



一类可正交分解四阶共轭部分对称张量的性质和低秩逼近

献给韩继业教授 90 寿辰

唐云飞, 杨庆之*

南开大学数学科学学院, 核心数学与组合数学实验室, 天津 300071

E-mail: yunfei-tang@foxmail.com, qz-yang@nankai.edu.cn

收稿日期: 2024-04-29; 接受日期: 2024-09-22; 网络出版日期: 2025-01-03; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12071234) 资助项目

摘要 本文将酉可分解张量的概念推广到广义酉可分解, 研究了四阶广义酉可分解共轭部分对称 (conjugate partial symmetric, CPS) 张量的性质和低秩逼近, 证明了四阶广义酉可分解 CPS 张量的 CPS 秩一和 CPS 秩二逼近问题等价于带一范数约束的复二次优化问题. 对两类广义酉可分解张量, 本文证明了可以通过序列秩一逼近和序列秩二逼近算法精确恢复原张量. 对 CP (CANDECOMP/PARAFAC) 秩小于阶数的四阶部分对称 (partial symmetric, PS) 张量, 本文证明了其 PS 秩等于 CP 秩, 刻画了低秩四阶 CPS 张量的特征.

关键词 共轭部分对称 正交分解 张量分解 低秩逼近

MSC (2020) 主题分类 14N07, 15A69

1 引言

近年来, 在信号处理^[22]、数据挖掘^[2]、统计推断^[15]和雷达探测^[7]等领域, 张量的分解^[13]和低秩逼近都发挥了重要的作用. 张量作为矩阵的推广, 其保结构的分解和低秩逼近是十分重要的研究课题, 并取得了许多研究进展. 例如, Brachat 等^[5]和 Comon 等^[6]研究了对称张量的对称秩和对称分解, Zhang 和 Golub^[24]研究了对称张量的正交分解, Nie^[18]研究了对称张量的对称低秩逼近, Nazih 等^[16]和 Qi 等^[20]研究了非负张量的非负分解与非负低秩逼近等. 近期, Jiang 等^[12]将 Hermite 矩阵的概念推广到了高阶张量, 提出了共轭部分对称 (conjugate partial symmetric, CPS) 张量的概念. 他们证明了恒取实值的复多项式可以用 CPS 张量一一表示, 并给出了 CPS 张量的一种分解. Nie 和 Yang^[19]及 Ni^[17]将 CPS 张量的概念推广到了 Hermite 张量, 并研究了 Hermite 张量的分解和理论性质, 给出了

英文引用格式: Tang Y F, Yang Q Z. The properties and the low-rank approximation of a class of unitary decomposable fourth-order conjugate partial symmetric tensors (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 301–322, doi: 10.1360/SSM-2024-0134

实 Hermite 张量存在实 Hermite 分解的充要条件. 在许多实际应用, 特别是复多项式优化问题中都会遇到 CPS 张量, 如盲源分离、雷达波设计、波束成形和电力系统状态预测等 (参见文献 [1, 3, 7, 14]).

作为 Hermite 矩阵的高阶推广, CPS 张量继承了许多 Hermite 矩阵的良好性质, 例如 CPS 张量的 C-特征值总是实的 [12]. 近期, Fu 等 [10] 进一步研究了 CPS 张量的理论性质, 包括 CPS 张量的保结构分解、对应的张量秩和最佳秩一逼近问题等. 已经知道, 确定张量的秩或者求张量的分解是 NP (non-deterministic polynomial)-困难的 [11]. 通常的做法是采用序列逼近的办法, 即反复求解当前张量的最佳秩一逼近张量, 然后减去这个秩一张量 [13]. 但是对一般张量这一方法并不能保证求出原张量的秩一分解形式, 甚至会出现张量减去其最佳秩一逼近后, 秩反而增大的情形 [8]. 但对于某些有着特殊结构的张量和某些特殊的分解, 可以证明这种序列秩一逼近 (successive rank-one approximation, SROA) 算法能够求出张量的精确秩一分解. 例如, Boralevi 等 [4] 引入了酉可分解张量的概念. 而 Fu 和 Fan [9] 研究了具有酉可分解性质的 CPS 张量的精确恢复问题. 他们证明了对酉可分解的 CPS 张量, SROA 算法可以精确恢复原张量. Sabir 等 [21] 提出了一种四阶 CPS 张量的矩阵外积分解, 并证明了 SROA 算法也可以精确求出这种分解. 本文则讨论了一类更广的四阶酉可分解张量的性质和低秩逼近.

Fu 和 Fan [9] 定义的酉可分解张量 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{n^4}$ 可以表示成

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \circ u_i \circ \bar{u}_i \circ \bar{u}_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

且 $\{u_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}^n$ 相互正交, 这里 “ $\circ$ ” 表示张量的外积. 但对于实的非全对称的 CPS 张量, 即使张量是酉可分解的, 也无法在实数域上找到其形如 (1.1) 的分解, 即不存在 $\{u_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^n$ 使得分解 (1.1) 成立. 这是因为实的秩一 CPS 张量一定是全对称的. 如果要将实 CPS 张量表示成秩一 CPS 张量的和, 则在分解 (1.1) 的等号右端必然出现复的秩一 CPS 张量, 这破坏了原来的实 CPS 张量的结构. 而本文提出的广义酉可分解引入了秩二项, 在一定程度上解决了这一问题. 与酉可分解 CPS 张量不同, Fu 和 Fan [9] 提出的 SROA 算法无法精确恢复广义酉可分解的 CPS 张量. 我们对他们的序列秩一逼近算法进行了修正, 并提出了一种新的序列秩二逼近 (successive rank-two approximation, SRTA) 算法. 我们证明了对两类广义酉可分解的 CPS 张量, SROA 算法和 SRTA 算法的序列逼近方法可以分别精确恢复原张量. 相较于之前的研究, 本文有以下几点创新. 首先, 将酉可分解张量的概念推广到了广义酉可分解, 并证明了四阶广义酉可分解 CPS 张量的秩一和秩二逼近问题等价于带 1 范数约束的复二次优化问题. 其次, 对两类特殊的四阶广义酉可分解 CPS 张量, 证明了 SROA 算法和 SRTA 算法可以在有限步内精确恢复原张量. 最后, 证明了对四阶部分对称 (partial symmetric, PS) 张量, 当张量的 CP (CANDECOMP/PARAFAC) 秩小于等于 3 时, 其 CP 秩等于 PS 秩, 刻画了低秩四阶 CPS 张量的性质. 在后文中, 为简便起见, 有时直接称 (广义) 酉可分解的张量为 (广义) 酉张量.

本文余下内容安排如下. 第 2 节介绍几个定义和符号以及四阶 CPS 张量的几个性质. 第 3 节提出广义酉可分解张量的秩一和秩二逼近模型及性质. 第 4 节讨论两类四阶广义酉 CPS 张量的可恢复性. 第 5 节研究四阶 PS 张量 CP 秩和 PS 秩的等价性. 第 6 节用数值算例验证前面理论的正确性和算法的有效性. 最后, 第 7 节给出本文结论.

2 预备知识

本文研究的张量都是四阶的. 用花体字母 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{T}$ 等表示张量, 记四阶 n 维复张量构成的线性空间为 $\mathbb{C}^{n^4}$. 对 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{n^4}$, 用 $\mathcal{T}_{ijkl}$ 表示其指标为 (i, j, k, l) 的元素. 记 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. 符号 “ $\circ$ ” 表示张量的

外积, “ $\otimes$ ” 表示 Kronecker 乘积. 对两个四阶张量 $\mathcal{F}, \mathcal{T} \in \mathbb{C}^{n^4}$, 定义其内积为 $\langle \mathcal{F}, \mathcal{T} \rangle = \sum_{i,j,k,l} \mathcal{F}_{ijkl} \overline{\mathcal{T}_{ijkl}}$, 向量和矩阵的内积的定义与此类似. 张量 $\mathcal{F} \in \mathbb{C}^{n^4}$ 的 Frobenius 范数为 $\|\mathcal{F}\|_F = \sqrt{\langle \mathcal{F}, \mathcal{F} \rangle}$. 记张量 $\mathcal{T}$ 的 CP 秩为 $\text{rank}(\mathcal{T})$, 记 $\mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$ 为 $n \times n$ 对称复矩阵构成的集合. 对矩阵 $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 和张量 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{n^4}$, 定义 $\text{vec}(M)$ 和 $\text{vec}(\mathcal{T})$ 为将 M 和 $\mathcal{T}$ 展开得到的向量, 即

$$M_{ij} = \text{vec}(M)_{i+(j-1)n}, \quad \mathcal{T}_{ijkl} = \text{vec}(\mathcal{T})_{i+(j-1)n+(k-1)n^2+(l-1)n^3}, \quad (2.1)$$

注意 $\text{vec}(x \circ y) = y \otimes x$.

定义 2.1 (PS 和 CPS 张量) 设 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{n^4}$, 如果 $\mathcal{T}$ 满足对于任意指标 $(i, j, l, k) \in [n]^4$, 有

$$\mathcal{T}_{ijkl} = \mathcal{T}_{\pi(ij)\pi(kl)},$$

其中 $\pi(\cdot)$ 表示置换, 则称 $\mathcal{T}$ 是部分对称 (PS) 的, 记所有四阶 n 维 PS 张量构成的集合为 $\mathbb{C}_{ps}^{n^4}$. 如果一个 PS 张量 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}_{ps}^{n^4}$ 还满足 $\mathcal{T}_{ijkl} = \overline{\mathcal{T}_{klij}}$, 则称 $\mathcal{T}$ 是共轭部分对称 (CPS) 的, 记所有四阶 n 维 CPS 张量构成的集合为 $\mathbb{C}_{cps}^{n^4}$.

定理 2.1 [10] 设 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{n^4}$, 则 $\mathcal{T}$ 是 CPS 张量当且仅当 $\mathcal{T}$ 可以分解成

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i \circ u_i \circ \bar{u}_i \circ \bar{u}_i, \quad (2.2)$$

其中 $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $u_i \in \mathbb{C}^n$, $1 \leq i \leq r$.

由定理 2.1 可知, 张量 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{n^4}$ 是 CPS 的当且仅当它可以写成秩一 CPS 张量的和. 所以可以定义 CPS 张量的 CPS 秩为

$$\text{rank}_{cps}(\mathcal{T}) = \min \left\{ r : \mathcal{T} = \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i \circ u_i \circ \bar{u}_i \circ \bar{u}_i, \lambda_i \in \mathbb{R}, u_i \in \mathbb{C}^n \right\}. \quad (2.3)$$

注意到这一定义与 CP 秩不同. Fu 等 [10] 给出了一个 CP 秩严格小于 CPS 秩的张量例子. 还注意到, 如果一个 CPS 张量 $\mathcal{T}$ 是实的但不是全对称的, 则无法在实数域内找到 $\mathcal{T}$ 的形如 (2.2) 的分解, 即不存在 $\{u_i\}_{i=1}^r \subset \mathbb{R}^n$ 使得分解成立. 为了在实数域内找到 $\mathcal{T}$ 的合适的分解, 需要引入形如 $x \circ x \circ y \circ y + y \circ y \circ x \circ x$ 的张量. 第 5 节将继续讨论这种分解. 如果一个 CPS 张量可以写成正交的秩一 CPS 张量之和, 则称该张量是酉可分解的.

定义 2.2 (酉可分解张量 [9]) 设 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}_{cps}^{n^4}$, 如果存在相互正交的单位向量 $\{u_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}^n$ 和实数 $\{\sigma_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ 使得

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^n \sigma_i u_i \circ u_i \circ \bar{u}_i \circ \bar{u}_i,$$

则称 $\mathcal{T}$ 是酉可分解的.

在酉可分解张量的定义中, 每一个求和项都具有形如 $\sigma_i \cdot u_i \circ u_i \circ \bar{u}_i \circ \bar{u}_i$ 的简单形式, 且 $\{u_i\}_{i=1}^n$ 相互正交. 酉可分解张量各秩一因子间的正交性使得其具有许多良好的性质, 然而这种正交格式所能表示的张量却很有限. 例如, 假设 $B \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$ 且 $\text{rank}(B) = n$, 并考虑张量 $\mathcal{T} = B \circ \bar{B}$. 记 $B = U \Sigma U^T$ 为 B 的 Tagaki 分解 [23], 其中 U^T 表示 U 的 (非共轭) 转置, 则 $B = \sum_{i=1}^n \sigma_i \cdot u_i \circ u_i$, 且

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i \sigma_j \cdot u_i \circ u_i \circ \bar{u}_j \circ \bar{u}_j. \quad (2.4)$$

由后文中的定理 2.2, (2.4) 实际上是 $\mathcal{T}$ 的一个 CP 秩分解, 所以 $\text{rank}(\mathcal{T}) = n^2$. 因为 n 维酉可分解 CPS 张量的 CP 秩最多不超过 n , 所以张量 $\mathcal{T} = B \circ \bar{B}$ 不是酉可分解的, 但其分解 (2.4) 同样具有比较特殊的正交性. 受此启发, 定义如下的广义酉可分解张量.

定义 2.3 (广义酉可分解张量) 设 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}_{\text{cps}}^{n^4}$, 如果存在相互正交的单位向量 $\{u_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}^n$ 和对称实矩阵 $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \cdot u_i \circ u_i \circ \bar{u}_j \circ \bar{u}_j, \quad (2.5)$$

其中 σ_{ij} 表示矩阵 Σ 的元素, 则称 $\mathcal{T}$ 是广义酉可分解的, 并称 Σ 为张量 $\mathcal{T}$ 的系数矩阵.

如果 $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是对角矩阵, 则 (2.5) 中的 $\mathcal{T}$ 退化为酉可分解张量. 令

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^n \sigma_{ii} \cdot u_i \circ u_i \circ \bar{u}_i \circ \bar{u}_i, \quad (2.6)$$

$$\mathcal{F} = \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \sigma_{ij} (u_i \circ u_i \circ \bar{u}_j \circ \bar{u}_j + u_j \circ u_j \circ \bar{u}_i \circ \bar{u}_i), \quad (2.7)$$

则 $\mathcal{T} = \mathcal{D} + \mathcal{F}$. 称 $\mathcal{D}$ 为张量 $\mathcal{T}$ 的秩一部分和张量, $\mathcal{F}$ 为张量 $\mathcal{T}$ 的秩二部分和张量. 注意 $\mathcal{D}$ 自身就是一个酉可分解的张量.

注 2.1 对广义酉可分解的张量 $\mathcal{T}$, 一般情形下其广义酉分解并不是唯一的. 此处定义的秩一、秩二部分和张量 $\mathcal{D}$ 、 $\mathcal{F}$ 都是针对 $\mathcal{T}$ 的给定分解的.

对于张量 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{n^4}$, 设矩阵 $L_1, L_2, L_3, L_4 \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 张量 $\mathcal{T}$ 与矩阵 $\{L_i\}_{i=1}^4$ 的多线性乘积定义为 $\mathcal{C} = (L_1, L_2, L_3, L_4) * \mathcal{T} \in \mathbb{C}^{n^4}$,

$$\mathcal{C}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4} (L_1)_{i_1 j_1} (L_2)_{i_2 j_2} (L_3)_{i_3 j_3} (L_4)_{i_4 j_4} \mathcal{T}_{j_1 j_2 j_3 j_4}. \quad (2.8)$$

如果 L_1, L_2, L_3 和 L_4 均可逆, 则上面的多线性乘积是可逆的, 即

$$\mathcal{T} = (L_1^{-1}, L_2^{-1}, L_3^{-1}, L_4^{-1}) * \mathcal{C},$$

并且此时有 $\text{rank}(\mathcal{C}) = \text{rank}(\mathcal{T})$.

定理 2.2 设 $\mathcal{T} = \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \cdot u_i \circ u_i \circ \bar{u}_j \circ \bar{u}_j$ 是广义酉可分解的 CPS 张量, 则 $\mathcal{T}$ 的 CP 秩等于 $nnz(\Sigma)$, 其中 $nnz(\Sigma)$ 表示矩阵 Σ 中非零元素的个数.

证明 因为 $\{u_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}^n$ 是一组标准正交基, 设 $U = [u_1, \dots, u_n] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则 $U^H u_i = e_i$. 令

$$\mathcal{C} = (U^H, U^H, U^T, U^T) * \mathcal{T} = \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \cdot e_i \circ e_i \circ e_j \circ e_j.$$

注意到 $\text{rank}(\mathcal{C}) = \text{rank}(\mathcal{T})$, 且 $\mathcal{C}$ 的转置

$$\mathcal{C}_{[1,3,2,4]} = \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \cdot e_i \circ e_j \circ e_i \circ e_j.$$

因为展开矩阵

$$\mathcal{C}_{[1,3;2,4]} = \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \cdot \text{vec}(e_i \circ e_j) \circ \text{vec}(e_i \circ e_j) \in \mathbb{C}^{n^2 \times n^2}$$

是一个对角矩阵, 且对角元为 $\{\sigma_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$, 所以

$$\text{rank}(\mathcal{T}) = \text{rank}(\mathcal{C}) \geq \text{rank}(\mathcal{C}_{[1,3;2,4]}) = \text{nnz}(\Sigma).$$

又因为 $\mathcal{T} = \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \cdot u_i \circ u_i \circ \bar{u}_j \circ \bar{u}_j$ 是一个秩一分解, 其秩一求和项有 $\text{nnz}(\Sigma)$ 个, 所以 $\text{rank}(\mathcal{T}) = \text{nnz}(\Sigma)$. $\square$

由定理 2.2 可知, 广义酉可分解张量 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}_{\text{cps}}^{n^4}$ 的广义酉分解也是一个 CP 秩分解.

3 广义酉可分解张量的低秩逼近

已有的张量低秩逼近问题都是以秩一逼近作为其最简单的情形. 但对四阶实 CPS 张量, 由上一节的讨论可知, 其实数域上的秩一逼近无法保持原张量的结构. 可以证明, 在实数域上, 非全对称的四阶 CPS 实张量的秩最低为 2, 所以用秩二逼近作为四阶实 CPS 张量的最简单的低秩逼近. 下面讨论广义酉可分解 CPS 张量的两种低秩逼近问题.

3.1 广义酉可分解张量的 CPS 秩一逼近

本小节考虑广义酉张量 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}_{\text{cps}}^{n^4}$ 的最佳 CPS 秩一逼近问题, 我们说明关于 $\mathcal{T}$ 的最佳 CPS 秩一逼近问题等价于一个带 1 范数约束的复二次优化模型. 考虑下面的 CPS 秩一逼近模型:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\mathcal{T} - \lambda x \circ x \circ \bar{x} \circ \bar{x}\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & \|x\|_2 = 1, \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

通过将目标函数展开, 并对 λ 先进行优化, 可得其最优解为 $\lambda^* = \langle \mathcal{T}, x \circ x \circ \bar{x} \circ \bar{x} \rangle$. 所以原问题 (3.1) 等价于

$$\begin{aligned} \max \quad & |\langle \mathcal{T}, x \circ x \circ \bar{x} \circ \bar{x} \rangle| \\ \text{s.t.} \quad & \|x\|_2 = 1, \quad x \in \mathbb{C}^n. \end{aligned} \quad (3.2)$$

在 $\mathcal{T}$ 的广义酉分解中, $\{u_i\}_{i=1}^n$ 是一组标准正交基, 对 $x \in \mathbb{C}^n$, 记 $\beta_i = \langle x, u_i \rangle = u_i^H x$, 则 $x = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$. 所以

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}, x \circ x \circ \bar{x} \circ \bar{x} \rangle &= \left\langle \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} u_i \circ u_i \circ \bar{u}_j \circ \bar{u}_j, x \circ x \circ \bar{x} \circ \bar{x} \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \langle u_i, x \rangle^2 \overline{\langle u_j, x \rangle}^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \bar{\beta}_i^2 \beta_j^2. \end{aligned}$$

记 $y = [\beta_1^2, \dots, \beta_n^2]^T \in \mathbb{C}^n$, 则 $\langle \mathcal{T}, x \circ x \circ \bar{x} \circ \bar{x} \rangle = y^H \Sigma y$. 注意到 $\|x\|_2^2 = 1$ 等价于 $\|y\|_1 = \sum_{i=1}^n |\beta_i^2| = \|U^H x\|_2^2 = 1$, 所以模型 (3.2) 又等价于如下模型:

$$\begin{aligned} \max \quad & |y^H \Sigma y| \\ \text{s.t.} \quad & \|y\|_1 = 1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

这是一个带 1 范数约束的复二次优化模型, 可以给出上面模型最优值的一个上界. 首先由范数不等式, 有 $|y^H \Sigma y| \leq \|y\|_\infty \|\Sigma y\|_1$. 对满足约束的 $y \in \mathbb{C}^n$, 因为 $\|y\|_1 = \sum_{i=1}^n |y_i| = 1$, 所以 $\|y\|_\infty = \max\{|y_i| : 1 \leq i \leq n\} \leq 1$. 所以由矩阵范数的定义, 有

$$|y^H \Sigma y| \leq \|y\|_\infty \|\Sigma y\|_1 \leq \|\Sigma y\|_1 \leq \|\Sigma\|_1.$$

于是可知模型最优值的一个上界为 $\|\Sigma\|_1$. 注意到 Σ 是对称矩阵, 根据矩阵无穷范数和 1 范数的计算公式

$$\|\Sigma\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |\sigma_{ij}|, \quad \|\Sigma\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\sigma_{ij}|,$$

由对称性可知 $\|\Sigma\|_1 = \|\Sigma\|_\infty$. 所以模型 (3.3) 最优值的一个上界为 $\|\Sigma\|_\infty$ 或者 $\|\Sigma\|_1$.

问题 (3.3) 一般没有显式解, 需要用迭代的方式求解. 但当矩阵 Σ 有着比较特殊的结构时, 可以用 Σ 的元素给出上面模型的最优值, 如 Fu 和 Fan^[9] 考虑的酉可分解张量, 其中的矩阵 Σ 是对角的. 对于这种情形, 容易得到其最佳秩一逼近的解. 这里利用范数不等式给出一个简单的证明.

引理 3.1 设 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}_{\text{cps}}^{n^4}$ 是一个酉可分解的张量, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为其系数矩阵, 设 $|\sigma_k| = \max\{|\sigma_i| : 1 \leq i \leq n\}$, 则 $\mathcal{T}$ 的最佳 CPS 秩一逼近问题的一个解为 u_k .

证明 因为 $\mathcal{T}$ 的最佳秩一逼近问题 (3.2) 等价于 $\max\{|y^H \Sigma y| : \|y\|_1 = 1\}$, 所以由不等式

$$|y^H \Sigma y| \leq \|y\|_1 \|\Sigma y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |\sigma_i y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\sigma_i| = |\sigma_k|$$

可知模型 (3.2) 最大值不超过 $|\sigma_k|$. 而当 $x = u_k$ 时, (3.2) 的目标函数值恰为 $|\sigma_k|$. $\square$

第 4 节将考虑一类广义酉可分解张量, 这种广义酉可分解张量的系数矩阵同样有着比较特殊的结构, 即后文所定义的弱对角占优性. 我们将利用这个性质证明本文提出的 SROA 算法可以在有限步内求得张量的广义酉分解.

上面讨论了复 CPS 张量的秩一逼近, 现在考虑实 CPS 张量 $\mathcal{T} \in \mathbb{R}_{\text{cps}}^{n^4}$ 在实数域上的秩一逼近. 在模型 (3.1) 中, 如果将 x 限制在 $\mathbb{R}^n$ 内, 则容易验证上面的结论依然成立, 唯一的区别在于所有的变量都取实数. 但如第 2 节中所讨论的, 对非全对称的实张量 $\mathcal{T} \in \mathbb{R}_{\text{cps}}^{n^4}$, 模型 (3.1) 在实数域上求得的最佳秩一逼近张量 $\lambda x \circ x \circ x \circ x$ 是全对称的, 不能保持原张量部分对称但非全对称的结构. 所以无法仅利用模型 (3.1) 在有限步求得非全对称的广义酉张量 $\mathcal{T}$ 的分解, 即如果令 $\mathcal{T}^1 = \mathcal{T}$, 并记 $\lambda^k x^k \circ x^k \circ x^k \circ x^k$ 为 $\mathcal{T}^k$ 在实数域上的最佳 CPS 秩一逼近, 且 $\mathcal{T}^{k+1} = \mathcal{T}^k - \lambda^k x^k \circ x^k \circ x^k \circ x^k$, 则不存在有限的正整数 N 使得

$$\mathcal{T} = \sum_{k=1}^N \lambda^k x^k \circ x^k \circ x^k \circ x^k.$$

下一小节将考虑用秩二的 CPS 张量逼近原有的 CPS 张量, 这种逼近可以保持原张量部分对称但非全对称的性质.

3.2 广义酉可分解张量的 CPS 秩二逼近

本小节研究广义酉可分解张量 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}_{\text{cps}}^{n^4}$ 的一类 CPS 秩二逼近问题. 如第 2 节所述, 考虑用形如 $z \circ z \circ \bar{w} \circ \bar{w} + w \circ w \circ \bar{z} \circ \bar{z}$ 的秩二张量来逼近 $\mathcal{T}$, 即

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\mathcal{T} - \eta(z \circ z \circ \bar{w} \circ \bar{w} + w \circ w \circ \bar{z} \circ \bar{z})\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & \langle z, w \rangle = 0, \quad \|z\|_2 = \|w\|_2 = 1, \quad \eta \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

记 $\mathcal{B} = z \circ z \circ \bar{w} \circ \bar{w} + w \circ w \circ \bar{z} \circ \bar{z}$, 注意到 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{B}$ 都是 CPS 张量, 所以二者的内积 $\langle \mathcal{T}, \mathcal{B} \rangle$ 为实数. 将目标函数展开可得

$$\|\mathcal{T} - \eta \mathcal{B}\|_F^2 = \|\mathcal{T}\|_F^2 + \eta^2 \|\mathcal{B}\|_F^2 - 2\eta \langle \mathcal{T}, \mathcal{B} \rangle,$$

固定 w 和 z , 并先对 η 进行优化, 可以求得最优解为 $\eta^* = \langle \mathcal{T}, \mathcal{B} \rangle / \|\mathcal{B}\|_F^2$, 此时目标函数值为 $\|\mathcal{T}\|_F^2 - \langle \mathcal{T}, \mathcal{B} \rangle^2 / \|\mathcal{B}\|_F^2$. 又由 $\langle z, w \rangle = 0$ 可知 $\|\mathcal{B}\|_F^2 = 2$, 所以原问题等价于

$$\begin{aligned} \max \quad & |\langle \mathcal{T}, \mathcal{B} \rangle| \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{B} = z \circ z \circ \bar{w} \circ \bar{w} + w \circ w \circ \bar{z} \circ \bar{z}, \\ & \langle z, w \rangle = 0, \quad \|z\|_2 = \|w\|_2 = 1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

又因为 $\mathcal{T}$ 是共轭部分对称的, 所以有 $\langle \mathcal{T}, w \circ w \circ \bar{z} \circ \bar{z} \rangle = \overline{\langle \mathcal{T}, z \circ z \circ \bar{w} \circ \bar{w} \rangle}$, 因此

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}, \mathcal{B} \rangle &= \langle \mathcal{T}, z \circ z \circ \bar{w} \circ \bar{w} + w \circ w \circ \bar{z} \circ \bar{z} \rangle \\ &= 2\Re(\langle \mathcal{T}, z \circ z \circ \bar{w} \circ \bar{w} \rangle). \end{aligned}$$

如果 $\Re(\langle \mathcal{T}, z \circ z \circ \bar{w} \circ \bar{w} \rangle) \neq |\langle \mathcal{T}, z \circ z \circ \bar{w} \circ \bar{w} \rangle|$, 则可以通过选取 $\theta \in [0, 2\pi]$ 使得

$$z' = e^{i\theta} z, \quad \Re(\langle \mathcal{T}, z' \circ z' \circ \bar{w} \circ \bar{w} \rangle) = |\langle \mathcal{T}, z \circ z \circ \bar{w} \circ \bar{w} \rangle|.$$

此时仍有 $\|z'\|_2 = 1$, $\langle z', w \rangle = 0$, 所以问题 (3.4) 可以转化为

$$\begin{aligned} \max \quad & |\langle \mathcal{T}, z \circ z \circ \bar{w} \circ \bar{w} \rangle| \\ \text{s.t.} \quad & \langle z, w \rangle = 0, \quad \|z\|_2 = \|w\|_2 = 1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

对广义酉可分解的 CPS 张量 $\mathcal{T} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} u_i \circ u_i \circ \bar{u}_j \circ \bar{u}_j$, 令 $\alpha_i = \langle z, u_i \rangle$, $\beta_i = \langle w, u_i \rangle$, $1 \leq i \leq n$, 因为 $\{u_i\}_{i=1}^n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的一组标准正交基, 所以

$$z = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, \quad w = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i.$$

计算可得

$$\langle \mathcal{T}, z \circ z \circ \bar{w} \circ \bar{w} \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \cdot \langle u_i \circ u_i \circ \bar{u}_j \circ \bar{u}_j, z \circ z \circ \bar{w} \circ \bar{w} \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \bar{\alpha}_i^2 \beta_j^2.$$

令 $p = [\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2]^T$, $q = [\beta_1^2, \dots, \beta_n^2]^T$, 则 $\langle \mathcal{T}, z \circ z \circ \bar{w} \circ \bar{w} \rangle = p^H \Sigma q$. 如果先不考虑正交约束, 则模型 (3.6) 可以松弛为

$$\max \{ |p^H \Sigma q| : \|p\|_1 = \|q\|_1 = 1 \}. \quad (3.7)$$

由不等式

$$|p^H \Sigma q| \leq \|p\|_1 \|\Sigma q\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |\sigma_{ij}| |q_j| \right) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\left(\max_{1 \leq j \leq n} |\sigma_{ij}| \right) \sum_{j=1}^n |q_j| \right) = \max_{1 \leq i, j \leq n} |\sigma_{ij}|,$$

可知 $\max_{1 \leq i, j \leq n} |\sigma_{ij}|$ 为模型 (3.6) 最优值的一个上界. 设 $|\sigma_{kl}| = \max_{1 \leq i, j \leq n} |\sigma_{ij}|$, 则有

$$|\langle \mathcal{T}, u_k \circ u_k \circ \bar{u}_l \circ \bar{u}_l \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \langle u_i \circ u_i \circ \bar{u}_j \circ \bar{u}_j, u_k \circ u_k \circ \bar{u}_l \circ \bar{u}_l \rangle \right| = |\sigma_{kl}|,$$

即模型 (3.6) 去掉正交约束后的一个解为 $(z^*, w^*) = (u_k, u_l)$. 由以上讨论, 有如下定理.

定理 3.1 设 $\mathcal{T} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} u_i \circ u_i \circ \bar{u}_j \circ \bar{u}_j$ 是广义酉可分解的, 且 $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为其系数矩阵, 设 $|\sigma_{kl}| = \max_{1 \leq i, j \leq n} |\sigma_{ij}|$, 则 $(z^*, w^*) = (u_k, u_l)$ 为模型

$$\max\{|\langle \mathcal{T}, z \circ z \circ \bar{w} \circ \bar{w} \rangle| : \|z\|_2 = \|w\|_2 = 1\}$$

的一个解. 进一步假设对任意 $(i, j) \neq (k, l)$ 或 $(i, j) \neq (l, k)$, 有 $|\sigma_{kl}| > |\sigma_{ij}|$, 则模型的最优解集为

$$S = \{(e^{i\theta} u_k, e^{i\xi} u_l) : \theta, \xi \in [0, 2\pi]\} \cup \{(e^{i\theta} u_l, e^{i\xi} u_k) : \theta, \xi \in [0, 2\pi]\}.$$

证明 由之前的讨论可知 $|\sigma_{kl}|$ 是模型的最优值, 且 (u_k, u_l) 是一个最优解. 若对于任意 $(i, j) \neq (k, l)$ 或 $(i, j) \neq (l, k)$, 有 $|\sigma_{kl}| > |\sigma_{ij}|$, 计算可知对于任意 $(z, w) \in S$, 有 $|\langle \mathcal{T}, z \circ z \circ \bar{w} \circ \bar{w} \rangle| = |\sigma_{kl}|$, 即 S 的元素都是模型的最优解. 假设模型在点 (z^*, w^*) 处取到最大值, 沿用之前的记号, 则有

$$|\sigma_{kl}| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |p_i| |q_j| |\sigma_{ij}|.$$

上式右端是 $\{|\sigma_{ij}| : 1 \leq i, j \leq n\}$ 的凸组合, 所以有 $|p_k| = |q_l| = 1$ 或 $|p_l| = |q_k| = 1$. 不妨设 $|p_k| = |q_l| = 1$, 则此时 $|u_k^H z| = |u_l^H w| = 1$, 所以存在 $\theta, \xi \in [0, 2\pi]$ 使得 $z^* = e^{i\theta} u_k$, $w^* = e^{i\xi} u_l$. 所以 $(z^*, w^*) \in S$. 若 $|p_l| = |q_k| = 1$, 则可类似地说明 $(z^*, w^*) \in S$. 所以模型的解集为 S . $\square$

注意到, 若 $(z, w) = (e^{i\theta} u_i, e^{i\xi} u_j)$, 令

$$\begin{aligned} \eta &= \langle \mathcal{T}, z \circ z \circ \bar{w} \circ \bar{w} \rangle \\ &= e^{2(\xi-\theta)i} \langle \mathcal{T}, u_i \circ u_i \circ \bar{u}_j \circ \bar{u}_j \rangle \\ &= e^{2(\xi-\theta)i} \sigma_{ij}, \end{aligned}$$

则有 $\eta z \circ z \circ \bar{w} \circ \bar{w} = \sigma_{ij} u_i \circ u_i \circ \bar{u}_j \circ \bar{u}_j$. Fu 和 Fan^[9] 研究了用序列秩一逼近算法恢复酉可分解的 CPS 张量. 由上面的讨论, 很自然可以想到用序列的秩二逼近算法恢复广义酉可分解的 CPS 张量. 第 4 节将研究利用序列的秩二逼近恢复一类广义酉可分解的张量.

注 3.1 上面讨论的情形都是复的. 但容易验证, 定理 3.1 对实的情形仍然是成立的.

4 序列秩一逼近和秩二逼近算法

设 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}_{\text{cps}}^{n^4}$ 是广义酉可分解的四阶 CPS 张量, 且其广义酉分解为

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} u_i \circ u_i \circ \bar{u}_j \circ \bar{u}_j. \quad (4.1)$$

记

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^n \sigma_{ii} u_i \circ u_i \circ \bar{u}_i \circ \bar{u}_i, \quad (4.2)$$

$$\mathcal{F} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sigma_{ij} (u_i \circ u_i \circ \bar{u}_j \circ \bar{u}_j + u_j \circ u_j \circ \bar{u}_i \circ \bar{u}_i), \quad (4.3)$$

且称 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{T}$ 的秩一部分和张量, $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{T}$ 的秩二部分和张量. 注意 $\mathcal{D}$ 本身就是一个酉可分解的张量. 对酉可分解的 CPS 张量, Fu 和 Fan^[9] 考虑了用序列秩一逼近算法来求其分解, 且证明了 SROA(Fu) 算法 (见算法 1) 可以在有限步内求得原张量的酉分解.

算法 1 SROA(Fu) 算法

初始化: $k = 1, \mathcal{T}^1 = \mathcal{T}$.
For $k = 1, 2, \dots$,
 $x^k = \arg \max\{|\langle \mathcal{T}^k, x \circ x \circ \bar{x} \circ \bar{x} \rangle| : \|x\|_2 = 1\}$,
 $\lambda^k = \langle \mathcal{T}^k, x^k \circ x^k \circ \bar{x}^k \circ \bar{x}^k \rangle$,
 $\mathcal{T}^{k+1} = \mathcal{T}^k - \lambda^k x^k \circ x^k \circ \bar{x}^k \circ \bar{x}^k$.
End For
输出: $\{(x^k, \lambda^k)\}_{k \geq 1}$.

但对本文考虑的广义酉可分解 CPS 张量, SROA(Fu) 算法无法在有限步内求得原张量的广义酉分解. 本节提出了一种新的序列秩一逼近算法和一种新的序列秩二逼近算法. 对满足一定条件的广义酉可分解的张量, 我们证明这两种算法可以在有限步内求得原张量的广义酉分解. 本节接下来的内容中将详细说明两种算法的步骤与性质.

4.1 广义酉可分解张量的序列秩一逼近

假设 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}_{\text{cps}}^{n^4}$ 是一个广义酉可分解的 CPS 张量, 考虑用如下的序列秩一逼近 (SROA) 算法 (见算法 2) 来恢复 $\mathcal{T}$ 的秩一部分和张量 $\mathcal{D}$.

算法 2 SROA 算法

初始化: $k = 1, \mathcal{T}^1 = \mathcal{T}$.
For $k = 1, 2, \dots$,
 $x^k = \arg \max\{|\langle \mathcal{T}^k, x \circ x \circ \bar{x} \circ \bar{x} \rangle| : \|x\|_2 = 1, \langle x, x^l \rangle = 0, 1 \leq l < k\}$,
 $\lambda^k = \langle \mathcal{T}^k, x^k \circ x^k \circ \bar{x}^k \circ \bar{x}^k \rangle$,
 $\mathcal{T}^{k+1} = \mathcal{T}^k - \lambda^k x^k \circ x^k \circ \bar{x}^k \circ \bar{x}^k$.
End For
输出: $\{(x^k, \lambda^k)\}_{k \geq 1}$.

注 4.1 与 Fu 和 Fan^[9] 提出的 SROA(Fu) 算法不同的是, 我们要求第 k 步的解 x^k 正交于之前的所有的解 $\{x^l\}_{l=1}^{k-1}$. 因为广义酉张量 $\mathcal{T}$ 的分解中含有秩二交叉项, 如果不添加正交约束, 则求得的最佳秩一逼近张量可能不在原张量的分解中. 例如, 考虑 2×2 矩阵 $B = e_1 \circ e_1 + 2e_2 \circ e_2$ 和张量

$$\mathcal{T}^{(1)} = B \circ B = e_1 \circ e_1 \circ e_1 \circ e_1 + 4e_2 \circ e_2 \circ e_2 \circ e_2 + 2e_1 \circ e_1 \circ e_2 \circ e_2 + 2e_2 \circ e_2 \circ e_1 \circ e_1.$$

上式给出了 $\mathcal{T}^{(1)}$ 的一个广义酉分解. 问题 $\max\{|\langle \mathcal{T}^{(1)}, x \circ x \circ \bar{x} \circ \bar{x} \rangle| : \|x\|_2 = 1\}$ 的最优解和最优值分别为 $x^{(1)} = e_2, \lambda^{(1)} = 4$. 所以可以令

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(2)} &= \mathcal{T} - \lambda^{(1)} x^{(1)} \circ x^{(1)} \circ \overline{x^{(1)}} \circ \overline{x^{(1)}} \\ &= e_1 \circ e_1 \circ e_1 \circ e_1 + 2e_1 \circ e_1 \circ e_2 \circ e_2 + 2e_2 \circ e_2 \circ e_1 \circ e_1. \end{aligned}$$

问题 $\max\{|\langle \mathcal{T}^{(2)}, x \circ x \circ \bar{x} \circ \bar{x} \rangle| : \|x\|_2 = 1\}$ 的最优值和一个最优解为

$$\lambda^{(2)} = 4/3, \quad x^{(2)} = (\sqrt{2/3}, \sqrt{1/3}),$$

但秩一张量 $\lambda^{(2)} x^{(2)} \circ x^{(2)} \circ \overline{x^{(2)}} \circ \overline{x^{(2)}}$ 不在 $\mathcal{T}$ 的分解中, 且 $\mathcal{T}^{(2)}$ 减去这个秩一张量后的 CP 秩反而增大. 但添加了正交约束 $\langle x, x^{(1)} \rangle = 0$ 后, 其最优值和最优解分别为 $\lambda^{(2)} = 1, x^{(2)} = e_1$. 这表明在 SROA 算法中, 正交约束对广义酉张量 $\mathcal{T}$ 的精确恢复是必要的.

对于一般的广义酉可分解张量, SROA 并不保证一定能够求出其广义酉分解. 但如果广义酉可分解 CPS 张量 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}_{\text{cps}}^{n^4}$ 的系数矩阵 Σ 满足定义 4.1 的条件, 则可以证明 SROA 算法能够在有限步内精确恢复其秩一部分和张量 $\mathcal{D}$.

定义 4.1 假设对称矩阵 $\Sigma \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 的对角元满足 $|\sigma_{11}| \geq |\sigma_{22}| \geq \cdots \geq |\sigma_{rr}|$. 定义 $J_1 = \{1 \leq i \leq r : |\sigma_{ii}| = |\sigma_{11}|\}$, $s_1 = \max J_1$,

$$J_{k+1} = \{1 \leq i \leq r : |\sigma_{ii}| = |\sigma_{ll}|, l = s_k + 1\}, \quad k \geq 1,$$

即 J_k 包含绝对值为第 k 大的对角元的指标. 若 Σ 满足

- (1) 对 $i = 1, \dots, r$, 有 $|\sigma_{ii}| = \max\{|\sigma_{ij}| : i \leq j \leq r\}$;
- (2) 对任意的 k , 以及任意 $i, j \in J_k$ 且 $i \neq j$, 都有 $|\sigma_{ii}| > |\sigma_{ij}|$,

则称矩阵 Σ 是弱对角占优的. 若对称矩阵 $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 可以分块为

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

且 $\Sigma_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 是弱对角占优的, 则同样称 Λ 是弱对角占优的.

注 4.2 如果广义酉可分解张量 $\mathcal{T} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sigma_{ij} u_i \circ u_i \circ \overline{u_j} \circ \overline{u_j}$ 的系数矩阵 Σ 的对角元不是按绝对值大小排列的, 我们总可以通过对 $u_1, \dots, u_n$ 重新编号使得新的系数矩阵 $\hat{\Sigma}$ 满足对角元绝对值从大到小. 所以在本节中, 总假设 Σ 的对角元的绝对值是从大到小排列的.

注 4.3 若 $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是弱对角占优的, 则 σ_{ii} 是子矩阵

$$\Sigma(i:n, i:n) := \begin{bmatrix} \sigma_{ii} & \cdots & \sigma_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{ni} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

绝对值最大的元素, 即

$$|\sigma_{ii}| = \max\{|\sigma_{kj}| : i \leq k, j \leq n\},$$

且子矩阵 $\Sigma(i:n, i:n)$ 仍然是弱对角占优的.

例 4.1 下面给出了两个系数矩阵满足弱对角占优性质的广义酉 CPS 张量的例子.

(1) 设 $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是对称矩阵, 且 $\text{rank}(B) = r$, $\sigma_1 > \cdots > \sigma_r > 0$, 其中 σ_i 是 B 的第 i 大奇异值, 则张量

$$\mathcal{T} = B \circ \overline{B}$$

的系数矩阵是弱对角占优的.

(2) 设 $B_s \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $s = 1, \dots, m$ 是对称矩阵, 进一步假设这些矩阵的奇异子空间相互正交, 且每个矩阵的奇异值互不相同, 则张量

$$\mathcal{T} = \sum_{s=1}^m B_s \circ \overline{B_s}$$

的系数矩阵为弱对角占优的.

定理 4.1 设 $\mathcal{T} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} u_i \circ u_i \circ \overline{u_j} \circ \overline{u_j}$ 是广义西可分解的 CPS 张量, 且其系数矩阵是弱对角占优的, 记 $J_1 = \{1 \leq i \leq n : |\sigma_{ii}| = |\sigma_{11}|\}$, 则模型

$$\max\{|\langle \mathcal{T}, x \circ x \circ \overline{x} \circ \overline{x} \rangle| : \|x\|_2 = 1, x \in \mathbb{C}^n\}$$

的最优值为 $|\sigma_{11}|$, 其最优解集为 $S = \{e^{i\theta} u_j : j \in J_1, \theta \in [0, 2\pi]\}$.

证明 对满足约束的 $x \in \mathbb{C}^n$, 记 $\alpha_i = u_i^H x = \langle x, u_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$, 则

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{T}, x \circ x \circ \overline{x} \circ \overline{x} \rangle| &= \left| \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \langle u_i \circ u_i \circ \overline{u_j} \circ \overline{u_j}, x \circ x \circ \overline{x} \circ \overline{x} \rangle \right| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n |\sigma_{ij} \overline{\alpha_i}^2 \alpha_j^2|. \end{aligned}$$

记 $y = [\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2]^T \in \mathbb{C}^n$, 则 $\sum_{i=1}^n |y_i| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \|U^H x\|_2^2 = 1$, 且

$$\sum_{i,j=1}^n |\sigma_{ij} \overline{\alpha_i}^2 \alpha_j^2| = \sum_{i,j=1}^n |y_i| |y_j| |\sigma_{ij}|.$$

因为 $\sum_{i,j=1}^n |y_i| |y_j| = (\sum_{i=1}^n |y_i|)(\sum_{j=1}^n |y_j|) = 1$, 所以上式右端是 $\{|\sigma_{ij}| : 1 \leq i, j \leq n\}$ 的凸组合. 有限个实数的凸组合一定小于等于其最大值, 所以有

$$\sum_{i,j=1}^n |y_i| |y_j| |\sigma_{ij}| \leq \max\{|\sigma_{ij}| : 1 \leq i, j \leq n\}.$$

由弱对角占优性可知 $|\sigma_{11}| = \max\{|\sigma_{ij}| : 1 \leq i, j \leq n\}$, 且当 $x = e^{i\theta} u_j$, $j \in J_1$ 时等号成立, 所以模型最大值为 $|\sigma_{11}|$, 且 S 中的元素都是最优解.

下面假设模型在点 x 取到最大值, 即等号成立. 由凸组合的性质可知, 当 $|\sigma_{ij}|$ 小于 $|\sigma_{11}|$ 时, 其凸组合系数 $|y_i| |y_j| = 0$. 我们先说明此时对于任意 $j \notin J_1$, 有 $y_j = 0$. 若不然, 存在 $j \notin J_1$ 使得 $|y_j| > 0$, 则 $|\sigma_{jj}| < |\sigma_{11}|$ 且 $|y_j| |y_j| > 0$. 所以由凸组合性质可知

$$\sum_{i,j=1}^n |y_i| |y_j| |\sigma_{ij}| < |\sigma_{11}|,$$

与假设矛盾, 所以必有 $y_j = 0, \forall j \notin J_1$. 若存在两个不同的 $i_1, i_2 \in J_1$, 使得 $|p_{i_1}| |p_{i_2}| > 0$, 则由弱对角占优性可知 $|\sigma_{i_1} \sigma_{i_2}| < |\sigma_{i_1 i_1}| = |\sigma_{11}|$, 此时同样有

$$\sum_{i,j=1}^n |y_i| |y_j| |\sigma_{ij}| < |\sigma_{11}|.$$

综上可知, 模型在点 x 取到最大值时, 一定存在某个 $j \in J$, 使得 $|y_j| = 1$, 即 $|u_j^H x| = 1$. 而 $|u_j^H x| = 1$ 表示存在 $\theta \in [0, 2\pi]$ 使得 $x = e^{i\theta} u_j$. 所以最优解集为 $S = \{e^{i\theta} u_j : j \in J_1, \theta \in [0, 2\pi]\}$. $\square$

当系数矩阵弱对角占优时, 假设 x 为关于 $\mathcal{T}$ 的最佳 CPS 秩一逼近的解, 则存在 $j \in J_1, \theta \in [0, 2\pi]$, 使得 $x = e^{i\theta} u_j$, 此时有

$$\begin{aligned} x \circ x \circ \overline{x} \circ \overline{x} &= (e^{i\theta} u_1) \circ (e^{i\theta} u_1) \circ (e^{-i\theta} \overline{u_1}) \circ (e^{-i\theta} \overline{u_1}) = u_j \circ u_j \circ \overline{u_j} \circ \overline{u_j}, \\ \langle \mathcal{T}, x \circ x \circ \overline{x} \circ \overline{x} \rangle &= \sigma_{jj}, \end{aligned}$$

即 $\mathcal{T}$ 的最佳 CPS 秩一逼近一定是其广义西分解的某一项. 所以可以证明, SROA 算法可以在至多 n 步内求得 $\mathcal{D}$ 的分解.

推论 4.1 设 $\mathcal{T} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} u_i \circ u_i \circ \overline{u_j} \circ \overline{u_j}$ 是广义西可分解的 CPS 张量, 其系数矩阵 Σ 是弱对角占优的, 将 Σ 分块成

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_r \in \mathbb{R}^{r \times r}, \quad 1 \leq r \leq n.$$

令 $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^n \sigma_{ii} u_i \circ u_i \circ \overline{u_i} \circ \overline{u_i}$ 为 $\mathcal{T}$ 的秩一部分和张量, 则 SROA 算法可以在至多 r 步内求得 $\mathcal{D}$ 的分解.

证明 沿用定理 4.1 的记号, 则由定理 4.1 可知, 对于 SROA 算法, 存在 $j_1 \in J_1, \theta_1 \in [0, 2\pi]$ 使得 $x^1 = e^{i\theta_1} u_{j_1}$, 且此时

$$x^1 \circ x^1 \circ \overline{x^1} \circ \overline{x^1} = u_{j_1} \circ u_{j_1} \circ \overline{u_{j_1}} \circ \overline{u_{j_1}}, \quad \lambda^1 = \sigma_{j_1 j_1}.$$

不失一般性, 设 $j_1 = 1$, 则

$$\mathcal{T}^2 = \sum_{i=2}^n \sigma_{ii} u_i \circ u_i \circ \overline{u_i} \circ \overline{u_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \sigma_{ij} (u_i \circ u_i \circ \overline{u_j} \circ \overline{u_j} + u_j \circ u_j \circ \overline{u_i} \circ \overline{u_i}).$$

在算法第 2 步对满足约束条件 $\langle x, x^1 \rangle = 0, \|x\|_2 = 1$ 的 x , 有

$$|\langle \mathcal{T}^2, x \circ x \circ \overline{x} \circ \overline{x} \rangle| = \sum_{i,j=2}^n |\sigma_{ij}| |y_i| |y_j|, \quad \sum_{i=2}^n |y_i| = 1,$$

其中 $y_i = (u_i^H x)^2$. 因为矩阵 $\Sigma(2:n, 2:n)$ 仍然是弱对角占优的, 所以类似定理 4.1 的证明可知问题

$$\max\{|\langle \mathcal{T}^2, x \circ x \circ \overline{x} \circ \overline{x} \rangle| : \|x\|_2 = 1, \langle x, x^1 \rangle = 0\}$$

的最优解集为 $S^{(2)} = \{e^{i\theta} u_j : j \in J_1^{(2)}, \theta \in [0, 2\pi]\}$, 这里 $J_1^{(2)} = \{2 \leq j \leq n : |\sigma_{jj}| = |\sigma_{22}|\}$. 所以由归纳法可知

$$\sum_{i=1}^r \sigma_{ii} u_i \circ u_i \circ \overline{u_i} \circ \overline{u_i} = \sum_{k=1}^r \lambda^k x^k \circ x^k \circ \overline{x^k} \circ \overline{x^k},$$

且在算法的第 $r+1$ 步, 对满足约束的可行解 x 有 $|\langle \mathcal{T}^{r+1}, x \circ x \circ \overline{x} \circ \overline{x} \rangle| = 0$. □

注 4.4 在 SROA 算法中, 我们求得的解实际上为 $\{e^{i\theta_j} u_j : j = 1, \dots, r\}$, 此时可以用如下方式求秩二交叉项的系数. 对于 $1 \leq i \neq j \leq r$, 令

$$\begin{aligned} \eta_{ij} &= \langle \mathcal{T}, (e^{i\theta_i} u_i) \circ (e^{i\theta_j} u_j) \circ (\overline{e^{i\theta_j} u_j}) \circ (\overline{e^{i\theta_i} u_i}) \rangle \\ &= \langle \mathcal{T}, e^{2i(\theta_i - \theta_j)} u_i \circ u_i \circ \overline{u_j} \circ \overline{u_j} \rangle \\ &= e^{2i(\theta_j - \theta_i)} \sigma_{ij}, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \eta_{ij} (e^{i\theta_i} u_i) \circ (e^{i\theta_j} u_j) \circ (\overline{e^{i\theta_j} u_j}) \circ (\overline{e^{i\theta_i} u_i}) &= e^{2i(\theta_j - \theta_i)} \sigma_{ij} e^{2i(\theta_i - \theta_j)} u_i \circ u_i \circ \overline{u_j} \circ \overline{u_j} \\ &= \sigma_{ij} u_i \circ u_i \circ \overline{u_j} \circ \overline{u_j}, \end{aligned}$$

即可以直接利用 SROA 算法求出的解得到 $\mathcal{T}$ 的秩二项及其系数.

4.2 广义酉可分解张量的序列秩二逼近

上一节证明了对系数矩阵满足弱对角占优性质的 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}_{\text{cps}}^{n^4}$, 可以用 SROA 算法求 $\mathcal{T}$ 的秩一部分和张量 $\mathcal{D}$ 的分解, 并且可以利用求出的解计算交叉项及其系数. 但对秩一部分和张量 $\mathcal{D}$ 为 0 的广义酉可分解张量, 即

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=i+1}^r \sigma_{ij} (u_i \circ u_i \circ \overline{u_j} \circ \overline{u_j} + u_j \circ u_j \circ \overline{u_i} \circ \overline{u_i}), \quad (4.4)$$

显然 SROA 算法无法求出 $\mathcal{T}$ 的分解. 对这种张量, 可以用如下的序列秩二逼近算法 (SRTA) 求 $\mathcal{T}$ 的广义酉分解 (见算法 3).

算法 3 SRTA 算法

初始化: $k = 1, \mathcal{T}^1 = \mathcal{T}$.

For $k = 1, 2, \dots$,

$(z^k, w^k) = \arg \min \{ |\langle \mathcal{T}^k, z \circ z \circ \overline{w} \circ \overline{w} \rangle| : \|z\|_2 = \|w\|_2 = 1 \}$,

令 $\eta^k = \langle \mathcal{T}^k, z^k \circ z^k \circ \overline{w^k} \circ \overline{w^k} \rangle$,

$\mathcal{T}^{k+1} = \mathcal{T}^k - \eta^k z^k \circ z^k \circ \overline{w^k} \circ \overline{w^k}$.

End For

输出: $\{(\eta^k, z^k, w^k)\}_{k \geq 1}$.

当 $\mathcal{T}$ 的系数矩阵非零元素的绝对值互不相同, 可以证明 SRTA 可以在有限步内求得 $\mathcal{T}$ 的广义酉分解.

推论 4.2 设 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{n^4}$ 可以分解成

$$\mathcal{T} = \sigma_{12} u_1 \circ u_1 \circ \overline{u_2} \circ \overline{u_2} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=i+1}^n \sigma_{ij} (u_i \circ u_i \circ \overline{u_j} \circ \overline{u_j} + u_j \circ u_j \circ \overline{u_i} \circ \overline{u_i}),$$

其中 $\{u_i\}_{i=1}^n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的一组标准正交基, 且对任意 $2 \leq i < j \leq n$ 有 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in \mathbb{R}$. 进一步假设 $\sigma_{12} \in \mathbb{R}$, $|\sigma_{12}| > \max\{|\sigma_{ij}| : 2 \leq i < j \leq n\}$, 则模型

$$\max\{|\langle \mathcal{T}, z \circ z \circ \overline{w} \circ \overline{w} \rangle| : \|z\|_2 = \|w\|_2 = 1\}$$

的最优解集为 $S = \{(e^{i\theta} u_1, e^{i\xi} u_2) : \theta, \xi \in [0, 2\pi]\}$.

证明 其证明类似定理 3.1, 此处不再赘述. □

定理 4.2 设 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}_{\text{cps}}^{n^4}$ 为广义酉可分解张量, 其广义酉可分解为

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=i+1}^r \sigma_{ij} (u_i \circ u_i \circ \overline{u_j} \circ \overline{u_j} + u_j \circ u_j \circ \overline{u_i} \circ \overline{u_i}).$$

记 $J = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq r\}$, 且假设对任意 $(i, j), (k, l) \in J$ 且 $(i, j) \neq (k, l)$, 要么 $|\sigma_{ij}| = |\sigma_{kl}| = 0$, 要么 $|\sigma_{ij}| \neq |\sigma_{kl}|$, 则 SRTA 算法可以在有限步内求得 $\mathcal{T}$ 的广义酉分解.

证明 将 $\{\sigma_{ij} : 1 \leq i < j \leq r\}$ 中的所有非 0 元素按绝对值大小重新排序, 即

$$|\sigma_{i_1 j_1}| > |\sigma_{i_2 j_2}| > \cdots > |\sigma_{i_N j_N}| > 0, \quad (i_s, j_s) \in J, \quad s = 1, \dots, N.$$

则 $\mathcal{T}$ 可以重新表示为

$$\mathcal{T} = \sum_{s=1}^N \sigma_{i_s j_s} (u_{i_s} \circ u_{i_s} \circ \overline{u_{j_s}} \circ \overline{u_{j_s}} + u_{j_s} \circ u_{j_s} \circ \overline{u_{i_s}} \circ \overline{u_{i_s}}).$$

由定理 3.1 可知, SRTA 算法第 1 步的解集为

$$S^{(1)} = \{(e^{i\xi} u_{i_1}, e^{i\theta} u_{j_1}) : \xi, \theta \in [0, 2\pi]\} \cup \{(e^{i\xi} u_{j_1}, e^{i\theta} u_{i_1}) : \xi, \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

不失一般性, 不妨假设算法第 1 步的解为 $(z^1, w^1) = (e^{i\xi_1} u_{i_1}, e^{i\theta_1} u_{j_1})$, 则

$$\eta^1 = \langle \mathcal{T}^1, z^1 \circ z^1 \circ \overline{w^1} \circ \overline{w^1} \rangle = e^{2(\theta_1 - \xi_1)i} \sigma_{i_1 j_1},$$

且 $\eta^1 z^1 \circ z^1 \circ \overline{w^1} \circ \overline{w^1} = \sigma_{i_1 j_1} u_{i_1} \circ u_{i_1} \circ \overline{u_{j_1}} \circ \overline{u_{j_1}}$. 所以

$$\mathcal{T}^2 = \sigma_{j_1 i_1} u_{j_1} \circ u_{j_1} \circ \overline{u_{i_1}} \circ \overline{u_{i_1}} + \sum_{s=2}^N \sigma_{i_s j_s} (u_{i_s} \circ u_{i_s} \circ \overline{u_{j_s}} \circ \overline{u_{j_s}} + u_{j_s} \circ u_{j_s} \circ \overline{u_{i_s}} \circ \overline{u_{i_s}}).$$

由推论 4.2 可知, 存在 $\xi_2, \theta_2 \in [0, 2\pi]$, 使得 $(z^2, w^2) = (e^{i\xi_2} u_{j_1}, e^{i\theta_2} u_{i_1})$. 所以有

$$\mathcal{T}^3 = \sum_{s=2}^N \sigma_{i_s j_s} (u_{i_s} \circ u_{i_s} \circ \overline{u_{j_s}} \circ \overline{u_{j_s}} + u_{j_s} \circ u_{j_s} \circ \overline{u_{i_s}} \circ \overline{u_{i_s}}).$$

之后由归纳法可得, 算法可以在有限步内求出 $\mathcal{T}$ 的广义酉分解. $\square$

注 4.5 上面两个小节讨论的张量都是复的. 如果将张量限制为实张量, 且将向量也限制在实数域上, 则上面的结论显然也都是成立的.

5 四阶 PS 张量的 CP 秩和 PS 秩

本节讨论 PS 张量几种秩之间的关系. Fu 等^[10] 证明了对于任意的 PS 张量 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{n^4}$ 有如下分解:

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^r \lambda_i a_i \circ a_i \circ \overline{a_i} \circ \overline{a_i}, \quad a_i \in \mathbb{C}^n, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (5.1)$$

注意与 CPS 张量不同, 这里的系数 λ_i 可以是复数. 基于分解 (5.1), 他们定义 PS 张量的 PS 秩为使得上述分解成立的最小正整数 r . 然而对于 PS 张量, 其 PS 秩和 CP 秩并不一定相同. 例如, 张量 $\mathcal{T} = e_1 \circ e_1 \circ e_2 \circ e_2 + e_2 \circ e_2 \circ e_1 \circ e_1$, 可以证明其 CP 秩为 2, 但其 PS 秩大于 2. 同时, 如果假设 $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{n^4}$ 是 CPS 但非全对称的张量, 则 $\mathcal{T}$ 的 PS 秩不可能为 1. 这表明如上定义的 PS 秩在某些情形下不能很好地刻画 PS 张量的性质. Sabir 等^[21] 证明了任意四阶 PS 张量 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}_{\text{ps}}^{n^4}$ 可以分解为

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot a_i \circ a_i \cdot \overline{b_i} \circ \overline{b_i}. \quad (5.2)$$

由此, 定义 PS 张量 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}_{\text{ps}}^{n^4}$ 的 PS 秩为

$$\text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T}) = \min \left\{ r : \sum_{i=1}^r \lambda_i a_i \circ a_i \circ \overline{b_i} \circ \overline{b_i}, \lambda_i \in \mathbb{C}, a_i, b_i \in \mathbb{C}^n \right\}. \quad (5.3)$$

由定义, 显然有 $\text{rank}(\mathcal{T}) \leq \text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T})$. 如果在分解 (5.2) 中有 $r = \text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T})$, 则称 (5.2) 中的分解为 $\mathcal{T}$ 的一个 PS 秩分解. 对于全对称的张量, Zhang 等^[25] 证明了当张量的 CP 秩小于其阶数时, 每一个 CP 秩分解也是对称秩分解. 对于四阶 PS 张量和 CPS 张量, 有类似的结论. 对于 $x, y \in \mathbb{C}^n$, 用记号 $x \sim y$ 表示 x 和 y 线性相关. 我们先给出一个简单引理, 其证明比较初等, 这里略去.

引理 5.1 设 $x, y \in \mathbb{C}^n$ 线性无关且 $w, z \in \mathbb{C}^n$ 线性无关, 如果 $x \circ w + y \circ z$ 是对称矩阵, 则要么有 $x \sim w, y \sim z$, 要么有 $x \sim z, y \sim w$.

定理 5.1 假设 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}_{\text{ps}}^{n^4}$, 则 $\text{rank}(\mathcal{T}) = 1$ 当且仅当 $\text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T}) = 1$.

证明 由 $\text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T}) \geq \text{rank}(\mathcal{T})$ 可知 $\text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T}) = 1$ 表示 $\text{rank}(\mathcal{T}) = 1$. 假设 $\text{rank}(\mathcal{T}) = 1$, 则存在 CP 秩分解 $\mathcal{T} = a \circ b \circ c \circ d$. 选取指标 $k, l \in [n]$ 满足 $c_k d_l \neq 0$, 考虑矩阵 $\mathcal{T}(:, :, k, l) = c_k d_l \cdot a \circ b$. 这是一个对称矩阵, 所以 $a \sim b$. 类似可证 $c \sim d$, 所以 $\text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T}) = 1$. $\square$

推论 5.1 设 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}_{\text{cps}}^{n^4}$ 且 $\text{rank}(\mathcal{T}) = 1$, 设 $\mathcal{T} = a \circ b \circ \bar{c} \circ \bar{d}$, 则 $a \sim b \sim c \sim d$.

证明 由定理 5.1 可知 $a \sim b$ 且 $c \sim d$. 又由 $\mathcal{T}_{[1,2;3,4]} = \text{vec}(a \circ b) \circ \text{vec}(\bar{c} \circ \bar{d})$ 是 Hermite 矩阵, 可知 $a \circ b \sim c \circ d$. 所以 $a \sim b \sim c \sim d$. $\square$

推论 5.1 证明了对 CPS 张量 $\mathcal{T}$, 当 $\text{rank}(\mathcal{T}) = 1$ 时其 CP 秩分解一定是 PS 秩分解. 下面讨论 $\text{rank}(\mathcal{T}) = 2$ 时的情形.

引理 5.2 设 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}_{\text{cps}}^{n^4}$, 且 $\mathcal{T}$ 可以写成 $\mathcal{T} = a \circ b \circ (\bar{x} \circ \bar{y} + \bar{w} \circ \bar{z})$, 则 $\text{rank}(\mathcal{T}) = 1$.

证明 将 $\mathcal{T}$ 展开成矩阵 $\mathcal{T}_{[1,2;3,4]} = \text{vec}(a \circ b) \circ \text{vec}(\bar{x} \circ \bar{y} + \bar{w} \circ \bar{z})$. 由 $\mathcal{T}$ 的对称性可知 $\mathcal{T}_{[1,2;3,4]}$ 是一个秩一的 Hermite 矩阵, 所以存在 $\gamma \in \mathbb{C}$ 使得 $\text{vec}(\bar{x} \circ \bar{y} + \bar{w} \circ \bar{z}) = \gamma \cdot \text{vec}(\bar{a} \circ \bar{b})$, 即 $\bar{x} \circ \bar{y} + \bar{w} \circ \bar{z} = \gamma \cdot \bar{a} \circ \bar{b}$. 于是 $\mathcal{T}_{[1,2;3,4]} = \gamma \cdot \text{vec}(a \circ b) \circ \text{vec}(\bar{a} \circ \bar{b})$. 所以 $\mathcal{T} = \gamma \cdot a \circ b \circ \bar{a} \circ \bar{b}$, 即 $\text{rank}(\mathcal{T}) = 1$. $\square$

定理 5.2 设 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}_{\text{ps}}^{n^4}$, 则 $\text{rank}(\mathcal{T}) = 2$ 当且仅当 $\text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T}) = 2$.

证明 假设 $\text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T}) = 2$, 则有 $\text{rank}(\mathcal{T}) \leq \text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T}) = 2$. 又由定理 5.1 可知 $\text{rank}(\mathcal{T}) \neq 1$, 否则 $\text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T})$ 也等于 1, 所以 $\text{rank}(\mathcal{T}) = 2$. 再假设 $\text{rank}(\mathcal{T}) = 2$, 设 $\mathcal{T} = \sum_{i=1}^2 \lambda_i a_i \circ b_i \circ c_i \circ d_i$ 为其 CP 秩分解. 下面分两种情形进行讨论.

(1) 如果 $\dim(\text{span}\{a_1 \circ b_1, a_2 \circ b_2\}) = 1$, 则存在 $\gamma \in \mathbb{C}$, 使得 $\gamma \cdot a_1 \circ b_1 = a_2 \circ b_2$, 从而

$$\mathcal{T} = a_1 \circ b_1 \circ (\lambda_1 \cdot c_1 \circ d_1 + \lambda_2 \cdot \gamma \cdot c_2 \circ d_2).$$

由 $\mathcal{T}$ 的对称性可知 $a_1 \circ b_1$ 和 $\lambda_1 \cdot c_1 \circ d_1 + \lambda_2 \gamma \cdot c_2 \circ d_2$ 都是对称矩阵, 所以可以写成

$$a_1 \circ b_1 = \beta_1 x \circ x, \quad \lambda_1 \cdot c \circ d + \lambda_2 \gamma \cdot c_2 \circ d_2 = \beta_3 z \circ z + \beta_4 w \circ w.$$

所以

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \beta_1 x \circ x \circ (\beta_3 z \circ z + \beta_4 w \circ w) \\ &= \beta_1 \beta_3 \cdot x \circ x \circ z \circ z + \beta_1 \beta_4 \cdot x \circ x \circ w \circ w, \end{aligned}$$

即 $\text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T}) = 2$. 注意到如果 $\dim(\text{span}\{c_1 \circ d_1, c_2 \circ d_2\}) = 1$, 则可同样可证明 $\text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T}) = 2$.

(2) 如果 $\dim(\text{span}\{a_1 \circ b_1, a_2 \circ b_2\}) = 2$ 且 $\dim(\text{span}\{c_1 \circ d_1, c_2 \circ d_2\}) = 2$, 则存在 $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得 $\langle a_1 \circ b_1, X \rangle = 1, \langle a_2 \circ b_2, X \rangle = 0$. 定义矩阵

$$M \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad M_{kl} = \sum_{i,j=1}^n \overline{X_{ij}} \mathcal{T}_{ijkl},$$

则 M 是一个对称矩阵且 $M = \lambda_1 \cdot c_1 \circ d_1$. 所以 $c_1 \sim d_1$, 重复利用线性无关性可得 $c_2 \sim d_2$, $a_1 \sim b_1$ 及 $a_2 \sim b_2$. 所以此时仍有 $\text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T}) = 2$. $\square$

Zhang 等^[25] 证明了 CP 秩小于阶数时, 全对称张量的每一个 CP 秩分解都是全对称分解. 但类似的结论对 PS 张量并不成立. 例如, 考虑 $\mathcal{T} = e_1 \circ e_1 \circ e_1 \circ e_2 + e_1 \circ e_1 \circ e_2 \circ e_1$, 这是一个 PS 张量且 $\text{rank}(\mathcal{T}) = 2$, 但这里给出的 CP 秩分解并不是 PS 分解. 但对于 CPS 张量, 类似的结论是成立的. 接下来对 CPS 张量证明一个更强的结论. 在后面的证明中, 我们会重复用到定理 5.2 中情形 (2) 中的证明技巧. 我们将其归纳为如下引理.

引理 5.3 设 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}_{\text{ps}}^{n^4}$ 且 $\mathcal{T} = \sum_{i=1}^r a_i \circ b_i \circ \bar{c}_i \circ \bar{d}_i$, 如果 $\{c_i \circ d_i\}_{i=1}^r$ 线性无关, 则 $a_i \sim b_i$, $i = 1, \dots, r$. 如果 $\{a_i \circ b_i\}_{i=1}^r$ 线性无关, 则 $c_i \sim d_i$, $i = 1, \dots, r$.

引理 5.4 设 $a, b \in \mathbb{C}^n$ 线性无关且 $c, d \in \mathbb{C}^n$, 则张量

$$\mathcal{T} = \lambda_1 a \circ a \circ \bar{c} \circ \bar{c} + \lambda_2 a \circ a \circ \bar{d} \circ \bar{d} + \lambda_3 b \circ b \circ \bar{c} \circ \bar{c} + \lambda_4 b \circ b \circ \bar{d} \circ \bar{d}$$

的 CP 秩为等于 $\text{nnz}(\{\lambda_i\}_{i=1}^4)$, 即系数 $\{\lambda_i\}_{i=1}^4$ 中非零项的个数.

证明 因为 a 和 b 线性无关且 c 和 d 线性无关, 所以存在可逆矩阵 $L, M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得 $L(a, b) = (e_1, e_2)$, $M(c, d) = (e_1, e_2)$. 令

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= (L, L, \bar{M}, \bar{M}) * \mathcal{T} \\ &= \lambda_1 a \circ e_1 \circ \bar{e}_1 \circ \bar{e}_1 + \lambda_2 e_1 \circ e_1 \circ \bar{e}_2 \circ \bar{e}_2 + \lambda_3 e_2 \circ e_2 \circ \bar{e}_1 \circ \bar{e}_1 + \lambda_4 e_2 \circ e_2 \circ \bar{e}_2 \circ \bar{e}_2, \end{aligned}$$

则展开矩阵 $\mathcal{C}_{[1,3;2,4]} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_2, \lambda_4, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n^2 \times n^2}$. 所以

$$\text{rank}(\mathcal{C}) \geq \text{rank}(\mathcal{C}_{[1,3;2,4]}) = \text{nnz}(\{\lambda_i\}).$$

又由上面 $\mathcal{C}$ 的分解知 $\text{rank}(\mathcal{C}) \leq \text{nnz}(\{\lambda_i\})$, 所以 $\text{rank}(\mathcal{T}) = \text{rank}(\mathcal{C}) = \text{nnz}(\{\lambda_i\})$. $\square$

推论 5.2 设 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}_{\text{cps}}^{n^4}$ 且 $\text{rank}(\mathcal{T}) = 2$, 则 $\mathcal{T}$ 只可能写成如下两种形式之一:

- (1) $\mathcal{T} = \lambda_1 u_1 \circ u_1 \circ \bar{u}_1 \circ \bar{u}_1 + \lambda_2 u_2 \circ u_2 \circ \bar{u}_2 \circ \bar{u}_2$;
- (2) $\mathcal{T} = \lambda_1 u_1 \circ u_1 \circ \bar{u}_2 \circ \bar{u}_2 + \lambda_2 u_2 \circ u_2 \circ \bar{u}_1 \circ \bar{u}_1$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ 且 $u_1, u_2 \in \mathbb{C}^n$ 线性无关.

证明 设 $\mathcal{T} = a_1 \circ b_1 \circ \bar{c}_1 \circ \bar{d}_1 + a_2 \circ b_2 \circ \bar{c}_2 \circ \bar{d}_2$ 为其 CP 秩分解. 如果 $\{a_1 \circ b_1, a_2 \circ b_2\}$ 线性相关或者 $\{c_1 \circ d_1, c_2 \circ d_2\}$ 线性相关, 则由引理 5.2 可知 $\text{rank}(\mathcal{T}) = 1$, 与假设矛盾. 所以 $\{a_1 \circ b_1, a_2 \circ b_2\}$ 线性无关且 $\{c_1 \circ d_1, c_2 \circ d_2\}$ 线性无关. 所以由引理 5.3 可知 $a_i \sim b_i$, $c_i \sim d_i$, $i = 1, 2$. 所以 $\mathcal{T}$ 的 CP 分解可以写成

$$\mathcal{T} = \lambda_1 a_1 \circ a_1 \circ \bar{c}_1 \circ \bar{c}_1 + \lambda_2 a_2 \circ a_2 \circ \bar{c}_2 \circ \bar{c}_2, \quad \lambda_1 \lambda_2 \neq 0.$$

因为 $\mathcal{T}$ 是 CPS 张量, 由共轭对称性有 $\text{span}\{a_1 \circ a_1, a_2 \circ a_2\} = \text{span}\{c_1 \circ c_1, c_2 \circ c_2\}$, 即 $c_1 \circ c_1$ 和 $c_2 \circ c_2$ 可以由 $\{a_1 \circ a_1, a_2 \circ a_2\}$ 线性表示, 即

$$c_1 \circ c_1 = \beta_{11} a_1 \circ a_1 + \beta_{12} a_2 \circ a_2, \quad c_2 \circ c_2 = \beta_{21} a_1 \circ a_1 + \beta_{22} a_2 \circ a_2.$$

从而 $\mathcal{T}$ 可以表示为

$$\mathcal{T} = \gamma_1 a_1 \circ a_1 \circ \bar{a}_1 \circ \bar{a}_1 + \gamma_2 a_1 \circ a_1 \circ \bar{a}_2 \circ \bar{a}_2 + \gamma_3 a_2 \circ a_2 \circ \bar{a}_1 \circ \bar{a}_1 + \gamma_4 a_2 \circ a_2 \circ \bar{a}_2 \circ \bar{a}_2,$$

其中 $\gamma_1 = \lambda_1\beta_{11}$, $\gamma_2 = \lambda_1\beta_{12}$, $\gamma_3 = \lambda_2\beta_{21}$, $\gamma_4 = \lambda_2\beta_{22}$. 如果 $a_1 \sim a_2$, 则 $\text{rank}(\mathcal{T}) = 1$, 与假设矛盾. 所以必有 a_1 和 a_2 线性无关. 由引理 5.4 和 $\text{nnz}(\{\gamma_i\}) = \text{rank}(\mathcal{T}) = 2$ 可知, 有且仅有两个系数 γ_i 和 γ_j 为 0. 如果 γ_1 和 γ_2 同时为 0 或者 γ_3 和 γ_4 同时为 0, 则由引理 5.2 可知 $\mathcal{T}$ 的 CP 秩为 1, 矛盾. 所以 $\{\beta_{11}, \beta_{12}\}$ 和 $\{\beta_{21}, \beta_{22}\}$ 一定各有一个为 0. 由引理 5.2 可知, 只可能是 β_{11} 和 β_{22} 同时为 0, 或者 β_{12} 和 β_{21} 同时为 0, 所以要么 $b_1 \circ b_1 \sim a_2 \circ a_2$, $b_2 \circ b_2 \sim a_1 \circ a_1$, 要么 $b_1 \circ b_1 \sim a_1 \circ a_1$, $b_2 \circ b_2 \sim a_2 \circ a_2$, 即 $\mathcal{T}$ 的 CP 秩分解一定是推论中的形式. $\square$

推论 5.2 证明了秩二 CPS 张量的 CP 秩分解一定是 PS 秩分解, 并给出了 CP 秩为 2 的 CPS 张量所有可能的格式. 最后证明对四阶 PS 张量 $\mathcal{T}$, $\text{rank}(\mathcal{T}) = 3$ 当且仅当 $\text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T}) = 3$.

定理 5.3 设 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}_{\text{ps}}^{n^4}$, 则 $\text{rank}(\mathcal{T}) = 3$ 当且仅当 $\text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T}) = 3$.

证明 由定理 5.2 可知, 若 $\text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T}) = 3$ 则 $\text{rank}(\mathcal{T}) = 3$. 现在假设 $\text{rank}(\mathcal{T}) = 3$, 则存在 CP 分解 $\mathcal{T} = \sum_{i=1}^3 a_i \circ b_i \circ c_i \circ d_i$. 我们对空间 $\text{span}(\{a_i \circ d_i\}_{i=1}^3)$ 的维数分类讨论.

(1) 当 $\dim \text{span}(\{a_i \circ d_i\}_{i=1}^3) = 1$ 时, 张量 $\mathcal{T}$ 可以表示成 $\mathcal{T} = (a_1 \circ b_1) \circ (\sum_{i=1}^3 \lambda_i c_i \circ d_i)$, 由 $\mathcal{T}$ 的对称性, 可得 $a_1 \circ b_1, \sum_{i=1}^3 \lambda_i c_i \circ d_i$ 都是对称矩阵, 所以存在 $x, y, z, w \in \mathbb{C}^n$ 使得

$$a_1 \circ b_1 = x \circ x, \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_i c_i \circ d_i = y \circ y + z \circ z + w \circ w,$$

故

$$\mathcal{T} = (a_1 \circ b_1) \circ \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i c_i \circ d_i \right) = x \circ x \circ (y \circ y + z \circ z + w \circ w),$$

即 $\text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T}) = 3$. 注意, 若 $\dim \text{span}(\{c_i \circ d_i\}_{i=1}^3) = 1$, 则可类似证明 $\text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T}) = 3$.

(2) 当 $\dim \text{span}(\{a_i \circ d_i\}_{i=1}^3) = 3$ 时, $\{a_i \circ d_i\}_{i=1}^3$ 线性无关, 所以由引理 5.3 有 $c_i \sim d_i$, $1 \leq i \leq 3$. 所以 $\mathcal{T}$ 的 CP 分解变成 $\mathcal{T} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i a_i \circ b_i \circ c_i \circ c_i$. 下面分 3 种情形进行讨论.

(2a) 若 $\dim \text{span}(\{c_i \circ c_i\}_{i=1}^3) = 1$, 则由 (1) 可知 $\text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T}) = 3$.

(2b) 若 $\dim \text{span}(\{c_i \circ c_i\}_{i=1}^3) = 2$, 不妨设 $c_1 \circ c_1, c_2 \circ c_2$ 线性无关, 则 $c_3 \circ c_3$ 可以表示为

$$c_3 \circ c_3 = \alpha_1 c_1 \circ c_1 + \alpha_2 c_2 \circ c_2.$$

如果 $\alpha_1 \alpha_2 \neq 0$, 则等式左边是一个秩 1 矩阵, 等式右边是一个秩二矩阵, 矛盾. 所以必有 $\alpha_1 \alpha_2 = 0$ 且不全为 0. 不妨设 $\alpha_2 = 0$, 即 $c_3 \circ c_3 \sim c_1 \circ c_1$, 则 $\mathcal{T} = (\lambda_1 a_1 \circ d_1 + \lambda_3 a_3 \circ d_3) \circ c_1 \circ c_1 + \lambda_2 a_2 \circ b_2 \circ c_2 \circ c_2$, 与 (1) 的证明类似, 由 $\mathcal{T}$ 的对称性以及 $c_1 \circ c_1$ 和 $c_2 \circ c_2$ 线性无关可知, 存在 $x, y, z \in \mathbb{C}^n$ 使得

$$a_2 \circ b_2 = x \circ x, \quad \lambda_1 a_1 \circ d_1 + \lambda_3 a_3 \circ d_3 = y \circ y + z \circ z,$$

所以 $\mathcal{T} = (y \circ y + z \circ z) \circ c_1 \circ c_1 + \lambda_2 x \circ x \circ c_2 \circ c_2$, 即 $\text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T}) = 3$.

(2c) 若 $\dim \text{span}(\{c_i \circ c_i\}_{i=1}^3) = 3$, 则由引理 5.3 可知 $a_i \sim b_i$, $1 \leq i \leq 3$. 所以 $\text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T}) = 3$.

注意, 若 $\dim \text{span}(\{c_i \circ d_i\}_{i=1}^3) = 3$, 则可类似证明 $\text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T}) = 3$.

(3) 当 $\dim \text{span}(\{a_i \circ d_i\}_{i=1}^3) = 2$ 时, 如果 $\dim \text{span}(\{c_i \circ d_i\}_{i=1}^3)$ 为 1 或 3, 则归结为情形 (1) 或 (2). 所以可以假设 $\dim \text{span}(\{c_i \circ d_i\}_{i=1}^3) = 2$. 不妨设 $a_1 \circ b_1$ 和 $a_2 \circ b_2$ 线性无关且 $c_1 \circ d_1$ 和 $c_2 \circ d_2$ 线性无关, 则 $\mathcal{T}$ 可以表示为

$$\mathcal{T} = a_1 \circ b_1 \circ (\lambda_1 c_1 \circ d_1 + \lambda_2 c_2 \circ d_2) + a_2 \circ b_2 \circ (\beta_1 c_1 \circ d_1 + \beta_2 c_2 \circ d_2).$$

由 $\mathcal{T}$ 的对称性以及 $a_1 \circ b_1$ 和 $a_2 \circ b_2$ 的线性无关性可知, 存在 $x, y, z, w \in \mathbb{C}^n$ 使得

$$\lambda_1 c_1 \circ d_1 + \lambda_2 c_2 \circ d_2 = x \circ x + y \circ y, \quad \beta_1 c_1 \circ d_1 + \beta_2 c_2 \circ d_2 = z \circ z + w \circ w.$$

所以 $\mathcal{T} = a_1 \circ b_1 \circ (x \circ x + y \circ y) + a_2 \circ b_2 \circ (z \circ z + w \circ w)$. 考虑如下两种情形.

(3a) 矩阵 $x \circ x + y \circ y, z \circ z + w \circ w$ 线性相关, 则 $\mathcal{T}$ 可以进一步表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= (a_1 \circ b_1 + \lambda a_2 \circ b_2) \circ (x \circ x + y \circ y) \\ &= (p \circ p + q \circ q) \circ (x \circ x + y \circ y) \\ &= p \circ p \circ x \circ x + p \circ p \circ y \circ y + q \circ q \circ y \circ y + q \circ q \circ x \circ x. \end{aligned}$$

如果 p 和 q 或者 x 和 y 线性相关, 则由引理 5.2 知 $\text{rank}(\mathcal{T}) = 1$, 与假设矛盾. 如果 p 和 q 线性无关且 x 和 y 线性无关, 则由引理 5.4 可知 $\text{rank}(\mathcal{T}) = 4$, 同样与假设矛盾. 故情形 (3a) 不成立.

(3b) 矩阵 $x \circ x + y \circ y$ 和 $z \circ z + w \circ w$ 线性无关, 则由对称性知 $a_1 \sim b_1$ 和 $a_2 \sim b_2$. 所以

$$\text{span}(\{a_i \circ d_i\}_{i=1}^3) = \text{span}(a_1 \circ a_1, a_2 \circ a_2).$$

所以类似情形 (2), 必有 $a_3 \circ d_3$ 和 $a_1 \circ a_1$ 或者 $a_3 \circ d_3$ 和 $a_2 \circ a_2$ 线性相关. 不妨设 $a_3 \circ d_3 \sim a_1 \circ a_1$, 则

$$\mathcal{T} = a_1 \circ a_1 \circ (\lambda_1 c_1 \circ d_1 + \lambda_2 c_3 \circ d_3) + \lambda_2 a_2 \circ a_2 \circ c_2 \circ d_3.$$

类似于情形 (2b) 可得 $\text{rank}_{\text{ps}}(\mathcal{T}) = 3$. □

由定理 5.3 可知, 如果四阶 PS 张量 $\mathcal{T}$ 的 CP 秩为 3, 则其 PS 秩也为 3. 但其 CP 秩分解不一定是 PS 秩分解, 例如, $\mathcal{T} = e_2 \circ e_2 \circ e_1 \circ e_1 + e_1 \circ e_1 \circ e_2 \circ e_1 + e_1 \circ e_1 \circ e_1 \circ e_2$, 其 CP 秩为 3, 但给出的分解不是 PS 秩分解. 最后考虑实的 CPS 张量. 一般情形下实张量在实数域和复数域上的 CP 秩是不同的, 但显然秩一实张量在复数域上依然是秩一的. 并且可以证明, 秩一的 CPS 实张量一定是全对称的.

引理 5.5 设 $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{n^4}$ 是秩一的 CPS 张量, 则 $\mathcal{T}$ 一定是全对称的.

证明 因为 $\text{rank}(\mathcal{T}) = 1$, 所以存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和单位向量 $a_i \in \mathbb{R}^n, 1 \leq i \leq 4$ 使得 $\mathcal{T} = \lambda \cdot a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ a_4$. 利用 $\mathcal{T}$ 的对称性, 可知 $a_1 \sim a_2, a_3 \sim a_4, a_1 \circ a_2 \sim a_3 \circ a_4$, 所以 $a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_4$, 注意这里的 $\sim$ 表示实数域上的线性相关. 所以 $\mathcal{T}$ 是全对称的. □

定理 5.4 设 $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{n^4}$ 是实 CP 秩为 2 的 CPS 张量, 且 $\mathcal{T}$ 不是全对称的, 则存在 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 和 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathcal{T} = \lambda_1 x \circ x \circ y \circ y + \lambda_2 y \circ y \circ x \circ x.$$

证明 其证明与推论 5.2 类似, 只需要将讨论限制在实数域上即可, 此处略去. □

6 数值实验

本节用数值算例来验证前文中理论的正确性和算法的有效性. 我们用 Mathematica 软件中的 `Maximize[·]` 函数来求解算法中的多项式优化问题. 对于简单的多项式优化问题, 该函数可以有效地找到全局最优解.

例 6.1 考虑秩一矩阵外积张量的精确恢复. 首先随机生成一个正交矩阵 $U = [u_1, u_2] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, 然后令 $B = u_1 u_1^T + 2u_2 u_2^T$, $\mathcal{T} = B \circ B$. 我们生成的 U 和 B 分别为

$$U = \begin{bmatrix} 0.229091 & -0.973405 \\ -0.973405 & -0.229091 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1.94752 & 0.222998 \\ 0.222998 & 1.05248 \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

表 1 给出了 SROA 算法的恢复结果. 可以看到, 两次迭代的最优解分别为 $(x^1, \lambda^1) = (-u_2, 4)$ 和 $(x^2, \lambda^2) = (u_1, 1)$, 与前文的理论相符合.

之后用 $\langle \mathcal{T}, x^1 \circ x^1 \circ x^2 \circ x^2 \rangle$ 计算秩二项的系数, 计算的结果为 $\sigma_{12} = 2$.

例 6.2 考虑如下复数域上的例子. 令

$$u_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ i\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} i\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \quad B = u_1 \circ u_1 + 2u_2 \circ u_2 = \begin{bmatrix} -1/2 & 3i/2 \\ 3i/2 & 1/2 \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

容易验证 u_1 和 u_2 相互正交. 令 $\mathcal{T} = B \circ \bar{B}$, 则 $\mathcal{T}$ 是一个 CPS 张量. 我们先用 SROA 算法恢复 $\mathcal{T}$ 的秩一部分和张量. 注意到 u_2 为 $\mathcal{T}$ 的最佳 CPS 秩一逼近问题的一个解, 但 u_2 并非唯一的解, 对于任意 $\theta \in [0, 2\pi]$, $e^{i\theta} u_2$ 也是一个解, 且

$$u_2 \circ u_2 \circ \bar{u}_2 \circ \bar{u}_2 = (e^{i\theta} u_2) \circ (e^{i\theta} u_2) \circ (\overline{e^{i\theta} u_2}) \circ (\overline{e^{i\theta} u_2}). \quad (6.3)$$

表 2 给出了 SROA 算法每一步的输出结果. 可以看到此时算法输出的结果并非 u_2 或者 u_1 , 但满足 (6.3) 中的情形, 即

$$x^1 = (0.702549 + 0.711635i)u_2, \quad x^2 = (0.135938 + 0.990717i)u_1.$$

下面计算秩二交叉项. 计算可得

$$\eta = \langle \mathcal{T}, x^1 \circ x^1 \circ \bar{x}^2 \circ \bar{x}^2 \rangle = 0.56341 - 1.919i.$$

此时误差为

$$\|\eta x^1 \circ x^1 \circ \bar{x}^2 \circ \bar{x}^2 - 2u_1 \circ u_1 \circ \bar{u}_2 \circ \bar{u}_2\|_F^2 = 4.16334 \times 10^{-17}.$$

可见算法比较精确地恢复出了秩二和张量.

表 1 SROA 算法对秩一矩阵外积张量的恢复结果

迭代次数 k	λ^k	x^k
1	4	(0.973405, 0.229091)
2	1	(0.229091, -0.973405)

表 2 SROA 算法对复秩一矩阵外积张量的恢复结果

迭代次数 k	λ^k	x^k
1	4	$(-0.503202 + 0.496777i, 0.496777 + 0.503202i)$
2	1	$(0.0961228 + 0.700543i, -0.700543 + 0.0961228i)$

例 6.3 考虑奇异子空间相互正交的矩阵外积张量. 令 $B_1 = \text{diag}(1, 2, 0, 0)$, $B_2 = \text{diag}(0, 0, 3, 4)$, $\mathcal{T} = B_1 \circ B_1 + B_2 \circ B_2$. 由表 3 可以看到, SROA 算法在 4 步内精确恢复了秩一和张量.

接下来用 SRTA 算法恢复秩二部分和张量. 表 4 给出了 SRTA 算法的输出结果. 可以看到, SRTA 算法在两步内得到了原 CPS 张量的秩二部分和张量.

例 6.4 随机生成一个正交矩阵 U , 并令系数矩阵为

$$U = \begin{bmatrix} -0.364662 & 0.93114 \\ -0.93114 & -0.364662 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

这个系数矩阵满足定义 4.1 中的弱对角占优性质, 且两个对角元相同. 考虑用 SROA 算法恢复其秩一部分和张量, 表 5 展示了恢复的结果.

可以看到, 当系数矩阵满足弱对角占优性质时, 即使对角元相同, SROA 算法依然能比较精确地恢复出秩一部分和张量.

对本节的几个例子, 我们也尝试了用 Fu 和 Fan^[9] 提出的不带正交约束的 SROA(Fu) 算法来恢复, 但算法第 2 步的输出就已经不在原张量的分解之中, 所以 SROA(Fu) 算法无法恢复广义西张量的秩一部分和张量 $\mathcal{D}$. 这也进一步说明了正交约束的必要性.

本节用几个小规模算例初步验证了前文中的理论, 即 SROA 算法和 SRTA 算法在理论上可以精确恢复文中考虑的广义西可分解张量. 但在算法中, 我们需要求解一个四次的非凸的多项式优化问题. 对于小规模问题, 可以用已有的软件进行求解. 但当张量的阶数或者维数比较高时, 其求解所需要的时间会随着问题规模呈指数增长. 所以如何高效地求解算法中的子问题是一个很有挑战的研究课题. 我们希望在接下来的研究中设计出求解子问题的高效方法, 并在更大规模的问题上验证文中理论的正确性.

表 3 SROA 算法对奇异子空间正交的矩阵外积张量的恢复结果

迭代次数 k	λ^k	x^k
1	16	(0, 0, 0, -1)
2	9	(0, 0, -1, 0)
3	4	(0, -1, 0, 0)
4	1	(1, 0, 0, 0)

表 4 SRTA 算法对奇异子空间正交的矩阵外积张量的恢复结果

迭代次数 k	λ^k	z^k	w^k
1	12	(0, 0, -1, 0)	(0, 0, 0, 1)
2	2	(1, 0, 0, 0)	(0, 1, 0, 0)

表 5 SROA 算法对系数矩阵弱对角占优的张量的恢复结果

迭代次数 k	λ^k	x^k
1	2	(0.364664, 0.931139)
2	2	(-0.931139, 0.364664)

7 结论

本文将酉可分解的概念推广到了广义酉可分解, 并研究了广义酉可分解四阶 CPS 张量的秩一和秩二逼近问题. 本文证明了四阶广义酉可分解 CPS 张量的 CPS 秩一逼近问题等价于一个带 1 范数约束的复二次优化问题, 并利用这个等价性得到了酉可分解张量秩一逼近问题的解. 本文还研究了四阶广义酉可分解 CPS 张量的一类秩二逼近问题, 证明了其最优值等于系数矩阵元素的最大绝对值. 之后考虑了两类特殊的广义酉可分解张量, 并证明了可以通过序列的秩一逼近算法和序列的秩二逼近算法精确地恢复原张量. 最后研究了四阶 PS 张量 PS 秩和 CP 秩的关系, 证明了对 CP 秩小于等于 3 的四阶 PS 张量, 其 PS 秩等于 CP 秩. 我们猜测这一结论可能对秩更高的, 或者阶数更高的 PS 张量仍然成立, 但复杂一些的张量分解还需要进一步讨论.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵修改建议.

参考文献

- 1 Aittomaki T, Koivunen V. Beampattern optimization by minimization of quartic polynomial. In: Proceedings of the 2009 IEEE/SP 15th Workshop on Statistical Signal Processing. Cardiff: IEEE, 2009, 437–440
- 2 Anandkumar A, Ge R, Hsu D J, et al. Tensor decompositions for learning latent variable models. *J Mach Learn Res*, 2014, 15: 2773–2832
- 3 Aubry A, De Maio A, Jiang B, et al. Ambiguity function shaping for cognitive radar via complex quartic optimization. *IEEE Trans Signal Process*, 2013, 61: 5603–5619
- 4 Boralevi A, Draisma J, Horobeț E, et al. Orthogonal and unitary tensor decomposition from an algebraic perspective. *Israel J Math*, 2017, 222: 223–260
- 5 Brachat J, Comon P, Mourrain B, et al. Symmetric tensor decomposition. *Linear Algebra Appl*, 2010, 433: 1851–1872
- 6 Comon P, Golub G, Lim L H, et al. Symmetric tensors and symmetric tensor rank. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 2008, 30: 1254–1279
- 7 de Lathauwer L, Castaing J, Cardoso J F. Fourth-order cumulant-based blind identification of underdetermined mixtures. *IEEE Trans Signal Process*, 2007, 55: 2965–2973
- 8 de Silva V, Lim L H. Tensor rank and the ill-posedness of the best low-rank approximation problem. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 2008, 30: 1084–1127
- 9 Fu T R, Fan J Y. Successive partial-symmetric rank-one algorithms for almost unitarily decomposable conjugate partial-symmetric tensors. *J Oper Res Soc China*, 2019, 7: 147–167
- 10 Fu T R, Jiang B, Li Z. On decompositions and approximations of conjugate partial-symmetric tensors. *Calcolo*, 2021, 58: 46
- 11 Hillar C J, Lim L H. Most tensor problems are np-hard. *J ACM*, 2013, 60: 1–39
- 12 Jiang B, Li Z, Zhang S. Characterizing real-valued multivariate complex polynomials and their symmetric tensor representations. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 2016, 37: 381–408
- 13 Kolda T G, Bader B W. Tensor decompositions and applications. *SIAM Rev*, 2009, 51: 455–500
- 14 Madani R, Lavaei J, Baldick R. Convexification of power flow equations in the presence of noisy measurements. *IEEE Trans Automat Control*, 2019, 64: 3101–3116
- 15 McCullagh P. *Tensor Methods in Statistics: Monographs on Statistics and Applied Probability*. New York: Chapman and Hall/CRC, 2018
- 16 Nazih M, Minaoui K, Sobhani E, et al. Computation of the nonnegative canonical tensor decomposition with two accelerated proximal gradient algorithms. *Digit Signal Process*, 2022, 129: 103682
- 17 Ni G. Hermitian tensor and quantum mixed state. *arXiv:1902.02640*, 2019
- 18 Nie J. Low rank symmetric tensor approximations. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 2017, 38: 1517–1540
- 19 Nie J, Yang Z. Hermitian tensor decompositions. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 2020, 41: 1115–1144
- 20 Qi Y, Comon P, Lim L H. Uniqueness of nonnegative tensor approximations. *IEEE Trans Inform Theory*, 2016, 62: 2170–2183
- 21 Sabir A, Huang P F, Yang Q Z. The low-rank approximation of fourth-order partial-symmetric and conjugate partial-symmetric tensor. *J Oper Res Soc China*, 2023, 11: 735–758
- 22 Sidiropoulos N D, De Lathauwer L, Fu X, et al. Tensor decomposition for signal processing and machine learning. *IEEE Trans Signal Process*, 2017, 65: 3551–3582

- 23 Xu W, Qiao S. A divide-and-conquer method for the Takagi factorization. SIAM J Matrix Anal Appl, 2008, 30: 142–153
- 24 Zhang T, Golub G H. Rank-one approximation to high order tensors. SIAM J Matrix Anal Appl, 2001, 23: 534–550
- 25 Zhang X, Huang Z H, Qi L. Comon's conjecture, rank decomposition, and symmetric rank decomposition of symmetric tensors. SIAM J Matrix Anal Appl, 2016, 37: 1719–1728

The properties and the low-rank approximation of a class of unitary decomposable fourth-order conjugate partial symmetric tensors

Yunfei Tang & Qingzhi Yang

Abstract In this paper, we extend the notion of unitary decomposable tensors to general unitary decomposable tensors, and study the properties and the low-rank approximation of fourth-order general unitary decomposable tensors with conjugate partial symmetric (CPS) property. We show that the CPS rank one approximation problem for fourth-order general unitary decomposable CPS tensors is equivalent to maximizing a complex quadratic form with 1-norm constraint. For two classes of fourth-order general unitary decomposable CPS tensors, we show that the successive rank one approximation algorithm along with the successive rank two approximation algorithm can exactly recover the original tensor. For fourth-order partial symmetric (PS) tensors, we prove that when the rank of the tensor is smaller than its order, then the CP rank and the PS rank coincide. Based on this, we characterize the shape of all rank 2 fourth-order CPS tensors.

Keywords conjugate partial symmetric, unitary decomposable, tensor decomposition, low-rank approximation

MSC(2020) 14N07, 15A69

doi: 10.1360/SSM-2024-0134