



ABJS 基本不等式与 Toeplitz 算子的本性范数

周立芳¹, 胡璋剑², 卢金^{3*}

1. 合肥师范学院数学与统计学院, 合肥 230061;

2. 湖州师范大学数学系, 湖州 313000;

3. 安徽大学互联网学院, 合肥 230039

E-mail: lfzhou@hfnu.edu.cn, huzj@huznu.edu.cn, lujin@ahu.edu.cn

收稿日期: 2026-02-05; 接受日期: 2026-05-27; 网络出版日期: 2026-07-15; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12071130 和 12171150)、浙江省自然科学基金 (批准号: LY24A010010)、安徽省高校自然科学基金 (批准号: 2024AH051602 和 2024AH010025)、合肥师范学院人才项目 (批准号: 2024rcjj08) 和安徽省自然科学基金 (批准号: 2208085MA03) 资助项目

摘要 1979 年, Axler 等提出了“哪些 Banach 空间满足基本不等式”的问题. 本文给出这一问题的部分解答, 证明了 $\mathbb{C}^n$ 中区域 Ω 上的 Bergman 空间满足该基本不等式. 为纪念 Axler-Berg-Jewell-Shields 的卓著工作, 本文将此基本不等式简称为 ABJS 基本不等式. 利用这一结果, 本文得到 Siegel 上半空间、强拟凸域、有限型凸域上的全纯 Bergman 空间满足 ABJS 基本不等式, 研究正 Toeplitz 算子的本性范数, 还将 ABJS 基本不等式与正 Toeplitz 算子本性范数的相应研究拓展到单位圆盘上的指数权 Bergman 空间情形与径向权调和 Bergman 空间情形. 最后, 本文就此研究在一般加权 Bergman 空间情形提出一个猜想.

关键词 基本不等式 正 Toeplitz 算子 本性范数

MSC (2020) 主题分类 32A36, 46B10, 46A25, 47B35

1 引言

设 X 是一个 Banach 空间. 用 $\mathcal{L}(X)$ 表示 Banach 空间 X 上的一切有界线性算子的全体, $\mathcal{K}(X)$ 表示 X 上的一切紧线性算子的全体. 设 $T \in \mathcal{L}(X)$, 则 T 的本性范数 $\|T\|_e$ 定义为

$$\|T\|_e := \inf\{\|T - K\| : K \in \mathcal{K}(X)\}.$$

如果存在 $K \in \mathcal{K}(X)$ 使得

$$\|T\|_e = \|T - K\|,$$

则称线性算子 T 的本性范数可达.

英文引用格式: Zhou L F, Hu Z J, Lu J. TThe ABJS basic inequality and the essential norm of Toeplitz operators (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 1–18, doi: 10.1360/SSM-2026-0031

设 $\mathbb{D}$ 表示复平面 $\mathbb{C}$ 中的开单位圆盘, $\partial\mathbb{D}$ 表示单位圆周. 用 H^∞ 表示单位圆周 $\partial\mathbb{D}$ 上所有有界全纯函数构成的空间, C 表示单位圆周 $\partial\mathbb{D}$ 上连续函数的全体. $H^\infty + C$ 表示 H^∞ 与 C 的线性张成, 是 L^∞ 的一个闭子代数.

1971 年 Adamjan 等 [4] 和 1975 年数学家 Sarason (参见文献 [21, 问题 13, 第 197 页]) 分别提出了如下的公开问题: 在单位圆周 $\partial\mathbb{D}$ 上, 对任意的 $f \in L^\infty$, 是否存在 $h \in H^\infty + C$ 满足 $\|f - h\|_\infty = \text{dist}(f, H^\infty + C)$? 1979 年, Axler 等 [5] 通过引入基本不等式 (定义 1.1) 的概念, 建立了 Banach 空间 X 上的线性算子 T 的本性范数可达条件 (定理 A), 进而通过证明以 $f \in L^\infty$ 为特征 Hankel 算子 H_f 的本性范数可达, 肯定回答了此公开问题.

设序列 $\{T_m\} \subset \mathcal{L}(X)$, 如果任意的 $f \in X$ 满足 $\|(T_m - T)f\|_X \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$), 则称序列 $\{T_m\}$ 以强算子拓扑收敛于 T , 记作 $T_m \xrightarrow{\text{SOT}} T$.

定义 1.1 设 X 为 Banach 空间, 如果对任意的 $T \in \mathcal{L}(X)$, 任意满足 $A_m \xrightarrow{\text{SOT}} 0$ 和 $A_m^* \xrightarrow{\text{SOT}} 0$ 的序列 $\{A_m\} \subset \mathcal{L}(X)$, 以及任意的 $\epsilon > 0$, 总存在一个正整数 m_0 使得

$$\|T + A_{m_0}\| \leq \epsilon + \max(\|T\|, \|T\|_e + \|A_{m_0}\|)$$

成立, 则称 X 满足基本不等式 (basic inequality).

我们将此不等式称为 Axler-Berg-Jewell-Shields 基本不等式, 简称 ABJS 基本不等式.

定理 A (参见文献 [5, 定理 1, 推论]) 设 X 是一个满足 ABJS 基本不等式的 Banach 空间. 如果 $T \in \mathcal{L}(X) \setminus \mathcal{K}(X)$, 紧算子列 $\{T_m\} \subset \mathcal{K}(X)$ 满足 $T_m \xrightarrow{\text{SOT}} T$ 和 $T_m^* \xrightarrow{\text{SOT}} T^*$, 则存在两列不同的非负实数 $\{a_m\}$ 和 $\{b_m\}$ 满足 $\sum a_m = \sum b_m = 1$, 且

$$\|T - K_1\| = \|T - K_2\| = \|T\|_e,$$

其中 $K_1 = \sum a_m T_m$, $K_2 = \sum b_m T_m$, 且 $K_1 \neq K_2$.

定理 A 在解决 Adamjan 等 [4] 和 Sarason [21] 提出的公开问题过程中发挥了关键作用. 通过定理 A, 我们发现 Banach 空间上的线性算子的本性范数可达的一个重要条件是该 Banach 空间满足 ABJS 基本不等式. Axler 等 [5] 提出了如下的公开问题:

问题 1.1 哪些 Banach 空间 X 满足 ABJS 基本不等式?

1979 年, Axler 等 [5] 证明了, 当 $1 < p < \infty$ 时, l^p 满足 ABJS 基本不等式. 1980 年, Axler 等 [6] 指出, 当 $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$ 时, 空间 $L^p(\partial\mathbb{D})$ 不满足 ABJS 基本不等式, 同时他们也证明了 l^1 与 l^∞ 不满足 ABJS 基本不等式. 2015 年, Hu 和 Lu [11] 证明了 Fock 空间 $F^p(\varphi)$ ($1 < p < \infty$) 满足 ABJS 基本不等式, 其中 $\varphi \in C^2(\mathbb{C}^n)$ 满足 $dd^c\varphi \simeq dd^c|z|^2$. 结合定理 A, 他们还证明了 Fock 空间 $F^p(\varphi)$ 上的正 Toeplitz 算子 T_μ 的本性范数可达. 2022 年, Zhou 和 Lu [28] 发现在 $\mathbb{C}$ 中的单位圆盘上, 由正规权诱导的 Bergman 空间也满足 ABJS 基本不等式且正 Toeplitz 算子的本性范数可达. 关于 Toeplitz 算子本性范数的其他研究工作可参见文献 [9, 16, 26].

随着 $\mathbb{C}^n$ 中 Siegel 上半空间 [15, 23, 24]、强拟凸域 [1, 2, 8] 和有限型凸域 [25] 等区域上的 Bergman 空间与 Toeplitz 算子理论的发展, 一个自然的问题是: 这些区域上的 Bergman 空间是否满足 ABJS 基本不等式? 其上的正 Toeplitz 算子的本性范数是否可达?

立足这些问题, 我们对 $\mathbb{C}^n$ 中一般区域 Ω 上的 Bergman 空间是否满足 ABJS 基本不等式展开研究. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是区域, v 表示 Ω 上的 Lebesgue 测度. 设 $0 < p < \infty$, 则空间 $L^p(\Omega)$ 表示 Ω 上所有满足

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f(z)|^p dv(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \quad (1.1)$$

的 Lebesgue 可测函数的全体. 设 $H(\Omega)$ 表示 Ω 上所有全纯函数的全体, Bergman 空间 $A^p(\Omega) := L^p(\Omega) \cap H(\Omega)$. 它是 $L^p(\Omega)$ 的闭子空间. 本文的主要结果如下:

定理 1.1 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的区域. 如果 $1 < p < \infty$, 则 Bergman 空间 $A^p(\Omega)$ 满足 ABJS 基本不等式.

通过改进文献 [11, 28] 中的证明, 定理 1.1 部分回答了 Axler 等 [5] 提出的问题 1.1. 利用定理 1.1, 我们得到了 Siegel 上半空间、强拟凸域和有限型凸域上的 Bergman 空间满足 ABJS 基本不等式. 结合定理 A 以及 Toeplitz 算子的有界性与紧性, 本文证明这些区域上的正 Toeplitz 算子的本性范数是可达的.

在 $\mathbb{C}$ 中单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上, Toeplitz 算子理论在指数权 Bergman 空间与径向权调和 Bergman 空间上也有着不同程度的发展 (参见文献 [10, 12, 27]). ABJS 基本不等式与正 Toeplitz 算子的本性范数在加权 (全纯或调和) Bergman 空间上是否有类似结论? 通过综合分析定理 1.1 的证明, 我们发现单位圆盘上的指数权 Bergman 空间与径向权调和 Bergman 空间满足 ABJS 基本不等式, 且正 Toeplitz 算子的本性范数可达.

结合文献 [11] 中 Fock 空间与文献 [28] 中径向权全纯 Bergman 空间上的相关结果, 我们就加权 (全纯或调和) Bergman 空间是否满足 ABJS 基本不等式与正 Toeplitz 算子的本性范数是否可达的问题给出了一个猜想. 我们猜想, 当权函数满足一定条件时, 此问题有肯定答案.

本文共分 6 节, 余下内容的结构安排如下. 第 2 节介绍研究 Bergman 空间满足 ABJS 基本不等式的预备知识. 第 3 节给出定理 1.1 的证明. 第 4 节将定理 1.1 应用到 $\mathbb{C}^n$ 中 Siegel 上半空间、强拟凸域和有限型凸域上的 Bergman 空间与正 Toeplitz 算子的本性范数方面. 第 5 节将此问题拓展到单位圆盘上的指数权 Bergman 空间与径向权调和 Bergman 空间情形. 最后一节, 就一般的 (全纯或调和) 加权 Bergman 空间上的 ABJS 基本不等式与正 Toeplitz 算子的本性范数问题提出了一个猜想.

2 预备知识

本节给出相关预备知识.

引理 2.1 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是区域, 在 Bergman 空间 $A^p(\Omega)$ 上, 下述两条结论成立.

- (i) 对任意固定的 $z \in \Omega$, 点赋值泛函 $\Lambda_z : z \mapsto f(z)$ 是 $A^p(\Omega)$ 上的有界线性泛函.
- (ii) 如果 $\{f_m\}$ 是 $A^p(\Omega)$ 上的函数列, 满足 $\|f_m\|_p < +\infty$, 则 $\{f_m\}$ 是正规族.

证明 对任意固定的 $z \in \Omega$, 存在一个整数 $r > 0$ 满足 $\overline{B(z, r)} \subset \Omega$, 其中 $B(z, r)$ 表示以 z 为中心、以 r 为半径的 Euclid 度量球. 根据次调和函数的性质, 对任意的 $f \in A^p(\Omega)$, 有

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{v(D(z, r))} \int_{D(z, r)} |f(z)|^p dv \leq \frac{\|f\|_p^p}{v(D(z, r))}. \quad (2.1)$$

根据 (2.1), 可得 (i) 成立. 再结合 Montel 定理, 可知 (ii) 成立. $\square$

引理 2.2 设 $1 < p < \infty$. 则在 $A^p(\Omega)$ 上, $f_m \xrightarrow{\text{弱收敛}} 0$ 当且仅当 $\{f_m\}$ 是 $A^p(\Omega)$ 上的有界序列且在 Ω 上内闭一致收敛于 0.

证明 首先证充分性. 设 $\{f_m\}$ 是 $A^p(\Omega)$ 上的有界序列且在 Ω 上内闭一致收敛于 0. 任取 $\Phi \in (A^p(\Omega))^*$, 通过 Hahn-Banach 定理, 可知存在 $\hat{\Phi} \in (L^p(\Omega))^*$ 满足 $\hat{\Phi}|_{A^p(\Omega)} = \Phi$; 根据 Riesz 表示定理, 可知存在 $g \in L^q(\Omega)$ 满足

$$\Phi(f) = \hat{\Phi}|_{A^p(\Omega)} = \int_{\Omega} f \bar{g} dv, \quad f \in A^p(\Omega),$$

这里 q 是 p 的共轭指标. 为方便起见, 记

$$\Phi_g(f) := \int_{\Omega} f \bar{g} dv, \quad f \in A^p(\Omega).$$

用 $C_c(\Omega)$ 表示 Ω 上具有紧支集的连续函数的全体, 对所有的 $g \in C_c(\Omega)$, 有

$$|\Phi_g(f_m)| = \left| \int_{\Omega} f_m \bar{g} dv \right| \leq \int_{\text{supp} g} |f_m \bar{g}| dv \leq \left(\int_{\text{supp} g} |f_m|^p dv \right)^{\frac{1}{p}} \|g\|_q.$$

因为 $\{f_m\}$ 在 Ω 上内闭一致收敛于 0, 所以 $\Phi_g(f_m) \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) 对所有的 $g \in C_c(\Omega)$ 成立. 因为 $C_c(\Omega)$ 在 $L^q(\Omega)$ 中稠 (参见文献 [20, 定理 3.14]), 所以当 $g \in L^q(\Omega)$ 时, 存在 $g_k \in C_c(\Omega)$, 有 $\|g_k - g\|_q \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). 注意到 $\{f_m\}$ 是 $A^p(\Omega)$ 上的有界序列, 结合 Hölder 不等式, 可知

$$\Phi_g(f_m) = \Phi_{g-g_k}(f_m) + \Phi_{g_k}(f_m) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

成立. 这说明了在 $A^p(\Omega)$ 上, $f_m \xrightarrow{\text{弱收敛}} 0$.

接下来证明必要性. 注意到 $1 < p < \infty$. Bergman 空间 $A^p(\Omega)$ 是 Banach 空间. 因为 $f_m \xrightarrow{\text{弱收敛}} 0$, 根据共鸣定理, 可知 $\{f_m\}$ 是 $A^p(\Omega)$ 上的有界序列. 结合引理 2.1(ii), 可知 $\{f_m\}$ 是 $A^p(\Omega)$ 上的正规族. 再利用引理 2.1(i), 可知 $f_m(z) = \langle f_m, \Lambda_z \rangle \rightarrow 0$ (当 $m \rightarrow \infty$ 时). 因此, 利用正规族性质得到序列 $\{f_m\}$ 在 Ω 上内闭一致收敛于 0. 证毕. $\square$

引理 2.3 设 $1 < p < \infty$. 则 $A^p(\Omega)$ 的单位闭球是弱紧的, 进而 $A^p(\Omega)$ 是自反的.

证明 设 $A^p(\Omega)$ 的单位闭球为

$$\overline{B}_{A^p(\Omega)} := \{f \in A^p(\Omega) : \|f\|_p \leq 1\}.$$

因为 $\overline{B}_{A^p(\Omega)}$ 是闭凸集, 所以 $\overline{B}_{A^p(\Omega)}$ 是弱闭的. 任取 $\{g_m\} \subset \overline{B}_{A^p(\Omega)}$, 由引理 2.1(ii) 知, $\{g_m\}$ 是正规族. 于是, 在 Ω 上存在内闭一致收敛的子序列 $\{g_{m_j}\}$. 设该收敛子列的极限为 g , 则 g 是 Ω 上的全纯函数. 根据 Fatou 引理, 可得

$$\int_{\Omega} |g(z)|^p dv(z) = \int_{\Omega} \lim_{j \rightarrow \infty} |g_{m_j}(z)|^p dv(z) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |g_{m_j}|^p dv(z) \leq \sup_{m_j} \|g_{m_j}\|_p^p \leq 1.$$

从而 $g \in \overline{B}_{A^p(\Omega)}$. 结合引理 2.2, 可知在 $A^p(\Omega)$ 上, $g_{m_j} \xrightarrow{\text{弱收敛}} g$. 注意到, 当 $1 < p < \infty$ 时, $A^p(\Omega)$ 是 Banach 空间; 根据 Eberlein-Smulian 定理 (参见文献 [7, 第 167 页]), 可知 Bergman 空间 $A^p(\Omega)$ 的闭单位球是弱紧的. 结合 Kakutani 定理 (参见文献 [7, 第 135 页, 定理 4.2]), 可知 Bergman 空间 $A^p(\Omega)$ 是自反的. $\square$

引理 2.4 设 X 是 Banach 空间, $\{T_m\} \subset \mathcal{L}(Y)$. 我们有如下的结论.

(i) 如果在 Y 上 $T_m \xrightarrow{\text{SOT}} 0$, $K \in \mathcal{K}(X \rightarrow Y)$, 则 $\|T_m K\|_{X \rightarrow Y} \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$).

(ii) 如果在 Y^* 上 $T_m^* \xrightarrow{\text{SOT}} 0$, $K \in \mathcal{K}(Y \rightarrow X)$, 则 $\|K T_m\|_{Y \rightarrow X} \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$).

证明 只需要证明 (i), 结合对偶性 $\|K T_m\|_{Y \rightarrow X} = \|T_m^* K^*\|_{X^* \rightarrow Y^*}$ 即得 (i) $\Rightarrow$ (ii). 因为 $T_m \xrightarrow{\text{SOT}} 0$, 所以由共鸣定理知, 存在正常数 c_0 满足

$$\|T_m\| \leq c_0. \quad (2.3)$$

注意到 $K \in \mathcal{K}(X)$, 从而 $\overline{\{Kg : \|g\|_X \leq 1\}}$ 是 Y 中的紧集. 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\{Kg : \|g\|_X \leq 1\}$ 的一个有限 $\epsilon/2c_0$ 网, 不妨设 $\{h_1, \dots, h_M\} \in Y$. 对任意满足 $\|g\|_X \leq 1$ 的 g , 存在 $j_0 \in \{1, 2, \dots, M\}$ 满足

$$\|Kg - h_{j_0}\|_Y < \epsilon/2c_0.$$

另外, 注意到 $T_m \xrightarrow{\text{SOT}} 0$, 则对上述 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^+$, 当 $m > N$ 时, 对任意的 $j = 1, \dots, M$, 有

$$\|T_m h_j\|_Y < \epsilon/2.$$

因此, 结合 (2.3), 当 $m > N$ 时, 对任意满足 $\|g\|_X \leq 1$ 的 g , 有

$$\begin{aligned} \|T_m Kg\|_Y &\leq \|T_m(Kg - h_{j_0})\|_Y + \|T_m h_{j_0}\|_Y \\ &\leq \|T_m\| \|Kg - h_{j_0}\|_Y + \|T_m h_{j_0}\|_Y \\ &\leq \|T_m\| \epsilon/2c_0 + \epsilon/2 \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

这说明 $\sup_{\|g\|_X \leq 1} \|T_m Kg\|_Y \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$). 于是, $\|T_m K\|_{X \rightarrow Y} \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$). 证毕. $\square$

设 $E \subseteq \Omega$, 定义 $L^p(\Omega)$ 上的线性算子 M_E 为

$$M_E(f)(z) := \chi_E(z)f(z),$$

这里 $\chi_E(z)$ 表示 E 上的特征函数.

引理 2.5 设 $1 < p < \infty$, $Q \subseteq \Omega$ 是紧子集. 则算子 $M_Q : A^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ 是紧算子.

证明 一方面, 根据引理 2.3 知, 当 $1 < p < \infty$ 时, $A^p(\Omega)$ 是自反空间. 另一方面, 在 $A^p(\Omega)$ 上, 任取函数列 $\{f_m\}$ 满足 $f_m \xrightarrow{\text{弱收敛}} 0$ ($m \rightarrow \infty$). 结合引理 2.2 知, 函数列 $\{f_m\}$ 是 $A^p(\Omega)$ 上的有界序列且满足在 Ω 上内闭一致收敛于 0. 于是得到 $\lim_{m \rightarrow \infty} \|M_Q f_m\|_p = 0$. 由文献 [7, 第 177 页, 命题 3.3] 知, $M_Q : A^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ 是紧算子. $\square$

引理 2.6 (参见文献 [22, 引理 4.6.4]) 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的开集. 则必存在一列子集 $\Omega_j \subset \Omega$, 满足下列条件:

- (i) Ω_j 是紧的, $j = 1, 2, \dots$;
- (ii) $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j = \Omega$;
- (iii) $\Omega_j \subset \text{inn}\Omega_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots$, 其中 $\text{inn}\Omega_{j+1}$ 表示 Ω_{j+1} 的内部.

称满足上述 (i)–(iii) 三条的子集序列 $\{\Omega_j\}$ 为 Ω 的一个正规穷竭.

引理 2.7 设 $1 < p < \infty$, $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 Ω 的一个正规穷竭且 $E_j = \Omega \setminus \Omega_j$. 则在 $L^p(\Omega)$ 上,

$$M_{E_j} \xrightarrow{\text{SOT}} 0.$$

证明 只需要证明对任意的 $f \in L^p(\Omega)$ 有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{E_j} |f(z)|^p dv(z) \rightarrow 0.$$

如果 $v(\Omega) = +\infty$, 则根据无穷积分的定义即得. 如果 $v(\Omega) < +\infty$, 则根据积分的绝对连续性即得. $\square$

引理 2.8 设 $T \in \mathcal{L}(A^p(\Omega))$, 则

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \|M_{E_j} T\|_{A^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)} \leq \|T\|_e. \quad (2.4)$$

证明 任取 $K \in \mathcal{K}(A^p(\Omega))$, 于是

$$\begin{aligned} \|T - K\|_{A^p(\Omega) \rightarrow A^p(\Omega)} &\geq \|M_{E_j}(T - K)\|_{A^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)} \\ &\geq \|M_{E_j} T\|_{A^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)} - \|M_{E_j} K\|_{A^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

由引理 2.7 知, $M_{E_j} \xrightarrow{\text{SOT}} 0$. 结合引理 2.4 知, $\|M_{E_j} K\|_{A^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$). 在 (2.5) 两边令 $j \rightarrow \infty$, 然后对 $K \in \mathcal{K}(A^p(\Omega))$ 取下确界, 即得 (2.4). $\square$

3 定理 1.1 的证明

任取 $T \in \mathcal{L}(A^p(\Omega))$ 与序列 $\{A_m\} \subset \mathcal{L}(A^p(\Omega))$, 其中序列 $\{A_m\}$ 满足

$$A_m \xrightarrow{\text{SOT}} 0, \quad A_m^* \xrightarrow{\text{SOT}} 0.$$

令

$$\alpha_m = \max\{\|T\|_{A^p(\Omega) \rightarrow A^p(\Omega)}, \|T\|_e + \|A_m\|_{A^p(\Omega) \rightarrow A^p(\Omega)}\}, \quad (3.1)$$

因为 $A_m \xrightarrow{\text{SOT}} 0$, 所以根据共鸣定理知, 存在一个正常数 c_0 (参见 (2.3)), 对所有的 $m \in \mathbb{N}^+$, 满足

$$0 \leq \alpha_m \leq \|T\|_{A^p(\Omega) \rightarrow A^p(\Omega)} + \|T\|_e + c_0 < \infty. \quad (3.2)$$

下面用反证法证明定理 1.1. 假设 Bergman 空间 $A^p(\Omega)$ 不满足基本不等式, 则根据定义 1.1, 可知存在 $\epsilon_0 > 0$, 对任意的 $m \in \mathbb{N}^+$, 存在 $f_m \in A^p(\Omega)$ ($\|f_m\|_p = 1$), 有

$$\|(T + A_m)f_m\|_p > \epsilon_0 + \alpha_m \quad (3.3)$$

成立. 对上述 $\epsilon_0 > 0$, 取 $\delta > 0$, 对任意的 $m \in \mathbb{N}^+$, 满足

$$(\alpha_m + \delta)[(1 + 2\delta)^p + 2\delta^p]^{1/p} + 4\delta < \epsilon_0 + \alpha_m. \quad (3.4)$$

根据引理 2.3, 可知 Bergman 空间 $A^p(\Omega)$ 的闭单位球 $\overline{B}_{A^p(\Omega)}$ 是弱紧的. 因此 $\{f_m\}$ 存在一个弱收敛的子序列. 为叙述方便, 假定 $f_m \xrightarrow{\text{弱收敛}} f \in \overline{B}_{A^p(\Omega)}$. 令 $h_m = f_m - f$, 于是 $h_m \xrightarrow{\text{弱收敛}} 0$ ($m \rightarrow \infty$). 任取区域 Ω 的一个正规穷竭 $\{\Omega_j\}_{j=1}^\infty$, 令 $E_j = \Omega \setminus \Omega_j$, 则对任意的 $j, m \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$\begin{aligned} (T + A_m)f_m &= (M_{\Omega_j} + M_{E_j})(T + A_m)(h_m + f) \\ &= M_{\Omega_j} T h_m + M_{\Omega_j} A_m h_m + A_m f + M_{E_j} T f \\ &\quad + M_{\Omega_j} T f + M_{E_j}(T + A_m)h_m. \end{aligned}$$

于是,

$$\|(T + A_m)f_m\|_p \leq I + II,$$

其中

$$\begin{aligned} I &:= \|M_{\Omega_j}Th_m\|_p + \|M_{\Omega_j}A_mh_m\|_p + \|A_mf\|_p + \|M_{E_j}Tf\|_p, \\ II &:= \|M_{\Omega_j}Tf + M_{E_j}(T + A_m)h_m\|_p. \end{aligned}$$

由引理 2.7 和 2.8 知, 对 (3.4) 中的 $\delta > 0$, 存在 $j_0 \in \mathbb{N}^+$, 当 $j > j_0$ 时, 有

$$\|M_{E_j}f\|_p < \delta, \quad \|M_{E_j}Tf\|_p \leq \delta, \quad \|M_{E_j}T\|_{A^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)} \leq \|T\|_e + \delta. \quad (3.5)$$

首先, 根据引理 2.5, 可知 $M_{\Omega_j} \in \mathcal{K}(A^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega))$. 注意到 $T \in \mathcal{L}(A^p(\Omega))$, 所以 $M_{\Omega_j}T \in \mathcal{K}(A^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega))$. 结合 $h_m \xrightarrow{\text{弱收敛}} 0$ ($m \rightarrow \infty$), 根据文献 [7, 第 177 页, 命题 3.3], 可知

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|M_{\Omega_j}Th_m\|_p = 0.$$

因此, 对上述 $\delta > 0$, 当 m 充分大时, 有

$$\|M_{\Omega_j}Th_m\|_p < \delta.$$

因为 $A_m \xrightarrow{\text{SOT}} 0$, 所以对上述 $\delta > 0$, 当 m 充分大时, 有

$$\|A_mf\|_p \leq \delta.$$

根据引理 2.5 和 2.4(ii), 对上述 $\delta > 0$, 当 m 充分大时, 有

$$\|M_{\Omega_j}A_mh_m\|_p \leq \|M_{\Omega_j}A_m\|_{A^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)} \|h_m\|_p \leq \delta.$$

结合 (3.5) 中的 $\|M_{E_j}Tf\|_p \leq \delta$, 可得对上述 $\delta > 0$, 当 $j > j_0$, m 充分大时, 成立

$$I < 4\delta. \quad (3.6)$$

其次, 因为 $M_{\Omega_j}Tf, M_{E_j}(T + A_m)h_m \in L^p(\Omega)$ 与 $\Omega_j \cap E_j = \emptyset$, 所以

$$II^p = \|M_{\Omega_j}Tf + M_{E_j}(T + A_m)h_m\|_p^p = \|M_{\Omega_j}Tf\|_p^p + \|M_{E_j}(T + A_m)h_m\|_p^p. \quad (3.7)$$

一方面, 结合 (3.1), 有

$$\|M_{\Omega_j}Tf\|_p^p \leq \|T\|^p \|f\|_p^p \leq \alpha_m^p \|f\|_p^p. \quad (3.8)$$

另一方面, 利用 (3.5), (2.3) 和 (3.2), 有

$$\begin{aligned} \|M_{E_j}(T + A_m)h_m\|_p^p &\leq (\|M_{E_j}T\| + \|A_m\|)^p \|h_m\|_p^p \\ &\leq (\|T\|_e + \delta + \|A_m\|)^p \|h_m\|_p^p \\ &\leq (\alpha_m + \delta)^p \|h_m\|_p^p. \end{aligned} \quad (3.9)$$

将 (3.8) 和 (3.9) 代入 (3.7), 可得

$$II^p \leq (\alpha_m + \delta)^p (\|f\|_p^p + \|h_m\|_p^p). \quad (3.10)$$

因为 $h_m \xrightarrow{\text{弱收敛}} 0$ ($m \rightarrow \infty$), 所以由引理 2.5 可知, 对上述 $\delta > 0$, 当 $j > j_0$, m 充分大时, 有 $\|M_{\Omega_j} h_m\|_p < \delta$. 结合 (3.5), 有

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p + \|h_m\|_p^p &= \|M_{\Omega_j} f\|_p^p + \|M_{E_j} f\|_p^p + \|M_{\Omega_j} h_m\|_p^p + \|M_{E_j} h_m\|_p^p \\ &\leq \|M_{\Omega_j} f\|_p^p + \|M_{E_j} h_m\|_p^p + 2\delta^p \\ &= \|M_{\Omega_j} f + M_{E_j} h_m\|_p^p + 2\delta^p \\ &= \|f - M_{E_j} f + h_m - M_{\Omega_j} h_m\|_p^p + 2\delta^p \\ &\leq (\|f_m\|_p + \|M_{E_j} f\|_p + \|M_{\Omega_j} h_m\|_p)^p + 2\delta^p \\ &\leq (1 + 2\delta)^p + 2\delta^p. \end{aligned}$$

将此式代入 (3.10) 即得: 对上述 $\delta > 0$, 当 $j > j_0$, m 充分大时, 成立

$$II \leq (\alpha_m + \delta)[(1 + 2\delta)^p + 2\delta^p]^{1/p}. \quad (3.11)$$

因此, 根据 (3.6) 和 (3.11), 对充分大的 $m \in \mathbb{N}^+$, 有

$$\|(T + A_m)f_m\|_p \leq (\alpha_m + \delta)[(1 + 2\delta)^p + 2\delta^p]^{1/p} + 4\delta \quad (3.12)$$

成立.

结合 (3.4), 得 (3.12) 与 (3.3) 矛盾. 定理 1.1 证毕.

4 定理 1.1 的应用

本节应用定理 1.1, 证明 Siegel 上半空间、强拟凸域和有限型凸域情形的 Bergman 空间满足 ABJS 基本不等式, 并讨论正 Toeplitz 算子的本性范数是否可达的问题.

4.1 Siegel 上半空间

用符号 $z = (z', z_n) \in \mathbb{C}^n$, 其中 $z' = (z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$, $z_n \in \mathbb{C}^1$. 集合

$$\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Im} z_n > |z'|^2\}$$

表示 $\mathbb{C}^n$ 中的 Siegel 上半空间. 设 $r > 0$, 则 Siegel 上半空间上以 z 为中心、以 r 为半径的 Bergman 圆盘 $D_{\mathcal{U}}(z, r)$ 定义为

$$D_{\mathcal{U}}(z, r) := \{w \in \mathcal{U} : \beta(z, w) < r\}, \quad (4.1)$$

其中 $\beta(z, w)$ 表示 Siegel 上半空间上的 Bergman 度量, 即

$$\beta(z, w) = \tanh^{-1} \sqrt{1 - \frac{\rho(z)\rho(w)}{|\rho(z, w)|^2}},$$

这里

$$\rho(z, w) := \frac{i}{2}(\bar{w}_n - z_n) - z' \cdot \bar{w}', \quad \rho(z) := \rho(z, z) = \operatorname{Im} z_n - |z'|^2.$$

设 v 表示 Siegel 上半空间上的 Lebesgue 测度. Siegel 上半空间上的 $L^p(\mathcal{U})$ 中函数的范数如 (1.1) 定义. Bergman 空间 $A^p(\mathcal{U}) := L^p(\mathcal{U}) \cap H(\mathcal{U})$. Siegel 上半空间上的 Bergman 投影算子 $P_{\mathcal{U}}$ 与 Bergman 型投影算子 $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ 分别定义为

$$P_{\mathcal{U}}f(z) = \int_{\Omega} K_{\mathcal{U}}(z, w)f(w)dv(w), \quad (4.2)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{U}}f(z) = \int_{\mathcal{U}} |K_{\mathcal{U}}(z, w)|f(w)dv(w), \quad (4.3)$$

这里 $K_{\mathcal{U}}(z, w)$ 表示 Siegel 上半空间上的 Bergman 核函数. 集合 $\mathcal{M}_+$ 表示 Siegel 上半空间上满足如下条件的正 Borel 测度 μ 的集合: 存在 $\alpha > 0$, 满足

$$\int_{\mathcal{U}} \frac{d\mu(z)}{|z_n + i|^\alpha} < \infty.$$

给定 $\mu \in \mathcal{M}_+$, 正 Toeplitz 算子 T_μ 定义为

$$T_\mu^{\mathcal{U}}f(z) = \int_{\mathcal{U}} K(z, w)f(w)d\mu(w), \quad f \in A^p(\mathcal{U}). \quad (4.4)$$

由文献 [15, 第 4 节] 知, Toeplitz 算子 T_μ 在 Bergman 空间 $A^p(\mathcal{U})$ 上是稠定义的. 在 Siegel 上半空间 $\mathcal{U}$ 上, Bergman 球 $D_{\mathcal{U}}(z, r)$ 上的平均测度定义为

$$\hat{\mu}_r(z) := \frac{\mu(D_{\mathcal{U}}(z, r))}{v(D_{\mathcal{U}}(z, r))}. \quad (4.5)$$

引理 4.1 在 Siegel 上半空间上有如下的结论成立.

- (1) 对任意的 $r > 0$, 存在序列 $\{a_k\} \subset \mathcal{U}$ 满足
 - (i) $\mathcal{U} = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{\mathcal{U}}(a_k, r)$;
 - (ii) 存在正整数 N 使得 Ω 中的任意点 z 属于至多 N 个集合 $D_{\mathcal{U}}(a_k, 2r)$;
 - (iii) 对任意的 $\zeta \in D_{\mathcal{U}}(z, r)$, 有 $v(D_{\mathcal{U}}(z, r)) \asymp v(D_{\mathcal{U}}(\zeta, r))$.
- (2) 设 $r > 0$, $0 < p < \infty$, 则存在正常数 C (仅依赖于 r), 对任意 $f \in H(\mathcal{U})$ 有

$$|f(z)|^p \leq \frac{C}{v(D_{\mathcal{U}}(z, r))} \int_{D_{\mathcal{U}}(z, r)} |f(w)|^p dv(w).$$

- (3) 设 $1 < p < \infty$, 则
 - (i) $P_{\mathcal{U}}, \mathcal{P}_{\mathcal{U}} \in \mathcal{L}(L^p(\mathcal{U}))$;
 - (ii) 在 $\langle f, g \rangle_{\mathcal{U}} = \int_{\mathcal{U}} f(z)\overline{g(z)}dv(z)$ 意义下,

$$A^p(\mathcal{U})^* = A^q(\mathcal{U}),$$

这里 $A^p(\mathcal{U})^*$ 表示 Bergman 空间 $A^p(\mathcal{U})$ 的对偶空间.

- (4) 设 $r > 0$, $1 < p < \infty$, $\mu \in \mathcal{M}_+$, 则
 - (i) $T_\mu^{\mathcal{U}} \in \mathcal{L}(A^p(\mathcal{U}))$ 当且仅当存在 $r > 0$ (或对任意的 $r > 0$) 有 $\hat{\mu}_r(z) \in L^\infty(\Omega)$;
 - (ii) $T_\mu^{\mathcal{U}} \in \mathcal{K}(A^p(\mathcal{U}))$ 当且仅当存在 $r > 0$ (或对任意的 $r > 0$) 有 $\hat{\mu}_r(z) \rightarrow 0$ ($z \rightarrow \partial\widehat{\mathcal{U}}$),

这里 $\partial\widehat{\mathcal{U}} := b\mathcal{U} \cup \{\infty\}$.

- (5) 设 $r \in (0, 1/2)$, $\mu \in \mathcal{M}_+$, 则

$$\int_{\Omega \setminus D(\mathbf{i}, j+1)} |f(z)|^p d\mu(z) \leq C \int_{\Omega \setminus D(\mathbf{i}, j)} |f(z)|^p \hat{\mu}_r(z) dv(z)$$

对任意的 $f \in H(\mathcal{U})$ 成立, 其中 $\mathbf{i} := (0', \mathbf{i})$.

证明 结论 (1)–(4) 参见文献 [15, 23, 24, 29]. 只需要证明结论 (5). 根据结论 (2)、Fubini 定理和结论 (1)(iii), 可得

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega \setminus D(\mathbf{i}, j+1)} |f(z)|^p d\mu(z) &\leq C \int_{\Omega \setminus D(\mathbf{i}, j+1)} \frac{1}{v(D(z, r))} \int_{D(z, r)} |f(\zeta)|^p dv(\zeta) d\mu(z) \\
 &= C \int_{\Omega \setminus D(\mathbf{i}, j+1)} \frac{1}{v(D(z, r))} d\mu(z) \int_{\Omega} |f(\zeta)|^p \chi_{D(z, r)}(\zeta) dv(\zeta) \\
 &\leq C \int_{\Omega \setminus D(\mathbf{i}, j)} \frac{|f(\zeta)|^p}{v(D(\zeta, r))} dv(\zeta) \int_{\Omega} \chi_{D(\zeta, r)}(z) d\mu(z) \\
 &\leq \int_{\Omega \setminus D(\mathbf{i}, j)} |f(z)|^p \widehat{\mu}_r(z) dv(z).
 \end{aligned}$$

证毕. $\square$

定理 4.1 设 $\mathcal{U}$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 中的 Siegel 上半空间, $1 < p < \infty$, $\mu \in \mathcal{M}_+$ 且 $T_\mu^\mathcal{U} \in \mathcal{L}(A^p(\mathcal{U})) \setminus \mathcal{K}(A^p(\mathcal{U}))$, 那么

- (1) Bergman 空间 $A^p(\mathcal{U})$ 满足 ABJS 基本不等式;
- (2) 在 $A^p(\mathcal{U})$ 上存在无穷多个不同的 $T_\phi^\mathcal{U} \in \mathcal{K}(A^p(\mathcal{U}))$ 满足

$$\|T_\mu^\mathcal{U} - T_\phi^\mathcal{U}\|_{A^p(\mathcal{U}) \rightarrow A^p(\mathcal{U})} = \|T_\mu^\mathcal{U}\|_e.$$

证明 结论 (1) 通过定理 1.1 即得.

接下来给出结论 (2) 的证明. 选取 $\mathcal{U}$ 的一个正规穷竭 $\{\Omega_j\}_{j=1}^\infty := \{D(\mathbf{i}, j)\}_{j=1}^\infty$. 对任意的 $j \in \mathbb{N}$, 定义 $\mu_j(E) := \mu(E \cap \Omega_j)$. 对任意固定的 $r \in (0, 1/2)$ 和任意的 $z \in \Omega \setminus \Omega_{j+1}$, 有

$$\mu_j(D_{\mathcal{U}}(z, r)) = 0,$$

由引理 4.1(4)(ii) 知 $T_{\mu_j}^\mathcal{U} \in \mathcal{K}(A^p(\mathcal{U}))$.

下面证明 $T_{\mu_j}^\mathcal{U} \rightarrow T_\mu^\mathcal{U}(\text{SOT})$ 和 $(T_{\mu_j}^\mathcal{U})^* \rightarrow (T_\mu^\mathcal{U})^*(\text{SOT})$. 对任意的 $f \in A^p(\mathcal{U})$, 根据引理 4.1(5), (4)(i) 和 (3)(i), 可得

$$\begin{aligned}
 \|(T_{\mu_j}^\mathcal{U} - T_\mu^\mathcal{U})f\|_p &\leq \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega \setminus \Omega_j} |K_{\mathcal{U}}(z, w) f(w)| d\mu(w) \right)^p dv(z) \\
 &\leq \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega \setminus \Omega_{j-1}} |K_{\mathcal{U}}(z, w) f(w)| \widehat{\mu}_r(w) dv(w) \right)^p dv(z) \\
 &\leq \|\widehat{\mu}_r\|_\infty^p \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |K_{\mathcal{U}}(z, w) f(w)| \chi_{\Omega \setminus \Omega_{j-1}}(w) dv(w) \right)^p dv(z) \\
 &\leq \|\widehat{\mu}_r\|_\infty^p \|\mathcal{P}_{\mathcal{U}}(f \chi_{\Omega \setminus \Omega_{j-1}})\|_p \\
 &\leq \|\widehat{\mu}_r\|_\infty^p \int_{\Omega \setminus \Omega_{j-1}} |f(z)|^p dv(z) \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

这说明

$$T_{\mu_j}^\mathcal{U} \xrightarrow{\text{SOT}} T_\mu^\mathcal{U}.$$

结合引理 4.1(3)(ii), 类似可得

$$(T_{\mu_j}^{\mathcal{U}})^* \xrightarrow{\text{SOT}} (T_{\mu}^{\mathcal{U}})^*.$$

根据定理 A, 可知存在两列互不相同序列 $\{a_j\}$ 和 $\{b_j\}$ 满足

$$\sum a_j = \sum b_j = 1,$$

因为

$$T_{\mu_j}^{\mathcal{U}} \xrightarrow{\text{SOT}} T_{\mu}^{\mathcal{U}}$$

与

$$(T_{\mu_j}^{\mathcal{U}})^* \xrightarrow{\text{SOT}} (T_{\mu}^{\mathcal{U}})^*,$$

结合共鸣定理, 可知 $\{\|T_{\mu_j}^{\mathcal{U}}\|\}$ 是有界的, 故

$$\sum_{j=k}^{\infty} a_j \|T_{\mu_j}^{\mathcal{U}}\| \leq C \sum_{j=k}^{\infty} a_j \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

于是 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j T_{\mu_j}^{\mathcal{U}}$ 与 $\sum_{j=1}^{\infty} b_j T_{\mu_j}^{\mathcal{U}}$ 以算子范数分别收敛于 $T_{\phi_1}^{\mathcal{U}}$ 与 $T_{\phi_2}^{\mathcal{U}}$, 且 $T_{\phi_1}^{\mathcal{U}}, T_{\phi_2}^{\mathcal{U}} \in \mathcal{K}(A^p(\mathcal{U}))$, $T_{\phi_1}^{\mathcal{U}} \neq T_{\phi_2}^{\mathcal{U}}$, 其中 $\phi_1 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \mu_j$, $\phi_2 = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \mu_j$. 对于 $s \in [0, 1]$, 定义 $T_{\phi}^{\mathcal{U}} = sT_{\phi_1}^{\mathcal{U}} + (1-s)T_{\phi_2}^{\mathcal{U}}$. 于是, 得到了无限多个 Toeplitz 算子 $T_{\phi}^{\mathcal{U}}$ 满足

$$\|T_{\mu}^{\mathcal{U}} - T_{\phi}^{\mathcal{U}}\|_{A^p(\mathcal{U}) \rightarrow A^p(\mathcal{U})} = \|T_{\mu}^{\mathcal{U}}\|_e.$$

证毕. □

4.2 有界强拟凸域或有限型凸域上的正 Toeplitz 算子

本小节首先选取 Ω 为 $\mathbb{C}^n$ 中的有界光滑强拟凸域. 设 $r > 0$, 则以 z 为中心、以 r 为半径的 Kobayashi 球定义为

$$D_{\Omega}(z, r) := \{w \in \Omega : \beta(z, w) < r\},$$

其中 $\beta(z, w)$ 表示有界光滑强拟凸域 Ω 上的 Kobayashi 度量.

设 v 表示有界光滑强拟凸域 Ω 上的 Lebesgue 测度, μ 表示 Ω 上的一个正 Borel 测度. 设 $0 < p < \infty$, 有界强拟凸域上 $L^p(\Omega)$ 中函数的范数定义如 (1.1). Bergman 空间 $A^p(\Omega) := L^p(\Omega) \cap H(\Omega)$. 符号 P_{Ω} , $\mathcal{P}_{\Omega}$, T_{μ} 和 $\mu_r(z)$ 分别表示有界光滑强拟凸域上的 Bergman 投影算子、Bergman 型投影算子、正 Toeplitz 算子和 Kobayashi 度量球 $D_{\Omega}(z, r)$ 上的平均测度, 其定义分别类似于 (4.2)–(4.5).

引理 4.2 在有界光滑强拟凸域 Ω 上有如下的结论成立.

- (1) 对任意的 $r \in (0, 1)$, 存在序列 $\{a_k\} \subset \Omega$ 满足
 - (i) $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{\Omega}(a_k, r)$;
 - (ii) 存在正整数 N 使得 Ω 中的任意点 z 属于至多 N 个集合 $D_{\Omega}(a_k, (1+r)/2)$;
 - (iii) 对任意的 $\zeta \in D_{\Omega}(z, r)$ 时, 有 $v(D_{\Omega}(z, r)) \asymp v(D_{\Omega}(\zeta, r))$.
- (2) 设 $r \in (0, 1)$, $0 < p < \infty$, 则存在正常数 C (仅依赖于 r), 对任意 $f \in H(\Omega)$ 有

$$|f(z)|^p \leq \frac{C}{v(D_{\Omega}(z, r))} \int_{D_{\Omega}(z, r)} |f(w)|^p dv(w).$$

- (3) 设 $1 < p < \infty$, 则
- (i) $P_\Omega, \mathcal{P}_\Omega \in \mathcal{L}(A^p(\Omega))$;
 - (ii) 在 $\langle f, g \rangle_\Omega = \int_\Omega f(z) \overline{g(z)} dv(z)$ 意义下, $A^p(\Omega)^* = A^q(\Omega)$.
- (4) 设 $r \in (0, 1)$, $1 < p < \infty$, μ 是 Ω 上的一个正 Borel 测度, 则
- (i) $T_\mu \in \mathcal{L}(A^p(\Omega))$ 当且仅当存在 $r \in (0, 1)$ (或对任意的 $r \in (0, 1)$) 有 $\hat{\mu}_r(z) \in L^\infty(\Omega)$;
 - (ii) $T_\mu \in \mathcal{K}(A^p(\Omega))$ 当且仅当存在 $r \in (0, 1)$ (或对任意的 $r \in (0, 1)$) 有 $\hat{\mu}_r(z) \rightarrow 0$ ($z \rightarrow \partial D$).
- (5) 设 $r \in (0, 1)$, $\{\Omega_j\}_{j=1}^\infty$ 是 Ω 的一个正规穷竭且对任意的 $j \in \mathbb{N}$ 满足

$$\{(z, \zeta) : z \in \Omega \setminus \Omega_{j+1}, \zeta \in D_\Omega(z, r)\} \subset \{(z, \zeta) : \zeta \in \Omega \setminus \Omega_j, z \in D_\Omega(\zeta, r)\}, \quad (4.6)$$

则对所有 $f \in H(\Omega)$ 和 $j \in \mathbb{N}$ 有

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_{j+1}} |f(z)|^p d\mu(z) \leq C \int_{\Omega \setminus \Omega_j} |f(z)|^p \hat{\mu}_r(z) dv(z).$$

证明 结论 (1)–(4) 参见文献 [1–3, 8, 13]. 结论 (5) 的证明类似于引理 4.1 的结论 (5). $\square$

基于引理 4.2 中有界光滑强拟凸域 Ω 上的结论, 结合定理 1.1 和 A, 类似于定理 4.1 的证明, 强拟凸域上正 Toeplitz 算子的本性范数的结果如下.

定理 4.2 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界光滑强拟凸域, $1 < p < \infty$, μ 是 Ω 上的一个正 Borel 测度且 $T_\mu^\Omega \in \mathcal{L}(A^p(\Omega)) \setminus \mathcal{K}(A^p(\Omega))$, 则

- (1) Bergman 空间 $A^p(\Omega)$ 满足 ABJS 基本不等式;
- (2) 在 $A^p(\Omega)$ 上存在无穷多个不同的 $T_\phi^\Omega \in \mathcal{K}(A^p(\Omega))$ 满足

$$\|T_\mu^\Omega - T_\phi^\Omega\|_{A^p(\Omega) \rightarrow A^p(\Omega)} = \|T_\mu^\Omega\|_e.$$

如果 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 有界光滑有限型凸域, 则引理 4.2(1)–4.2(4) 的类似性质已在文献 [14, 25] 中进行了全面研究. 另外, 利用性质 (1) 和 (2) 可类似得到引理 4.2 中的性质 (5). 因此, 在有界光滑有限型凸域 Ω 上有如下结论.

定理 4.3 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界光滑有限型凸域, $1 < p < \infty$, μ 是 Ω 上的一个正 Borel 测度且 $T_\mu^\Omega \in \mathcal{L}(A^p(\Omega)) \setminus \mathcal{K}(A^p(\Omega))$, 则

- (1) Bergman 空间 $A^p(\Omega)$ 满足 ABJS 基本不等式;
- (2) 在 $A^p(\Omega)$ 上存在无穷多个不同的 $T_\phi^\Omega \in \mathcal{K}(A^p(\Omega))$ 满足

$$\|T_\mu^\Omega - T_\phi^\Omega\|_{A^p(\Omega) \rightarrow A^p(\Omega)} = \|T_\mu^\Omega\|_e.$$

5 定理 1.1 的拓展

本节讨论 ABJS 基本不等式与正 Toeplitz 算子的本性范数在加权 Bergman 空间的情形, 将定理 1.1 拓展到单位圆盘上的指数权 Bergman 空间与径向权调和 Bergman 空间情形, 并给出正 Toeplitz 算子的本性范数可达的肯定结论.

5.1 单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上指数权正 Toeplitz 算子

本小节讨论单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的指数权正 Toeplitz 算子的本性范数. 设 $0 < p < \infty$, φ 表示单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的次调和函数, 则指数权 Bergman 空间 $A_\varphi^p(\mathbb{D})$ 包含 $H(\mathbb{D})$ 中所有满足如下条件的函数全体:

$$\|f\|_{A_\varphi^p(\mathbb{D})} = \left\{ \int_{\mathbb{D}} |f(z)e^{-\varphi(z)}|^p dA(z) \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

其中 $dA(z) = \frac{1}{\pi} dx dy$, 表示 $\mathbb{D}$ 上的标准面积测度. 用符号 C_0 表示 $\mathbb{D}$ 上的所有满足 $\lim_{|z| \rightarrow 1} \rho(z) = 0$ 的连续函数 ρ 全体. 集合 $\mathcal{L}$ 表示

$$\mathcal{L} = \left\{ \rho : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} : \|\rho\|_{\mathcal{L}} = \sup_{z, w \in \mathbb{D}, z \neq w} \frac{|\rho(z) - \rho(w)|}{|z - w|} < \infty, \rho \in C_0 \right\}$$

集合 $\mathcal{L}_0$ 包含满足如下条件的函数全体:

- (i) $\rho \in \mathcal{L}$;
- (ii) 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在紧子集 $E \subset \mathbb{D}$, 当 $z, w \in \mathbb{D} \setminus E$ 时, 有 $|\rho(z) - \rho(w)| < \epsilon|z - w|$.

权函数类 $\mathcal{W}_0$ 定义为

$$\mathcal{W}_0 = \left\{ \varphi \in C^2 : \Delta\varphi > 0, \text{ 且 } \exists \rho \in \mathcal{L}_0 \text{ 满足 } \frac{1}{\sqrt{\Delta\varphi}} \asymp \rho \right\},$$

其中符号 Δ 表示标准的 Laplace 算子, 符号 $A \asymp B$ 表示存在不依赖函数变量的正常数 C 满足 $C^{-1}B \leq A \leq CB$. 设 $r > 0$, 则以 z 为中心、以 r 为半径的度量球定义为

$$D_{\mathbb{D}, \rho}(z, r) := \{w \in \mathbb{D} : |w - z| < r\rho(z)\}.$$

Bergman 投影和 Bergman 型投影分别定义为

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{D}, \varphi} f(z) &= \int_{\mathbb{D}} K_{\mathbb{D}, \varphi}(z, w) f(w) e^{-2\varphi(w)} dA(w), \\ \mathcal{P}_{\mathbb{D}, \varphi} f(z) &= \int_{\mathbb{D}} |K_{\mathbb{D}, \varphi}(z, w)| f(w) e^{-2\varphi(w)} dA(w). \end{aligned}$$

设 μ 是单位圆盘上给定的正 Borel 测度, 则正 Toeplitz 算子 $T_\mu^{\mathbb{D}, \varphi}$ 定义为

$$T_\mu^{\mathbb{D}, \varphi} f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_{\mathbb{D}, \varphi}(z, w) f(w) e^{-2\varphi(w)} d\mu(w), \quad f \in A_\varphi^p(\mathbb{D}).$$

设 $r > 0$, 则在度量球 $D_{\mathbb{D}, \rho}(z, r)$ 上的平均测度定义为

$$\hat{\mu}_r(z) := \frac{\mu(D_{\mathbb{D}, \rho}(z, r))}{A(D_{\mathbb{D}, \rho}(z, r))}.$$

引理 5.1 设 $\varphi \in \mathcal{W}_0$, 则在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的指数权 Bergman 空间有如下结论.

(1) 设 $\rho \in \mathcal{L}$ 且 $\rho \geq 0$, 则存在正常数 α (仅依赖于 $\|\rho\|_{\mathcal{L}}$), 对任意的 $r \in (0, \alpha]$, 存在序列 $\{a_k\} \subset \mathbb{D}$ 满足

- (i) $\mathbb{D} = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{\mathbb{D}, \rho}(a_k, r)$;
- (ii) 存在正整数 N 使得 $\mathbb{D}$ 中的任意点 z 属于至多 N 个集合 $D_{\mathbb{D}, \rho}(a_k, 2\alpha)$;
- (iii) 对任意的 $\zeta \in D_{\mathbb{D}, \rho}(z, r)$, 有 $A(D_{\mathbb{D}, \rho}(z, r)) \asymp A(D_{\mathbb{D}, \rho}(\zeta, r))$.

(2) 设 $0 < p < \infty$, 则存在正常数 α , 对任意的 $r \in (0, \alpha]$, 存在正常数 C (仅依赖于 α), 对任意的 $f \in H(\mathbb{D})$ 有

$$|f(z)e^{-\varphi(z)}|^p \leq \frac{C}{A(D_{\mathbb{D},\rho}(z, r))} \int_{D_{\mathbb{D},\rho}(z, r)} |f(w)e^{-\varphi(w)}|^p dA(w). \quad (5.1)$$

(3) 设 $1 < p < \infty$, 则

(i) $P_{\mathbb{D},\varphi}, \mathcal{P}_{\mathbb{D},\varphi} \in \mathcal{L}(L^p_{\varphi}(\mathbb{D}))$;

(ii) 在 $\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}e^{-2\varphi(z)}dA(z)$ 意义下,

$$A^p_{\varphi}(\mathbb{D})^* = A^q_{\varphi}(\mathbb{D}).$$

(4) 设 μ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的一个正 Borel 测度, α 如 (1) 中定义, 则

(i) $T_{\mu} \in \mathcal{L}(A^p_{\varphi}(\mathbb{D}))$ 当且仅当存在 $r \in (0, \alpha)$ (或对任意的 $r \in (0, \alpha)$) 有 $\hat{\mu}_r(z) \in L^{\infty}(\Omega)$;

(ii) $T_{\mu} \in \mathcal{K}(A^p_{\varphi}(\mathbb{D}))$ 当且仅当存在 $r \in (0, \alpha)$ (或对任意的 $r \in (0, \alpha)$) 有 $\hat{\mu}_r(z) \rightarrow 0$ ($|z| \rightarrow 1^-$);

(5) 设 α 如 (1) 中定义, $r \in (0, \alpha)$, $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty} := \{w \in \mathbb{D}, |w| < 1 - \frac{1}{k_j}, k_j \in \mathbb{N}\}_{j=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{D}$ 的一个正规穷竭且对任意的 $j \in \mathbb{N}$ 满足

$$\{(z, \zeta) : z \in \Omega \setminus \Omega_{j+1}, \zeta \in D_{\mathbb{D},\rho}(z, r)\} \subset \{(z, \zeta) : \zeta \in \Omega \setminus \Omega_j, z \in D_{\mathbb{D},\rho}(\zeta, r)\},$$

则对所有 $f \in H(\Omega)$ 和 $j \in \mathbb{N}$ 有

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_{j+1}} |f(z)e^{-\varphi(z)}|^p d\mu(z) \leq C \int_{\Omega \setminus \Omega_j} |f(z)e^{-\varphi(z)}|^p \hat{\mu}_r(z) dA(z).$$

证明 结论 (1)–(4) 参见文献 [12, 17, 27]. 结论 (5) 的证明类似于引理 4.1 中的结论 (5). $\square$

定理 5.1 设 $\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{C}$ 中的单位圆盘, μ 是 $\mathbb{D}$ 上的一个正 Borel 测度, $1 < p < \infty$, $\varphi \in \mathcal{W}_0$ 且 $T_{\mu}^{\mathbb{D},\varphi} \in \mathcal{L}(A^p_{\varphi}(\mathbb{D})) \setminus \mathcal{K}(A^p_{\varphi}(\mathbb{D}))$, 则

(1) Bergman 空间 $A^p_{\varphi}(\mathbb{D})$ 满足 ABJS 基本不等式;

(2) 在 $A^p_{\varphi}(\mathbb{D})$ 上存在无穷多个不同的 $T_{\phi}^{\mathbb{D},\varphi} \in \mathcal{K}(A^p_{\varphi}(\mathbb{D}))$ 满足

$$\|T_{\mu}^{\mathbb{D},\varphi} - T_{\phi}^{\mathbb{D},\varphi}\|_{A^p_{\varphi}(\Omega) \rightarrow A^p_{\varphi}(\Omega)} = \|T_{\mu}^{\mathbb{D},\varphi}\|_e.$$

证明 将引理 2.1 中的不等式 (2.1) 替换为不等式 (5.1), 类似于定理 1.1 的证明, 则得结论 (1). 结论 (2) 的证明类似于文献 [11, 定理 3.5] 的证明. $\square$

5.2 单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上径向权调和 Bergman 空间

本小节讨论 $\mathbb{C}$ 中单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的径向权调和 Bergman 空间上的 Toeplitz 算子的本性范数. 设 ω 是 $\mathbb{D}$ 上一个满足 $\omega \geq 0$ 的可积函数. 如果 $\omega(z) = \omega(|z|)$, 则称 ω 为径向权函数. 设 E 是 $\mathbb{D}$ 的一个 Lebesgue 可测集, 则

$$\omega(E) := \int_E \omega(z) dA(z).$$

如果存在一个常数 $C = C(\omega) \geq 1$, 对任意的 $r \in [0, 1)$ 满足

$$\hat{\omega}(r) \leq C\hat{\omega}\left(\frac{1+r}{2}\right),$$

则称 $\hat{\omega}$ 满足双倍 (doubling) 条件, 其中

$$\hat{\omega}(z) = \int_{|z|}^1 \omega(s) ds.$$

因此权函数类 $\hat{\mathcal{D}}$ 定义为

$$\hat{\mathcal{D}} := \{\omega : \omega \text{ 是径向权且 } \hat{\omega} \text{ 满足双倍条件}\}.$$

规范权类 $\mathcal{R}$ 定义为

$$\mathcal{R} := \left\{ \omega : w \in \hat{\mathcal{D}} \text{ 且 } \omega(r) \asymp \frac{\int_r^1 \omega(s) ds}{1-r} \quad 0 \leq r < 1 \right\}.$$

以 z 为中心、以 r 为半径的 Bergman 度量球定义为

$$D_{\mathbb{D}}(z, r) = \{w \in \mathbb{D} : \beta(z, w) < r\},$$

其中 $\beta(z, w)$ 表示单位圆盘上的双曲度量, 即

$$\beta(z, w) = \tanh^{-1} |\varphi_z(w)| = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |\varphi_z(w)|}{1 - |\varphi_z(w)|},$$

这里

$$\varphi_z(w) = \frac{z - w}{1 - \bar{z}w}.$$

单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的加权调和 Bergman 空间 $L_{h,\omega}^p(\mathbb{D})$ 包含 $\mathbb{D}$ 中所有满足

$$\|f\|_{L_{h,\omega}^p(\mathbb{D})} := \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \omega(z) dA(z) \right)^{1/p} < \infty$$

的调和函数. Bergman 投影和 Bergman 型投影分别定义为

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{D},\omega} f(z) &= \int_{\mathbb{D}} K_{\mathbb{D},\omega}(z, w) f(w) \omega(w) dA(w), \\ \mathcal{P}_{\mathbb{D},\omega} f(z) &= \int_{\mathbb{D},\mathbb{D}} |K_{\omega}(z, w)| f(w) \omega(w) dA(w), \end{aligned}$$

这里 $K_{\mathbb{D},\omega}(z, w)$ 表示单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上由加权测度 $\omega(z) dA(z)$ 诱导的加权 Bergman 函数. 设 μ 是一个正 Borel 测度, 则正 Toeplitz 算子 $T_{\mu}^{\mathbb{D},\omega}$ 定义为

$$T_{\mu}^{\mathbb{D},\omega} f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_{\mathbb{D},\omega}(z, w) f(w) \omega(w) dA(w).$$

设 μ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的一个正 Borel 测度, 则 $D_{\mathbb{D}}(z, r)$ 上的平均测度定义为

$$\hat{\mu}_r(z) := \frac{\mu(D_{\mathbb{D}}(z, r))}{\omega(D_{\mathbb{D}}(z, r))}.$$

引理 5.2 设 $\omega \in \mathcal{R}$, 则在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的径向权调和 Bergman 空间有如下结论.

(1) 对任意的 $r \in (0, 1)$, 存在序列 $\{a_k\} \subset \mathbb{D}$ 满足

(i) $\mathbb{D} = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{\mathbb{D}}(a_k, r)$;

(ii) 存在正整数 N 使得 Ω 中的任意点 z 属于至多 N 个集合 $D_{\mathbb{D}}(a_k, 4r)$;

(iii) 对任意的 $\zeta \in D(z, r)$ 时, 有 $\omega(D_{\mathbb{D}}(z, r)) \asymp \omega(D_{\mathbb{D}}(\zeta, r))$.

(2) 设 $r \in (0, 1)$, $0 < p < \infty$, 则存在正常数 C (仅依赖于 r), 对任意 $f \in L_{h,\omega}^p(\mathbb{D})$ 有

$$|f(z)|^p \leq \frac{C}{\omega(D_{\mathbb{D}}(z, r))} \int_{D_{\mathbb{D}}(z, r)} |f(w)|^p \omega(w) dA(w). \quad (5.2)$$

(3) 设 $1 < p < \infty$, 则

(i) $P_{\mathbb{D},\omega}, \mathcal{P}_{\mathbb{D},\omega} \in \mathcal{L}(L_{h,\omega}^p)$;

(ii) 在 $\langle f, g \rangle_{L_{h,\omega}^2(\mathbb{D})} = \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{g(z)} \omega(z) dA(z)$ 意义下,

$$L_{h,\omega}^p(\mathbb{D})^* = L_{h,\omega}^q(\mathbb{D}).$$

(4) 设 μ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的一个正 Borel 测度, 则

(i) $T_{\mu} \in \mathcal{L}(L_{h,\omega}^p(\mathbb{D}))$ 当且仅当存在 $r \in (0, 1)$ (或对任意的 $r \in (0, 1)$) 有 $\hat{\mu}_r(z) \in L^\infty(\Omega)$.

(ii) $T_{\mu} \in \mathcal{K}(L_{h,\omega}^p(\mathbb{D}))$ 当且仅当存在 $r \in (0, 1)$ (或对任意的 $r \in (0, 1)$) 有 $\hat{\mu}_r(z) \rightarrow 0$ ($|z| \rightarrow 1^-$).

(5) 设 $r \in (0, 1/2)$, 则

$$\int_{\mathbb{D} \setminus D(0, j+1)} |f(z)|^p d\mu(z) \leq C \int_{\mathbb{D} \setminus D(0, j)} |f(z)|^p \hat{\mu}_r(z) \omega(z) dA(z)$$

对任意的 $f \in L_{h,\omega}^p(\mathbb{D})$ 成立.

证明 结论 (1)–(4) 参见文献 [10, 19]. 结论 (5) 的证明类似于引理 4.1 中的结论 (5). $\square$

定理 5.2 设 $\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{C}$ 中的单位圆盘, μ 是 $\mathbb{D}$ 上的一个正 Borel 测度, $1 < p < \infty$, $\omega \in \mathcal{R}$ 且 $T_{\mu}^{\mathbb{D},\omega} \in \mathcal{L}(L_{h,\omega}^p(\mathbb{D})) \setminus \mathcal{K}(L_{h,\omega}^p(\mathbb{D}))$, 则

(1) 调和 Bergman 空间 $L_{h,\omega}^p(\mathbb{D})$ 满足 ABJS 基本不等式;

(2) 在 $L_{h,\omega}^p(\mathbb{D})$ 上存在无穷多个不同的 $T_{\phi} \in \mathcal{K}(L_{h,\omega}^p(\mathbb{D}))$ 满足

$$\|T_{\mu}^{\mathbb{D},\omega} - T_{\phi}^{\mathbb{D},\omega}\|_{L_{h,\omega}^p(\mathbb{D}) \rightarrow L_{h,\omega}^p(\mathbb{D})} = \|T_{\mu}^{\mathbb{D},\omega}\|_e.$$

证明 因为 (5.2) 成立, 所以类似于定理 1.1 的证明可得结论 (1). 结论 (2) 的证明类似于文献 [28, 定理 3.4] 的证明. $\square$

6 注记

注 6.1 通过对 $\mathbb{C}^n$ 中的 Siegel 上半空间 $\mathcal{U}$ 、有界光滑强拟凸域、有界光滑有限型凸域上的 Bergman 空间是否满足 ABJS 基本不等式与正 Toeplitz 算子的本性范数是否可达等问题的讨论 (定理 4.1–4.3), 以及单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的指数权 Bergman 空间与径向权调和 Bergman 空间的拓展 (定理 5.1 和 5.2), 我们发现一个区域上的 (全纯或调和) Bergman 空间满足 ABJS 基本不等式与正 Toeplitz 算子的本性范数可达的结论与引理 4.1, 4.2, 5.1 和 5.2 中的五款结论密切相关. 这五款结论包括引理 4.1, 4.2, 5.1 和 5.2 中的区域几何性质 (结论 (1) 和 (5))、次均值不等式及相关性质 (结论 (2) 和 (5))、Bergman 投影算子的有界性与 Toeplitz 算子的有界性与紧性 (结论 (3) 和 (4)). 类比这五款性质、定理 4.1–4.3、5.1 和 5.2, 以及文献 [11, 28] 中的结论, 我们就一般加权 Bergman 空间的情形给出如下的一个猜想.

猜想 6.1 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的区域, $1 < p < \infty$, μ 是 Ω 上的一个正 Borel 测度, ω 是 Ω 上的非负 Lebesgue 可积函数. 如果 Bergman 空间 (全纯或调和) $A_\omega^p(\Omega)$ 与正 Toeplitz 算子 T_μ 满足引理 4.1, 4.2, 5.1 和 5.2 中五款结论的类似性质, 则

- (1) Bergman 空间 $A_\omega^p(\Omega)$ 满足 ABJS 基本不等式;
- (2) 如果 $T_\mu^{\Omega, \omega} \in \mathcal{L}(A_\omega^p(\Omega)) \setminus \mathcal{K}(A_\omega^p(\Omega))$, 则在 Bergman 空间 $A_\omega^p(\Omega)$ 上存在无穷多个不同的紧算子 T_ϕ 满足

$$\|T_\mu^{\Omega, \omega} - T_\phi^{\Omega, \omega}\| = \|T_\mu^{\Omega, \omega}\|_e.$$

致谢 作者对审稿人给出的修改意见表示衷心感谢!

参考文献

- 1 Abate M, Mongodi S, Raissy J. Toeplitz operators and skew Carleson measures for weighted Bergman spaces on strongly pseudoconvex domains. *J Operator Theory*, 2020, 84: 339–364
- 2 Abate M, Raissy J, Saracco A. Toeplitz operators and Carleson measures in strongly pseudoconvex domains. *J Funct Anal*, 2012 263: 3449–3491
- 3 Abate M, Saracco A. Carleson measures and uniformly discrete sequences in strongly pseudoconvex domains. *J Lond Math Soc* (2), 2011, 83: 587–605
- 4 Adamjan V, Arov D, Kreĭn M. Analytic properties of Schmidt pairs for Hankel operator and the generalized Schur-Takagi Problem (in Russian). *Matem Sbornic*, 1971, 86: 34–75; English translation: *Math USSR Sb*, 1971, 15: 31–73
- 5 Axler S, Berg I D, Jewell N, et al. Approximation by compact operators and the space $H^\infty + C$. *Ann of Math* (2), 1979, 109: 601–612
- 6 Axler S, Jewell N, Shields A. The essential norm of an operator and its adjoint. *Trans Amer Math Soc*, 1980, 261: 159
- 7 Conway J. A Course in Functional Analysis. Graduate Texts in Mathematics, vol. 96. New York: Springer-Verlag, 1985
- 8 Čučković Ž, McNeal J D. Special Toeplitz operators on strongly pseudoconvex domains. *Rev Mat Iberoam*, 2006, 22: 851–866
- 9 Čučković Ž, Şahutoğlu S. Berezin regularity of domains in $\mathbb{C}^n$ and the essential norms of Toeplitz operators. *Trans Amer Math Soc*, 2021, 374: 2521–2540
- 10 Duan Y, Guo K, Wang S, et al. Toeplitz operators on a class of radially weighted harmonic Bergman spaces. *Potential Anal*, 2023, 59: 1621–1641
- 11 Hu Z, Lu J. Essential norm of Toeplitz operators on the Fock spaces. *Integral Equations Operator Theory*, 2015, 83: 197–210
- 12 Hu Z, Lv X, Schuster A P. Bergman spaces with exponential weights. *J Funct Anal*, 2019, 276: 1402–1429
- 13 Hu Z, Lv X, Zhu K. Carleson measures and balayage for Bergman spaces of strongly pseudoconvex domains. *Math Nachr*, 2016, 289: 1237–1254
- 14 Li H, Liu J, Wang H. Carleson measures on convex domains with smooth boundary of finite type. *Math Nachr*, 2024, 297: 694–706
- 15 Liu C, Si J. Positive Toeplitz operators on the Bergman spaces of the Siegel upper half-space. *Commun Math Stat*, 2020, 8: 113–134
- 16 Luo L. The essential norm of Toeplitz operators between Bergman spaces of the unit ball in $\mathbb{C}^n$. *Complex Anal Oper Theory*, 2015, 9: 265–273
- 17 Marco N, Massaneda X, Ortega-Cerda J. Interpolating and sampling sequences for entire functions. *Geom Funct Anal*, 2003, 13: 862–914
- 18 McNeal J. The Bergman projection as a singular integral operator. *J Geom Anal*, 1994, 4: 91–103
- 19 Peláez J Á, Rättyä J. Two weight inequality for Bergman projection. *J Math Pures Appl* (9), 2016, 105: 102–130
- 20 Rudin W. Real and Complex Analysis. International Student Edition. New York: McGraw-Hill, 1970
- 21 Sarason D. Problem13: Does every function in L^∞ of the unit circle have a best approximate in $H^\infty + C$? In: *Spaces of Analytic Functions. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 512. Norway: Springer-Verlag, 1976, 197
- 22 Shi J H. Fundamentals of Several Complex Variables (in Chinese). Beijing: Higher Ed Press, 2014 [史济怀. 多复变函数论基础. 北京: 高等教育出版社, 2014]
- 23 Si J. Schatten class positive Toeplitz operators on Bergman spaces of the Siegel upper half-space. *Monatsh Math*, 2021, 196: 335–355

- 24 Si J, Zhang Y, Zhou L. Carleson measures and Toeplitz operators between Bergman spaces on the Siegel upper half-space. [Complex Anal Oper Theory](#), 2022, 16: 32
- 25 Xiao J, Yang W, Yuan C. Geometrical Toeplitz operators and Carleson embeddings over smoothly bounded convex domains of finite type in $\mathbb{C}^n$. [Sci China Math](#), 2026, 69: 985–1010
- 26 Yang W, Yuan C. Essential norms of Toeplitz operators between Bergman spaces in strongly pseudoconvex domains. [J Geom Anal](#), 2024, 34: 350
- 27 Zhang Y, Wang X, Hu Z. Toeplitz operators on Bergman spaces with exponential weights. [Complex Var Elliptic Equ](#), 2023, 68: 974–1007
- 28 Zhou L F, Lu J. Essential norm of Toeplitz operators on Bergman spaces with regular weights (in Chinese). *Acta Math Sinica (Chin Ser)*, 2022, 65: 699–708 [周立芳, 卢金. 规范权 Bergman 空间上 Toeplitz 算子的本性范数. *数学学报*, 2022, 65: 699–708]
- 29 Zhou L F, Wang X, Liu M S. The boundedness of Forelli-Rudin type operators on the Siegel upper half space. [Complex Anal Oper Theory](#), 2023, 17: 127

The ABJS basic inequality and the essential norm of Toeplitz operators

Lifang Zhou, Zhangjian Hu & Jin Lu

Abstract Axler et al. (1979) proposed a problem of which Banach spaces satisfy the basic inequality. We provide a partial solution to this problem by proving that Bergman spaces on a domain Ω in $\mathbb{C}^n$ satisfy the basic inequality. In honor of the seminal work of Axler-Berg-Jewell-Shields, we refer to this basic inequality simply as the ABJS basic inequality in this paper. As applications of this result, we show that holomorphic Bergman spaces on the Siegel upper half-space, strongly pseudoconvex domains and bounded convex domains of finite type in $\mathbb{C}^n$ satisfy the ABJS basic inequality, and we investigate the essential norm of positive Toeplitz operators on these domains. We also extend the corresponding research on the ABJS basic inequality and the essential norm of positive Toeplitz operators to the framework of weighted Bergman spaces with exponential weights and harmonic Bergman spaces with radial weights on the unit disc. Finally, we propose a conjecture for this research on generalized weighted Bergman spaces.

Keywords basic inequality, positive Toeplitz operators, essential norm

MSC(2020) 32A36, 46B10, 46A25, 47B35

doi: 10.1360/SSM-2026-0031