中国科学: 数学 2023 年 第 53 卷 第 10 期: 1303 ~ 1324
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark click for updates

经典 Lie-Yamaguti Yang-Baxter 方程和 Lie-Yamaguti 双代数

赵嘉[1], 乔雨[2*]

1. 南通大学理学院, 南通 226019;
2. 陕西师范大学数学与统计学院, 西安 710119
E-mail: zhaojia@ntu.edu.cn, yqiao@snnu.edu.cn

收稿日期: 2022-09-09; 接受日期: 2023-04-17; 网络出版日期: 2023-09-08; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11971282) 资助项目

摘要 本文引入 Lie-Yamaguti 双代数理论, 给出两种类型的相容性条件: 局部闭链条件和 double 构造. 本文定义 Lie-Yamaguti 代数中的经典 Yang-Baxter 方程, 并证明经典 Yang-Baxter 方程的解对应于关于余伴随表示的相对 Rota-Baxter 算子. 此外, 本文将 Lie 代数上的一些结论推广至 Lie-Yamaguti 代数上. 然后, 本文引入 Lie-Yamaguti 代数匹配对的概念, 继而定义 double Lie-Yamaguti 双代数, 并且证明 Lie-Yamaguti 代数的匹配对、Manin 三元组和 double Lie-Yamaguti 双代数之间的等价关系. 最后, 本文说明局部闭链条件是 double 构造的一个特例.

关键词 Lie-Yamaguti 双代数 经典 Lie-Yamaguti Yang-Baxter 方程 相对 Rota-Baxter 算子 Manin 三元组 匹配对

MSC (2020) 主题分类 17B38, 16T25, 17A30, 17B81

1 引言

对于一个给定的代数 $\mathfrak{g}$, 其上的双代数结构是指在 $\mathfrak{g}$ 上被赋予了一个相容余代数结构. 例如, Lie 双代数是一个 Lie 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ 和一个余括号 $\delta:\mathfrak{g}\to\otimes^2\mathfrak{g}$, 使得其对偶 $\delta^*:\otimes^2\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}^*$ 是 $\mathfrak{g}^*$ 上的一个 Lie 代数结构, 并且满足一定的相容性条件. 众所周知, Lie 双代数的相容性条件可以从以下 3 个视角来看待: 导子条件、闭链条件和 double 构造, 并且这些相容性条件相互等价. 更确切地, 由于 $\mathfrak{g}$ 相应的外代数 $\wedge^\bullet\mathfrak{g}$ 实际上是一个分次 Lie 代数, 因此余括号 δ 可以被视为 $\wedge^\bullet\mathfrak{g}$ 上的一个导子. 因此, 导子条件为

$$\delta[x,y]=[\delta(x),y]+[x,\delta(y)],\quad \forall\, x,y\in\mathfrak{g}.$$

记号 $[x,\delta(y)]$ 意味着 $(\mathrm{ad}_x\otimes\mathrm{Id}+\mathrm{Id}\otimes\mathrm{ad}_x)\delta(y)$, 其中 $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示. 由于在 Lie 代数中, 两个表示可以构成张量表示, 因此闭链条件可以理解为, 余括号 $\delta\in\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\otimes^2\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 上关于张量

英文引用格式: Zhao J, Qiao Y. The classical Lie-Yamaguti Yang-Baxter equation and Lie-Yamaguti bialgebras (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 1303–1324, doi: 10.1360/SCM-2022-0517

© 2023《中国科学》杂志社

表示 $\mathrm{ad}\otimes\mathrm{Id}+\mathrm{Id}\otimes\mathrm{ad}$ 的一个 1 阶闭链. 事实上, Lie 代数下的经典 Yang-Baxter 方程的解可以给出闭链条件 (参见文献 [1]). 最后, double 构造是指, 在 $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*$ 上有一个 Lie 代数结构使得其上带有一个非退化对称双线性形式.

与 Lie 双代数情形类似, 3-Lie 双代数也应存在相应的 3 种类型的相容性条件. 关于 3-Lie 双代数和 n-Lie 双代数理论, 可参见文献 [3,5,6]. Bai 等[5] 构造了导子条件. 然而, 在 $\wedge^\bullet\mathfrak{g}$ 上是否存在 3-Lie 代数结构尚不清楚. 因此, Bai 等[3] 研究了局部闭链条件和 double 构造作为 3-Lie 双代数的相容性条件. 由于在 3-Lie 代数上, 两个表示的张量未必仍是一个表示, 所以 3-Lie 双代数上不存在闭链条件. 然而, 对于给定的 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot])$, $(\otimes^3\mathfrak{g};\mathrm{ad}\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id})$、$(\otimes^3\mathfrak{g};\mathrm{Id}\otimes\mathrm{ad}\otimes\mathrm{Id})$ 和 $(\otimes^3\mathfrak{g};\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathrm{ad})$ 仍然是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot])$ 上的表示. 因此, 他们引入了 3-Lie 代数上局部闭链条件作为其双代数的相容性条件. 此外, 他们定义了 3-Lie 代数的 Manin 三元组和匹配对, 从而引入了 double 3-Lie 双代数的概念. 然而, 作为 3-Lie 双代数的相容性条件, 局部闭链条件和 double 构造并不等价, 并且 3-Lie 代数的 r-矩阵不能给出 double 构造. 后来, Hou 等[13] 发现, r-矩阵作为一个特殊的相对 Rota-Baxter 算子, 可以给出一个 twilled 3-Lie 代数, 而 twilled 3-Lie 代数不等价于 3-Lie 代数的匹配对. 从而解释了 r-矩阵不能给出 double 构造 3-Lie 双代数结构的原因.

近年来, 为了在其他代数结构上建立双代数理论, 许多作者作出了努力. 例如, Tang 和 Sheng[24] 利用二次 Leibniz 代数来研究 Leibniz 双代数, 其中二次 Leibniz 代数是 Leibniz 代数的 Manin 三元组. Leibniz 双代数的相容性条件也是 double 构造. 此外, Hom-Lie 代数的双代数理论及其相应的经典 Yang-Baxter 方程已在文献 [28] 中建立. 最近, Bai 等[2,4] 及 Lang 和 Sheng[17] 研究了 Rota-Baxter Lie 双代数和 endo Lie 双代数. Chen 等[12] 用 "大括号" 的方法研究了 Lie 2-双代数, 并证明了 (严格) Lie 2-双代数与 Lie 双代数交叉模是一一对应的. 此外, 他们在文献 [11] 中证明了单连通的 (拟) Poisson Lie 2-群和 (拟) Lie 2-双代数的等价性. 后来, 文献 [12] 中的结论被推广至 Lie 双代数胚上, 即证明了 Lie 2-双代数胚与 Lie 双代数胚交叉模的等价性 (参见文献 [16]). 更重要的是, Tang 等[23] 在研究 Lie 代数上相对 Rota-Baxter 算子 (也称为 $\mathcal{O}$-算子) 的上同调和形变时, 研究了反对称的经典 r-矩阵的线性形变及其对应的上三角 Lie 双代数. Takahashi[22] 利用 Lie-Yamaguti 代数上的表示研究了 quandles 上的模.

Lie 三代数或广义 Lie 三系是 Lie 代数和 Lie 三系的推广, 由 Yamaguti[25] 引入. 之后, 文献 [26,27] 在 20 世纪 50 年代至 60 年代给出了该对象表示的概念, 并建立了其上同调理论. 直到 21 世纪初, Kinyon 和 Weinstein[15] 在研究 Courant 代数胚时首次将其命名为 Lie-Yamaguti 代数. Lie-Yamaguti 代数最近引起了学者的广泛关注. 例如, Benito 等[8] 研究了 Lie-Yamaguti 代数和 G_2 型单 Lie 代数相关问题; 之后, 他们分别在文献 [7] 和 [9,10] 中研究了正交和不可约的 Lie-Yamaguti 代数. Sheng 等[21] 曾专注于 Lie-Yamaguti 代数的线性变形、积结构和复结构, 后来在文献 [20] 中引入了 Lie-Yamaguti 上相对 Rota-Baxter 算子和预 Lie-Yamaguti 代数的概念.

由于双代数和 Lie-Yamaguti 代数的重要性, 一个很自然的想法是在 Lie-Yamaguti 代数上发展一套双代数理论. 受 Lie 双代数和 3-Lie 双代数的启发, 本文考虑将 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 上的双代数结构定义为一对余括号 (δ,ω), 其中 $\delta:\mathfrak{g}\to\otimes^2\mathfrak{g}$ 和 $\omega:\mathfrak{g}\to\otimes^3\mathfrak{g}$, 并且满足以下相容性条件之一:

- 导子条件: 余括号 δ 和 ω 分别是 $\wedge^\bullet\mathfrak{g}$ 上关于二元和三元括号的导子, 即

$$\begin{aligned}&\delta([x,y])=[\delta(x),y]+[x,\delta(y)],\\&\omega([\![x,y,z]\!])=[\![\omega(x),y,z]\!]+[\![x,\omega(y),z]\!]+[\![x,y,\omega(z)]\!],\quad\forall\,x,y,z\in\mathfrak{g};\end{aligned}$$

• 闭链条件: 余括号 δ 和 ω 是 $\mathfrak{g}$ 上关于一个张量表示的闭链;

• double 构造: 在 $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*$ 上存在一个 Lie-Yamaguti 代数结构并且带有一个对称的、非退化的双线性形式.

由于到目前为止, 还没有在外代数 $\wedge^\bullet\mathfrak{g}$ 上找到合适的 Lie-Yamaguti 代数结构, 因此本文不考虑其导子条件. 由于 Lie-Yamaguti 代数 $\mathfrak{g}$ 上的两个表示的张量未必还是 $\mathfrak{g}$ 上的表示, 因此在第 3 节中考虑同 3-Lie 双代数相平行的局部闭链条件作为 Lie-Yamaguti 双代数的相容性条件之一. 注意到 $(\otimes^2\mathfrak{g};\mathrm{Id}\otimes\mathrm{ad},\mathrm{Id}\otimes\mathcal{R})$、$(\otimes^2\mathfrak{g};\mathrm{ad}\otimes\mathrm{Id},\mathcal{R}\otimes\mathrm{Id})$、$(\otimes^3\mathfrak{g};\mathrm{ad}\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id},\mathcal{R}\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id})$、$(\otimes^3\mathfrak{g};\mathrm{Id}\otimes\mathrm{ad}\otimes\mathrm{Id},\mathrm{Id}\otimes\mathcal{R}\otimes\mathrm{Id})$ 和 $(\otimes^3\mathfrak{g};\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathrm{ad},\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathcal{R})$ 是 Lie-Yamaguti 代数 $\mathfrak{g}$ 上的表示, 其中 $(\mathfrak{g};\mathrm{ad},\mathcal{R})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示, 因此将闭链条件修改如下:

• δ_1 是关于表示 $(\otimes^2\mathfrak{g};\mathrm{Id}\otimes\mathrm{ad},\mathrm{Id}\otimes\mathcal{R})$ 的一个 1 阶闭链;

• δ_2 是关于表示 $(\otimes^2\mathfrak{g};\mathrm{ad}\otimes\mathrm{Id},\mathcal{R}\otimes\mathrm{Id})$ 的一个 1 阶闭链;

• ω_1 是关于表示 $(\otimes^3\mathfrak{g};\mathrm{ad}\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id},\mathcal{R}\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id})$ 的一个 1 阶闭链;

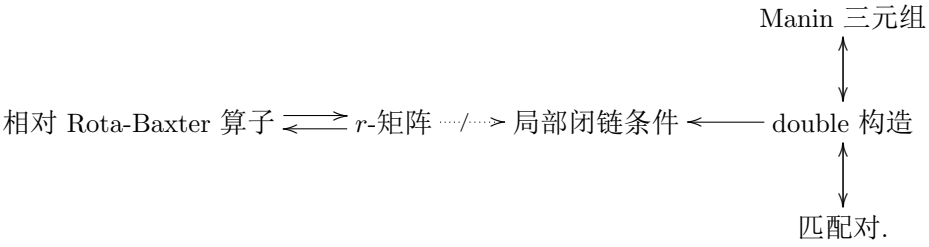
• ω_2 是关于表示 $(\otimes^3\mathfrak{g};\mathrm{Id}\otimes\mathrm{ad}\otimes\mathrm{Id},\mathrm{Id}\otimes\mathcal{R}\otimes\mathrm{Id})$ 的一个 1 阶闭链;

• ω_3 是关于表示 $(\otimes^3\mathfrak{g};\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathrm{ad},\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathcal{R})$ 的一个 1 阶闭链,

其中 $\delta=\delta_1+\delta_2$ 和 $\omega=\omega_1+\omega_2+\omega_3$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的余括号. 此外, 本文定义了经典 Lie-Yamaguti Yang-Baxter 方程, 但其解未能给出局部闭链条件. 然而, 我们发现经典 Yang-Baxter 方程的解与关于余伴随表示的相对 Rota-Baxter 算子是一一对应的. 此外, 本文将文献 [1,19] 中的一些结果推广到 Lie-Yamaguti 代数上.

第 4 节由 Lie 双代数的 double 构造, 很自然地考虑将 double 构造作为 Lie-Yamaguti 双代数的相容性条件. 为此, 引入 Lie-Yamaguti 代数的 Manin 三元组和匹配对的概念, 并且证明了 Lie-Yamaguti 代数的 Manin 三元组、匹配对和 double Lie-Yamaguti 双代数这三者的等价性. 同 3-Lie 双代数情形类似, 经典 r-矩阵无法给出 double Lie-Yamaguti 双代数, 并且局部闭链条件和 double 构造作为 Lie-Yamaguti 双代数的相容性条件也不是等价的. 事实上, 局部闭链条件是 double 构造的一个特殊情形, 这样的事实意味着在 3-Lie 代数或者 Lie-Yamaguti 代数这样拥有三元运算的代数对象上, 在性质方面同 Lie 代数上的二元运算有很大的差别.

最后作为总结, 本节将 Lie-Yamaguti 代数上的概念之间的关系用如下图表展现出来:



注意到 Lie-Yamaguti 代数是 Lie 代数和 Lie 三系的非平凡推广, 因此本文中的结论在 Lie 三系的情形下也成立.

记号与术语 设 $\mathfrak{g}$ 为一个向量空间. 对于所有的 n-张量 $T=x_1\otimes\cdots\otimes x_n\in\otimes^n\mathfrak{g}$ $(n\geqslant 2)$ 以及 $1\leqslant i<j\leqslant n$, 定义扭曲算子为 $\sigma_{ij}(T)=x_1\otimes\cdots\otimes x_j\otimes\cdots\otimes x_i\otimes\cdots\otimes x_n$. 特别地, 本文对于 2-张量 $x\otimes y\in\otimes^2\mathfrak{g}$, 将扭曲算子 σ_{12} 记为 τ, 即 $\tau(x\otimes y)=y\otimes x$. 在张量记号意义下, 将恒等映射 Id 记为 1. 例如, 将张量 $\mathrm{ad}\otimes\mathrm{Id}$ 记为 $\mathrm{ad}\otimes 1$.

2 预备知识

本节简要回顾一些概念, 如 Lie-Yamaguti 代数及其表示. 特别地, Lie-Yamaguti 代数的对偶表示在本文中起到了非常重要的作用.

定义 2.1 [15] 一个 Lie-Yamaguti 代数是一个线性空间 $\mathfrak{g}$, 其上带有一个二元线性运算 $[\cdot,\cdot]:\wedge^2\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 和一个三元线性运算 $[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]:\wedge^2\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, 使得对于所有 $x,y,z,w,t\in\mathfrak{g}$, 如下条件成立:

$$
\begin{aligned}
&[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]+[\![x,y,z]\!]+[\![y,z,x]\!]+[\![z,x,y]\!]=0,\\
&[\![[x,y],z,w]\!]+[\![[y,z],x,w]\!]+[\![[z,x],y,w]\!]=0,\\
&[\![x,y,[z,w]]\!]=[[\![x,y,z]\!],w]+[z,[\![x,y,w]\!]],\\
&[\![x,y,[\![z,w,t]]\!]\!]=[\![[\![x,y,z]\!],w,t]\!]+[\![z,[\![x,y,w]\!],t]\!]+[\![z,w,[\![x,y,t]\!]]\!].
\end{aligned}
$$

本文将一个 Lie-Yamaguti 代数记为 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$.

注意到, 对于一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$, 当其中的二元运算平凡, 即 $[\cdot,\cdot]=0$ 时, $\mathfrak{g}$ 退化为一个 Lie 三系; 当三元运算平凡, 即 $[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]=0$ 时, $\mathfrak{g}$ 退化为一个 Lie 代数.

例 2.1 [18] 设 M 为一个闭流形 1), 其上带有一个仿射联络, 将 M 上的向量场记为 $\mathfrak{X}(M)$. 对于所有的 $x,y,z\in\mathfrak{X}(M)$, 令

$$[x,y]=-T(x,y),\quad [\![x,y,z]\!]=-R(x,y)z,$$

其中 T 和 R 分别代表挠率和曲率张量. 则三元组 $(\mathfrak{X}(M),[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 构成了一个 (无限维的) Lie-Yamaguti 代数.

Lie-Yamaguti 代数上的表示的概念取自文献 [27].

定义 2.2 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 为一个 Lie-Yamaguti 代数. $\mathfrak{g}$ 上的一个表示是一个线性空间 V, 其上带有一个线性映射 $\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ 和一个双线性映射 $\mu:\otimes^2\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$, 使得对于所有 $x,y,z,w\in\mathfrak{g}$, 如下等式成立:

$$
\begin{aligned}
&\mu([x,y],z)-\mu(x,z)\rho(y)+\mu(y,z)\rho(x)=0,\\
&\mu(x,[y,z])-\rho(y)\mu(x,z)+\rho(z)\mu(x,y)=0,\\
&\rho([\![x,y,z]\!])=[D_{\rho,\mu}(x,y),\rho(z)],\\
&\mu(z,w)\mu(x,y)-\mu(y,w)\mu(x,z)-\mu(x,[\![y,z,w]\!])+D_{\rho,\mu}(y,z)\mu(x,w)=0,\\
&\mu([\![x,y,z]\!],w)+\mu(z,[\![x,y,w]\!])=[D_{\rho,\mu}(x,y),\mu(z,w)],
\end{aligned}
$$

其中 $D_{\rho,\mu}$ 由下式给出:

$$D_{\rho,\mu}(x,y)=\mu(y,x)-\mu(x,y)+[\rho(x),\rho(y)]-\rho([x,y]),\quad \forall\, x,y\in\mathfrak{g}. \tag{2.1}$$

不难看出, $D_{\rho,\mu}$ 是反对称的. 将 $\mathfrak{g}$ 上的一个表示记为 $(V;\rho,\mu)$. 在本文中, 在不引起混淆的情形下, 将 $D_{\rho,\mu}$ 简写为 D.

例 2.2 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 为一个 Lie-Yamaguti 代数. 分别定义线性映射 $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 和 $\mathcal{R}:\otimes^2\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 为 $x\mapsto\mathrm{ad}_x$ 和 $(x,y)\mapsto\mathcal{R}(x,y)$, 其中对于所有 $z\in\mathfrak{g}$, 有

$$\mathrm{ad}_x z=[x,z],\quad \mathcal{R}(x,y)z=[\![z,x,y]\!].$$

1) 一个光滑紧致无边流形

则 $(\mathrm{ad},\mathcal{R})$ 构成了 $\mathfrak{g}$ 在其自身上的一个表示, 其中 $\mathcal{L}:=D_{\mathrm{ad},\mathcal{R}}$ 由下式给出:

$$\mathcal{L}(x,y)z=[\![x,y,z]\!],\quad \forall\, z\in\mathfrak{g}.$$

表示 $(\mathfrak{g};\mathrm{ad},\mathcal{R})$ 称作 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示. 如果 $(\mathfrak{g}^*,[\cdot,\cdot]_*,[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_*)$ 也为一个 Lie-Yamaguti 代数, 在本文中, 其伴随表示记为 $(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{ad},\mathfrak{R})$, 其中 $\mathfrak{L}:=D_{\mathfrak{ad},\mathfrak{R}}$.

Lie-Yamaguti 代数的余伴随表示在本文中起到了非常重要的作用. 首先回顾在文献 [20] 中引入的 Lie-Yamaguti 代数上关于一个表示的对偶表示. 设 $(V;\rho,\mu)$ 为 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 上的一个表示, V^* 是 V 的对偶空间. 对于所有 $x,y\in\mathfrak{g}$, $\alpha\in V^*$, $v\in V$, 分别定义线性映射 $\rho^*:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V^*)$ 和 μ^*, $D^*_{\rho,\mu}:\otimes^2\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V^*)$ 如下:

$$\begin{aligned}&\langle\rho^*(x)\alpha,v\rangle=-\langle\alpha,\rho(x)v\rangle,\\&\langle\mu^*(x,y)\alpha,v\rangle=-\langle\alpha,\mu(x,y)v\rangle,\\&\langle D^*_{\rho,\mu}(x,y)\alpha,v\rangle=-\langle\alpha,D_{\rho,\mu}(x,y)v\rangle.\end{aligned}$$

命题 2.1 [20] 设 $(V;\rho,\mu)$ 为 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 上的一个表示, 则

$$(V^*;\rho^*,-\mu^*\tau)$$

为 $\mathfrak{g}$ 在 V^* 上的一个表示, 其中 $D^*_{\rho,\mu}=D_{\rho^*,-\mu^*\tau}$. 称 $(V^*;\rho^*,-\mu^*\tau)$ 为表示 $(V;\rho,\mu)$ 的对偶表示.

例 2.3 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 为一个 Lie-Yamaguti 代数, $(\mathfrak{g};\mathrm{ad},\mathcal{R})$ 为其伴随表示, 其中 ad 和 $\mathcal{R}$ 由例 2.2 给出, 则表示 $(\mathfrak{g}^*;\mathrm{ad}^*,-\mathcal{R}^*\tau)$ 为伴随表示的对偶表示, 称为余伴随表示. 注意到 $\mathcal{L}^*:=D_{\mathrm{ad}^*,-\mathcal{R}^*\tau}$ 的对偶为 $-\mathcal{L}$, 即

$$\langle\mathcal{L}^*(x,y)\alpha,z\rangle=-\langle\alpha,[\![x,y,z]\!]\rangle,\quad \forall\, x,y,z\in\mathfrak{g},\quad \alpha\in\mathfrak{g}^*.$$

如果 $(\mathfrak{g}^*,[\cdot,\cdot]_*,[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_*)$ 为一个 Lie-Yamaguti 代数, $(\mathfrak{g}^*,\mathfrak{ad},\mathfrak{R})$ 为其伴随表示, 则 $(\mathfrak{g}^*,\mathfrak{ad},\mathfrak{R})$ 的余伴随表示记为 $(\mathfrak{g};\mathfrak{ad}^*,-\mathfrak{R}^*\tau)$, 其中 $\mathfrak{L}^*=D_{\mathfrak{ad}^*,-\mathfrak{R}^*\tau}$.

通过直接计算, 有如下命题.

命题 2.2 [29] 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 为一个 Lie-Yamaguti 代数, V 为一个线性空间. 假设 $\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ 和 $\mu:\otimes^2\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ 均为线性映射, 则 $(V;\rho,\mu)$ 为 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 上的一个表示当且仅当在直和 $\mathfrak{g}\oplus V$ 上有一个 Lie-Yamaguti 代数结构 $([\cdot,\cdot]_\ltimes,[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\ltimes)$, 其中

$$\begin{aligned}&[x+u,y+v]_\ltimes=[x,y]+\rho(x)v-\rho(y)u,\\&[\![x+u,y+v,z+w]\!]_\ltimes=[\![x,y,z]\!]+D(x,y)w+\mu(y,z)u-\mu(x,z)v,\end{aligned}$$

这里 $x,y,z\in\mathfrak{g}$ 和 $u,v,w\in V$. 这个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g}\oplus V,[\cdot,\cdot]_\ltimes,[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\ltimes)$ 称作半直积 Lie-Yamaguti 代数, 记作 $\mathfrak{g}\ltimes_{\rho,\mu}V$.

Lie-Yamaguti 代数的上同调理论已在文献 [27] 中建立, 在此直接给出 Lie-Yamaguti 代数的 1 阶闭链的定义.

定义 2.3 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 为一个 Lie-Yamaguti 代数, 且 $(V;\rho,\mu)$ 为 $\mathfrak{g}$ 上的一个表示. 一个线性映射 $f:\mathfrak{g}\to V$ 称作 $\mathfrak{g}$ 关于表示 $(V;\rho,\mu)$ 的一个 1 阶闭链, 如果 f 满足

$$\begin{aligned}&f([x,y])=\rho(x)f(y)-\rho(y)f(x),\\&f([\![x,y,z]\!])=D(x,y)f(z)+\mu(y,z)f(x)-\mu(x,z)f(y),\quad \forall\, x,y,z\in\mathfrak{g}.\end{aligned}$$

例 2.4 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 上的一个导子是一个线性映射 $\Delta:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, 使得如下等式成立:

$$\Delta([x,y])=[\Delta(x),y]+[x,\Delta(y)],$$
$$\Delta([\![x,y,z]\!])=[\![\Delta(x),y,z]\!]+[\![x,\Delta(y),z]\!]+[\![x,y,\Delta(z)]\!],\quad \forall\, x,y,z\in\mathfrak{g},$$

则 Lie-Yamaguti 代数 $\mathfrak{g}$ 上任意一个导子都是关于伴随表示 $(\mathfrak{g};\mathrm{ad},\mathcal{R})$ 的一个 1 阶闭链.

3 相对 Rota-Baxter 算子、经典 Yang-Baxter 方程和局部闭链 Lie-Yamaguti 双代数

本节定义经典 Lie-Yamaguti Yang-Baxter 方程, 并给出它的解与相对 Rota-Baxter 算子之间的关系. 作为副产品, 本节推广 Bai 等 [3] 和 Benito 等 [9] 在 Lie 代数上所做的工作. 最后, 给出局部闭链型的 Lie-Yamaguti 双代数的概念. 首先, 回顾一些相关概念.

定义 3.1 [20] 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 为一个 Lie-Yamaguti 代数, $(V;\rho,\mu)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个表示, $T:V\to\mathfrak{g}$ 为一个线性映射. 如果 T 满足

$$[Tu,Tv]=T(\rho(Tu)v-\rho(Tv)u),$$
$$[\![Tu,Tv,Tw]\!]=T(D(Tu,Tv)w+\mu(Tv,Tw)u-\mu(Tu,Tw)v),\quad \forall\, u,v,w\in V,$$

则称 T 为 $\mathfrak{g}$ 上关于表示 $(V;\rho,\mu)$ 的一个相对 Rota-Baxter 算子.

更多关于相对 Rota-Baxter 算子与预 Lie-Yamaguti 代数之间的关系的细节, 可参见文献 [20]. 接下来, 引入一些符号和术语. 本节指出 $r=\sum_i x_i\otimes y_i\in\otimes^2\mathfrak{g}$ 是一个 2-张量. 首先, $r=\sum_i x_i\otimes y_i\in\otimes^2\mathfrak{g}$ 可通过以下方式嵌入到一个 n-张量 $r_{pq}\in\otimes^n\mathfrak{g}$ $(n\geqslant 2)$ 当中:

$$r_{pq}:=\sum_i z_{i1}\otimes\cdots\otimes z_{in},$$

其中对于所有 $1\leqslant p\neq q\leqslant n$, 有

$$z_{ij}=\begin{cases}x_i, & j=p,\\ y_i, & j=q,\\ 1, & i\neq p,q.\end{cases}$$

设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 为一个 Lie-Yamaguti 代数, 分别定义 $[r,r]\in\otimes^3\mathfrak{g}$ 和 $[\![r,r,r]\!]\in\otimes^4\mathfrak{g}$ 为

$$[r,r]=[r_{12},r_{13}]+[r_{12},r_{23}]+[r_{13},r_{23}],\tag{3.1}$$
$$[\![r,r,r]\!]=[\![r_{31},r_{32},r_{43}]\!]+[\![r_{13},r_{41},r_{12}]\!]+[\![r_{42},r_{23},r_{21}]\!]+[\![r_{41},r_{42},r_{43}]\!].\tag{3.2}$$

方程 (3.1) 和 (3.2) 当中的 r_{pq} 分别是 $r\in\otimes^2\mathfrak{g}$ 的嵌入 3-张量和嵌入 4-张量.

更确切地, 有

$$[r,r]=\sum_{ij}([x_i,x_j]\otimes y_i\otimes y_j+x_i\otimes[y_i,x_j]\otimes y_j+x_i\otimes x_j\otimes[y_i,y_j]),$$
$$\begin{aligned}[\![r,r,r]\!]=\sum_{ijk}([\![y_k,x_i,x_j]\!]\otimes y_i\otimes y_j\otimes x_k+y_j\otimes[\![y_k,x_i.x_j]\!]\otimes y_i\otimes x_k\\ +y_i\otimes y_j\otimes[\![x_i,x_j,y_k]\!]\otimes x_k+y_i\otimes y_j\otimes y_k\otimes[\![x_i,x_j,x_k]\!]).\end{aligned}$$

对于任意 $x\in\mathfrak{g}$, 分别定义两个线性映射 $\delta:\mathfrak{g}\to\otimes^2\mathfrak{g}$ 和 $\omega:\mathfrak{g}\to\otimes^3\mathfrak{g}$ 如下:

$$\delta(x):=\sum_i([x,x_i]\otimes y_i+x_i\otimes[x,y_i]),\tag{3.3}$$

$$\omega(x):=\sum_{ij}([\![x,x_i,x_j]\!]\otimes y_j\otimes y_i+y_j\otimes[\![x_i,x,x_j]\!]\otimes y_i+y_j\otimes y_i\otimes[\![x_i,x_j,x]\!]).\tag{3.4}$$

接下来, 将两个线性映射 $\delta^*:\otimes^2\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}^*$ 和 $\omega^*:\otimes^3\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}^*$ 分别记为 $[\cdot,\cdot]_*$ 和 $[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_*$.

对于所有 $x\in\mathfrak{g}$, 令

$$\begin{cases}\delta_1(x):=\sum\limits_i x_i\otimes[x,y_i],\\ \delta_2(x):=\sum\limits_i[x,x_i]\otimes y_i\end{cases}\tag{3.5}$$

以及

$$\begin{cases}\omega_1(x):=\sum\limits_{ij}[\![x,x_i,x_j]\!]\otimes y_j\otimes y_i,\\ \omega_2(x):=\sum\limits_{ij}y_j\otimes[\![x_i,x,x_j]\!]\otimes y_i,\\ \omega_3(x):=\sum\limits_{ij}y_j\otimes y_i\otimes[\![x_i,x_j,x]\!].\end{cases}\tag{3.6}$$

命题 3.1 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 为一个 Lie-Yamaguti 代数, $r\in\otimes^2\mathfrak{g}$. 假设 r 是反对称的, 并且 δ 和 ω 分别由方程 (3.3) 和 (3.4) 给出, 则 $\delta^*:\otimes^2\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}^*$ 是反对称的且 $\omega^*:\otimes^3\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}^*$ 关于前两个变量是反对称的.

证明 事实上, 对于任意 $x\in\mathfrak{g}$, 有

$$\sigma_{12}\omega_1(x)=\sum_{ij}y_j\otimes[\![x,x_i,x_j]\!]\otimes y_i=-\sum_{ij}y_j\otimes[\![x_i,x,x_j]\!]\otimes y_i=-\omega_2(x),$$

$$\sigma_{12}\omega_2(x)=\sum_{ij}[\![x_i,x,x_j]\!]\otimes y_j\otimes y_i=-\sum_{ij}[\![x,x_i,x_j]\!]\otimes y_j\otimes y_i=-\omega_1(x),$$

$$\sigma_{12}\omega_3(x)=\sum_{ij}y_i\otimes y_j\otimes[\![x_i,x_j,x]\!]=-\sum_{ij}y_i\otimes y_j\otimes[\![x_j,x_i,x]\!]=-\omega_3(x).$$

这表明, ω^* 关于前两个变量是反对称的. 由于 r 是反对称的, 因此对于所有 $x\in\mathfrak{g}$, 有 $\sigma_{12}\delta_1(x)=-\delta_2(x)$ 和 $\sigma_{12}\delta_2(x)=-\delta_1(x)$. 因此, δ^* 是反对称的. 证毕. □

一个 2-张量 r 诱导一个如下线性映射 $r^\sharp:\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}$:

$$\langle r^\sharp(\xi),\eta\rangle=\langle r,\xi\otimes\eta\rangle,\quad\forall\,\xi,\eta\in\mathfrak{g}^*.\tag{3.7}$$

类似地, 一个 2-张量 $\mathcal{B}\in\otimes^2\mathfrak{g}^*$ 诱导一个线性映射 $\mathcal{B}^\natural:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}^*$:

$$\langle\mathcal{B}^\natural(x),y\rangle=\mathcal{B}(x,y),\quad\forall\,x,y\in\mathfrak{g}.\tag{3.8}$$

命题 3.2 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 为一个 Lie-Yamaguti 代数, $r=\sum_i x_i\otimes y_i$. 假设 r 是反对称的, 且 $\delta:\mathfrak{g}\to\otimes^2\mathfrak{g}$ 和 $\omega:\mathfrak{g}\to\otimes^3\mathfrak{g}$ 分别由方程 (3.3) 和 (3.4) 给出, 则有

$$
\begin{aligned}
&[\xi,\eta]_*=\mathrm{ad}^*_{r^\sharp(\xi)}\eta-\mathrm{ad}^*_{r^\sharp(\eta)}\xi,\\
&[\![\xi,\eta,\zeta]\!]_*=\mathcal{L}^*(r^\sharp(\xi),r^\sharp(\eta))\zeta-\mathcal{R}^*(r^\sharp(\zeta),r^\sharp(\eta))\xi+\mathcal{R}^*(r^\sharp(\zeta),r^\sharp(\xi))\eta,\quad\forall\xi,\eta,\zeta\in\mathfrak{g}^*.
\end{aligned}
$$

证明 只需要证明

$$\langle\delta(x),\xi\otimes\eta\rangle=\langle x,[\xi,\eta]_*\rangle, \tag{3.9}$$

$$\langle\omega(x),\xi\otimes\eta\otimes\zeta\rangle=\langle x,[\![\xi,\eta,\zeta]\!]_*\rangle,\quad\forall x\in\mathfrak{g}^*,\quad\xi,\eta,\zeta\in\mathfrak{g}^*. \tag{3.10}$$

令 $r=\sum_i x_i\otimes y_i$. 由于 r 是反对称的, 所以有

$$
\begin{aligned}
\langle x,\mathcal{R}^*(r^\sharp(\zeta),r^\sharp(\eta))\xi\rangle&=-\langle[\![x,r^\sharp(\zeta),r^\sharp(\eta)]\!],\xi\rangle\\
&=-\langle r^\sharp(\zeta),\mathcal{R}^*(x,r^\sharp(\eta))\xi\rangle\\
&=-\langle r,\zeta\otimes\mathcal{R}^*(x,r^\sharp(\eta))\xi\rangle\\
&=-\sum_i\langle y_i,\zeta\rangle\langle x_i,\mathcal{R}^*(x,r^\sharp(\eta))\xi\rangle\\
&=-\sum_i\langle y_i,\zeta\rangle\langle r^\sharp(\eta),\mathcal{L}^*(x_i,x)\xi\rangle\\
&=-\sum_i\langle y_i,\zeta\rangle\langle r,\eta\otimes\mathcal{L}^*(x_i,x)\xi\rangle\\
&=\sum_{ij}\langle y_i,\zeta\rangle\langle y_j,\eta\rangle\langle x_j,\mathcal{L}^*(x_i,x)\xi\rangle\\
&=-\left\langle\sum_{ij}[\![x,x_i,x_j]\!]\otimes y_j\otimes y_i,\xi\otimes\eta\otimes\zeta\right\rangle\\
&=-\langle\omega_1(x),\xi\otimes\eta\otimes\zeta\rangle.
\end{aligned}
$$

因此, 得到

$$-\langle x,\mathcal{R}^*(r^\sharp(\zeta),r^\sharp(\eta))\xi\rangle=\langle\omega_1(x),\xi\otimes\eta\otimes\zeta\rangle.$$

类似地, 有

$$
\begin{aligned}
\langle x,\mathcal{L}^*(r^\sharp(\xi),r^\sharp(\eta))\zeta\rangle&=-\langle[\![r^\sharp(\xi),r^\sharp(\eta),x]\!],\zeta\rangle\\
&=\langle r^\sharp(\xi),\mathcal{R}^*(r^\sharp(\eta),x)\zeta\rangle\\
&=\langle r,\xi\otimes\mathcal{R}^*(r^\sharp(\eta),x)\zeta\rangle\\
&=\sum_j\langle y_j,\xi\rangle\langle x_j,\mathcal{R}^*(r^\sharp(\eta),x)\zeta\rangle\\
&=-\sum_j\langle y_j,\xi\rangle\langle r^\sharp(\eta),\mathcal{R}^*(x_j,x)\zeta\rangle\\
&=-\sum_j\langle y_j,\xi\rangle\langle r,\eta\otimes\mathcal{R}^*(x_j,x)\zeta\rangle\\
&=-\sum_{ij}\langle y_j,\xi\rangle\langle y_i,\eta\rangle\langle x_i,\mathcal{R}^*(x_j,x)\zeta\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle \sum_{ij} y_j \otimes y_i \otimes [\![x_i, x_j, x]\!], \xi \otimes \eta \otimes \zeta \right\rangle \\
&= \langle \omega_3(x), \xi \otimes \eta \otimes \zeta \rangle
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
\langle x, \mathcal{R}^*(r^\sharp(\zeta), r^\sharp(\xi))\eta \rangle &= -\langle [\![x, r^\sharp(\zeta), r^\sharp(\xi)]\!], \eta \rangle \\
&= -\langle r^\sharp(\zeta), \mathcal{R}^*(x, r^\sharp(\xi))\eta \rangle \\
&= -\langle r, \zeta \otimes \mathcal{R}^*(x, r^\sharp(\xi))\eta \rangle \\
&= -\sum_i \langle y_i, \zeta \rangle \langle x_i, \mathcal{R}^*(x, r^\sharp(\xi))\eta \rangle \\
&= -\sum_i \langle y_i, \zeta \rangle \langle r^\sharp(\xi), \mathcal{L}^*(x_i, x)\eta \rangle \\
&= -\sum_i \langle y_i, \zeta \rangle \langle r, \xi \otimes \mathcal{L}^*(x_i, x)\eta \rangle \\
&= \sum_{ij} \langle y_i, \zeta \rangle \langle y_j, \xi \rangle \langle x_j, \mathcal{L}^*(x_i, x)\eta \rangle \\
&= \left\langle \sum_{ij} y_j \otimes [\![x_i, x, x_j]\!] \otimes y_i, \xi \otimes \eta \otimes \zeta \right\rangle \\
&= \langle \omega_2(x), \xi \otimes \eta \otimes \zeta \rangle.
\end{aligned}
$$

因此, 方程 (3.10) 成立. 类似地, 方程 (3.9) 也成立, 在此省略细节. □

定理 3.1 设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 为一个 Lie-Yamaguti 代数, $r \in \otimes^2\mathfrak{g}$ 是非退化的、反对称的, 则 r 满足如下方程:

$$
\begin{cases}
[r, r] = 0, \\
[\![r, r, r]\!] = 0
\end{cases} \tag{3.11}
$$

当且仅当 $r^\sharp : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ 是 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 上关于余伴随表示 $(\mathfrak{g}^*; \mathrm{ad}^*, -\mathcal{R}^*\tau)$ 的一个相对 Rota-Baxter 算子, 其中 $[r, r]$ 和 $[\![r, r, r]\!]$ 分别由方程 (3.1) 和 (3.2) 给出.

证明 设 $\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{g}^*$ 和 $r = \sum_i x_i \otimes y_i$. 通过计算, 有

$$
\langle \xi \otimes \eta, r \rangle = \sum_i \langle \xi, x_i \rangle \langle \eta, y_i \rangle = \left\langle \xi, \sum_i \langle \eta, y_i \rangle x_i \right\rangle.
$$

由 r 的反对称性, 有

$$
T(\xi) = \sum_i \langle \xi, y_i \rangle x_i.
$$

通过计算可得

$$
\begin{aligned}
T(\mathcal{L}^*(T(\xi), T(\eta))\zeta) &= T\left(\mathcal{L}^*\left(\sum_i \langle \xi, y_i \rangle x_i, \sum_j \langle \eta, y_j \rangle x_j \right) \zeta \right) \\
&= \sum_{ij} \langle \xi, y_i \rangle \langle \eta, y_j \rangle T(\mathfrak{L}^*(x_i, x_j)\zeta)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}&=\sum_{ij}\langle\xi,y_i\rangle\langle\eta,y_j\rangle\sum_k\langle\mathcal{L}^*(x_i,x_j)\zeta,y_k\rangle x_k\\&=-\sum_{ijk}\langle\xi,y_i\rangle\langle\eta,y_j\rangle\langle\zeta,[\![x_i,x_j,y_k]\!]\rangle x_k\\&=-(\langle\xi,\cdot\rangle\otimes\langle\eta,\cdot\rangle\otimes\langle\zeta,\cdot\rangle\otimes 1)[\![r_{31},r_{32},r_{43}]\!].\end{aligned}$$

类似地, 有

$$\begin{aligned}-T(\mathcal{R}^*(T(\zeta),T(\eta))\xi)&=-\sum_{ij}\langle\zeta,y_i\rangle\langle\eta,y_j\rangle T(\mathcal{R}^*(x_i,x_j)\xi)\\&=\sum_{ijk}\langle\zeta,y_i\rangle\langle\eta,y_j\rangle\langle\xi,[\![y_k,x_i,x_j]\!]\rangle x_k\\&=-(\langle\xi,\cdot\rangle\otimes\langle\eta,\cdot\rangle\otimes\langle\zeta,\cdot\rangle\otimes 1)[\![r_{13},r_{41},r_{12}]\!],\\T(\mathcal{R}^*(T(\zeta),T(\xi))\eta)&=\sum_{ij}\langle\zeta,y_i\rangle\langle\xi,y_j\rangle T(\mathcal{R}^*(x_i,x_j)\eta)\\&=\sum_{ijk}\langle\zeta,y_i\rangle\langle\xi,y_j\rangle\langle\eta,[\![y_k,x_i,x_j]\!]\rangle x_k\\&=-(\langle\xi,\cdot\rangle\otimes\langle\eta,\cdot\rangle\otimes\langle\zeta,\cdot\rangle\otimes 1)[\![r_{42},r_{23},r_{21}]\!],\\[\![T(\xi),T(\eta),T(\zeta)]\!]&=\sum_{ijk}[\![\langle\xi,y_i\rangle x_i,\langle\eta,y_j\rangle x_j,\langle\zeta,y_k\rangle x_k]\!]\\&=\sum_{ijk}\langle\xi,y_i\rangle\langle\eta,y_j\rangle\langle\zeta,y_k\rangle[\![x_i,x_j,x_k]\!]\\&=(\langle\xi,\cdot\rangle\otimes\langle\eta,\cdot\rangle\otimes\langle\zeta,\cdot\rangle\otimes 1)[\![r_{41},r_{42},r_{43}]\!].\end{aligned}$$

因此得到

$$\begin{aligned}&\langle\kappa,[\![T(\xi),T(\eta),T(\zeta)]\!]-T(\mathcal{L}^*(T(\xi),T(\eta))\zeta-\mathcal{R}^*(T(\zeta),T(\eta))\xi+\mathcal{R}^*(T(\zeta),T(\xi))\eta)\rangle\\&\quad=\langle\xi\otimes\eta\otimes\zeta\otimes\kappa,[\![r,r,r]\!]\rangle.\end{aligned}$$

类似地有如下关系式:

$$\langle\kappa,[T(\xi),T(\eta)]-T(\mathrm{ad}^*_{T(\xi)}\eta-\mathrm{ad}^*_{T(\eta)}\xi)\rangle=\langle\xi\otimes\eta\otimes\kappa,[r,r]\rangle.$$

因此, 结论成立. □

由此给出如下经典 Lie-Yamaguti Yang-Baxter 方程和经典 r-矩阵的概念.

定义 3.2 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 为一个 Lie-Yamaguti 代数, $r\in\otimes^2\mathfrak{g}$. 定理 3.1 中的方程 (3.11) 称为 $\mathfrak{g}$ 中经典 Lie-Yamaguti Yang-Baxter 方程, r 称为 $\mathfrak{g}$ 中经典 Lie-Yamaguti r-矩阵.

作为直接推论, 有如下结论.

推论 3.1 如果 $r\in\otimes^2\mathfrak{g}$ 是反对称的经典 Lie-Yamaguti r-矩阵, 则线性映射 $r^\sharp:\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}$ 为从 $(\mathfrak{g}^*,[\cdot,\cdot]_*,[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_*)$ 到 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 的 Lie-Yamaguti 代数同态, 其中 $r^\sharp$ 由 (3.7) 给出.

例 3.1 设 $\mathfrak{g}$ 为一个 2 维 Lie-Yamaguti 代数, 其一组基为 $\{e_1,e_2\}$, 其中的非平凡运算定义为

$$[e_1,e_2]=e_1,\quad [\![e_1,e_2,e_2]\!]=e_1,$$

则任意反对称 2-张量 $r=k(e_1\otimes e_2-e_2\otimes e_1)$ 均为经典 Lie-Yamaguti Yang-Baxter 方程的解.

以下结论同 Lie 代数和 3-Lie 代数上的结论相平行.

命题 3.3 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 为一个 Lie-Yamaguti 代数, $r\in\otimes^2\mathfrak{g}$. 假设 r 是非退化的、反对称的, 则 r 是 $\mathfrak{g}$ 上的经典 r-矩阵当且仅当如下定义的非退化的、反对称的双线性形式 $\omega\in\wedge^2\mathfrak{g}^*$:

$$\omega(x,y):=\langle(r^\sharp)^{-1}(x),y\rangle,\quad \forall\, x,y\in\mathfrak{g}$$

是一个辛结构 [2].

证明 由于 $r\in\otimes^2\mathfrak{g}$ 是非退化的, 所以对于所有 $\xi,\eta,\zeta\in\mathfrak{g}^*$, 存在 $x,y,z\in\mathfrak{g}$, 使得 $r^\sharp(\xi)=x$, $r^\sharp(\eta)=y$, $r^\sharp(\zeta)=z$. 由定理 3.1 得

$$\begin{aligned}\omega(w,[\![x,y,z]\!])&=-\langle(r^\sharp)^{-1}([\![r^\sharp(\xi),r^\sharp(\eta),r^\sharp(\zeta)]\!],w)\rangle\\&=-\langle\mathcal{L}^*(r^\sharp(\xi),r^\sharp(\eta))\zeta-\mathcal{R}^*(r^\sharp(\zeta),r^\sharp(\eta))\xi+\mathcal{R}^*(r^\sharp(\zeta),r^\sharp(\xi))\eta,w\rangle\\&=\langle\zeta,[\![r^\sharp(\xi),r^\sharp(\eta),w]\!]\rangle-\langle\xi,[\![w,r^\sharp(\zeta),r^\sharp(\eta)]\!]\rangle+\langle\eta,[\![w,r^\sharp(\zeta),r^\sharp(\xi)]\!]\rangle\\&=\omega(z,[\![x,y,w]\!])-\omega(x,[\![w,z,y]\!])+\omega(y,[\![w,z,x]\!])\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\omega(z,[x,y])&=-\langle(r^\sharp)^{-1}([r^\sharp(\xi),r^\sharp(\eta)]),z\rangle\\&=-\langle\mathrm{ad}^*_{r^\sharp(\xi)}\eta-\mathrm{ad}^*_{r^\sharp(\eta)}\xi,z\rangle\\&=\langle\eta,[r^\sharp(\xi),z]\rangle-\langle\xi,[r^\sharp(\eta),z]\rangle\\&=\omega(y,[x,z])-\omega(x,[y,z]).\end{aligned}$$

证毕. □

由一个 2-张量 $\overline{T}\in V^*\otimes\mathfrak{g}$, 诱导一个线性映射 $T:V\to\mathfrak{g}$:

$$\overline{T}(v,\xi):=\langle\xi,Tv\rangle,\quad \xi\in\mathfrak{g}^*,\quad v\in V.$$

如下定理的结论与 Lie 代数和 3-Lie 代数上的结论相平行.

定理 3.2 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 为一个 Lie-Yamaguti 代数, $(V;\rho,\mu)$ 为其一个表示, 则在以上记号意义下, $T:V\to\mathfrak{g}$ 是 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 上关于表示 $(V;\rho,\mu)$ 的一个相对 Rota-Baxter 算子当且仅当

$$r=\overline{T}-\sigma_{12}(\overline{T})$$

是半直积 Lie-Yamaguti 代数 $\mathfrak{g}\ltimes_{\rho^*,-\mu^*\tau}V^*$ 的经典 r-矩阵.

证明 设 $\{v_1,\dots,v_n\}$ 为向量空间 V 上的一组基, 且 $\{v_1^*,\dots,v_n^*\}$ 为其对应的对偶基, 则有

$$\overline{T}=\sum_i v_i^*\otimes Tv_i\in V^*\otimes\mathfrak{g}\subset\otimes^2(\mathfrak{g}\ltimes_{\rho^*,-\mu^*\tau}V^*).$$

直接计算, 有

$$[\![r_{13},r_{41},r_{12}]\!]=\sum_{ijk}([\![Tv_i,Tv_k,Tv_j]\!]\otimes v_i^*\otimes v_j^*\otimes v_k^*-[\![Tv_i,Tv_k,v_j^*]\!]\otimes v_i^*\otimes Tv_j\otimes v_k^*$$

2) Lie-Yamaguti 代数上辛结构的概念取自文献 [20].

$$
\begin{aligned}
&+ [\![v_i^*, Tv_k, Tv_j]\!] \otimes Tv_i \otimes v_j^* \otimes v_k^* + [\![Tv_i, v_k^*, Tv_j]\!] \otimes v_i^* \otimes v_j^* \otimes Tv_k),\\
[\![r_{42}, r_{23}, r_{21}]\!] &= \sum_{ijk} (v_j^* \otimes [\![Tv_k, Tv_i, Tv_j]\!] \otimes v_i^* \otimes v_k^* - Tv_j \otimes [\![Tv_k, Tv_i, v_j^*]\!] \otimes v_i^* \otimes v_k^*\\
&- v_j^* \otimes [\![v_k^*, Tv_i, Tv_j]\!] \otimes v_i^* \otimes Tv_k - v_j^* \otimes [\![Tv_k, v_i^*, Tv_j]\!] \otimes Tv_i \otimes v_k^*),\\
[\![r_{31}, r_{32}, r_{43}]\!] &= \sum_{ijk} (v_i^* \otimes v_j^* \otimes [\![Tv_i, Tv_j, Tv_k]\!] \otimes v_k^* - v_i^* \otimes v_j^* \otimes [\![Tv_i, Tv_j, v_k^*]\!] \otimes Tv_k\\
&- Tv_i \otimes v_j^* \otimes [\![v_i^*, Tv_j, Tv_k]\!] \otimes v_k^* - v_i^* \otimes Tv_j \otimes [\![Tv_i, v_j^*, Tv_k]\!] \otimes v_k^*),\\
[\![r_{41}, r_{42}, r_{43}]\!] &= \sum_{ijk} (-v_i^* \otimes v_j^* \otimes v_k^* \otimes [\![Tv_i, Tv_j, Tv_k]\!] + v_i^* \otimes v_j^* \otimes Tv_k \otimes [\![Tv_i, Tv_j, v_k^*]\!]\\
&- Tv_i \otimes v_j^* \otimes v_k^* \otimes [\![v_i^*, Tv_j, Tv_k]\!] + v_i^* \otimes Tv_j \otimes v_k^* \otimes [\![Tv_i, v_j^*, Tv_k]\!]).
\end{aligned}
$$

同样有

$$
\begin{aligned}
\sum_i Tv_i \otimes [\![Tv_i, Tv_j, v_k^*]\!] &= \sum_i Tv_i \otimes D^*(Tv_i, Tv_j) v_k^*\\
&= \sum_i Tv_i \otimes \sum_m \langle D^*(Tv_i, Tv_j) v_k^*, v_m \rangle v_m^*\\
&= \sum_{im} Tv_i \otimes (-\langle D(Tv_i, Tv_j) v_m, v_k^* \rangle v_m^*)\\
&= -\sum_m T(D(Tv_i, Tv_j) v_m) \otimes v_m^*
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
\sum_i Tv_i \otimes [\![v_i^*, Tv_j, Tv_k]\!] &= \sum_i Tv_i \otimes (-\mu^*(Tv_k, Tv_j) v_i^*)\\
&= \sum_i Tv_i \otimes \sum_m (-\langle \mu^*(Tv_k, Tv_j) v_i^*, v_m \rangle v_m^*)\\
&= \sum_{im} Tv_i \otimes (\langle \mu(Tv_k, Tv_j) v_m, v_i^* \rangle v_m^*)\\
&= \sum_m T(\mu(Tv_k, Tv_j) v_m) \otimes v_m^*.
\end{aligned}
$$

记

$$
\mathcal{O}_1(u, v, w) = [\![Tu, Tv, Tw]\!] - T(D(Tu, Tv)w + \mu(Tv, Tw)u - \mu(Tu, Tw)v), \quad \forall\, u, v, w \in V.
$$

因此

$$
\begin{aligned}
[\![r, r, r]\!] &= [\![r_{13}, r_{41}, r_{12}]\!] + [\![r_{42}, r_{23}, r_{21}]\!] + [\![r_{31}, r_{32}, r_{43}]\!] + [\![r_{41}, r_{42}, r_{43}]\!]\\
&= \sum_{ijk} (\mathcal{O}_1(v_i, v_j, v_k) \otimes v_i^* \otimes v_j^* \otimes v_k^* + v_j^* \otimes \mathcal{O}_1(v_k, v_i, v_j) \otimes v_i^* \otimes v_k^*\\
&\quad + v_i^* \otimes v_j^* \otimes \mathcal{O}_1(v_i, v_j, v_k) \otimes v_k^* - v_i^* \otimes v_j^* \otimes v_k^* \otimes \mathcal{O}_1(v_i, v_j, v_k)).
\end{aligned}
$$

同样有

$$
[r, r] = [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}]
$$

$$= \sum_{ij} (\mathcal{O}_2(v_i, v_j) \otimes v_i^* \otimes v_j^* - v_i^* \otimes \mathcal{O}_2(v_i, v_j) \otimes v_k^* + v_i^* \otimes v_j^* \otimes \mathcal{O}_2(v_i, v_j)),$$

其中

$$\mathcal{O}_2(u, v) := [Tu, Tv] - T(\rho(Tu)v - \rho(Tv)u), \quad \forall\, u, v \in V.$$

因此, 若 r 为一个 r-矩阵, 即

$$[r, r] = 0, \quad [\![r, r, r]\!] = 0$$

当且仅当

$$\mathcal{O}_1(v_i, v_j, v_k) = 0, \quad \mathcal{O}_2(v_i, v_j) = 0$$

对于所有 i、j 和 k 都成立, 而后者意味着 T 为一个相对 Rota-Baxter 算子. 证毕. □

命题 3.4 设 $(A, *, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 为一个预 Lie-Yamaguti 代数, 且 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为 A 的一组基, $\{e_i^*\}_{i=1}^n$ 为其对应的对偶基, 则

$$r := \sum_{i=1}^{n} (e_i \otimes e_i^* - e_i^* \otimes e_i)$$

为 Lie-Yamaguti 代数 $A \ltimes_{\mathrm{Ad}^*, -R^*\tau} A^*$ 的反对称的 r-矩阵, 其中 $(A; \mathrm{Ad}, R)$ 为邻接 Lie-Yamaguti 代数 A^c 的表示. r 是非退化的, 在 $A \ltimes_{\mathrm{Ad}^*, -R^*\tau} A^*$ 上所诱导的双线性形式 $\mathcal{B}$ 由 (4.1) 给出.

证明 由文献 [20, 定理 3.11] 知, 恒等映射 $\mathrm{Id} : A \to A$ 是预 Lie-Yamaguti 代数 $(A, *, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 的邻接 Lie-Yamaguti 代数 A^c 关于表示 $(A; \mathrm{Ad}, R)$ 的一个相对 Rota-Baxter 算子. 由定理 3.2 知 $r = \sum_{i=1}^n (e_i \otimes e_i^* - e_i^* \otimes e_i)$ 是 Lie-Yamaguti 代数 $A \ltimes_{\mathrm{Ad}^*, -R^*\tau} A^*$ 的经典 Yang-Baxter 方程的反对称解. 不难看出, 相应的双线性形式由 (4.1) 给出. 证毕. □

为了将文献 [19] 中 Semenov-Tyan-Shanskii 给出的结论推广到 Lie-Yamaguti 代数上来, 需要回顾二次 Lie-Yamaguti 代数的概念并证明一个引理.

定义 3.3 [14] 一个二次 Lie-Yamaguti 代数为一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$, 且其上带有一个非退化的对称双线性形式 $\mathcal{B} \in \otimes^2\mathfrak{g}^*$ 满足如下条件:

$$\mathcal{B}([x, y], z) = -\mathcal{B}(y, [x, z]), \tag{3.12}$$

$$\mathcal{B}([\![x, y, z]\!], w) = \mathcal{B}(x, [\![w, z, y]\!]), \quad \forall\, x, y, z \in \mathfrak{g}. \tag{3.13}$$

将一个二次 Lie-Yamaguti 代数记为 $((\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]), \mathcal{B})$.

引理 3.1 设 $((\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]), \mathcal{B})$ 为一个二次 Lie-Yamaguti 代数, 则由 (3.8) 所诱导的映射 $\mathcal{B}^\natural : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ 是伴随表示 $(\mathfrak{g}; \mathrm{ad}, \mathcal{R})$ 与余伴随表示 $(\mathfrak{g}^*; \mathrm{ad}^*, -\mathcal{R}^*\tau)$ 之间的一个同构.

证明 对于任意 $x, y, z, w \in \mathfrak{g}$, 都有

$$\langle \mathcal{B}^\natural(\mathrm{ad}_x y) - \mathrm{ad}_x^* \mathcal{B}^\natural(y), z\rangle = \mathcal{B}([x, y], z) + \langle \mathcal{B}^\natural(y), [x, z]\rangle = \mathcal{B}([x, y], z) + \mathcal{B}(y, [x, z]) = 0.$$

由 z 的任意性, 有

$$\mathcal{B}^\natural(\mathrm{ad}_x y) = \mathrm{ad}_x^* \mathcal{B}^\natural(y), \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{g}.$$

类似地, 有

$$\langle \mathcal{B}^\natural(\mathcal{R}(x, y)z) + \mathcal{R}^*(y, x)\mathcal{B}^\natural(z), w\rangle = \mathcal{B}([\![z, x, y]\!], w) + \langle \mathcal{R}^*(y, x)\mathcal{B}^\natural(z), w\rangle$$

$$\begin{aligned}&= \mathcal{B}(\llbracket z,x,y\rrbracket,w)-\mathcal{B}(z,\llbracket w,y,x\rrbracket)\\&= 0.\end{aligned}$$

由 w 的任意性, 有

$$\mathcal{B}^\natural(\mathcal{R}(x,y)z)=-\mathcal{R}^*(y,x)\mathcal{B}^\natural(z),\quad \forall\, x,y,z\in\mathfrak{g}.$$

因此, $\mathcal{B}^\natural$ 是伴随表示与余伴随表示之间的一个同构. 证毕. □

推论 3.2 设 $((\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket),\mathcal{B})$ 为一个二次 Lie-Yamaguti 代数, 则 $\mathcal{B}^\natural:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}^*$ 满足

$$\mathcal{B}^\natural(\mathcal{L}(x,y)z)=\mathcal{L}^*(x,y)\mathcal{B}^\natural(z),\quad \forall\, x,y,z\in\mathfrak{g}.$$

证明 证明同引理 3.1 类似, 在此省略细节. □

现在将 Semonov-Tyan-Shanskii 给出的结论推广到 Lie-Yamaguti 代数上.

定理 3.3 设 $((\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket),\mathcal{B})$ 为一个二次 Lie-Yamaguti 代数, 且 $T:\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}$ 为一个线性映射, 则 T 是 $\mathfrak{g}$ 上关于余伴随表示 $(\mathfrak{g}^*;\mathrm{ad}^*,-\mathcal{R}^*\tau)$ 的一个相对 Rota-Baxter 算子当且仅当 $T\circ\mathcal{B}^\natural$ 是 $\mathfrak{g}$ 上关于伴随表示 $(\mathfrak{g};\mathrm{ad},\mathcal{R})$ 的一个相对 Rota-Baxter 算子.

证明 对于所有 $x,y,z\in\mathfrak{g}$, 由引理 3.1 知

$$\begin{aligned}(T\circ\mathcal{B}^\natural)([T\circ\mathcal{B}^\natural(x),y]+[x,T\circ\mathcal{B}^\natural(y)])&=T(\mathcal{B}^\natural(\mathrm{ad}_{T\circ\mathcal{B}^\natural(x)}y)-\mathcal{B}^\natural(\mathrm{ad}_{T\circ\mathcal{B}^\natural(y)}x))\\&=T(\mathrm{ad}^*_{T\circ\mathcal{B}^\natural(x)}\mathcal{B}^\natural(y)-\mathrm{ad}^*_{T\circ\mathcal{B}^\natural(y)}\mathcal{B}^\natural(x))\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&(T\circ\mathcal{B}^\natural)(\llbracket T\circ\mathcal{B}^\natural(x),T\circ\mathcal{B}^\natural(y),z\rrbracket+\llbracket x,T\circ\mathcal{B}^\natural(y),T\circ\mathcal{B}^\natural(z)\rrbracket-\llbracket y,T\circ\mathcal{B}^\natural(x),T\circ\mathcal{B}^\natural(z)\rrbracket)\\&\quad=T(\mathcal{L}^*(T\circ\mathcal{B}^\natural(x),T\circ\mathcal{B}^\natural(y))\mathcal{B}^\natural(z)-\mathcal{R}^*(T\circ\mathcal{B}^\natural(z),T\circ\mathcal{B}^\natural(y))\mathcal{B}^\natural(x)+\mathcal{R}^*(T\circ\mathcal{B}^\natural(z),T\circ\mathcal{B}^\natural(x))\mathcal{B}^\natural(y)).\end{aligned}$$

因此, T 是 $\mathfrak{g}$ 上关于余伴随表示 $(\mathfrak{g}^*;\mathrm{ad}^*,-\mathcal{R}^*\tau)$ 的一个相对 Rota-Baxter 算子当且仅当 $T\circ\mathcal{B}^\natural$ 是 $\mathfrak{g}$ 上关于伴随表示 $(\mathfrak{g};\mathrm{ad},\mathcal{R})$ 的一个相对 Rota-Baxter 算子. 证毕. □

如下推论可直接得到.

推论 3.3 设 $((\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket),\mathcal{B})$ 为一个二次 Lie-Yamaguti 代数, 则 $r\in\wedge^2\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}$ 上的经典 Lie-Yamaguti Yang-Baxter 方程的解当且仅当 $r^\sharp\circ\mathcal{B}^\natural:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 上关于伴随表示 $(\mathfrak{g};\mathrm{ad},\mathcal{R})$ 的一个相对 Rota-Baxter 算子.

本节最后, 给出局部闭链 Lie-Yamaguti 双代数的定义.

定义 3.4 一个局部闭链 Lie-Yamaguti 双代数为一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket)$, 并且包含两个线性映射 $\delta=\delta_1+\delta_2:\mathfrak{g}\to\otimes^2\mathfrak{g}$ 和 $\omega=\omega_1+\omega_2+\omega_3:\mathfrak{g}\to\otimes^3\mathfrak{g}$, 使得 (δ^*,ω^*) 为 $\mathfrak{g}^*$ 上的一个 Lie-Yamaguti 代数结构, 且如下条件成立:

- δ_1 是关于表示 $(\otimes^2\mathfrak{g};1\otimes\mathrm{ad},1\otimes\mathcal{R})$ 的一个 1 阶闭链;
- δ_2 是关于表示 $(\otimes^2\mathfrak{g};\mathrm{ad}\otimes1,\mathcal{R}\otimes1)$ 的一个 1 阶闭链;
- ω_1 是关于表示 $(\otimes^3\mathfrak{g};\mathrm{ad}\otimes1\otimes1,\mathcal{R}\otimes1\otimes1)$ 的一个 1 阶闭链;
- ω_2 是关于表示 $(\otimes^3\mathfrak{g};1\otimes\mathrm{ad}\otimes1,1\otimes\mathcal{R}\otimes1)$ 的一个 1 阶闭链;
- ω_3 是关于表示 $(\otimes^3\mathfrak{g};1\otimes1\otimes\mathrm{ad},1\otimes1\otimes\mathcal{R})$ 的一个 1 阶闭链.

注 3.1 当一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 退化为一个 Lie 三系 $(\mathfrak{g},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 时, 可以得到 Lie 三系上的局部闭链双代数结构: 在 Lie 三系 $(\mathfrak{g},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 上存在余代数结构 $\omega=\omega_1+\omega_2+\omega_3:\mathfrak{g}\to\otimes^3\mathfrak{g}$, 使得如下条件成立:

• ω_1 是关于表示 $(\otimes^3\mathfrak{g};\mathrm{ad}\otimes 1\otimes 1,\mathcal{R}\otimes 1\otimes 1)$ 的一个 1 阶闭链;

• ω_2 是关于表示 $(\otimes^3\mathfrak{g};1\otimes\mathrm{ad}\otimes 1,1\otimes\mathcal{R}\otimes 1)$ 的一个 1 阶闭链;

• ω_3 是关于表示 $(\otimes^3\mathfrak{g};1\otimes 1\otimes\mathrm{ad},1\otimes 1\otimes\mathcal{R})$ 的一个 1 阶闭链, 其中 $(\mathfrak{g};\mathcal{R})$ 是 Lie 三系 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示.

注 3.2 在此需指出, 一般而言, 方程 (3.5) 和 (3.6) 中的 δ_i 和 ω_j $(1\leqslant i\leqslant 2,\ 1\leqslant j\leqslant 3)$ 不再是 Lie-Yamaguti 代数 $\mathfrak{g}$ 的 1 阶闭链, 因此经典 Lie-Yamaguti Yang-Baxter 方程不能给出局部闭链 Lie-Yamaguti 双代数. 与 3-Lie 代数情形不同, 即使 Lie-Yamaguti 代数退化为 Lie 三系, 这些 ω_j 也不是 1 阶闭链. 这意味着, Lie 三系的经典 Yang-Baxter 方程的解也无法给出 Lie 三系上的局部闭链条件. 因此, 同样作为拥有三元运算的高阶结构, 3-Lie 代数同 Lie 三系有很大的差别.

4 Manin 三元组、匹配对和 double Lie-Yamaguti 双代数

考虑 double Lie-Yamaguti 双代数, 并给出 double Lie-Yamaguti 双代数与局部闭链 Lie-Yamaguti 双代数之间的关系. 首先, 引入 Manin 三元组的概念.

定义 4.1 设 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 均为 Lie-Yamaguti 代数. 一个 Manin 三元组是一个二次 Lie-Yamaguti 代数 $((\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]),\mathcal{B})$, 满足

(i) 作为线性空间, 有 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$;

(ii) $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 均为 $\mathfrak{g}$ 的迷向子代数, 即 $\mathcal{B}(x_1,y_1)=\mathcal{B}(x_2,y_2)=0$ 对于所有的 $x_1,y_1\in\mathfrak{g}_1$ 和 $x_2,y_2\in\mathfrak{g}_2$ 都成立;

(iii) 对于所有的 $x_1,y_1\in\mathfrak{g}_1$ 和 $x_2,y_2\in\mathfrak{g}_2$, 有

$$\mathrm{pr}_1[\![x_1,y_1,x_2]\!]=0,\quad \mathrm{pr}_1[\![x_1,x_2,y_1]\!]=0,\quad \mathrm{pr}_2[\![x_2,y_2,x_1]\!]=0,\quad \mathrm{pr}_2[\![x_2,x_1,y_2]\!]=0,$$

其中 pr_1 和 pr_2 分别是 $\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$ 到 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 上的投射.

将一个 Lie-Yamaguti 代数 Manin 三元组记为 $((\mathfrak{g},\mathcal{B}),\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2)$, 或简记为 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2)$.

注 4.1 回顾 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 上的一个积结构是一个 Nijenhuis 算子 $E:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 并且满足 $E^2=\mathrm{Id}$. 在 $\mathfrak{g}$ 上存在积结构 E 当且仅当 $\mathfrak{g}$ 可分解为两个子代数的直和 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$. 定义 4.1 中的条件 (iii) 恰好是完美 (perfect) 积结构的条件. 更多关于 Lie-Yamaguti 代数上积结构与复结构的细节, 可参见文献 [21]. 因此一个 Lie-Yamaguti 代数的 Manin 三元组 $((\mathfrak{g},\mathcal{B}),\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2)$ 实际上是一个二次 Lie-Yamaguti 代数, 并且其上存在一个完美积结构使得其分解子代数是迷向的.

设 $((\mathfrak{g},\mathcal{B}),\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2)$ 和 $((\mathfrak{g}',\mathcal{B}'),\mathfrak{g}_1',\mathfrak{g}_2')$ 为两个 Lie-Yamaguti 代数 Manin 三元组. 在 $((\mathfrak{g},\mathcal{B}),\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2)$ 和 $((\mathfrak{g}',\mathcal{B}'),\mathfrak{g}_1',\mathfrak{g}_2')$ 之间的一个同构是一个 Lie-Yamaguti 代数同构 $f:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ 满足

$$f(\mathfrak{g}_1)\subset\mathfrak{g}_1',\quad f(\mathfrak{g}_2)\subset\mathfrak{g}_2',\quad \mathcal{B}(x,y)=\mathcal{B}'(f(x),f(y)),\quad \forall\, x,y\in\mathfrak{g}.$$

设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 和 $(\mathfrak{g}^*,[\cdot,\cdot]_*,[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_*)$ 为 Lie-Yamaguti 代数. 在 $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*$ 上存在一个自然的、非退化的、对称双线性形式 $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}(x+\xi,y+\eta)=\langle x,\eta\rangle+\langle\xi,y\rangle,\quad \forall\, x,y\in\mathfrak{g},\quad \xi,\eta\in\mathfrak{g}^*. \tag{4.1}$$

对于所有 $x,y,z\in\mathfrak{g}$ 和 $\xi,\eta,\zeta\in\mathfrak{g}^*$, 定义一对运算 $([\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*})$ 为

$$[x+\xi,y+\eta]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*}=[x,y]+\mathrm{ad}_x^*\xi-\mathrm{ad}_y^*\eta+[\xi,\eta]_*+\mathfrak{ad}_\xi^*y-\mathfrak{ad}_\eta^*x, \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}[\![x+\xi,y+\eta,z+\zeta]\!]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*}=&[\![x,y,z]\!]+\mathcal{L}^*(x,y)\zeta-n\mathcal{R}^*(z,y)\xi+\mathcal{R}^*(z,x)\eta\\&+[\![\xi,\eta,\zeta]\!]_*+\mathfrak{L}^*(\xi,\eta)z-\mathfrak{R}^*(\zeta,\eta)x+\mathfrak{R}^*(\zeta,\xi)y.\end{aligned} \tag{4.3}$$

这里 $(\mathrm{ad}^*,-\mathcal{R}^*\tau)$ 和 $(\mathfrak{ad}^*,-\mathfrak{R}^*\tau)$ 分别是 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}^*$ 上和 $\mathfrak{g}^*$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的余伴随表示, 其中 $\mathcal{L}^*=D_{\mathrm{ad}^*,-\mathcal{R}^*\tau}$ 和 $\mathfrak{L}^*=D_{\mathfrak{ad}^*,-\mathfrak{R}^*\tau}$.

注意到, 由 (4.2) 和 (4.3) 给出的运算 $([\cdot,\cdot]_{\bowtie},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\bowtie})$ 关于双线性形式 $\mathcal{B}$ 是不变的, 其中 $\mathcal{B}$ 由 (4.1) 给出, 且满足定义 4.1 中的条件 (iii). 如果 $(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*,[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*})$ 为一个 Lie-Yamaguti 代数, 不难看出 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}^*$ 关于双线性形式 $\mathcal{B}$ 是迷向的. 因此, $((\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*,\mathcal{B}),\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*)$ 是 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}^*$ 的一个 Manin 三元组, 称作标准 Manin 三元组.

命题 4.1 Lie-Yamaguti 代数上的任何 Manin 三元组都同一个标准 Manin 三元组同构.

证明 设 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 均为 Lie-Yamaguti 代数. 如果 $((\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2,\mathcal{B}),\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2)$ 为一个 Lie-Yamaguti 代数 Manin 三元组, 则作为线性空间, 通过下式可得 $\mathfrak{g}_2$ 同构于 $\mathfrak{g}_1^*$:

$$\langle\alpha,x\rangle:=\mathcal{B}(\alpha,x),\quad\forall\,\alpha\in\mathfrak{g}_2,\quad x\in\mathfrak{g}_1.$$

因此, 在 $\mathfrak{g}_1^*$ 上存在一个相应的 Lie-Yamaguti 代数结构. 则 $((\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2,\mathcal{B}),\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2)$ 与标准 Manin 三元组 $((\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_1^*,\mathcal{B}),\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1^*)$ 同构. 证毕. □

接下来, 引入 Lie-Yamaguti 代数的匹配对的概念. 设 $(\mathfrak{g}_1,[\cdot,\cdot]_1,[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_1)$ 和 $(\mathfrak{g}_2,[\cdot,\cdot]_2,[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_2)$ 为 Lie-Yamaguti 代数, 且 $\rho_1:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_2)$, $\mu_1:\otimes^2\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_2)$ 和 $\rho_2:\mathfrak{g}_2\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_1)$, $\mu_2:\otimes^2\mathfrak{g}_2\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_1)$ 为线性映射. 在 $\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$ 上, 对于所有 $x,y,z\in\mathfrak{g}_1$ 和 $u,v,w\in\mathfrak{g}_2$, 定义一对运算 $([\cdot,\cdot]_{\bowtie},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\bowtie})$ 如下:

$$[x+u,y+v]_{\bowtie}=[x,y]_1+\rho_2(u)y-\rho_2(v)x+[u,v]_2+\rho_1(x)v-\rho_1(y)u, \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}[\![x+u,y+v,z+w]\!]_{\bowtie}=&[\![x,y,z]\!]_1+D_2(u,v)z+\mu_2(v,w)x-\mu_2(u,w)y\\&+[\![u,v,w]\!]_2+D_1(x,y)w+\mu_2(y,z)u-\mu_2(x,z)v,\end{aligned} \tag{4.5}$$

其中, $D_1:=D_{\rho_1,\mu_1}$ 和 $D_2:=D_{\rho_2,\mu_2}$. 注意到, 一般情形下, $([\cdot,\cdot]_{\bowtie},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\bowtie})$ 未必是 Lie-Yamaguti 代数结构.

注 4.2 注意到, 由 (4.2) 和 (4.3) 所定义的运算 $([\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*})$ 为 (4.4) 和 (4.5) 所定义的运算的特殊情形, 其中, $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^*=\mathfrak{g}_2$ 以及 $\rho_1=\mathrm{ad}^*$, $\mu_1=-\mathcal{R}^*\tau$, $\rho_2=\mathfrak{ad}^*$, $\mu_2=-\mathfrak{R}^*\tau$.

定义 4.2 设 $(\mathfrak{g}_1,[\cdot,\cdot]_1,[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_1)$ 和 $(\mathfrak{g}_2,[\cdot,\cdot]_2,[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_2)$ 均为 Lie-Yamaguti 代数. 如果由 (4.4) 和 (4.5) 所定义的运算 $([\cdot,\cdot]_{\bowtie},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\bowtie})$ 构成了 $\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$ 上的一个 Lie-Yamaguti 代数结构, 则称四元组 $(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2;(\rho_1,\mu_1),(\rho_2,\mu_2))$ 为一个 Lie-Yamaguti 代数的匹配对.

命题 4.2 在如上记号意义下, 四元组 $(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2;(\rho_1,\mu_1),(\rho_2,\mu_2))$ 为 Lie-Yamaguti 代数的匹配对当且仅当如下条件成立:

(i) $(\mathfrak{g}_2;\rho_1,\mu_1)$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 的表示;

(ii) $(\mathfrak{g}_1;\rho_2,\mu_2)$ 为 $\mathfrak{g}_2$ 的表示;

(iii) 对于所有 $x,y,z\in\mathfrak{g}_1$ 和 $u,v,w\in\mathfrak{g}_2$, 以下等式成立:

$$[\rho_2(u)x,y]_1-\rho_2(\rho_1(x)u)y-\rho_2(u)[x,y]_1-[\rho_2(u)y,x]_1+\rho_2(\rho_1(y)u)x=0, \tag{4.6}$$

$$\llbracket \rho_2(u)x,y,z\rrbracket_1=\llbracket \rho_2(u)y,x,z\rrbracket_1, \tag{4.7}$$

$$\mu_2(u,v)[x,y]_1-\mu_2(\rho_1(y)u,v)x+\mu_2(\rho_1(x)u,v)y=0, \tag{4.8}$$

$$\llbracket x,y,\rho_2(u)z\rrbracket_1=\rho_2(D_1(x,y)u)z+\rho_2(u)\llbracket x,y,z\rrbracket_1, \tag{4.9}$$

$$\mu_2(u,\rho_1(x)v)y=[x,\mu_2(u,v)y]_1, \tag{4.10}$$

$$\rho_2(\mu_1(x,y)u)z=\rho_2(\mu_1(x,z)u)y, \tag{4.11}$$

$$\llbracket x,y,\mu_2(u,v)z\rrbracket_1=\mu_2(u,v)\llbracket x,y,z\rrbracket_1+\mu_2(D_1(x,y)u,v)z+\mu_2(u,D_1(x,y)v)z, \tag{4.12}$$

$$\mu_2(u,\mu_1(x,y)v)z=\llbracket \mu_2(u,v)z,x,y\rrbracket_1-D_2(v,\mu_1(z,x)u)y+\mu_2(v,\mu_1(z,y)u)x, \tag{4.13}$$

$$\mu_2(u,\mu_2(x,y)v)z=D_2(\mu_1(z,x)u,v)y-\llbracket x,\mu_2(u,v)z,y\rrbracket_1+\mu_2(v,\mu_2(z,y)u)x, \tag{4.14}$$

$$[\rho_1(x)u,v]_1-\rho_1(\rho_2(u)x)v-\rho_1(x)[u,v]_2-[\rho_1(x)v,u]_2+\rho_1(\rho_2(v)x)u=0, \tag{4.15}$$

$$\llbracket \rho_1(x)u,v,w\rrbracket_2=\llbracket \rho_1(x)v,u,w\rrbracket_2, \tag{4.16}$$

$$\mu_1(x,y)[u,v]_2-\mu_1(\rho_2(v)x,y)u+\mu_1(\rho_2(u)x,y)v=0, \tag{4.17}$$

$$\llbracket u,v,\rho_1(x)w\rrbracket_2=\rho_1(D_2(u,v)x)w+\rho_1(x)\llbracket u,v,w\rrbracket_2, \tag{4.18}$$

$$\mu_1(x,\rho_2(u)y)v=[u,\mu_1(x,y)v]_2, \tag{4.19}$$

$$\rho_1(\mu_2(u,v)x)w=\rho_1(\mu_2(u,w)x)v, \tag{4.20}$$

$$\llbracket u,v,\mu_1(x,y)w\rrbracket_2=\mu_1(x,y)\llbracket u,v,w\rrbracket_2+\mu_1(D_2(u,v)x,y)w+\mu_1(x,D_2(u,v)y)w, \tag{4.21}$$

$$\mu_1(x,\mu_2(u,v)y)w=\llbracket \mu_1(x,y)w,u,v\rrbracket_2-D_1(y,\mu_2(w,u)x)v+\mu_1(y,\mu_2(w,v)x)u, \tag{4.22}$$

$$\mu_1(x,\mu_1(u,v)y)w=D_1(\mu_2(w,u)x,y)v-\llbracket u,\mu_1(x,y)w,v\rrbracket_2+\mu_1(y,\mu_1(w,v)x)u, \tag{4.23}$$

其中, $D_1=D_{\rho_1,\mu_1}$, $D_2=D_{\rho_2,\mu_2}$.

证明 证明是直接的, 在此省略细节. □

通过直接计算, 也可得到如下推论.

推论 4.1 在命题 4.2 的假设条件下, 对于所有的 $x,y,z\in\mathfrak{g}_1$ 和 $u,v,w\in\mathfrak{g}_2$, 有如下等式成立:

$$\begin{aligned}
&D_2(\rho_1(x)u,v)=D_2(\rho_1(x)v,u),\\
&D_2(u,v)[x,y]_1=[D_2(u,v)x,y]_1+[x,D_2(u,v)y]_1,\\
&D_2(u,v)\llbracket x,y,z\rrbracket_1=\llbracket D_2(u,v)x,y,z\rrbracket_1+\llbracket x,D_2(u,v)y,z\rrbracket_1+\llbracket x,y,D_2(u,v)z\rrbracket_1,\\
&D_1(\rho_2(u)x,y)=D_1(\rho_2(u)y,x),\\
&D_2(x,y)[u,v]_2=[D_2(x,y)u,v]_2+[u,D_2(x,y)v]_2,\\
&D_2(x,y)\llbracket u,v,w\rrbracket_2=\llbracket D_2(x,y)u,v,w\rrbracket_2+\llbracket u,D_2(x,y)v,w\rrbracket_2+\llbracket u,v,D_2(x,y)w\rrbracket_2.
\end{aligned}$$

在以下命题中, 可以看出 Lie-Yamaguti 代数上 Manin 三元组与匹配对之间的关系.

命题 4.3 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket)$ 和 $(\mathfrak{g}^*,[\cdot,\cdot]_*,\llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket_*)$ 均为 Lie-Yamaguti 代数, 则四元组 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*;(\mathrm{ad}^*,-\mathcal{R}^*\tau),(\mathfrak{ad}^*,-\mathfrak{R}^*\tau))$ 是一个 Lie-Yamaguti 代数匹配对当且仅当 $((\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*,\mathcal{B}),\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*)$ 是一个 Lie-Yamaguti 代数 Manin 三元组, 其中不变双线性形式 $\mathcal{B}$ 由 (4.1) 给出.

证明 设 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*;(\mathrm{ad}^*,-\mathcal{R}^*\tau),(\mathfrak{ad}^*,-\mathfrak{R}^*\tau))$ 为 Lie-Yamaguti 代数的一个匹配对, 则 $(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*,[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*},\llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*})$ 为一个 Lie-Yamaguti 代数, 其中 $([\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*},\llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*})$ 由 (4.2) 和 (4.3) 给出. 仅需要证明

$\mathcal{B}$ 满足不变性条件 (3.12) 和 (3.13). 事实上, 对于所有 $x,y,z,w\in\mathfrak{g}$ 和 $\xi,\eta,\zeta,\delta\in\mathfrak{g}^*$, 一方面, 有

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}(x+\xi,[y+\eta,z+\zeta]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*})\\&\quad=\mathcal{B}(x+\xi,[y,z]+\mathrm{ad}_y^*\zeta-\mathrm{ad}_z^*\eta+[\eta,\zeta]_*+\mathfrak{ad}_\eta^*z-\mathfrak{ad}_\zeta^*y)\\&\quad=\langle x,\mathrm{ad}_y^*\zeta-\mathrm{ad}_z^*\eta+[\eta,\zeta]_*\rangle+\langle\xi,[y,z]+\mathfrak{ad}_\eta^*z-\mathfrak{ad}_\zeta^*y\rangle\\&\quad=-\langle[y,x],\zeta\rangle+\langle[z,x],\eta\rangle+\langle x,[\eta,\zeta]_*\rangle+\langle\xi,[y,z]\rangle-\langle[\eta,\xi]_*,z\rangle+\langle[\zeta,\xi]_*,y\rangle.\end{aligned}$$

另一方面, 同样有

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}([x+\xi,y+\eta]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*},z+\zeta)\\&\quad=\mathcal{B}([x,y]+\mathrm{ad}_x^*\eta-\mathrm{ad}_y^*\xi+[\xi,\eta]_*+\mathfrak{ad}_\xi^*y-\mathfrak{ad}_\eta^*x,z+\zeta)\\&\quad=\langle\mathrm{ad}_x^*\eta-\mathrm{ad}_y^*\xi+[\xi,\eta]_*,z\rangle+\langle[x,y]+\mathfrak{ad}_\xi^*y-\mathfrak{ad}_\eta^*x,\zeta\rangle\\&\quad=-\langle\eta,[x,z]\rangle+\langle\xi,[y,z]\rangle+\langle[\xi,\eta]_*,z\rangle+\langle[x,y],\zeta\rangle-\langle y,[\xi,\zeta]_*\rangle+\langle x,[\eta,\zeta]_*\rangle.\end{aligned}$$

因此, 得到 $\mathcal{B}(x+\xi,[y+\eta,z+\zeta]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*})=\mathcal{B}([x+\xi,y+\eta]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*},z+\zeta)$. 类似地, 一方面, 有

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}([\![x+\xi,y+\eta,z+\zeta]\!]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*},w+\delta)\\&\quad=\mathcal{B}([\![x,y,z]\!]+\mathcal{L}^*(x,y)\zeta-\mathcal{R}^*(z,y)\xi+\mathcal{R}^*(z,x)\eta\\&\qquad+[\![\xi,\eta,\zeta]\!]_*+\mathfrak{L}^*(\xi,\eta)z-\mathfrak{R}^*(\zeta,\eta)x+\mathfrak{R}^*(\zeta,\xi)y,w+\delta)\\&\quad=\langle[\![x,y,z]\!]+\mathfrak{L}^*(\xi,\eta)z-\mathfrak{R}^*(\zeta,\eta)x+\mathfrak{R}^*(\zeta,\xi)y,\delta\rangle\\&\qquad+\langle[\![\xi,\eta,\zeta]\!]_*+\mathcal{L}^*(x,y)\zeta-\mathcal{R}^*(z,y)\xi+\mathcal{R}^*(z,x)\eta,w\rangle\\&\quad=\langle[\![x,y,z]\!],\delta\rangle-\langle z,[\![\xi,\eta,\delta]\!]_*\rangle+\langle x,[\![\delta,\zeta,\eta]\!]_*\rangle-\langle y,[\![\delta,\zeta,\xi]\!]_*\rangle\\&\qquad+\langle[\![\xi,\eta,\zeta]\!]_*,w\rangle-\langle\zeta,[\![x,y,w]\!]_*\rangle+\langle\xi,[\![w,z,y]\!]\rangle-\langle\eta,[\![w,z,x]\!]\rangle.\end{aligned}$$

另一方面, 同样有

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}(x+\xi,[\![w+\delta,z+\zeta,y+\eta]\!]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*})\\&\quad=\mathcal{B}(x+\xi,[\![w,z,y]\!]+\mathcal{L}^*(w,z)\eta-\mathcal{R}^*(y,z)\delta+\mathcal{R}^*(y,w)\zeta\\&\qquad+[\![\delta,\zeta,\eta]\!]_*+\mathfrak{L}^*(\delta,\zeta)y-\mathfrak{R}^*(\eta,\zeta)w+\mathfrak{R}^*(\eta,\delta)z)\\&\quad=\langle x,[\![\delta,\zeta,\eta]\!]_*+\mathcal{L}^*(w,z)\eta-\mathcal{R}^*(y,z)\delta+\mathcal{R}^*(y,w)\zeta\rangle\\&\qquad+\langle\xi,[\![w,z,y]\!]+\mathfrak{L}^*(\delta,\zeta)y-\mathfrak{R}^*(\eta,\zeta)w+\mathfrak{R}^*(\eta,\delta)z\rangle\\&\quad=\langle x,[\![\delta,\zeta,\eta]\!]_*\rangle-\langle[\![w,z,x]\!],\eta\rangle+\langle[\![x,y,z]\!],\delta\rangle-\langle[\![x,y,w]\!],\zeta\rangle\\&\qquad+\langle\xi,[\![w,z,y]\!]\rangle-\langle[\![\delta,\zeta,\xi]\!]_*,y\rangle+\langle[\![\xi,\eta,\zeta]\!]_*,w\rangle-\langle[\![\xi,\eta,\delta]\!]_*,z\rangle.\end{aligned}$$

因此得到 $\mathcal{B}([\![x+\xi,y+\eta,z+\zeta]\!]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*},w+\delta)=\mathcal{B}(x+\xi,[\![w+\delta,z+\zeta,y+\eta]\!]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*})$.

反之, 如果 $((\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*,\mathcal{B}),\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*)$ 为一个 Manin 三元组, 其中 $\mathcal{B}$ 由 (4.1) 给出. 对于所有 $x\in\mathfrak{g}$ 和 $\xi,\eta,\zeta\in\mathfrak{g}^*$, 由 (3.12), 有

$$\langle\eta,\rho_2(\xi)x\rangle=\mathcal{B}(\eta,[\xi,x]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*})=-\mathcal{B}([\xi,\eta]_*,x)=-\langle[\xi,\eta]_*,x\rangle=\langle\eta,\mathfrak{ad}_\xi^*x\rangle,$$

此式蕴涵 $\rho_2=\mathfrak{ad}^*$. 由 (3.13), 同样有

$$\langle\zeta,\mu_2(\xi,\eta)x\rangle=\mathcal{B}(\zeta,[\![x,\xi,\eta]\!]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*})=\mathcal{B}([\![\zeta,\eta,\xi]\!]_*,x)=\langle[\![\zeta,\eta,\xi]\!]_*,x\rangle=-\langle\zeta,\mathfrak{R}^*(\eta,\xi)x\rangle,$$

此式蕴涵 $\mu_2=-\mathfrak{R}^*\tau$. 类似地, 有 $\rho_1=\mathrm{ad}^*$ 和 $\mu_1=-\mathcal{R}^*\tau$. 因此有 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*,(\mathrm{ad}^*,-\mathcal{R}^*\tau),(\mathfrak{ad}^*,-\mathfrak{R}^*\tau))$ 为 Lie-Yamaguti 代数的一个匹配对. 证毕. □

现在引入 double Lie-Yamaguti 双代数的概念. 在此之前, 先给出如下命题.

命题 4.4 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 为一个 Lie-Yamaguti 代数, 且 $\delta:\mathfrak{g}\to\otimes^2\mathfrak{g}$ 和 $\omega:\mathfrak{g}\to\otimes^3\mathfrak{g}$ 为两个线性映射. 则 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*;(\mathrm{ad}^*,-\mathcal{R}^*\tau),(\mathfrak{ad}^*,-\mathfrak{R}^*\tau))$ 为一个 Lie-Yamaguti 代数匹配对当且仅当如下条件成立:

(i) $(\mathfrak{g},\delta,\omega)$ 为一个 Lie-Yamaguti 余代数;

(ii) 对于所有的 $x,y,z\in\mathfrak{g}$, 以下相容性条件成立:

$$\delta([x,y])=(\mathrm{ad}_x\otimes1+1\otimes\mathrm{ad}_x)\delta(y)-(\mathrm{ad}_y\otimes1+1\otimes\mathrm{ad}_y)\delta(x),\tag{4.24}$$

$$(1\otimes\mathcal{R}(y,z))\delta(x)=(1\otimes\mathcal{R}(x,z))\delta(y),\tag{4.25}$$

$$\omega([x,y])=(1\otimes1\otimes\mathrm{ad}_x)\omega(y)-(1\otimes1\otimes\mathrm{ad}_y)\omega(x),\tag{4.26}$$

$$\delta([\![x,y,z]\!])=(\mathcal{L}(x,y)\otimes1+1\otimes\mathcal{L}(x,y))\omega(z),\tag{4.27}$$

$$(\mathcal{R}(y,z)\otimes1)\delta(x)=(\mathcal{R}(x,z)\otimes1)\delta(y),\tag{4.28}$$

$$\omega([\![x,y,z]\!])=(\mathcal{L}(x,y)\otimes1\otimes1+1\otimes\mathcal{L}(x,y)\otimes1+1\otimes1\otimes\mathcal{L}(x,y))\omega(z),\tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}&(1\otimes\mathcal{R}(y,x)\otimes1-R(x,y)\otimes1\otimes1)\omega(z)\\&\quad=\sigma_{12}\sigma_{23}(1\otimes\mathcal{R}(x,z)\otimes1)\omega(y)+\sigma_{23}(1\otimes\mathcal{R}(y,z)\otimes1)\omega(x).\end{aligned}\tag{4.30}$$

证明 只需要证明方程 (4.6)–(4.23) 等价于条件 (ii). 注意到当 $\rho_1=\mathrm{ad}^*$, $\mu_1=-\mathcal{R}^*\tau$ 且 $\rho_2=\mathfrak{ad}^*$, $\mu_2=-\mathfrak{R}^*\tau$ 时, 方程 (4.6)–(4.9) 和 (4.11)–(4.13) 分别等价于条件 (4.24)–(4.30), 方程 (4.10) 等价于条件 ω 关于前两个变量是反对称的, 并且方程 (4.13) 与 (4.14) 等价. 事实上, 对于所有 $x,y,z\in\mathfrak{g}$ 和 $\xi,\eta\in\mathfrak{g}^*$, 通过直接计算, 有

$$\begin{aligned}&\langle[\mathfrak{ad}^*_\xi x,y]-\mathfrak{ad}^*_{\mathrm{ad}^*_x\xi}y-\mathfrak{ad}^*_\xi[x,y]-[\mathfrak{ad}^*_\xi y,x]+\mathfrak{ad}^*_{\mathrm{ad}^*_y\xi}x,\eta\rangle\\&\quad=\langle\delta(x),\xi\otimes\mathrm{ad}^*_y\eta\rangle+\langle\delta(y),\mathrm{ad}^*_x\xi\otimes\eta\rangle+\langle\delta([x,y]),\xi\otimes\eta\rangle+\langle\delta(y),\xi\otimes\mathrm{ad}^*_x\eta\rangle-\langle\delta(x),\mathrm{ad}^*_y\xi\otimes\eta\rangle\\&\quad=\langle\delta([x,y])-(\mathrm{ad}_x\otimes1+1\otimes\mathrm{ad}_x)\delta(y)+(\mathrm{ad}_y\otimes1+1\otimes\mathrm{ad}_y)\delta(x),\xi\otimes\eta\rangle,\end{aligned}$$

此式蕴涵 (4.6) 等价于 (4.24). 同时, 有

$$\begin{aligned}\langle[\![\mathfrak{ad}^*_\xi x,y,z]\!]-[\![\mathfrak{ad}^*_\xi y,x,z]\!],\zeta\rangle&=-\langle\mathfrak{ad}^*_\xi x,\mathcal{R}^*(y,z)\eta\rangle+\langle\mathfrak{ad}^*_\xi y,\mathcal{R}^*(x,z)\eta\rangle\\&=\langle\delta(x),\xi\otimes\mathcal{R}^*(y,z)\eta\rangle-\langle\delta(y),\xi\otimes\mathcal{R}^*(x,z)\eta\rangle\\&=\langle-(1\otimes\mathcal{R}(y,z))\delta(x)+(1\otimes\mathcal{R}(x,z))\delta(y),\xi\otimes\eta\rangle,\end{aligned}$$

此式蕴涵 (4.7) 等价于 (4.25). 类似地, (4.8)–(4.9) 和 (4.11)–(4.13) 等价于 (4.26)–(4.30). 余下需要证明 (4.15)–(4.22) 分别等价于 (4.6)–(4.13). 下面给出 (4.13) 和 (4.22) 的等价性, 其余几式的等价性可类似得到. 事实上, 有

$$\langle\mathcal{R}^*(\mathfrak{R}^*(\eta,\xi)y,x)\zeta+[\![\mathcal{R}^*(y,x)\zeta,\xi,\eta]\!]_*-\mathcal{L}^*(y,\mathfrak{R}^*(\xi,\zeta)x)\eta-\mathcal{R}^*(\mathfrak{R}^*(\eta,\zeta)x,y)\xi,z\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle \zeta, [\![\mathfrak{R}^*(\eta,\xi)y,z,x]\!]\rangle + \langle \zeta, \mathcal{R}(y,x)\mathfrak{R}^*(\xi,\eta)z\rangle - \langle \eta, \mathcal{R}(y,z)\mathfrak{R}^*(\xi,\zeta)x\rangle - \langle \xi, \mathcal{R}(z,y)\mathfrak{R}^*(\eta,\zeta)x\rangle \\
&= -\langle [\![\eta, \mathcal{R}^*(z,x)\zeta,\xi]\!]_*, y\rangle - \langle [\![\xi, \mathcal{R}^*(y,x)\zeta,\eta]\!]_*, z\rangle - \langle [\![\mathcal{R}^*(y,z)\eta,\xi,\zeta]\!]_*, x\rangle + \langle [\![\eta, \mathcal{R}^*(z,y)\xi,\zeta]\!]_*, x\rangle \\
&= \langle (\mathcal{R}(y,z)\otimes 1\otimes 1 - 1\otimes \mathcal{R}(z,y)\otimes 1)\omega(x) + \sigma_{12}\sigma_{23}(1\otimes \mathcal{R}(y,x)\otimes 1)\omega(z) \\
&\quad + \sigma_{23}(1\otimes \mathcal{R}(z,x)\otimes 1)\omega(y), \eta\otimes\xi\otimes\zeta\rangle.
\end{aligned}
$$

证毕. □

定义 4.3 设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 为一个 Lie-Yamaguti 代数, 且结构映射 $\delta:\mathfrak{g}\to\otimes^2\mathfrak{g}$ 和 $\omega:\mathfrak{g}\to\otimes^3\mathfrak{g}$ 是线性的. 如果命题 4.4 中的条件 (i) 和 (ii) 成立, 则称 $\mathfrak{g}$ 为一个 double Lie-Yamaguti 双代数. 将一个 Lie-Yamaguti 双代数记为 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!], \delta, \omega)$, 或者简记为 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$.

推论 4.2 如果 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ 为一个 double Lie-Yamaguti 双代数, 则 $(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g})$ 也为一个 double Lie-Yamaguti 双代数.

由命题 4.3 和 4.4, 有如下重要的结论.

定理 4.1 设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 为一个 Lie-Yamaguti 代数, 且映射 $\delta:\mathfrak{g}\to\otimes^2\mathfrak{g}$ 和 $\omega:\mathfrak{g}\to\otimes^3\mathfrak{g}$ 是线性的. 假设对偶映射 (δ^*, ω^*) 在 $\mathfrak{g}^*$ 上也定义了一个 Lie-Yamaguti 代数结构, 则如下条件等价:

(1) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ 为一个 double Lie-Yamaguti 双代数;

(2) 四元组 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*; (\mathrm{ad}^*, -\mathcal{R}^*\tau), (\mathfrak{ad}^*, -\mathfrak{R}^*\tau))$ 为一个匹配对;

(3) 三元组 $((\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*, \mathcal{B}), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ 为一个标准 Manin 三元组, 其中 $\mathcal{B}$ 的不变性条件由 (4.1) 给出.

在该种情形下, Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*})$ 称作 Lie-Yamaguti 双代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ 的 double, 记为 $\mathfrak{g}\bowtie\mathfrak{g}^*$.

如下命题给出局部闭链条件与 double 作为 Lie-Yamaguti 双代数的相容性条件的关系.

命题 4.5 一个 double Lie-Yamaguti 双代数可以给出一个局部闭链 Lie-Yamaguti 双代数.

证明 设 $(\mathfrak{g}, \delta, \omega)$ 为一个 double Lie-Yamaguti 双代数. 令复数 k_1、k_2 和 k_3 满足 $k_1 = k_2$ 和 $k_1+k_2+k_3=1$. 记 $\delta_i = \frac{1}{2}\delta$ 和 $\omega_j = k_j\omega$, 其中 $i=1,2$, $j=1,2,3$. 令 $\delta = \delta_1+\delta_2$ 和 $\omega = \omega_1+\omega_2+\omega_3$. 不难看出, δ_1 和 δ_2 分别为 $\mathfrak{g}$ 关于表示 $(\otimes^2\mathfrak{g}; 1\otimes\mathrm{ad}, 1\otimes\mathcal{R})$ 和 $(\otimes^2\mathfrak{g}; \mathrm{ad}\otimes 1, \mathcal{R}\otimes 1)$ 的一个 1 阶闭链, 且 ω_1、ω_2 和 ω_3 分别为关于表示 $(\otimes^3\mathfrak{g}; \mathrm{ad}\otimes 1\otimes 1, \mathcal{R}\otimes 1\otimes 1)$、$(\otimes^3\mathfrak{g}; 1\otimes\mathrm{ad}\otimes 1, 1\otimes\mathcal{R}\otimes 1)$ 和 $(\otimes^3\mathfrak{g}; 1\otimes 1\otimes\mathrm{ad}, 1\otimes 1\otimes\mathcal{R})$ 的一个 1 阶闭链. 因此, (δ, ω) 在 $\mathfrak{g}$ 上定义了一个局部闭链 Lie-Yamaguti 双代数结构. 证毕. □

本节最后给出几个 double Lie-Yamaguti 双代数的例子.

例 4.1 对于任意 Lie-Yamaguti 代数 $\mathfrak{g}$, 取 $\delta=0$ 和 $\omega=0$, 则 $(\mathfrak{g}, \delta, \omega)$ 为一个 Lie-Yamaguti 双代数. 在此种情形下, 相应的 Manin 三元组给出了一个二次 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g}\ltimes_{\mathrm{ad}^*, -\mathcal{R}^*\tau}\mathfrak{g}^*, \mathcal{B})$. 对偶地, 对于任意平凡的 Lie-Yamaguti 代数 $\mathfrak{g}$, 对于 $\mathfrak{g}^*$ 上的任意 Lie-Yamaguti 代数结构 (δ^*, ω^*), $(\mathfrak{g}, \delta, \omega)$ 均为一个 Lie-Yamaguti 双代数. 这样的 Lie-Yamaguti 双代数称作平凡 Lie-Yamaguti 双代数.

例 4.2 设 $\mathfrak{g}$ 为由例 3.1 给出的一个 2 维 Lie-Yamaguti 代数. 余括号 $\delta:\mathfrak{g}\to\otimes^2\mathfrak{g}$ 和 $\omega:\mathfrak{g}\to\otimes^3\mathfrak{g}$ 由下式给出:

$$\delta(e_1) = e_1\otimes e_2, \quad \omega(e_1) = e_1\otimes e_2\otimes e_2.$$

则 $\delta^*:\otimes^2\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}^*$ 和 $\omega^*:\otimes^3\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}^*$ 在 $\mathfrak{g}^*$ 上定义了一个 Lie-Yamaguti 代数结构, 它与 $\mathfrak{g}$ 同构. 不难看出, $(\mathfrak{g}, \delta, \omega)$ 为一个 Lie-Yamaguti 双代数.

例 4.3 设 $\mathfrak{g}$ 为一个 4 维 Lie-Yamaguti 代数, 其一组基为 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. 非零括号为

$$[e_1, e_2] = 2e_4, \quad [\![e_1, e_2, e_1]\!] = e_4.$$

如果对偶映射 $\delta:\mathfrak{g}\to\otimes^2\mathfrak{g}$ 和 $\omega:\mathfrak{g}\to\otimes^3\mathfrak{g}$ 构成了 $\mathfrak{g}^*$ 上的一个 Lie-Yamaguti 代数结构, 使得 $(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*,\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*)$ 为一个 Manin 三元组, 其中不变性条件由 (4.1) 给出, 则有 $\delta=0$ 和 $\omega=0$.

致谢 在本文的撰写过程中, 吉林大学的生云鹤教授和唐荣老师针对本文给出了许多建设性的意见和建议, 对此我们深表感谢.

参考文献

1 Bai C M. A unified algebraic approach to the classical Yang-Baxter equation. J Phys A, 2007, 40: 11073–11082
2 Bai C M, Guo L, Liu G L, et al. Rota-Baxter Lie bialgebras, classical Yang-Baxter equations and special L-dendriform bialgebras. arXiv:2207.08703, 2022
3 Bai C M, Guo L, Sheng Y H. Bialgebras, the classical Yang-Baxter equation and Manin triples for 3-Lie algebras. Adv Theor Math Phys, 2019, 23: 27–74
4 Bai C M, Guo L, Sheng Y H. Coherent categorical structures for Lie bialgebras, Manin triples, classical r-matrices and pre-Lie algebras. Forum Math, 2022, 34: 989–1013
5 Bai R P, Cheng Y, Lie J Q, et al. 3-Lie bialgebras. Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 2014, 34: 513–522
6 Bai R P, Guo W W, Lin L X, et al. n-Lie bialgebras. Linear Multilinear Algebra, 2018, 66: 382–397
7 Benito P, Bremner M, Madariaga S. Symmetric matrices, orthogonal Lie algebras and Lie-Yamaguti algebras. Linear Multilinear Algebra, 2015, 63: 1257–1281
8 Benito P, Draper C, Elduque A. Lie-Yamaguti algebras related to $\mathcal{G}_2$. J Pure Appl Algebra, 2005, 202: 22–54
9 Benito P, Elduque A, Martín-Herce F. Irreducible Lie-Yamaguti algebras. J Pure Appl Algebra, 2009, 213: 795–808
10 Benito P, Elduque A, Martín-Herce F. Irreducible Lie-Yamaguti algebras of generic type. J Pure Appl Algebra, 2011, 215: 108–130
11 Chen Z, Stiénon M, Xu P. Poisson 2-groups. J Differential Geom, 2013, 94: 209–240
12 Chen Z, Stiénon M, Xu P. Weak Lie 2-bialgebras. J Geom Phys, 2013, 68: 59–68
13 Hou S, Sheng Y H, Tang R. Twilled 3-Lie algebras, generalized matched pairs of 3-Lie algebras and $\mathcal{O}$-operators. J Geom Phys, 2021, 163: 104148
14 Kikkawa M. On Killing-Ricci forms of Lie triple algebras. Pacific J Math, 1981, 96: 153–161
15 Kinyon M K, Weinstein A. Leibniz algebras, Courant algebroids, and multiplications on reductive homogeneous spaces. Amer J Math, 2001, 123: 525–550
16 Lang H L, Qiao Y, Yin Y B. On Lie bialgebroid crossed modules. Internat J Math, 2021, 32: 2150021
17 Lang H L, Sheng Y H. Factorizable Lie bialgebras, quadratic Rota-Baxter Lie algebras and Rota-Baxter Lie bialgebras. Comm Math Phys, 2013, 397: 763–791
18 Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. Amer J Math, 1954, 76: 33–65
19 Semenov-Tyan-Shanskii M A. What is a classical r-matrix? Funct Anal Appl, 1983, 17: 259–272
20 Sheng Y H, Zhao J. Relative Rota-Baxter operators and symplectic structures on Lie-Yamaguti algebras. Comm Algebra, 2022, 50: 4056–4073
21 Sheng Y H, Zhao J, Zhou Y Q. Nijenhuis operators, product structures and complex structures on Lie-Yamaguti algebras. J Algebra Appl, 2021, 20: 2150146
22 Takahashi N. Modules over quadratic spaces and representations of Lie-Yamaguti algebras. J Lie Theory, 2021, 31: 897–932
23 Tang R, Bai C M, Guo L, et al. Deformations and their controlling cohomologies of $\mathcal{O}$-operators. Comm Math Phys, 2019, 368: 665–700
24 Tang R, Sheng Y H. Leibniz bialgebras, relative Rota-Baxter operators, and the classical Leibniz Yang-Baxter equation. J Noncommut Geom, 2022, 16: 1179–1211
25 Yamaguti K. On the Lie triple system and its generalization. Hiroshima Math J, 1958, 21: 155–160
26 Yamaguti K. On the cohomology space of Lie triple systems. Kumamoto J Sci A, 1960, 5: 44–52
27 Yamaguti K. On cohomology groups of general Lie triple systems. Kumamoto J Sci A, 1967/1969, 8: 135–146
28 Yau D. The classical Hom-Yang-Baxter equation and Hom-Lie bialgebras. Int Electron J Algebra, 2015, 17: 11–45
29 Zhang T, Li J. Deformations and extensions of Lie-Yamaguti algebras. Linear Multilinear Algebra, 2015, 63: 2212–2231

The classical Lie-Yamaguti Yang-Baxter equation and Lie-Yamaguti bialgebras

Jia Zhao & Yu Qiao

Abstract In this paper, we develop the bialgebra theory for Lie-Yamaguti algebras. For this purpose, we exploit two types of compatibility conditions: the local cocycle condition and the double construction. We define the classical Yang-Baxter equation in Lie-Yamaguti algebras and show that a solution to the classical Yang-Baxter equation corresponds to a relative Rota-Baxter operator with respect to the coadjoint representation. Furthermore, we generalize some results on Lie algebras and on 3-Lie algebras to the context of Lie-Yamaguti algebras. Then we introduce the notion of matched pairs of Lie-Yamaguti algebras, which leads us to the concept of double construction Lie-Yamaguti bialgebras following the Manin triple approach to Lie bialgebras. We prove that matched pairs, Manin triples of Lie-Yamaguti algebras, and double construction Lie-Yamaguti bialgebras are equivalent. Finally, we clarify that a local cocycle condition is a special case of a double construction for Lie-Yamaguti bialgebras.

Keywords **Lie-Yamaguti bialgebra, the classical Lie-Yamaguti Yang-Baxter equation, relative Rota-Baxter operator, Manin triple, matched pair**

MSC(2020) **17B38, 16T25, 17A30, 17B81**

doi: 10.1360/SCM-2022-0517