z_1, \dots, z_l\} \subset N$ 为连接 x 和 y 的一条 us - 道路, 如果 $x = z_0, y = z_l$ 且 z_i 在 z_{i-1} 的稳定或不稳定流形上.

定义 1.2 设 f 是 N 上满足 (H1) 和 (H2) 的逐点部分双曲系统. 称 f 为可达的 (accessible), 如果对任意 N 中的两点 x 和 y , 存在一条从 x 到 y 的 us - 道路. 若 f 保测度 μ , 称它是本性可达的, 如果存在一个全测集, 使得该集合中的任何两点都存在连接它们的 us - 道路.

定义 1.3 称 N 上满足 (H1) 和 (H2) 的逐点部分双曲系统 f 为动态相关的 (dynamically coherent), 如果 $E^{cs} = E^c \oplus E^s$ 和 $E^{cu} = E^c \oplus E^u$ 都是唯一可积的.

下面是本文的主要定理.

定理 1.1 设 f 是一个 C^2 保体积逐点部分双曲系统且满足条件 (H1)–(H4). 若 f 是动态相关且本性可达的, 则 f 是遍历的.

由于本文考虑的是开集上的逐点部分双曲系统, 集合紧性的缺失和双曲性在靠近边界时的减弱导致原来研究部分双曲系统遍历性的许多估计和工具都失效. 我们将在边界控制和逐点 (中心) 约束条件下证明不变子丛 (叶层) 的局部正则性, 由此得到系统沿轨道压缩或扩张的精细控制, 最终保证可用 Hopf 方法证明系统的遍历性.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节介绍本文后面需要用到的一些基本概念和符号约定. 第 3 节在约束条件下讨论局部中心 (不) 稳定流形中 (不) 稳定流形叶层的 Lipschitz 性及不变子丛的局部 Hölder 连续性. 第 4 节证明存在满足后面需要的两个关键函数 σ 和 τ . 第 5 节构造几个特殊的几何对象, 这些集合在迭代下减小率能达到类似指数减小的效果. 第 6 节给出定理 1.1 的证明.

2 预备知识

2.1 动态叶层

设 f 为动态相关的, 则 E^u, E^s, E^c, E^{cs} 和 E^{cu} 均为 (唯一) 可积的. 此时稳定叶层和中心叶层都叶展 (foliate) 中心稳定流形, 不稳定叶层和中心叶层都叶展中心不稳定流形.

设 N 上满足 (H1) 和 (H2) 的逐点部分双曲系统 f 为动态相关的. 任给 $x \in N, t \in \{u, s, c, cu, cs\}$, 记 E^t 在 x 处的积分子流形为 $W^t(x)$. 对 $R > 0$, x 处尺寸为 R 的局部 t - 流形为

$$W^t(x, R) = \{y \in N : d_{W^t}(x, y) < R\},$$

这里 $d_{W^t}(\cdot, \cdot)$ 表示沿子流形 W^t 的距离.

称不稳定叶层 W^u 在局部中心不稳定流形 $W^{cu}(x, R)$ 中是 Lipschitz 连续的, 如果对任意给定 $W^{cu}(x, R)$ 中横截相交于 W^u 的两个光滑子流形 V_1 和 V_2 , 都存在常数 K 使得

$$d_{V_2}(h^u(p), h^u(q)) \leq K d_{V_1}(p, q), \quad \forall p, q \in V_1 \cap W^{cu}(x, R),$$

这里 $h^u : V_1 \rightarrow V_2$ 是由不稳定叶层 W^u 诱导的和乐 (holonomy) 映射.

若一个集合是叶层 W^t 的一些整体叶片的并集, 则称这个集合是 W^t - 浸透的. 称集合 A 是本性 W^t - 浸透的, 如果存在一个 W^t - 浸透的集合 A' 使得 $m(A\Delta A') = 0$. 本文中的测度 m 均指体积测度.

设 $\mathcal{F}$ 是一个绝对连续的叶层, B 是 $\mathcal{F}$ 的一个叶层盒子, T 是 B 中与 $\mathcal{F}$ 横截的光滑截面, $Y \subseteq B$ 是一个可测集. 对给定的 $q \in T$, 定义 Y 在 q 点的纤维 $Y(q)$ 为 $\mathcal{F}$ 在 B 中包含 q 的局部叶片与 Y 的交集. Y 的基 $T_Y = \{q \in T : m_{\mathcal{F}}(Y(q)) > 0\}$, 这里 $m_{\mathcal{F}}$ 是 m 沿 $\mathcal{F}$ 叶片的条件测度.

若存在 $U \geq 1$ 使得不等式

$$U^{-1} \leq \frac{m_{\mathcal{F}}(Y(p))}{m_{\mathcal{F}}(Y(q))} \leq U, \quad \forall p, q \in \tau_Y$$

成立, 则称 Y 具有 U - 一致纤维.

2.2 嵌套集列与 Lebesgue 密度点

设 μ 是 N 中的一个测度. 称 N 中的 μ - 可测集合列 $\{X_n\}$ 是正则的, 如果存在 $\delta > 0$ 使得

$$\mu(X_n) > 0, \quad \mu(X_{n+1}) \geq \delta \mu(X_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

称两个集合列 $\{X_n\}$ 和 $\{Y_n\}$ 是相互嵌套的, 如果存在 $k \geq 1$ 使得

$$X_{n+k} \subset Y_n, \quad Y_{n+k} \subset X_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

称一个点 x 是集合 $X \subset N$ 的 Lebesgue 密度点, 如果

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(X \cap B(x, r))}{m(B(x, r))} = 1,$$

这里 m 是流形的体积测度.

以下若未特别说明, 所描述的测度均指体积测度.

引理 2.1 (参见文献 [2, 引理 2.1]) 设 $\{Y_n\}$ 和 $\{Z_n\}$ 是两列相互嵌套的可测集列, $\{Y_n\}$ 是正则的, 则 $\{Z_n\}$ 也是正则的. 若 $\{Y_n\}$ 是正测度的, 则 $\{Z_n\}$ 也是正测度的. 进一步地, 对任何可测集 X , 都有

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(X \cap Y_n)}{m(Y_n)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(X \cap Z_n)}{m(Z_n)} = 1.$$

2.3 一些约定记号

从现在起, 总假定 f 是 C^2 的逐点部分双曲系统. 记

$$C^f = \sup_{x \in N} \{\|D_x f\|, \|D_x f^{-1}\|\}, \quad C_f = \inf_{x \in N} \{\|D_x f\|, \|D_x f^{-1}\|\}.$$

选取适当等价的 Riemann 度量, 本文总假设流形 M 的直径不大于 1. 当 $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$ 时, 总有

$$d(x, y)^{\alpha_1} \leq d(x, y)^{\alpha_2}, \quad \forall x, y \in N.$$

为记号简便, 对 $p \in N, n \in \mathbb{N}, k < n$ 及 N 上的函数 ϕ , 记 $p_n = f^n(p)$, $\phi_n(p) = \phi(p) \cdots \phi(f^{n-1}(p))$, $\phi_{n-k}(p) = \phi(f^k(p)) \cdots \phi(f^{n-1}(p))$.

对两个正数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 记号 $a_n = O(b_n)$ 表示存在常数 $K > 0$ 使得 $a_n \leq K b_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

给定正数 $r < r_0$, 对 $\epsilon \in (0, 1)$, 记

$$R(x) = \min\{\epsilon r, \epsilon d(x, \partial N)^\gamma\}, \quad \tilde{R}(x) = \min\{\epsilon r, \epsilon d(x, \partial N)^{2\gamma}\}, \quad \forall x \in N.$$

总假定 r 充分小 (例如, 小于文献 [3] 中的 r_3), 以满足稳定流形定理等定理的条件以及满足本文后面若干引理的要求.

3 正则性估计

本节证明在满足假设条件时叶层及分布的 Lipschitz 连续性和 Hölder 连续性.

引理 3.1 设 f 是 C^2 满足中心约束条件 (H1) 和 (H2) 的逐点部分双曲系统.

(1) 若 f 满足 (H3) 且动态相关, 则存在 N 上的连续函数 $\hat{R} = \hat{R}(x) : N \rightarrow \mathbb{R}^+$ 使得对任意 $x \in N$, $W^{cu}(x, \hat{R}(x))$ 中的不稳定叶层是 Lipschitz 的, 且 $W^{cs}(x, \hat{R}(x))$ 中的稳定叶层是 Lipschitz 的.

(2) 若 f 满足 (H4), 则对任意 $\theta \in (0, \theta')$, 存在常数 $\epsilon, H > 0$, 使得对任意 $x \in N, t \in \{u, s, c, cs, cu\}$, 都有

$$d(E^t(x), E^t(y)) \leq \frac{H}{\rho_x^{\gamma_\theta}} d(x, y)^\theta, \quad \forall y \in B(x, R(x)),$$

这里 $\rho_x = \min\{d(x, \partial N), r\}$.

证明 (1) 这里只证明 $W^{cu}(x, \hat{R}(x))$ 中的不稳定叶层是 Lipschitz 连续的, $W^{cs}(x, \hat{R}(x))$ 中的稳定叶层是 Lipschitz 的可类似证明. 由文献 [10, 11], 为证明 (1), 只需要证明不稳定丛 E^u 在 $W^{cu}(x, \hat{R}(x))$ 中是 Lipschitz 的. 事实上, 我们将证明存在 $H > 0, r \leq r_0$ 及 N 上的连续函数 $\hat{R} = \hat{R}(x) : N \rightarrow \mathbb{R}^+$ 使得对任意 $x \in N$, 都有

$$d(E^u(x), E^u(y)) \leq \frac{H}{\rho_x^\gamma} d(x, y), \quad \forall y \in W^{cu}(x, \hat{R}(x)),$$

这里 $\rho_x = \min\{d(x, \partial N), r\}$.

任给 $x \in N$, 取正数 $\hat{R}(x)$ 使得

$$d(f(y_1), f(y_2)) > \lambda^{cs}(x) d(y_1, y_2), \quad \forall y_1, y_2 \in W^{cu}(x, \hat{R}(x)). \quad (3.1)$$

考虑切丛的子丛 $E^{cu} = \bigcup_{x \in N} E^{cu}(x)$. 令 $\mathcal{L}(E^u, E^c)$ 是 E^u 到 E^c 的所有线性映射构成的 N 上的向量丛, Γ 是 $\mathcal{L}(E^u, E^c)$ 的连续截面空间. 因为 N 不紧致, 令

$$N_n := \left\{ x \in N : d(x, \partial N) \geq \frac{1}{n} \right\},$$

并定义一个 Γ 上递增的半模序列 $\|E\|_n = \sup_{x \in N_n} \|E(x)\|$, $\forall E \in \Gamma$, 这里 $\|\cdot\|$ 是算子范数. 易知 Γ 是一个完备可度量化局部紧拓扑向量空间.

N 上的微分同胚 f 通过以下方式自然诱导 Γ 上的一个映射 f_* :

$$(f_*E)(x) = Df(E(f^{-1}(x))), \quad \forall E \in \Gamma, \quad \forall x \in N.$$

定义 Γ 中的一个子集 Γ_1 如下:

$$\Gamma_1 = \{E \in \Gamma : E(x) \subset C_x^u(1), \forall x \in N\}.$$

易知 Γ_1 是 Γ 的一个闭子集, 且

$$(f_*\mathcal{C}^u(1))_x \subset \mathcal{C}_x^u\left(\frac{1}{\xi(f^{-1}(x))}\right) \subset \mathcal{C}_x^u(1),$$

即 $f_*\Gamma_1 \subset \Gamma_1$. 由归纳法有

$$(f_*^n\mathcal{C}^u(1))_x \subset \mathcal{C}_x^u\left(\frac{1}{\prod_{i=-n}^{-1}\xi(f^i(x))}\right) \rightarrow E^u(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.2)$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_*^n(E) = E^u, \forall E \in \Gamma_1$. 这意味着不稳定子丛 E^u 是 f_* 在 Γ_1 中的唯一不变截面.

给定 $H > 0$, 定义一个子集

$$\Gamma_1(H) = \left\{ E \in \Gamma_1 : d(E(x), E(y)) \leq \frac{H}{\rho_p^\gamma} d(x, y), \forall x \in N, y \in W^{cu}(x, \hat{R}(x)) \right\}. \quad (3.3)$$

断言 1 当 H 充分大时, 以下成立:

- (a) $\Gamma_1(H)$ 非空;
- (b) $\Gamma_1(H)$ 是 Γ_1 的一个闭子集;
- (c) $f_*(\Gamma_1(H)) \subset \Gamma_1(H)$.

如果断言 1 成立, 则由 Schauder 不动点定理可知, 存在 $E_* \in \Gamma_1(H) \subset \Gamma_1$ 满足 $f_*E_* = E_*$. 由 (3.2) 有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f_*^n(\Gamma_1) = \{E^u\},$$

此即意味着 $E^u = E_* \in \Gamma_1(H)$. 至此完成了引理 3.1(1) 的证明.

断言 1 的证明 (a) 是显然的. 事实上, 由 E^u 的连续性知, 存在逼近 E^u 的光滑子丛 $F \in \Gamma_1(H)$.

设 $\{E_k\}$ 是 $\Gamma_1(H)$ 中任意一个 Cauchy 列. 对任意 n , 注意到 N_n 的紧性, $\{E_k\}$ 限制在 N_n 上有一个极限截面 G_n , 满足 $G_n(x) \subset \mathcal{C}_x^u(1) (\forall x \in N_n)$ 且 (3.3) 中的不等式成立. 当 $x \in N_n$ 时, 定义 $E(x) = G_n(x)$. 于是得到 $E \in \Gamma_1(H)$ 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} E_k = E$. 这就证明了 (b).

下面证明 (c). 对任意 $x \in N, y \in W^{cu}(x, \hat{R}(x))$ 及 $E \in \Gamma_1$, 有

$$\begin{aligned} d((f_*E)(f(x)), (f_*E)(f(y))) &= d(D_x f E(x), D_y f E(y)) \\ &\leq d(D_x f E(x), D_x f E(y)) + d(D_x f E(y), D_y f E(y)). \end{aligned}$$

对于和式的第一项, 必要时缩小 $\hat{R}(x)$, 类似于文献 [3, (4.9)] 第一项的估计可以得到

$$d(D_x f E(x), D_x f E(y)) \leq \frac{\|Df|_{E^c(x)}\|}{m(Df|_{E^u(x)})} d(E(x), E(y)) < \frac{\lambda^{cu}(x)}{\lambda^u(x)} d(E(x), E(y)).$$

对于第二项, 注意到 Df 是 Lipschitz 连续的, 存在 $\hat{C} > 0$ 使得

$$d(D_x f E(y), D_y f E(y)) \leq \hat{C} d(x, y).$$

于是

$$d((f_*E)(f(x)), (f_*E)(f(y))) < \frac{\lambda^{cu}(x)}{\lambda^u(x)} d(E(x), E(y)) + \hat{C} d(x, y).$$

假设存在 $H > 0$ 满足

$$d(E(x), E(y)) \leq \frac{H}{\rho_x^\gamma} d(x, y).$$

于是

$$\begin{aligned} d((f_*E)(f(x)), (f_*E)(f(y))) &\leq \left(\frac{\lambda^{cu}(x)}{\lambda^u(x)} \frac{H}{\rho_x^\gamma} + \widehat{C} \right) d(x, y) \\ &\leq \left(\frac{H\lambda^{cu}(x)}{\lambda^u(x)} + \widehat{C}\rho_x^\gamma \right) \left(\frac{d(x, y)}{d(f(x), f(y))} \cdot \frac{\rho_{f(x)}^\gamma}{\rho_x^\gamma} \right) \frac{1}{\rho_{f(x)}^\gamma} d(f(x), f(y)). \end{aligned}$$

因此, 若要证明 $f_*(\Gamma_1(H)) \subset \Gamma_1(H)$, 只需要证明

$$\left(\frac{H\lambda^{cu}(x)}{\lambda^u(x)} + \widehat{C}\rho_x^\gamma \right) \left(\frac{d(x, y)}{d(f(x), f(y))} \cdot \frac{\rho_{f(x)}^\gamma}{\rho_x^\gamma} \right) \leq H. \quad (3.4)$$

注意由 $\widehat{R}(x)$ 的选取 (即 (3.1)) 易知

$$\frac{d(x, y)}{d(f(x), f(y))} < \lambda^{cs}(x)^{-1}.$$

因此为证明 (3.4) 成立, 只需证明如下不等式成立:

$$\left(\frac{H\lambda^{cu}(x)}{\lambda^u(x)} + \widehat{C}\rho_x^\gamma \right) \left(\lambda^{cs}(x)^{-1} \cdot \frac{\rho_{f(x)}^\gamma}{\rho_x^\gamma} \right) \leq H. \quad (3.5)$$

情形 1 $\rho_x = r \leq d(x, \partial N)$.

注意到 $\rho_{f(x)} = \min\{r, d(f(x), \partial N)\} \leq r$, 所以 $\frac{\rho_{f(x)}^\gamma}{\rho_x^\gamma} \leq 1$. 为了证明 (3.5) 成立, 只需要

$$\left(\frac{H\lambda^{cu}(x)}{\lambda^u(x)} + \widehat{C}r^\gamma \right) \lambda^{cs}(x)^{-1} \leq H,$$

或等价地

$$\frac{\widehat{C}r^\gamma \lambda^{cs}(x)^{-1}}{1 - \frac{\lambda^{cu}(x)}{\lambda^u(x) \lambda^{cs}(x)}} \leq H. \quad (3.6)$$

记 $N_r = \{p \in N : d(p, \partial N) \geq r\}$. 由 N_r 的紧性及逐点中心约束条件 (H3) 可得

$$a := \sup_{x \in N_r} \frac{\lambda^{cu}(x)}{\lambda^u(x) \lambda^{cs}(x)} < 1.$$

故取

$$H = \sup_{x \in N_r} \frac{\widehat{C}r_3^\gamma \lambda^{cs}(x)^{-1}}{1 - a}$$

即可使得 (3.6) 成立.

情形 2 $\rho_x = d(x, \partial N) < r$.

注意到 $\gamma > \beta$, 由 $\rho_{f(x)}$ 的定义及不等式 (1.5) 可得

$$\frac{\rho_{f(x)}^\gamma}{\rho_x^\gamma} = \left(\frac{\rho_{f(x)}}{d(x, \partial N)} \right)^\gamma \leq \left(\frac{d(f(x), \partial N)}{d(x, \partial N)} \right)^\gamma \leq \frac{C + m(Df|_{E^u(x)}) - 1}{C}$$

及

$$\rho_x^\gamma \leq \rho_x^\beta = d(x, \partial N)^\beta \leq \frac{m(Df|_{E^u(x)}) - 1}{C}.$$

记 $C_1 = \widehat{C} \sup_{x \in N} m(D_x f|_{E^c(x)})^{-1}$. 为了证明 (3.5) 成立, 只需要

$$H \frac{\lambda^{cu}(x)}{\lambda_u(x)\lambda^{cs}(x)} \frac{C + m(Df|_{E^u(x)}) - 1}{C} + \frac{C_1}{C^2} (m(Df|_{E^u(x)}) - 1)(C + m(Df|_{E^u(x)}) - 1) < H,$$

或等价地

$$\frac{\lambda^{cu}(x)}{\lambda_u(x)\lambda^{cs}(x)} < \frac{1 - H^{-1}C^{-2}C_1(C + m(Df|_{E^u(x)}) - 1)(m(Df|_{E^u(x)}) - 1)}{1 + C^{-1}m(Df|_{E^u(x)}) - 1}. \quad (3.7)$$

记

$$C_2 := \sup_{x \in N} (C^{-1}C_1(C + m(Df|_{E^u(x)}) - 1)),$$

则下面的不等式 (3.8) 蕴涵 (3.7) 成立:

$$\frac{\lambda^{cu}(x)}{\lambda_u(x)\lambda^{cs}(x)} < \frac{1 - C_2H^{-1}C^{-1}(m(Df|_{E^u(x)}) - 1)}{1 + C^{-1}(m(Df|_{E^u(x)}) - 1)}. \quad (3.8)$$

因为

$$\frac{1 - C_2H^{-1}C^{-1}(m(Df|_{E^u(x)}) - 1)}{1 + C^{-1}(m(Df|_{E^u(x)}) - 1)} > 1 - \left(1 + \frac{C_2}{H}\right) \frac{m(Df|_{E^u(x)}) - 1}{C},$$

于是为了证明 (3.8) 成立, 只需要

$$\frac{\lambda^{cu}(x)}{\lambda_u(x)\lambda^{cs}(x)} < 1 - \left(1 + \frac{C_2}{H}\right) \frac{m(Df|_{E^u(x)}) - 1}{C}. \quad (3.9)$$

事实上, 注意到逐点中心约束条件的不等式 (1.6), 取 H 充分大使得 $1 + \frac{C_2}{H} < Ca_1$, 则 (3.9) 成立. 断言 1 证毕. $\square$

(2) 只证明 $t = u$ 的情形, 其他情形类似.

采用 (1) 中证明的方法. 令 $\mathcal{L}(E^u, E^{cs})$ 是 E^u 到 E^{cs} 的所有线性映射构成的 N 上的向量丛, Γ' 是 $\mathcal{L}(E^u, E^{cs})$ 的连续截面空间. 与 (1) 类似定义 f_* 和 Γ' 中的一个子集 Γ'_1 . 同样有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_*^n(E) = E^u, \quad \forall E \in \Gamma'_1,$$

即 E^u 是 f_* 在 Γ'_1 中的唯一不变截面.

给定 $H > 0$, 定义一个 Γ'_1 的子集

$$\Gamma'_1(H) = \left\{ E \in \Gamma'_1 : d(E(x), E(y)) \leq \frac{H}{\rho_x^\theta} d(x, y)^\theta, \forall x \in N, y \in B(x, R(x)) \right\}.$$

由 (1) 中断言 1 的证明易知, 当 H 充分大时, $\Gamma'_1(H)$ 是 Γ'_1 的一个非空闭子集. 如果包含关系

$$f_*(\Gamma'_1(H)) \subset \Gamma'_1(H) \quad (3.10)$$

成立, 则由 Schauder 不动点定理知, 存在 $E_* \in \Gamma'_1(H) \subset \Gamma'_1$ 满足 $f_*E_* = E_*$. 于是

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f_*^n(\Gamma'_1) = \{E^u\},$$

此即意味着 $E^u = E_* \in \Gamma'_1(H)$. 至此完成了引理 3.1(2) 的证明.

在证明 (3.10) 之前先给出如下断言.

断言 2 存在 $r, \epsilon > 0$ 充分小, 使得

$$\inf_{y \in B(x, R(x))} m(D_y f)^\theta \geq m(D_x f)^{\theta'}, \quad \forall x \in N.$$

证明 事实上, 因为 f 是 C^2 的, 所以存在 $\tilde{H} > 0$ 使得

$$m(D_y f) \geq m(D_x f) - \tilde{H}d(x, y), \quad \forall x, y \in N. \quad (3.11)$$

记 $\alpha = \frac{\theta'}{\theta} (> 1)$, 为证明断言 2, 只需要证明当 $\epsilon > 0$ 充分小时,

$$m(D_y f) \geq m(D_x f)^\alpha, \quad \forall y \in B(x, R(x)), \quad \forall x \in N. \quad (3.12)$$

注意到边界控制条件 (H2), 存在 $r > 0$ 充分小及正数 $C_1 < C$, 使得当 $d(x, \partial N) < r$ 时,

$$\lambda^s(x) < \frac{1}{1 + Cd(x, \partial N)^\beta} \leq 1 - C_1 d(x, \partial N)^\beta.$$

另外, 必要时进一步缩小 r , 存在 $C_2 > 0$ 使得当 $d(x, \partial N) < r$ 时,

$$(1 - C_1 d(x, \partial N)^\beta)^{\alpha-1} < 1 - C_2 d(x, \partial N)^\beta < 1 - C_2 d(x, \partial N)^\gamma.$$

取 $\epsilon < C_2 C_f \tilde{H}^{-1}$, 所以当 $d(x, \partial N) < r$ 时,

$$\lambda^s(x)^{\alpha-1} \leq 1 - C_2 d(x, \partial N)^\gamma \leq 1 - C_f^{-1} \tilde{H} \epsilon d(x, \partial N)^\gamma.$$

接下来考虑 $d(x, \partial N) \geq r$ 的情形. 由于假设流形大小不超过 1, 所以 $d(x, \partial N)^\gamma \leq 1$. 于是

$$1 - C_f^{-1} \tilde{H} \epsilon d(x, \partial N)^\gamma \geq 1 - C_f^{-1} \tilde{H} \epsilon.$$

根据 $N_r = \{x \in N : d(x, \partial N) \geq r\}$ 的紧性, 可得

$$\lambda := \sup_{x \in N_r} \lambda^s(x)^{\alpha-1} < 1.$$

所以若 ϵ 充分小, 则当 $d(x, \partial N) \geq r$ 时, 有

$$\lambda^s(x)^{\alpha-1} \leq \lambda \leq 1 - C_f^{-1} \tilde{H} \epsilon \leq 1 - C_f^{-1} \tilde{H} \epsilon d(x, \partial N)^\gamma.$$

于是, 对所有 $x \in N$ 及 $y \in B(x, R(x))$, 有

$$\begin{aligned} m(D_x f)^{\alpha-1} &\leq \lambda^s(x)^{\alpha-1} \leq 1 - C_f^{-1} \tilde{H} \epsilon d(x, \partial N)^\gamma \\ &\Rightarrow m(D_x f)^{\alpha-1} \leq 1 - C_f^{-1} \tilde{H} d(x, y) \\ &\Rightarrow m(D_x f)(1 - m(D_x f)^{\alpha-1}) \geq \tilde{H} d(x, y) \\ &\Rightarrow m(D_x f) - \tilde{H} d(x, y) \geq m(D_x f)^\alpha. \end{aligned}$$

注意到 (3.11), 所以 (3.12) 成立. 断言 2 证毕. □

现在来证明 (3.10). 对任意 $x \in N$, $y \in B(x, R(x))$ 及 $E \in \Gamma'_1$, 与 (1) 中断言 (c) 一样, 有

$$d((f_*E)(f(x)), (f_*E)(f(y))) < \frac{\lambda^{cu}(x)}{\lambda_u(x)} d(E(x), E(y)) + \widehat{C}d(x, y).$$

假设存在 $H > 0$ 满足

$$d(E(x), E(y)) \leq \frac{H}{\rho_x^{\gamma\theta}} d(x, y)^\theta.$$

于是

$$\begin{aligned} d((f_*E)(f(x)), (f_*E)(f(y))) &\leq \left(\frac{\lambda^{cu}(x)}{\lambda_u(x)} \frac{H}{\rho_x^{\gamma\theta}} + \widehat{C}d(x, y)^{1-\theta} \right) d(x, y)^\theta \\ &= \left(\frac{\lambda^{cu}(x)}{\lambda_u(x)} H + \widehat{C}\rho_x^{\gamma\theta} d(x, y)^{1-\theta} \right) \frac{\rho_{f(x)}^{\gamma\theta}}{\rho_x^{\gamma\theta}} \frac{d(x, y)^\theta}{d(f(x), f(y))^\theta} \frac{1}{\rho_{f(x)}^{\gamma\theta}} d(f(x), f(y))^\theta. \end{aligned}$$

为了证明 $f_*(\Gamma'_1(H)) \subset \Gamma'_1(H)$, 只需要

$$\left(\frac{\lambda^{cu}(x)}{\lambda_u(x)} H + \widehat{C}\rho_x^{\gamma\theta} d(x, y)^{1-\theta} \right) \frac{\rho_{f(x)}^{\gamma\theta}}{\rho_x^{\gamma\theta}} \frac{d(x, y)^\theta}{d(f(x), f(y))^\theta} \leq H$$

或

$$\left(\frac{\lambda^{cu}(x)}{\lambda_u(x)} H + \widehat{C}\epsilon^{1-\theta} \rho_x^\gamma \right) \frac{\rho_{f(x)}^{\gamma\theta}}{\rho_x^{\gamma\theta}} \frac{d(x, y)^\theta}{d(f(x), f(y))^\theta} \leq H.$$

令 $\varrho(x) = \inf_{y \in B(x, R(x))} m(D_y f)^\theta$. 于是又只需要证明

$$\left(\frac{\lambda^{cu}(x)}{\lambda_u(x)\varrho(x)} H + \widehat{C}\epsilon^{1-\theta} \varrho(x)^{-1} \rho_x^\gamma \right) \frac{\rho_{f(x)}^{\gamma\theta}}{\rho_x^{\gamma\theta}} \leq H. \quad (3.13)$$

情形 1 $\rho_x = d(x, \partial N)$.

因为 $\rho_{f(x)} \leq d(f(x), \partial N)$, 所以下面的不等式蕴涵 (3.13) 成立:

$$\left(\frac{\lambda^{cu}(x)}{\lambda_u(x)\varrho(x)} H + \widehat{C}\epsilon^{1-\theta} \varrho(x)^{-1} \rho_x^\gamma \right) \frac{d(f(x), \partial N)^{\gamma\theta}}{d(x, \partial N)^{\gamma\theta}} \leq H. \quad (3.14)$$

当 r 充分小且 $d(x, \partial N) < r$ 时, 存在较大的 $C_1 > 0$ 使得

$$\left(1 + \frac{L}{C} d(x, \partial N)^\beta \right)^\theta \leq 1 + C_1 d(x, \partial N)^\beta.$$

令

$$\widetilde{C} = \sup_{x \in N} \widehat{C} \varrho(x)^{-1} \left(1 + \frac{L}{C} d(x, \partial N)^\beta \right)^\theta.$$

当 r 充分小且 $d(x, \partial N) < r$ 时, 可以选取 H 充分大使得

$$\frac{1 - H^{-1} \widetilde{C} \epsilon^{1-\theta} d(x, \partial N)^\gamma}{1 + C_1 d(x, \partial N)^\beta} \geq \frac{1 - H^{-1} \widetilde{C} \epsilon^{1-\theta} d(x, \partial N)^\beta}{1 + C_1 d(x, \partial N)^\beta} \geq 1 - A d(x, \partial N)^\beta.$$

注意到约束条件 (H4), 所以有

$$\frac{\lambda^{cu}(x)}{\lambda_u(x)m(D_x f)^{\theta'}} \leq \frac{1 - H^{-1} \widetilde{C} \epsilon^{1-\theta} d(x, \partial N)^\gamma}{1 + C_1 d(x, \partial N)^\beta} \leq \frac{1 - H^{-1} \widetilde{C} \epsilon^{1-\theta} d(x, \partial N)^\gamma}{(1 + \frac{L}{C} d(x, \partial N)^\beta)^\theta}.$$

再根据断言 2, 可得

$$\frac{\lambda^{cu}(x)}{\lambda_u(x)\varrho(x)} \left(1 + \frac{L}{C} d(x, \partial N)^\beta\right)^\theta H + \tilde{C}\epsilon^{1-\theta} \rho_x^\gamma \leq H.$$

于是

$$\left(\frac{\lambda^{cu}(x)}{\lambda_u(x)\varrho(x)} H + \hat{C}\epsilon^{1-\theta} \varrho(x)^{-1} \rho_x^\gamma\right) \left(1 + \frac{L}{C} d(x, \partial N)^\beta\right)^\theta \leq H.$$

另外, 由边界控制条件有

$$\frac{d(f(x), \partial N)^\gamma}{d(x, \partial N)^\gamma} < 1 + \frac{\lambda^u(x) - 1}{C} \leq 1 + \frac{L}{C} d(x, \partial N)^\beta.$$

上面两个不等式结合起来就得到 (3.14).

情形 2 $\rho_x = r$.

此时 $\frac{\rho_{f(x)}^{\gamma_\theta}}{\rho_x^{\gamma_\theta}} \leq 1$. 取 H 充分大使得 $\sup_{x \in N} H^{-1} \hat{C} \epsilon^{1-\theta} \varrho(x)^{-1} < A$. 由约束条件 (H4) 可知

$$\frac{\lambda^{cu}(x)}{\lambda_u(x)m(D_x f)^{\theta'}} \leq 1 - H^{-1} \hat{C} \epsilon^{1-\theta} \varrho(x)^{-1} d(x, \partial N)^\gamma.$$

所以 (3.13) 成立. □

4 函数 σ 和 τ

本节证明, 当 $\tilde{R}$ 定义中的 ϵ 充分小时, 根据逐点中心约束条件可以选取两个连续函数 σ 和 τ , 使其沿轨道与 Df 在各子丛上的模之间有需要的大小控制关系.

任给 $p \in N$, 令

$$\bar{\lambda}^{cu}(p) = \sup_{x \in B(p, \tilde{R}(p))} \lambda^{cu}(x), \quad \bar{\lambda}^s(p) = \sup_{x \in B(p, \tilde{R}(p))} \lambda^s(x), \quad \underline{\lambda}^{cs}(p) = \inf_{x \in B(p, \tilde{R}(p))} \lambda^{cs}(x). \quad (4.1)$$

引理 4.1 当 $\epsilon > 0$ 充分小时, 存在连续函数 $\sigma : N \rightarrow (0, 1)$ 使得

$$\bar{\lambda}^s(p) < \sigma(p) \underline{\lambda}^{cs}(p), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(p) = 0, \quad \forall p \in N. \quad (4.2)$$

进一步地, 存在正数 C_3 (充分小) 使得

$$\sigma(p) < \frac{1}{1 + C_3 d(p, \partial N)^\beta}, \quad \forall p \in N. \quad (4.3)$$

证明 (1) 先证明一个辅助性的初等结论. 任给 $\kappa > 0$ 及 $t, \epsilon \in (0, 1)$, 存在常数 $a > 0$ 使得

$$\phi(s) = s^{t+\kappa} - s^{1+\kappa} - a(1 - s^\kappa) > 0, \quad \forall s \in [\epsilon, 1]. \quad (4.4)$$

事实上, $\phi'(1) = t - 1 + a\kappa$, 所以当 $a \in (0, \frac{1-t}{2\kappa})$ 时, $\phi'(1) < 0$. 又因为 $\phi(1) = 0$, 故存在 $\epsilon' \in (\epsilon, 1)$ 使得对任意 $s \in (\epsilon', 1)$ 都有 $\phi(s) > 0$. 另外, 由 ϕ 的连续性和 $[\epsilon, \epsilon']$ 的紧性可知只要 $a > 0$ 充分小, 就有 $\phi(s) > 0, \forall s \in [\epsilon, \epsilon']$. 这就证明了 (4.4).

(2) 因为

$$0 < \frac{\lambda^s(x)}{\lambda^{cs}(x)} < 1, \quad \forall x \in N,$$

由上面 (1) 的结论可知, 任给正数 $\tilde{H}, \kappa, C, \theta$ 及 $t \in (0, 1)$, 存在正数 ϵ 使得

$$\left(\frac{\lambda^s(p)}{\lambda^{cs}(p)}\right)^t - \frac{\lambda^s(p)}{\lambda^{cs}(p)} > \tilde{H}\epsilon^\theta C^{-1} \left(\left(\frac{\lambda^s(p)}{\lambda^{cs}(p)}\right)^{-\kappa} - 1\right), \quad \forall p \in N. \quad (4.5)$$

由 $\theta\gamma \geq \beta$ 及条件 (H2), 当 $d(p, \partial N) < r_0$ 时有

$$\left(\frac{\lambda^s(p)}{\lambda^{cs}(p)}\right)^t - \frac{\lambda^s(p)}{\lambda^{cs}(p)} > \tilde{H}\epsilon^\theta d(p, \partial N)^{\theta\gamma}. \quad (4.6)$$

进一步地, 注意到 $\{x \in N : d(x, \partial N) \geq r_0\}$ 的紧性, 必要时缩小 ϵ , 则 (4.6) 对所有的 $p \in N$ 都成立.

(3) 由引理 3.1 可知, 存在 $H > 0$ 使得

$$\bar{\lambda}^s(p) \leq \lambda^s(p) + H\epsilon^\theta d(p, \partial N)^{\theta\gamma}, \quad \lambda^{cs}(p) \geq \lambda^{cs}(p) - H\epsilon^\theta d(p, \partial N)^{\theta\gamma}. \quad (4.7)$$

令

$$\tilde{H} = \frac{2H}{\inf_{x \in N} \lambda^{cs}(x)}.$$

由 (4.6) 知, 任给 $t \in (0, 1)$, 存在充分小的正数 ϵ 使得对任意 $p \in N$ 都有

$$\left(\frac{\lambda^s(p)}{\lambda^{cs}(p)}\right)^t > \frac{\lambda^s(p)}{\lambda^{cs}(p)} + \frac{2H}{\lambda^{cs}(p)} \epsilon^\theta d(p, \partial N)^{\theta\gamma}.$$

取连续函数 $\sigma : N \rightarrow (0, 1)$ 满足

$$\frac{\lambda^s(p)}{\lambda^{cs}(p)} + \frac{2H}{\lambda^{cs}(p)} \epsilon^\theta d(p, \partial N)^{\theta\gamma} < \sigma(p) < \left(\frac{\lambda^s(p)}{\lambda^{cs}(p)}\right)^t, \quad \forall p \in N. \quad (4.8)$$

下面证明 σ 满足 (4.2).

注意到 (1.4) 以及 (4.8) 的第二个不等式, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(p) = 0$ 显然成立.

由 (4.8) 的第一个不等式可得

$$\lambda^s(p) + 2H\lambda^{cs}(p)K^\theta d(p, \partial N)^{\theta\gamma} < \sigma(p)\lambda^{cs}(p).$$

注意到 $\sigma(p) < 1$, 于是

$$\lambda^s(p) + H\lambda^{cs}(p)\epsilon^\theta d(p, \partial N)^{\theta\gamma} < \sigma(p)(\lambda^{cs}(p) - H\lambda^{cs}(p)\epsilon^\theta d(p, \partial N)^{\theta\gamma}).$$

由上式和 (4.7) 得到 (4.2) 中的不等式成立.

(4) 由 (4.8) 的第二个不等式, 为证明 (4.2), 我们只需要证明存在正数 C_3 使得对任意 $p \in N$ 有

$$\xi(p)^{-t} < \frac{1}{1 + C_3 d(p, \partial N)^\beta}. \quad (4.9)$$

事实上, 由 $\{x \in N : d(x, \partial N) \geq r_0\}$ 的紧性可知, 若 C_3 足够小, 当 $d(p, \partial N) \geq r_0$ 时 (4.9) 成立.

另外由条件 (H2) 可知, 当 $d(p, \partial N) < r_0$ 时,

$$\xi(p)^{-1} < \frac{1}{(1 + Cd(p, \partial N)^\beta)^{\frac{1}{\kappa}}}.$$

于是只需要证明

$$(1 + Cd(p, \partial N)^\beta)^{\frac{1}{\kappa}} > 1 + C_3 d(p, \partial N)^\beta.$$

简单计算可知上述不等式当 C_3 足够小时成立. □

引理 4.2 取连续函数 $\tau: N \rightarrow (0, 1)$ 满足

$$\bar{\lambda}^s(p) < \tau(p) < \sigma(p)\lambda^{cs}(p), \quad \forall p \in N, \quad (4.10)$$

则当 ϵ 充分小时, 对任意 $p \in N$, 存在 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$ 和自然数的子列 $\{n_i\}$ 使得

$$\tau_{n_{i+1}-n_i}(p), \sigma_{n_{i+1}-n_i}(p) \in [\lambda_1, \lambda_2], \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (4.11)$$

证明 由引理 4.1 可知, 存在自然数的子列 $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 和两个常数 $0 < \hat{\lambda}_1 < \hat{\lambda}_2 < 1$ 使得

$$\hat{\lambda}_1 < \prod_{j=n_{i-1}}^{n_i-1} \sigma(f^j(p)) < \hat{\lambda}_2, \quad \prod_{j=n_{i-1}}^{n_i-2} \sigma(f^j(p)) \geq \hat{\lambda}_2, \quad i \in \mathbb{N}.$$

下面先证明存在常数 $\lambda_1 \in (0, \hat{\lambda}_1]$ 使得 $\tau_{n_{i+1}-n_i}(p) \geq \lambda_1, \forall i \in \mathbb{N}$, 即

$$\prod_{j=n_{i-1}}^{n_i-1} \tau(f^j(p)) \geq \lambda_1, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (4.12)$$

根据 σ 的取法, 不妨设

$$\sigma(p) < \frac{\lambda^s(p)}{\lambda^{cs}(p)} + \frac{3H}{\lambda^{cs}(p)} \epsilon^\theta d(p, \partial N)^{\theta\gamma}. \quad (4.13)$$

于是对任意 $x \in N$, 有

$$\begin{aligned} \tau(x) &\geq \lambda^s(x) \\ &= \left(\frac{\lambda^s(x)}{\lambda^{cs}(x)} + \frac{3H}{\lambda^{cs}(x)} \epsilon^\theta d(x, \partial N)^{\theta\gamma} \right) \lambda^{cs}(x) - 3H \epsilon^\theta d(x, \partial N)^{\gamma\theta} \\ &\geq \sigma(x) \lambda^{cs}(x) - 3H \epsilon^\theta d(x, \partial N)^{\gamma\theta} \\ &\geq \sigma(x) (\lambda^{cs}(x) - \tilde{H} \epsilon^\theta d(x, \partial N)^{\gamma\theta}), \end{aligned}$$

这里 $\tilde{H} = \frac{3H}{\inf_{x \in N} \sigma(x)}$. 下面证明存在 $\tau_0 \in (0, 1)$ 使得

$$\prod_{j=n_{i-1}}^{n_i-1} (\lambda^{cs}(p_j) - \tilde{H} \epsilon^\theta d(p_j, \partial N)^{\gamma\theta}) \geq \tau_0, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (4.14)$$

只需要证明存在 $N_0 > 0$ 使得

$$\prod_{j=n_{i-1}}^{n_i-1} (\lambda^{cs}(p_j) - \tilde{H} \epsilon^\theta d(p_j, \partial N)^{\gamma\theta}) > \prod_{j=n_{i-1}}^{n_i-2} \sigma(p_j)^N \sigma_0 \geq \hat{\lambda}_2^N \sigma_0, \quad i \in \mathbb{N},$$

这里 $\sigma_0 = \inf_{x \in N} \sigma(x) > 0$.

利用类似引理 4.1 的证明中 (1) 的方法容易证明, 取 ϵ 充分小满足 $2\tilde{H}\epsilon^\theta < L$, 则存在 $N_1 > 0$ 充分大使得

$$\frac{1}{1 + Ld(p, \partial N)^\beta} - \tilde{H} \epsilon^\theta d(p, \partial N)^\beta > (1 + Ld(p, \partial N)^\beta)^{-N_1}, \quad \forall p \in N.$$

注意到存在 N_2 充分大使得

$$1 + Ld(p, \partial N)^\beta \leq (1 + C_3 d(p, \partial N)^\beta)^{N_2}, \quad \forall p \in N,$$

所以

$$\frac{1}{1 + Ld(p, \partial N)^\beta} - \tilde{H}\epsilon^\theta d(p, \partial N)^\beta > (1 + C_3 d(p, \partial N)^\beta)^{-N_1 - N_2}, \quad \forall p \in N.$$

由条件 (H2), 有 $\lambda^{cs}(p) \geq \frac{1}{1 + Ld(p, \partial N)^\beta}$, 所以

$$\lambda^{cs}(p) - \tilde{H}\epsilon^\theta d(p, \partial N)^\beta > (1 + C_3 d(p, \partial N)^\beta)^{-N_1 - N_2}, \quad \forall p \in N.$$

于是由 (4.3), 对任意 $i \in \mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned} \prod_{j=n_{i-1}}^{n_i-1} (\lambda^{cs}(p_j) - \tilde{H}\epsilon^\theta d(p_j, \partial N)^\beta) &> \prod_{j=n_{i-1}}^{n_i-1} (1 + C_3 d(p_j, \partial N)^\beta)^{-N_1 - N_2} \\ &> \prod_{j=n_{i-1}}^{n_i-1} \sigma(p_j)^{N_1 + N_2} \\ &= \prod_{j=n_{i-2}}^{n_i-1} \sigma(p_j)^{N_1 + N_2} \cdot \sigma(p_{n_{i-1}}) \\ &\geq \hat{\lambda}_2^{N_1 + N_2} \sigma_0. \end{aligned}$$

令 $\tau_0 = \hat{\lambda}_2^{N_1 + N_2} \sigma_0$. 显然 $\tau_0 \in (0, 1)$, 于是 (4.14) 获证. 再令 $\lambda_1 = \hat{\lambda}_1 \tau_0$, 于是 (4.12) 成立.

现在再证明存在常数 $\lambda_2 \in [\hat{\lambda}_2, 1)$ 使得 $\tau_{n_{i+1}-n_i}(p) \leq \lambda_2$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

由边界控制条件 (H2) 中的不等式 (1.5) 知, 存在常数 $C_1 \in (0, 1)$ 使得

$$\lambda^s(p) < 1 - C_1 d(p, \partial N)^\beta. \quad (4.15)$$

取 ϵ 充分小使得 $C_2 = C_1 - 3H\epsilon^\theta > 0$. 再取常数 $\hat{C}_3$ 充分大使得

$$\frac{1 + Ld(p, \partial N)^\beta}{1 - H(\lambda_0^s)^{-1} \epsilon^\theta d(p, \partial N)^\beta} \leq 1 + \hat{C}_3 d(p, \partial N)^\beta, \quad \forall p \in N,$$

这里 $\lambda_0^s = \inf_{x \in N} \lambda^s(x)$.

容易证明, 存在充分大 $K > 0$ 使得

$$(1 - C_2 d(p, \partial N)^\beta)^{K-1} (1 + \hat{C}_3 d(p, \partial N)^\beta) \leq 1, \quad \forall p \in N.$$

由 (4.15), 有

$$(\lambda^s(p) + 3H\epsilon^\theta d(p, \partial N)^\beta)^{K-1} (1 + \hat{C}_3 d(p, \partial N)^\beta) \leq 1, \quad \forall p \in N.$$

所以对任意 $p \in N$, 有

$$(\lambda^s(p) + 3H\epsilon^\theta d(p, \partial N)^\beta)^{K-1} (1 + Ld(p, \partial N)^\beta) \leq 1 - H(\lambda^s(p))^{-1} \epsilon^\theta d(p, \partial N)^\beta \leq \frac{\lambda^s(p) + 2H\epsilon^\theta d(p, \partial N)^\beta}{\lambda^s(p) + 3H\epsilon^\theta d(p, \partial N)^\beta}.$$

于是

$$\begin{aligned} (\lambda^s(p) + 3H\epsilon^\theta d(p, \partial N)^\beta)^K (1 + Ld(p, \partial N)^\beta) &\leq \lambda^s(p) + 2H\epsilon^\theta d(p, \partial N)^\beta \\ \Rightarrow \left(\frac{\lambda^s(p)}{\lambda^{cs}(p)} + \frac{3H\epsilon^\theta d(p, \partial N)^\beta}{\lambda^{cs}(p)} \right)^K \lambda^{cs}(p)^{K-1} (1 + Ld(p, \partial N)^\beta) &\leq \frac{\lambda^s(p)}{\lambda^{cs}(p)} + \frac{2H\epsilon^\theta d(p, \partial N)^\beta}{\lambda^{cs}(p)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\lambda^s(p)}{\lambda^{cs}(p)} + \frac{3H\epsilon^\theta d(p, \partial N)^\beta}{\lambda^{cs}(p)} \right)^K \lambda^{cs}(p)^K \leq \frac{\lambda^s(p)}{\lambda^{cs}(p)} + \frac{2H\epsilon^\theta d(p, \partial N)^\beta}{\lambda^{cs}(p)}.$$

所以由 (4.8) 第一个不等式和 (4.13) 可得

$$\tau(p) < \sigma(p) \lambda^{cs}(p) \leq \sigma(p) \lambda^{cs}(p) \leq \sigma(p)^{\frac{1}{K}}, \quad \forall p \in N.$$

于是

$$\prod_{j=n_{i-1}}^{n_i-1} \tau(f^j(p)) \leq \prod_{j=n_{i-1}}^{n_i-1} \sigma(f^j(p))^{\frac{1}{K}} \leq \widehat{\lambda}_2^{\frac{1}{K}} =: \lambda_2, \quad i \in \mathbb{N},$$

即 $\tau_{n_{i+1}-n_i}(p) \leq \lambda_2, \forall i \in \mathbb{N}$. 至此完成了引理的证明. $\square$

5 几个局部几何对象的构造和估计

下面构造一些 N 中的几何对象, 这些几何对象对本文主要定理的证明起着关键作用.

给定 $p \in N$, 令

$$S_n = S_{n,\sigma}(p) = \bigcup_{x \in W^s(p, \tilde{R}(p))} W^c(x, \sigma_n(p)).$$

对 $y \in S_n$, 记

$$J_n^u(y) = f^{-n}(W^u(y_n, \tau_n(p))).$$

设 $x \in W^s(p, \tilde{R}(p))$, 令

$$B_n^c(x) = W^c(x, \sigma_n(p)), \quad J_n^{cu}(x) = \bigcup_{q \in B_n^c(x)} J_n^u(q).$$

最后记

$$T_{n,\sigma,\tau}(p) = f^{-n} \left(\bigcup_{z \in f^n(S_n)} W_{p_n}^u(z, \tau_n(p)) \right).$$

引理 5.1 当 r 和 ϵ 充分小时,

$$\sigma(p) \bar{\lambda}^{cu}(p) \tilde{R}(p) < \tilde{R}(f(p)), \quad \forall p \in N. \quad (5.1)$$

证明 首先证明存在 $r, \epsilon > 0, a_3 \in (\frac{2}{C}, a_2)$ 使得当 $d(f(p), \partial N) < r$ 时,

$$\sigma(p) \bar{\lambda}^{cu}(p) < 1 - a_3 (\|Df|_{E^s(p)}\|^{-1} - 1). \quad (5.2)$$

因为 $\gamma\theta \geq \beta$, 所以由 (1.5) 可知, 存在 $r > 0$ 使得当 $d(f(p), \partial N) < r$ 时,

$$d(p, \partial N)^{\gamma\theta} \leq d(p, \partial N)^\beta \leq \frac{\|Df|_{E^s(p)}\|^{-1} - 1}{C}.$$

取 $\epsilon > 0$ 满足

$$\sup_{p \in N} \left(\frac{3H\lambda^{cu}(p)}{\lambda^{cs}(p)} \epsilon^\theta + H\epsilon^\theta + \frac{3H^2}{\lambda^{cs}(p)} \epsilon^{2\theta} \right) < C(a_2 - a_3).$$

注意到 (4.13), 于是得到

$$\sigma(p) \bar{\lambda}^{cu}(p) < \left(\frac{\lambda^s(p)}{\lambda^{cs}(p)} + \frac{3H}{\lambda^{cs}(p)} \epsilon^\theta d(p, \partial N)^{\theta\gamma} \right) (\lambda^{cu}(p) + H\epsilon^\theta d(p, \partial N)^{\gamma\theta})$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\lambda^s(p)\lambda^{cu}(p)}{\lambda^{cs}(p)} + \left(\frac{3H\lambda^{cu}(p)}{\lambda^{cs}(p)}\epsilon^\theta + H\epsilon^\theta + \frac{3H^2}{\lambda^{cs}(p)}\epsilon^{2\theta} \right) d(p, \partial N)^{\gamma\theta} \\ &\leq 1 - a_3(\|Df|_{E^s(p)}\|^{-1} - 1). \end{aligned}$$

这就证明了 (5.2).

下面证明引理中的不等式 (5.1).

情形 1 $R(f(p)) = r$.

注意到 $\sigma(p)\bar{\lambda}^{cu}(p) < 1$, 显然有

$$\sigma(p)\bar{\lambda}^{cu}(p)\tilde{R}(p) < \tilde{R}(p) \leq \epsilon r = \tilde{R}(f(p)).$$

情形 2 $R(f(p)) = \epsilon d(f(p), \partial N)^{2\gamma}$.

由 (1.5) 第二个不等式可知, 当 p 靠近边界时 (只需要 r 充分小),

$$\left(\frac{d(f(p), \partial N)}{d(p, \partial N)} \right)^{2\gamma} > \left(1 - \frac{\|Df|_{E^s(p)}\|^{-1} - 1}{C} \right)^2 > 1 - a_3(\|Df|_{E^s(p)}\|^{-1} - 1).$$

由 (5.2) 和上式得到

$$\begin{aligned} \sigma(p)\bar{\lambda}^{cu}(p)\tilde{R}(p) &< (1 - a_3(\|Df|_{E^s(p)}\|^{-1} - 1))\tilde{R}(p) \\ &\leq \left(\frac{d(f(p), \partial N)}{d(p, \partial N)} \right)^{2\gamma} \epsilon d(p, \partial N)^{2\gamma} \\ &= \epsilon d(f(p), \partial N)^{2\gamma} \\ &= \tilde{R}(f(p)). \end{aligned}$$

因此无论哪种情形, (5.1) 均成立. □

引理 5.2 当 $\epsilon > 0$ 充分小时, 对任意 $p \in N$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq n_0$ 时,

$$f^j(T_{n,\sigma,\tau}(p)) \subset B(p_j, \tilde{R}(p_j)), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

进一步有

$$\sum_{j=0}^{+\infty} (\text{diam}(f^j(T_{n,\sigma,\tau}(p))))^\theta < +\infty. \quad (5.3)$$

证明 首先取 n_0 使得 $T_{n_0,\sigma,\tau}(p) \subset B(p, \tilde{R}(p))$. 当 $n \geq n_0$ 时, s 方向大小一直是 $\tilde{R}(p)$, 但 u 和 c 方向大小是随 n 增加而单调减少, 故

$$T_{n,\sigma,\tau}(p) \subset T_{n_0,\sigma,\tau}(p) \subset B(p, \tilde{R}(p)), \quad \forall n \geq n_0.$$

对 $j = 0, 1, \dots, n$, 根据 (5.1), 归纳可得 $f^j(T_{n,\sigma,\tau}(p))$ 的中心方向不大于 $\tilde{R}(p_j)$. 考虑 u 和 s 方向, 由 $\bar{\lambda}^s(p) < \tau(p) < \sigma(p)\bar{\lambda}^{cs}(p) \leq \sigma(p)\bar{\lambda}^{cu}(p)$ 和 (5.1) 可知, $f^j(T_{n,\sigma,\tau}(p))$ 的 u 和 s 方向不大于 $\tilde{R}(p_j)$. 至此证明了引理的第一个结论.

下面证明不等式 (5.3). 任给正数 t , 记 $P = P(t) := \{x \in N : d(x, \partial N) \leq t\}$. 取定一个充分小的 $t_* > 0$, 记

$$P_j = P\left(\frac{t_*}{2^{j-1}}\right) \setminus P\left(\frac{t_*}{2^j}\right), \quad j = 1, 2, \dots,$$

并令 $P_0 = N \setminus \bigcup_{j \geq 1} P_j$. 任给 $j = 1, 2, \dots$, 记 p 进入 P_j 的时刻为

$$0 \leq n_1^j < n_2^j < n_3^j < \dots,$$

即 $f^{n_i^j}(p) \in P_j$.

当 $j = 0$ 时, 注意到 P_0 的紧性和函数 $\sigma \bar{\lambda}^{cu}$ 的连续性, 若有必要适当缩小 ϵ , 容易证明,

$$\sup_{x \in P_0} \sigma(x) \bar{\lambda}^{cu}(x) < 1.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{+\infty} (\sigma_{n_i^0}(p) \bar{\lambda}_{n_i^0}^{cu}(p))^\theta \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\left(\sup_{x \in P_0} \sigma(x) \bar{\lambda}^{cu}(x) \right)^\theta \right)^i < +\infty. \quad (5.4)$$

从 (5.2) 和 (1.5) 可知

$$\sigma(p) \bar{\lambda}^{cu}(p) < 1 - Ca_3 d(p, \partial N)^\beta.$$

当 $j > 0$ 时, 由上式和引理 5.1, 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} (\sigma_{n_i^j}(p) \bar{\lambda}_{n_i^j}^{cu}(p) \tilde{R}(p))^\theta &\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\left(1 - \frac{Ca_3}{2^{\beta j}} \right)^i \sigma_{n_1^j}(p) \bar{\lambda}_{n_1^j}^{cu}(p) R(p) \right)^\theta \\ &\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\tilde{C}a_3}{2^{\beta j}} \right)^i R(f^{n_1^j}(p))^\theta \\ &\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\tilde{C}a_3}{2^{\beta j}} \right)^i \epsilon^\theta \left(\frac{t_*}{2^{j-1}} \right)^{2\gamma\theta} \\ &\leq \frac{2^{\beta j}}{\tilde{C}a_3} \epsilon^\theta \left(\frac{t_*}{2^{j-1}} \right)^{2\gamma\theta} \\ &= \frac{2^{2\gamma\theta} \epsilon^\theta t_*^{2\gamma\theta}}{\tilde{C}a_3} (2^{\beta-2\gamma\theta})^j. \end{aligned}$$

再注意到 $2\gamma\theta > \beta$ 和 (5.4), 于是得到

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} (\sigma_{n_i^j}(p) \bar{\lambda}_{n_i^j}^{cu}(p) \tilde{R}(p))^\theta < \infty.$$

至此证明了 $T_{n,\sigma,\tau}(p)$ 在迭代下中心方向的长度和是有界的.

由 (4.10), 显然不稳定方向和稳定方向的长度和也是有界的. 这就证明了 (5.3). $\square$

6 定理 1.1 的证明

引理 6.1 设 $x, x' \in W^s(p, \hat{R}(p))$, 稳定叶层诱导的和乐映射为 $h^s : W^{cu}(x) \rightarrow W^{cu}(x')$, 则 $h^s(J_{n_i}^{cu}(x))$ 和 $J_{n_i}^{cu}(x')$ 是相互嵌套的.

证明 根据引理 3.1, 可知 h^s 是 Lipschitz 连续的. 设 Lipschitz 常数为 L . 取正整数 $k_1 \geq -\frac{\ln L}{\ln \lambda_2}$, 则由引理 4.2, 有

$$h^s(B_{n_i}^c(x)) \subset B_{n_i-k_1}^c(x'), \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (6.1)$$

任给 $q \in S_{n_i}$, $q' \in S_{n_{i-k_1}} \cap W^s(q)$ 及 $y \in J_{n_i}^u(q)$, 设 y' 是 y 在和乐映射 $h^s : W^{cu}(q) \rightarrow W^{cu}(q')$ 下的象点, $z' = W_{\text{loc}}^u(y') \cap W_{\text{loc}}^c(q')$. 先证明存在正整数 k_2 使得

$$y' \in \widehat{J}_{n_{i-k_2}}^u(z'), \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (6.2)$$

由引理 4.2, 这里只需要证明

$$d(y'_{n_i}, z'_{n_i}) = O(\tau_{n_i}). \quad (6.3)$$

由 $J_{n_i}^u(q)$ 的定义以及 $y \in J_{n_i}^u(q)$ 知 $d(q_{n_i}, y_{n_i}) \leq \tau_{n_i}$. 因为 $q' \in W^s(q)$, $y' \in W^s(y)$, 由引理 5.2 及 (4.1) 中的定义可知

$$\max\{d(q_{n_i}, q'_{n_i}), d(y_{n_i}, y'_{n_i})\} = O(\bar{\lambda}_{n_i}^s).$$

注意到 $\bar{\lambda}_{n_i}^s < \tau_{n_i}$, 且 q_{n_i} 和 q'_{n_i} 分别是 y_{n_i} 和 y'_{n_i} 在由 W^u 诱导的和乐映射 $h^u : W^{cs}(y_{n_i}) \rightarrow W^{cs}(q_{n_i})$ 下的象点, 根据 W^u 和 W^{cs} 的局部一致横截性 (引理 3.1), 有

$$d(y'_{n_i}, z'_{n_i}) = O \max(d(q'_{n_i}, q_{n_i}), d(q_{n_i}, y_{n_i}), d(y_{n_i}, y'_{n_i})) = O(\tau_{n_i}).$$

至此证明了 (6.3).

接下来证明 $d(q', z') = O(\sigma_{n_i})$. 由距离的三角不等式及以上估计可得

$$d(q'_{n_i}, z'_{n_i}) \leq d(q'_{n_i}, q_{n_i}) + d(q_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y'_{n_i}) + d(y'_{n_i}, z'_{n_i}) = O(\tau_{n_i}).$$

注意到 (4.10), 于是

$$d(q', z') \leq (\underline{\lambda}_{n_i}^{cs})^{-1} d(q'_{n_i}, z'_{n_i}) = O(\tau_{n_i} (\underline{\lambda}_{n_i}^{cs})^{-1}) = O(\sigma_{n_i}),$$

即存在 $k_3 \geq 1$ 使得

$$z' \in B_{n_{i-k_3}}^c(q'), \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

设 $q \in B_{n_i}^c(x)$, $q' = h^s(q)$, 则由 (6.1) 可得 $q' \in B_{n_{i-k_1}}^c(x') \subset S_{n_{i-k_1}}$. 令

$$Q := \bigcup_{q' \in B_{n_{i-k_1}}^c(x')} B_{n_{i-k_3}}^c(q'),$$

由 (6.2), 有

$$h^s(J_{n_i}^{cu}(x)) \subseteq \bigcup_{z \in Q} J_{n_{i-k_2}}^u(z).$$

由引理 4.2, 可取 $k \geq \max\{k_1, k_3\}$, 使得对任意 $i > k$ 都有 $\sigma_{n_{i-k_1}} + \sigma_{n_{i-k_3}} \leq \sigma_{n_{i-k}}$. 于是 $Q \subset B_{n_{i-k}}^c(x')$. 所以得到

$$h^s(J_{n_i}^{cu}(x)) \subseteq J_{n_{i-k}}^{cu}(x'), \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

最后根据 x 和 x' 的对称性便可得 $h^s(J_{n_i}^{cu}(x))$ 和 $J_{n_i}^{cu}(x')$ 是相互嵌套的. □

引理 6.2 存在 $\delta > 0$ 和 $U \geq 1$ 使得对所有 $q, q' \in S_{n_i}$, $x \in W^s(p, \widehat{R}(p))$ 及 $i \in \mathbb{N}$ 都有

$$U^{-1} \leq \frac{m_u(J_{n_i}^u(q))}{m_u(J_{n_i}^u(q'))} \leq U, \quad m_u(J_{n_{i+1}}^u(q)) \geq \delta m_u(J_{n_i}^u(q)), \quad m_{cu}(J_{n_{i+1}}^{cu}(x)) \geq \delta m_{cu}(J_{n_i}^{cu}(x)).$$

证明 因为 E^u 是局部 θ -Hölder 连续的 (引理 3.1), 由 (5.3) 和文献 [2, 引理 4.1] 可知, 对任意 $p \in N$, 存在 $J > 1$ 使得对任意 $x, y \in T_{n,\sigma,\tau}(p)$ 有

$$J^{-1} \leq \frac{\text{Jac}(Df^{n_i}|_{E^u(y)})}{\text{Jac}(Df^{n_i}|_{E^u(x)})} \leq J, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (6.4)$$

另外, 由 W^u 的连续性知, 存在 $K \geq 1$ 使得

$$K^{-1} \leq \frac{m_u(W^u(q_{n_i}, \tau_{n_i}))}{m_u(W^u(q'_{n_i}, \tau_{n_i}))} \leq K, \quad q, q' \in S_{n_i}.$$

再注意到对可测集 $X \subset J_{n_i}^u(q)$ 有 $m_u(f^n(X)) = \int_X \text{Jac}(Df^n|_{E^u})(x) dm_u(x)$, 于是存在 $U > 1$ 使得

$$U^{-1} \leq \frac{m_u(J_{n_i}^u(q))}{m_u(J_{n_i}^u(q'))} \leq U.$$

至此证明了引理的第一个不等式.

下面证明引理的第二个不等式. 由 (6.4) 可知, 存在 $\tilde{K} \geq 1$ 使得

$$\frac{m_u(J_{n_{i+1}}^u(q))}{m_u(J_{n_i}^u(q))} > \tilde{K}^{-1} \frac{m_u(W^u(q_{n_{i+1}}, \tau_{n_{i+1}}))}{m_u(W^u(q_{n_i}, \tau_{n_i}))}.$$

根据 (4.11), 可知存在 $\delta > 0$ 使得

$$m_u(J_{n_{i+1}}^u(q)) \geq \delta m_u(J_{n_i}^u(q)). \quad (6.5)$$

最后, 由 (4.11) 可知, 存在 $\delta' > 0$ 满足对所有 $x \in W^s(p, \hat{R}(p))$, 有

$$\frac{m_c(B_{n_{i+1}}^c(x))}{m_c(B_{n_i}^c(x))} = \frac{m_c(W^c(x, \sigma_{n_{i+1}}))}{m_c(W^c(x, \sigma_{n_i}))} > \delta', \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

故由不稳定叶层在中心不稳定叶片中的正则性、(6.5) 及上面的不等式可得引理最后一个不等式成立. $\square$

引理 6.3 设 X 是一个 W^s -浸透和本性 W^u -浸透的可测集, 则 $x \in W^s(p)$ 是 X 的 Lebesgue 密度点当且仅当 $\lim_{i \rightarrow \infty} m_{cu}(X : J_{n_i}^{cu}(x)) = 1$.

证明 对 $p \in N$, $x \in W_{\text{loc}}^s(p)$, $n \in \mathbb{N}$, 令

$$\begin{aligned} B_n(x) &= B(x, \sigma_n), \\ D_n^{cs}(x) &= \bigcup_{x' \in W^s(x, \sigma_n)} B_n^c(x'), \\ C_n(x) &= \bigcup_{q \in D_n^{cs}(x)} W^u(q, \sigma_n), \\ D_n(x) &= \bigcup_{q \in D_n^{cs}(x)} J_n^u(q) = \bigcup_{x' \in W^s(x, \sigma_n)} J_n^{cu}(x'), \\ F_n(x) &= \bigcup_{\substack{q \in J_n^{cu}(x) \\ q' \in W^s(x, \sigma_n)}} W^s(q) \cap W^{cu}(q'), \\ G_n(x) &= \bigcup_{q \in J_n^{cu}(x)} W^s(q, \sigma_n). \end{aligned}$$

我们将证明

$$x \in W^s(p) \text{ 是 } X \text{ 的 Lebesgue 密度点} \Leftrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} m(X : B_{n_i}(x)) = 1, \quad (6.6)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m(X : B_{n_i}(x)) = 1 \Leftrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} m(X : C_{n_i}(x)) = 1, \quad (6.7)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m(X : C_{n_i}(x)) = 1 \Leftrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} m(X : D_{n_i}(x)) = 1, \quad (6.8)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m(X : D_{n_i}(x)) = 1 \Leftrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} m(X : F_{n_i}(x)) = 1, \quad (6.9)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m(X : F_{n_i}(x)) = 1 \Leftrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} m(X : G_{n_i}(x)) = 1, \quad (6.10)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m(X : G_{n_i}(x)) = 1 \Leftrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \hat{m}_{cu}(X : \hat{J}_{n_i}^{cu}(x)) = 1. \quad (6.11)$$

由 Lebesgue 密度点及 (4.11) 可知 (6.6) 显然成立.

从定义可以看出 C_{n_i} 是几乎沿 u , s 和 c 方向的一个近似立方体, 根据 p 附近不变叶层的连续性和横截性可知 C_{n_i} 与球 B_{n_i} 是相互嵌套的. 所以由引理 2.1 可推导出 (6.7) 成立.

C_{n_i} 和 D_{n_i} 都是以 $D_{n_i}^{cs}$ 为基底、纤维分别为 $W^u(q, \sigma_{n_i})$ 和 $J_{n_i}^u(q)$ 的几何体. 由引理 6.2 可知, 它们是 U -一致纤维的. 根据 Cavalieri 原理 (参见文献 [2, 命题 2.5]) 和本性 W^u -浸透性得到 (6.8) 中的等价关系成立.

接下来证明 D_{n_i} 和 F_{n_i} 也是相互嵌套的. 注意到 D_{n_i} 和 F_{n_i} 都以 $W^s(x, \sigma_{n_i})$ 为基. $D_{n_i}(x)$ 在 $x' \in W^s(x, \sigma_{n_i})$ 处的纤维是 $J_{n_i}^{cu}(x')$, 而 $F_{n_i}(x)$ 在 $x' \in W^s(x, \sigma_{n_i})$ 处的纤维是 $J_{n_i}^{cu}(x)$ 在 W^s 的和乐映射 $h^s : W^{cu}(x) \rightarrow W^{cu}(x')$ 下的象. 由引理 6.1 知 D_{n_i} 和 F_{n_i} 是相互嵌套的. 于是 (6.9) 中的等价关系获证.

设 q' 是 $F_{n_i}(x)$ 的纤维边界上的一个点. 于是存在 $W^s(x, \sigma_{n_i})$ 边界上的点 x' 使得 $q' \in h^s(J_{n_i}^{cu}(x))$, 这里和乐映射 $h^s : W^{cu}(x) \rightarrow W^{cu}(x')$. 注意到 $J_{n_i}^{cu}(x)$ 和 $h^s(J_{n_i}^{cu}(x))$ 的直径都是 $O(\sigma_{n_i})$ 且 $d(x, x') = \sigma_{n_i}$. 因此当 k 足够大时有 $\sigma_{n_{i+k}} \leq d(q, q') \leq \sigma_{n_{i-k}}$. 于是 $F_{n_i}(x)$ 的纤维边界上 $W_{\text{loc}}^s(q)$ 中的点都在 $W^s(q, \sigma_{n_{i-k}})$ 中且在 $W^s(q, \sigma_{n_{i+k}})$ 之外. 这就证明了 F_{n_i} 和 G_{n_i} 是相互嵌套的, 于是 (6.10) 中的等价关系获证.

最后, G_{n_i} 是以 $J_{n_i}^{cu}(x)$ 为基的几乎处处 U -一致纤维的. 由文献 [2, 命题 2.7]、 W^s -浸透性及稳定流形的绝对连续性得到 (6.11) 中的等价关系成立. $\square$

命题 6.1 设 f 是一个 C^2 保体积逐点部分双曲系统, 满足条件 (H1)–(H4). 设 A 是一个本性 W^u -浸透且本性 W^s -浸透的可测集. 则 A 的 Lebesgue 密度点集是 W^u -浸透且 W^s -浸透的.

证明 这里只证明 A 的 Lebesgue 密度点集是 W^s -浸透的, W^u -浸透性类似可证.

因为 A 是一个本性 W^s -浸透的可测集, 所以可取 A^s 是一个 W^s -浸透集且满足 $m(A \triangle A^s) = 0$, 则 A 和 A^s 具有相同的 Lebesgue 密度点集. 取定 $p \in N$, 假设 $x \in W^s(p, \tilde{R}(p))$ 是 A^s 的 Lebesgue 密度点. 由引理 6.3 可得 $\lim_{i \rightarrow \infty} m_{cu}(A^s : J_{n_i}^{cu}(x)) = 1$.

为证明本命题, 只需要证明

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m_{cu}(A^s : J_{n_i}^{cu}(x')) = 1, \quad \forall x' \in W^s(p, \tilde{R}(p)).$$

设 $h^s : W^{cu}(x) \rightarrow W^{cu}(x')$ 是稳定叶层诱导的和乐映射. 由 h^s 的绝对连续性知

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m_{cu}(A^s : J_{n_i}^{cu}(x)) = 1 \Leftrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} m_{cu}(h^s(A^s) : h^s(J_{n_i}^{cu}(x))) = 1.$$

因为 A^s 是 W^s - 浸透的, 所以有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m_{cu}(A^s : J_{n_i}^{cu}(x)) = 1 \Leftrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} m_{cu}(A^s : h^s(J_{n_i}^{cu}(x))) = 1.$$

由引理 6.1 知 $h^s(J_{n_i}^{cu}(x))$ 与 $J_{n_i}^{cu}(x')$ 是相互嵌套的, 再由引理 6.2 可得 $J_{n_i}^{cu}(x')$ 是正则的. 根据文献 [2, 引理 2.1], 有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m_{cu}(A^s : h^s(J_{n_i}^{cu}(x))) = 1 \Leftrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} m_{cu}(A^s : J_{n_i}^{cu}(x')) = 1.$$

证毕. □

定理 1.1 的证明 要证明体积测度是遍历的, 只需要证明对任何连续函数, 它的 Birkhoff 平均几乎处处是常数.

设 φ 是 N 上的任意一个连续函数, 记其 Birkhoff 正向和负向平均分别为

$$\hat{\varphi}_s(p) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \varphi(f^i(p)), \quad \hat{\varphi}_u(p) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \varphi(f^{-i}(p)), \quad \forall p \in N,$$

则 $\hat{\varphi}_s$ 在 $W^s(p)$ 上是常数, $\hat{\varphi}_u$ 在 $W^u(p)$ 上是常数. 对任意实数 a , 集合 $A^s(a) = \hat{\varphi}_s^{-1}(-\infty, a]$ 和 $A^u(a) = \hat{\varphi}_u^{-1}(-\infty, a]$ 分别是 W^s - 浸透和 W^u - 浸透的.

因为体积测度是不变测度, 由 Birkhoff 遍历定理, 几乎处处有 $\hat{\varphi}_s = \hat{\varphi}_u$. 所以 $m(A^s(a) \triangle A^u(a)) = 0$, 集合 $A(a) = A^s(a) \cap A^u(a)$ 是本性 W^s - 浸透且本性 W^u - 浸透的. 由命题 6.1 可知 $A(a)$ 的 Lebesgue 点集是 W^s - 浸透且 W^u - 浸透的. 再由本性可达条件可知 $A(a)$ 是零测或者全测集合. 最后由 a 的任意性知 $\hat{\varphi}_s(p)$ 和 $\hat{\varphi}_u(p)$ 几乎处处是常数, 故 f 是遍历的. □

致谢 作者感谢胡虎翼教授的帮助和讨论.

参考文献

- 1 Anosov D V, Sinai Ja G. Certain smooth ergodic systems. Uspehi Mat Nauk, 1967, 22: 107–172
- 2 Burns K, Wilkinson A. On the ergodicity of partially hyperbolic systems. Ann of Math (2), 2010, 171: 451–489
- 3 Chen J, Hu H, Zhou Y H. SRB measures for pointwise hyperbolic systems on open regions. Sci China Math, 2020, 63: 1671–1720
- 4 Dolgopyat D, Wilkinson A. Stable accessibility is C^1 dense. Astérisque, 2002, 287: 33–60
- 5 Grayson M, Pugh C, Shub M. Stably ergodic diffeomorphisms. Ann of Math (2), 1994, 140: 295–329
- 6 Hu H. Conditions for the existence of SBR measures for “almost Anosov” diffeomorphisms. Trans Amer Math Soc, 2000, 352: 2331–2367
- 7 Katok A. Bernoulli diffeomorphisms on surfaces. Ann of Math (2), 1979, 110: 529–547
- 8 Leguil M, Zhang Z. C^r -prevalence of stable ergodicity for a class of partially hyperbolic systems. J Eur Math Soc (JEMS), 2022, 24: 3379–3438
- 9 Pugh C, Shub M. Stable ergodicity and partial hyperbolicity. In: International Conference on Dynamical Systems. Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 362. Harlow: Longman, 1996, 182–187
- 10 Pugh C, Shub M, Wilkinson A. Hölder foliations. Duke Math J, 1997, 86: 517–546
- 11 Pugh C, Shub M, Wilkinson A. Correction to: “Hölder foliations” Duke Math. J. Vol. 86 No. 3 (1997), pp. 517–546. Duke Math J, 2000, 105: 105–106
- 12 Rodriguez Hertz F, Rodriguez Hertz M, Tahzibi A, et al. New criteria for ergodicity and non-uniform hyperbolicity. Duke Math J, 2011, 160: 599–629
- 13 Rodriguez Hertz F, Rodriguez Hertz M A, Ures R. Accessibility and stable ergodicity for partially hyperbolic diffeomorphisms with 1D-center bundle. Invent Math, 2008, 172: 353–381
- 14 Wu C, Zhou Y H. Symbolic dynamics for pointwise hyperbolic systems on open regions. Ergodic Theory Dynam Systems, 2024, 45: 595–648

- 15 Zhou Y H. The ergodicity of a class of almost Anosov systems. *Acta Math Sin (Engl Ser)*, 2013, 29: 193–198
16 Zhou Y H. The local C^1 -density of stable ergodicity. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2013, 33: 2621–2629

The ergodicity of a class of volume-preserving pointwise partially hyperbolic systems

Yunhua Zhou

Abstract In this paper, we prove that a class of C^2 volume-preserving, pointwise partially hyperbolic systems on open regions is ergodic if it is dynamically coherent, center bunched, and essentially accessible.

Keywords pointwise partial hyperbolicity, accessibility, pointwise center bunching, ergodicity

MSC(2020) 37D30, 37A25, 37C40

doi: 10.1360/SSM-2024-0342